

Modelos matemáticos de clima global: análisis y control.

J.I. Díaz



Doctorado IMEIO. UCM - UPM.
Actividad formativa.

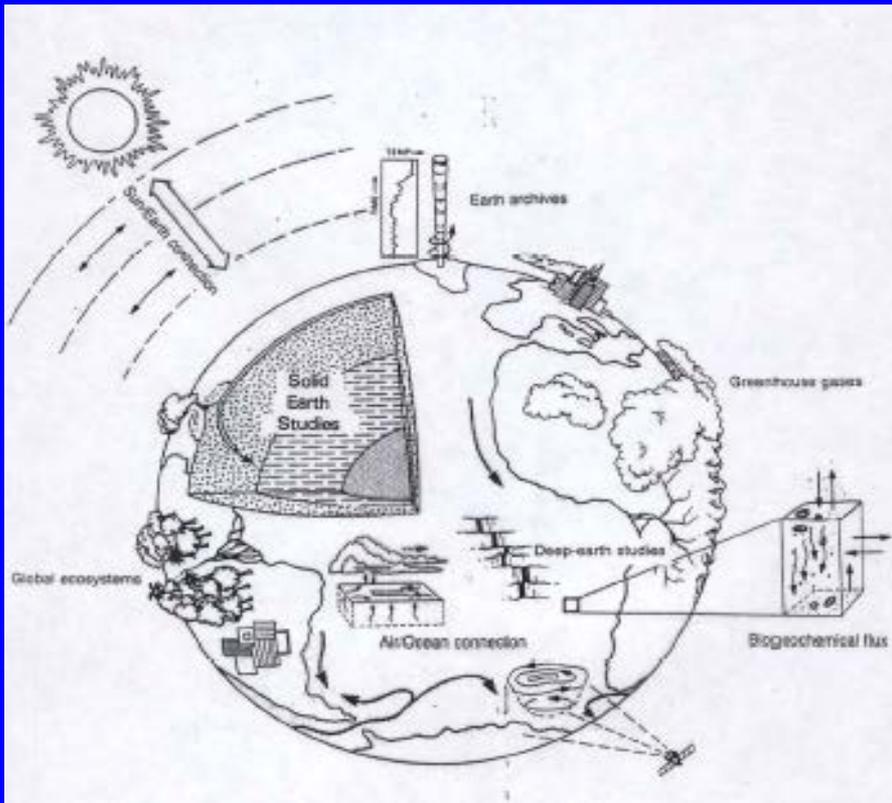
Tratamiento Matemático de Modelos en EDPs
que aparecen en Medio Ambiente

ETS Arquitectura,
5 de Noviembre de 2014



1. Introducción.

El Planeta Tierra: *sistema complejo con numerosos procesos realimentados*

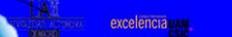
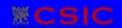


Mathematics and Geosciences Global and Local Perspectives

November 4-8, 2013
ICMAT | Madrid (Spain)



www.icmat.es/congresos/mag201



Plenary speakers

- | | |
|---------------------|------------------|
| Rachid Ababou | Andrew Fowler |
| Stanislav Antontsev | Ehud Meron |
| Chris Budd | Angelo de Santis |
| Jesús Carrera | Agustín Udías |
| Anny Cazenave | |

Organizing Committee

- | | | | | | |
|-------------------------|----------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|
| J.I. Díaz
(IMI, UCM) | F.J. Elorza
(UPM) | J. Fernández
(IGEO, CSIC) | M. de León
(ICMAT, CSIC) | R. Orive
(ICMAT, UAM) | M.L. Osete
(IGEO, UCM) |
|-------------------------|----------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|



Mathematics

Planet Earth 2013

Real Academia de Ciencias
Madrid, 8 de mayo de 2013



Real Academia de Ciencias, Madrid, 8 de Mayo 2013
Academia de Ciências, Lisboa, 21 Novembro 2013

<http://mpe2013.org/>

**Matemáticas del Planeta Tierra
en España**

<http://www.icmat.es/mathearth>

Matemáticas del Planeta Tierra en Francia

<http://mpt2013.fr/>

La ONU lanzó ayer otra seria advertencia sobre el cambio climático y su inequívoco impacto sobre el medio ambiente, la seguridad alimentaria y la pobreza. Los daños ya causados por el hombre son gravísimos pero el mundo está aún a tiempo de combatirlos a un coste asumible. Eso sí, si los Gobiernos se toman en serio el problema y adoptan medidas drásticas. El Panel Intergubernamental contra el Cambio Climático (IPCC) fue tajante: los países deben limitar las emisiones de gases de efecto invernadero entre un 40% y un 70% para 2050 y eliminarlas todas en 2100.

"Tenemos la oportunidad y la elección está en nuestras manos", dijo ayer Rajendra Pachauri, presidente del IPCC. "Todavía hay tiempo, aunque muy poco tiempo". Pachauri apeló a la responsabilidad durante la presentación en Copenhague (Dinamarca) del informe de síntesis que resume lo que la ciencia sabe hasta hoy sobre el calentamiento global. El documento servirá de base para la negociación de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático que debe conducir hacia un acuerdo mundial en París el próximo año para limitar de cualquier modo el aumento de temperatura en dos grados para fin de siglo.

Las emisiones de los tres principales gases que calientan el planeta (CO₂, metano y óxido nítrico) ya han dejado de aumentar desde los inicios de la Revolución Industrial y su llegada a la atmósfera y los océanos se ha acelerado desde mediados del siglo pasado. Casi el 80% de estos gases proceden de la quema de combustibles fósiles. La temperatura ya se ha elevado 0,85 grados desde 1880 por las emisiones de gases de efecto invernadero, con todo lo que implica: aumento de nivel del mar, acidificación de los océanos, sequías, olas de calor y fenómenos meteorológicos extremos que pueden agravarse aún más si no se actúa a tiempo.

Dos escenarios posibles

El IPCC plantea varios escenarios denominados RCP (Representative Concentration Pathway). Los dos más extremos son el RCP 2.6, que supone una reducción extra de las emisiones de entre un 40% y un 70% para mediados de siglo y casi cero emisiones en 2100. En el extremo contrario, el RCP 8.5 parte de la idea de que no se hace nada por reducir. Hay que tener en cuenta que el clima dependerá tanto de las emisiones ya realizadas en el pasado como de las futuras.

- Temperaturas. Hasta 2100, subirán entre 0,3 y 0,7 grados en cualquiera de los escenarios. Para el periodo 2016-2050, la temperatura aumentará entre 0,3 y 1,7 en el caso de que se reduzcan las emisiones y entre 1,5 y 4,8 grados en el escenario más extremo.
- La acidificación de los océanos (descenso del pH) crecerá el 25% en el primer escenario y hasta el 100% en el segundo.
- El permafrost de las áreas más septentrionales de la masa continental se reducirá en un 30% si se toman medidas y el 80% si no se hacen nada.
- El volumen de los glaciares (sin incluir los casquetes polares) se reducirá entre un 30% y un 95% en el escenario más optimista y



entre el 35% y el 95% en el más pesimista. Y el nivel del mar se elevará entre 0,26 y 0,65 metros en el primer caso y 0,45-0,82 metros en el segundo.

- Los principales gases responsables del calentamiento son el dióxido de carbono (CO₂), el metano (CH₄) y el óxido nítrico (NO₂).
- Las emisiones acumuladas de CO₂ desde 1950 han superado las 2.000 Gt (gigatoneladas).
- El 40% aque en la atmósfera y un 30% absorbido por los océanos. El 78% de las emisiones desde 1970 proceden

de combustibles fósiles.

- Las últimas tres décadas han sido las más cálidas desde hace 1.400 años y cada una ha sido más cálida que la anterior. Las temperaturas han subido 0,85 grados desde 1880.
- La temperatura del mar se ha elevado 0,11 grados desde 1970 y la acidificación de los océanos ha crecido un 20% desde la era preindustrial. El deshielo del Ártico ha aumentado entre un 3,5% y un 4,4% por década desde 1972. El nivel del mar ha subido 20 centímetros desde 1993.

La ONU pide a los países que dejen las emisiones a cero para 2100

El panel de expertos de cambio climático cree que el impacto económico es asumible • El informe servirá de base para un acuerdo mundial en París

INFORME. RAJENDRA PACHAURI

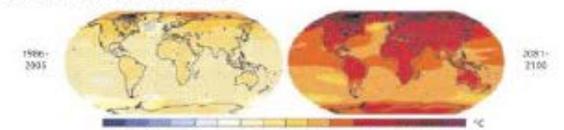
La ONU lanzó ayer otra seria advertencia sobre el cambio climático y su inequívoco impacto sobre el medio ambiente, la seguridad alimentaria y la pobreza. Los daños ya causados por el hombre son gravísimos pero el mundo está aún a tiempo de combatirlos a un coste asumible. Eso sí, si los Gobiernos se toman en serio el problema y adoptan medidas drásticas. El Panel Intergubernamental contra el Cambio Climático (IPCC) fue tajante: los países deben limitar las emisiones de gases de efecto invernadero entre un 40% y un 70% para 2050 y eliminarlas todas en 2100.

"Tenemos la oportunidad y la elección está en nuestras manos", dijo ayer Rajendra Pachauri, presidente del IPCC. "Todavía hay tiempo, aunque muy poco tiempo". Pachauri apeló a la responsabilidad durante la presentación en Copenhague (Dinamarca) del informe de síntesis que resume lo que la ciencia sabe hasta hoy sobre el calentamiento global. El documento servirá de base para la negociación de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático que debe conducir hacia un acuerdo mundial en París el próximo año para limitar de cualquier modo el aumento de temperatura en dos grados para fin de siglo.

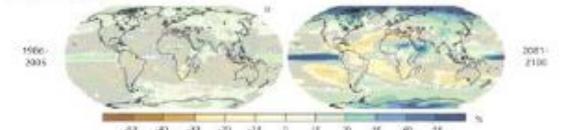
Las emisiones de los tres principales gases que calientan el planeta (CO₂, metano y óxido nítrico) ya han dejado de aumentar desde los inicios de la Revolución Industrial y su llegada a la atmósfera y los océanos se ha acelerado desde mediados del siglo pasado. Casi el 80% de estos gases proceden de la quema de combustibles fósiles. La temperatura ya se ha elevado 0,85 grados desde 1880 por las emisiones de gases de efecto invernadero, con todo lo que implica: aumento de nivel del mar, acidificación de los océanos, sequías, olas de calor y fenómenos meteorológicos extremos que pueden agravarse aún más si no se actúa a tiempo.

Mapas del cambio climático

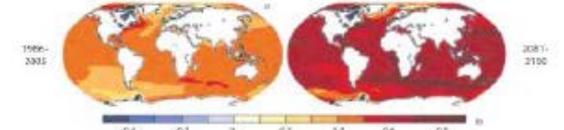
TEMPERATURA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE



PRECIPITACIONES



NIVEL DEL MAR



Fuente: IPCC

en PAÍS

El informe, el quinto de evaluación del IPCC (AR5 por sus siglas en inglés), resume 5.000 páginas de investigación realizada por 800 científicos. Buena parte de las conclusiones y recomendaciones, son ya conocidas. La transición a una economía con bajas emisiones de carbono es técnicamente viable", dijo ayer el copresidente del Grupo de Trabajo III del IPCC, Yoshio Sekima. "Pero lo que faltan son políticas e instituciones adecuadas. Cuanto más cooperen a actuar, mayor será el coste de la adaptación al cambio climático y su mitigación". El informe reconoce que una actuación decidida podría te-

ner efectos negativos en la economía como una reducción del consumo del 1,6% al 3% anual en lo que queda de siglo. Pero también afirma que se podría compensar con los beneficios de esta nueva economía.

De hecho, la Unión Europea ya ha dado pasos para demostrar que se puede hacer. Un reciente informe de la Agencia Medioambiental Europea muestra cómo, a pesar de la crisis, la mayoría de los países de la UE van camino de cumplir sus objetivos de reducción de emisiones y uso de energías alternativas para 2020. Tanto es así que la nueva agenda europea es la de un descenso extra-

En 2030 quiere que el nivel de emisiones se reduzca en un 40% con respecto las de 1990. Así las cosas Europa podría evitar hasta el 95% de las emisiones procedentes de combustibles fósiles en 2050, medio siglo antes de lo que planea el IPCC.

"De no hacer nada, la calidad de vida de todos disminuirá", dice Ferrando Valdeabano, del Grupo de Ecología y Cambio Global e investigador del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. "Si se redujeron las emisiones de forma equitativa igual para todos los países y todas las clases sociales". De hecho, el informe del IPCC señala que, aunque

el cambio climático es global, se rán los países y regiones menos desarrolladas las que sufrirán los peores consecuencias del calentamiento.

"Actuar para reducir las emisiones y adaptarnos a los impactos implica plantearse seriamente asuntos como la equidad y la justicia", coincidió ayer la ONG WWF. "Si no actuamos, podremos en peligro los esfuerzos para reducir la pobreza y peligrará la seguridad alimentaria, el agua y los medios de vida de muchas personas en los países más pobres. También dejaremos a la juventud de hoy y a las generaciones futuras con un reto casi insuperable".

De los varios escenarios climáticos de futuro que plantea, los dos más extremos dibujar una evolución muy diferente. El más optimista parte de la premisa de que las emisiones tendrán una reducción extra a mediados de siglo que, para 2100, la economía mundial estará libre o casi de emisiones de efecto invernadero. El más pesimista parte de la premisa de que las emisiones tendrán un aumento de su dependencia de los combustibles fósiles, lo aumentan.

En el peor escenario la temperatura podría subir hasta 4,8 grados, haciendo inhabitables muchos

Una actuación decidida podría reducir el consumo hasta el 3% anual

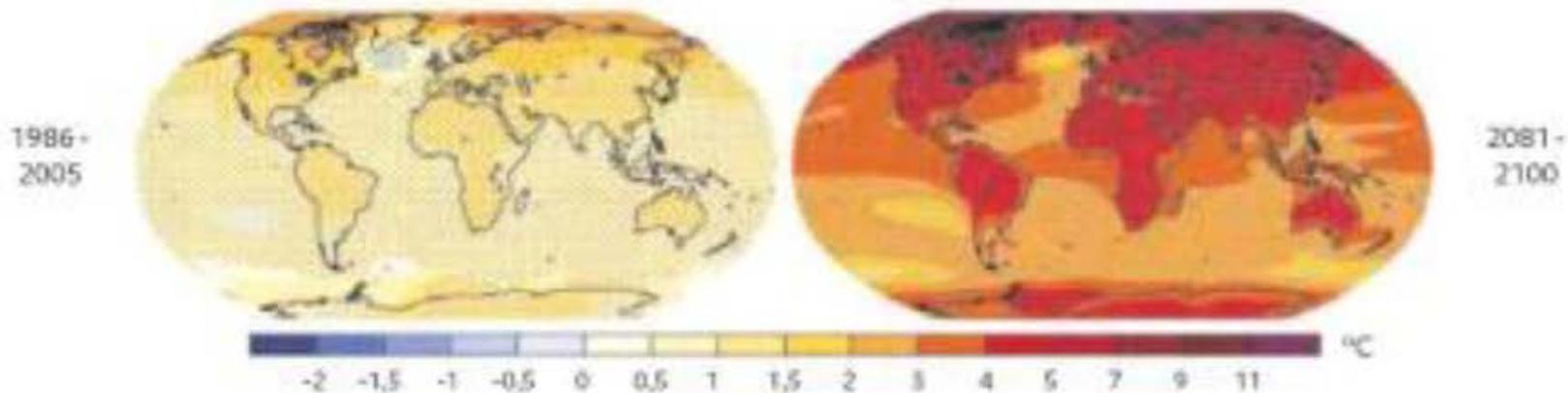
"Se trata de una cuestión de equidad y justicia", asegura la ONG WWF

escenarios. Los episodios de olas de calor y olas de frío se acumularán. El mar podría aumentar su nivel hasta 0,82 metros, con una acidificación que podría superar el 100%. El volumen de los glaciares podría reducirse en un 85%. Sin embargo, aún se está hablando de un futuro que podría ser más optimista.

Los expertos en cambio climático insisten en la necesidad de abrazar energías más eficientes, abandonar los combustibles fósiles para apostar por otras fuentes como la solar, eólica y nuclear. Todo, con el fin no ya de reducir, sino de eliminar las emisiones.

Mapas del cambio climático

■ TEMPERATURA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE



¿Qué matemáticas se emplean en esas estimaciones?

“Actuar para reducir las emisiones y adaptarnos a los impactos implica plantearse seriamente asuntos como la equidad y la justicia”, coincidió ayer la ONG WWF. “Si no actuamos, pondremos en peligro los esfuerzos para reducir la pobreza y peligrará la seguridad alimentaria, el agua y los medios de vida de muchas personas en los países más pobres. También dejaremos a la juventud de hoy y a las generaciones futuras con un reto casi insuperable”.

“Matemáticos” pioneros en el estudio del clima

Convocatoria, en 1738, del Premio de Matemáticas de la Academia Francesa de Ciencias sobre “la causa del flujo y reflujo del mar”. Premiados: *Daniel Bernoulli, Euler y MacLaurin*



Daniel Bernoulli
(1700-1782)



Leonhard Euler (1707-1783)



Joseph Fourier

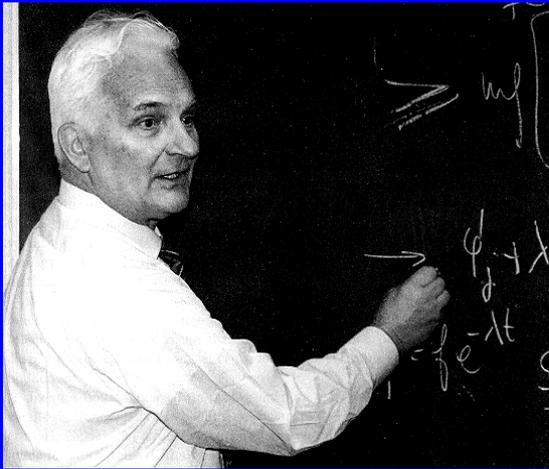
(1768-1830)

(1824)

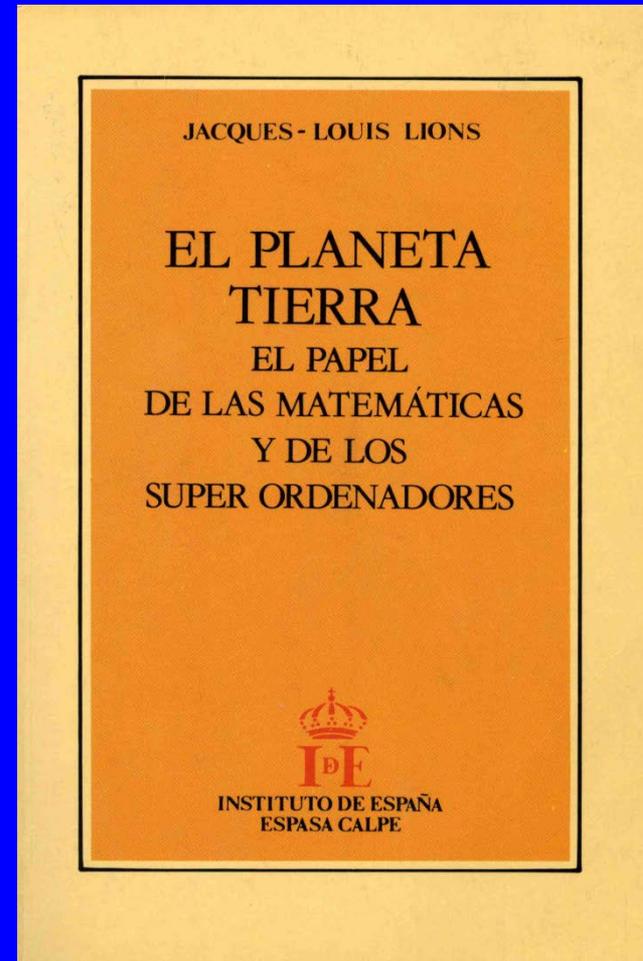
El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el calor medio a lo largo de varios siglos ...

Veremos que el papel activo de numerosos matemáticos en el estudio del clima es hoy día una realidad con un futuro en expansión.

Guía : “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



J.L. Lions
(1928-2001)



Instituto de España, Enero 1990

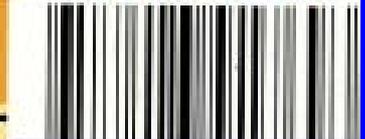
Desde la realización de la máquina de calcular de Blaise Pascal, hace ya dos siglos y medio, se cuenta con una metodología general para el estudio predictivo y cuantitativo de *sistemas complejos*. Tal estudio reposa en tres pilares de carácter universal: modelización y análisis matemático; cálculo numérico y simulación por medio de (super) ordenadores; y acción sobre el sistema con el fin de asegurar el funcionamiento deseado (teoría de Control).

¿Es aplicable esta *trilogía* al Sistema del Planeta Tierra? ¿Es posible su comprensión con el fin de actuar sobre él? ¿Qué contribuciones puede aportar esta *trilogía* al estudio de la evolución climatológica?

El autor analiza los aspectos matemáticos de estas cuestiones presentándolos de una manera fácilmente accesible. En un apéndice final, con la colaboración de J. I. Díaz, el autor presenta una lista de problemas aún abiertos y que previsiblemente serán objeto de atención en próximos años.

J. L. Lions es miembro de la Academia de Ciencias de París y profesor en el College de France desde 1973. En la actualidad es también presidente del Centre National d'Études Spatiales y miembro de los consejos científicos de Electricité de France y de la Meteorología Nacional Francesa. Recientemente ha sido elegido presidente de la Unión Matemática Internacional. Es miembro de numerosas academias de otros países: URSS, Brasil, Bélgica, Portugal, Academia de Boston, etc. Es también doctor *Honoris Causa* por numerosas universidades, entre ellas las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid y de Santiago de Compostela.

Lions, J.-L., El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores. Espasa-Calpe, Madrid, 1990 (M.Artola, J.I.D.)



Colaboración con Lions: Cursos de verano de la UCM
(El Escorial 1992, Almería 1993)

Díaz, J.I., Lions, J.-L., eds., *Mathematics, Climate and Environment*, Research Notes in Applied Mathematics 27, Masson, Paris, 1993.

Environment, *Economics and Their Mathematical Models*, Research Notes in Applied Mathematics 35, Masson, Paris, 1994.

Advanced Institute de la NATO (Santa Cruz de Tenerife, del 11 al 21 de enero de 1995).

Díaz, J. I., ed., *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997.

En su fax de 29 de julio

(Lions desplegaba una correspondencia sorprendente por medio del fax de mensajes que solía escribir personalmente de su puño y letra: conservo, como un tesoro, más de cuatrocientas páginas)

me informaba que le habían propuesto publicar una segunda edición de su libro del Planeta Tierra (agotado en menos de dos años) pero que su intención era la de preparar todo un nuevo libro incorporando referencias aparecidas desde 1990 y añadiendo varios capítulos complementarios .

Me proponía que llevásemos a cabo tal tarea de forma conjunta dada la cercanía de alguno de mis trabajos y mi participación en la preparación del texto original. Desde entonces trabajamos duramente en aquel proyecto.

El texto estaba prácticamente acabado a finales del 2000, unos meses antes de su fallecimiento.

Díaz, J.I., Lions, J.-L., Matemáticas, superordenadores y control para el planeta Tierra

Contrato con la Editorial de la UCM, 2002 (inacabado)

Lions hizo explícita mención al libro conjunto en uno de sus últimos artículos

Lions J.-L., Some Remarks on the Mathematical Modelling of Planet Earth System, *Atti dei Convegni Lincei, Accademia Nazionale dei Lincei*, 158, 2000, 73-93.



**Acuerdo de reciprocidad firmado en
Paris el 12 Junio de 2001**



**Congreso conjunto con la Academia
Francesa:
"Environnement et Mathématiques»,
Paris, Mai 2002.**

H. Brezis and J. I. Díaz, Matemáticas y Medio Ambiente
Volumen especial de **RACSAM** (Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem)
96, nº 3, 2003.

Committee on Atmosphere, Ocean and Environment
International Mathematical Union,
June 1995- January 2004

(otros miembros: C. Conca, J. Bona, M. Mimura y A.J. Majda (Chairman)).

Madrid, September, 13, 14 and 15, 2006

Organizing Committee

J. I. Díaz (UCM), J. Fernández (CSIC-UCM), J. A. Tejada (UCM), F. Luzón Martínez (Univ. Almería)

Local Committee

A. J. González (CSIC-UCM), A. Arjona (UCM), S. González (UCM)

Main speakers

D. Turcotte, University of California, USA.

A. Fowler, Oxford University, UK

J.B. Rundle, University of California, USA.



Other speakers

M. Bonafede, Università di Bologna

F. Cornet, Departement de Sismologie, Institute du Physique du Globe de Paris,

T. Dahm, Institut fuer Meteorologie und Geophysik, Universitaet Frankfurt ,

De Natale, Osservatorio Vesuviano, Napoli

G. Jentzsch, Institut für Geowissenschaften, Lehrstuhl für Angewandte Geophysik, Friedrich-Schiller Universität Jena.

S. Antontsev, Univ. Novosibirsk (Russia) and UCM R. Bermejo, Univ. Politécnica de Madrid.

C. Vázquez, Univ. A Coruña.

L. Tello, Profesor Titular de la Univ. Politécnica de Madrid.

E. Schiavi, Profesor Titular de Universidad, Univ. Rey Juan Carlos de Madrid.

J.I. Díaz, A. Elipe, A. Quarteroni and L. Rández (Editors)

Maths and Water

Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, **31**,
Zaragoza, 2009

A. G. Camacho, J. I. Díaz, J. Fernández

Earth Sciences and Mathematics, Volume I and II

Birkhauser, 2008.

J. I. Díaz, R. Dautray,

Lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande y lo infinitamente
complejo: el medio ambiente. Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.,
Vol. 100, N° 1, 2006, 13-24

J. I. Díaz

Clima et Matemática

Bolletino della Unione Matematica Italiana (8), 2-A (1999), 95-105.

Plan

1. Introducción

1.a. Un artículo reciente:

A. 194. J. I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello, Multiple solutions and numerical analysis to the dynamic and stationary models coupling a delayed energy balance model involving latent heat and discontinuous albedo with a deep ocean. Proc. R. Soc. A. 2014 470 20140376; doi:10.1098/rspa.2014.0376 (published 27 August 2014) (PDF). **SESIÓN de L. TELLO**

1.b. Transparencias sobre promedios

2. Existencia de soluciones

2.a. Caso de evolución (transparencias)

2.b. Evolución con término estocástico:

A.163. J.I. Díaz, J.A. Langa, J. Valero, On the asymptotic behaviour of solutions of a stochastic energy balance climate model. Physica D, 238 (2009), 880-887. (PDF)

A.96. G. Díaz, J. I. Díaz. On a stochastic parabolic PDE arising in Climatology. Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem, 96, nº 1, 2002, 123-128. (PDF)

3. Unicidad y multiplicidad de soluciones

3.a. Caso del problema de evolución parabólico (transparencias)

3.b. Caso estacionario (transparencias)

4. Sobre la frontera libre

4.a Mushy region para $p > 2$ (trasnparencias)

4.b. Regularidad de la frontera libre. A.166. J.I. Díaz, S. Shmarev, Lagrangian approach to the study of level sets II: a quasilinear equation in climatology, *J. Math. Anal. Appl.* 352 (2009) 475–495 (PDF)

5. Problemas de control para modelos climáticos difusivos

A.102. J. I. Díaz. On the von Neumann problem and the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies for some environmental problems. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem.*, 96, n° 3, 2002, 343-356. (PDF)

C.43. J. I. Díaz. Controllability and obstruction for some non linear parabolic problems in Climatology. En el libro *Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio-Ambientales* (C.Pares y A.Valle eds.) Universidad de Málaga, 43-58, 1994.(PDF)

C.40. J. I. Díaz. Approximate controlability for some simple climate models. En el libro *Environment, Economic and Their Mathematical Models* (J. I. Díaz y J.L.Lions eds.), *Research Notes in Applied Mathematics No 35*, Masson, Paris, 29-43, 1994. (PDF)

C.39. J. I. Díaz. Mathematical analysis of some diffusive energy balance models in Climatology. En el libro *Mathematics, Climate and Environment* (J. I. Díaz and J.L.Lions eds.), *Research Notes in Applied Mathematics n° 27*, Masson, Paris, 28-56, 1993. (PDF)

Un articulo reciente: G. Floridia, Approximate controllability for nonlinear degenerate parabolic problems with bilinear control , *Journal of Differential Equations* volume 257, issue 9, year 2014, pp. 3382 - 3422

6. Tratamiento numérico de modelos climáticos difusivos

A. 194. J. I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello, Multiple solutions and numerical analysis to the dynamic and stationary models coupling a delayed energy balance model involving latent heat and discontinuous albedo with a deep ocean. *Proc. R. Soc. A.* 2014 470 20140376; doi:10.1098/rspa.2014.0376 (published 27 August 2014) (PDF)

A. Hidalgo, L. Tello. A Finite Volume Scheme for simulating the coupling between deep ocean and an atmospheric energy balance model. In the book *Modern Mathematical Tools and Techniques in Capturing Complexity*. Springer Series in Complexity, Springer, Berlin (2011) 239-255.

A.169. J.I. Díaz, S. Shmarev, Langragian approach to level sets: application to a free boundary problem arising in climatology, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 194, 2009, no.1, 75-103 (PDF)

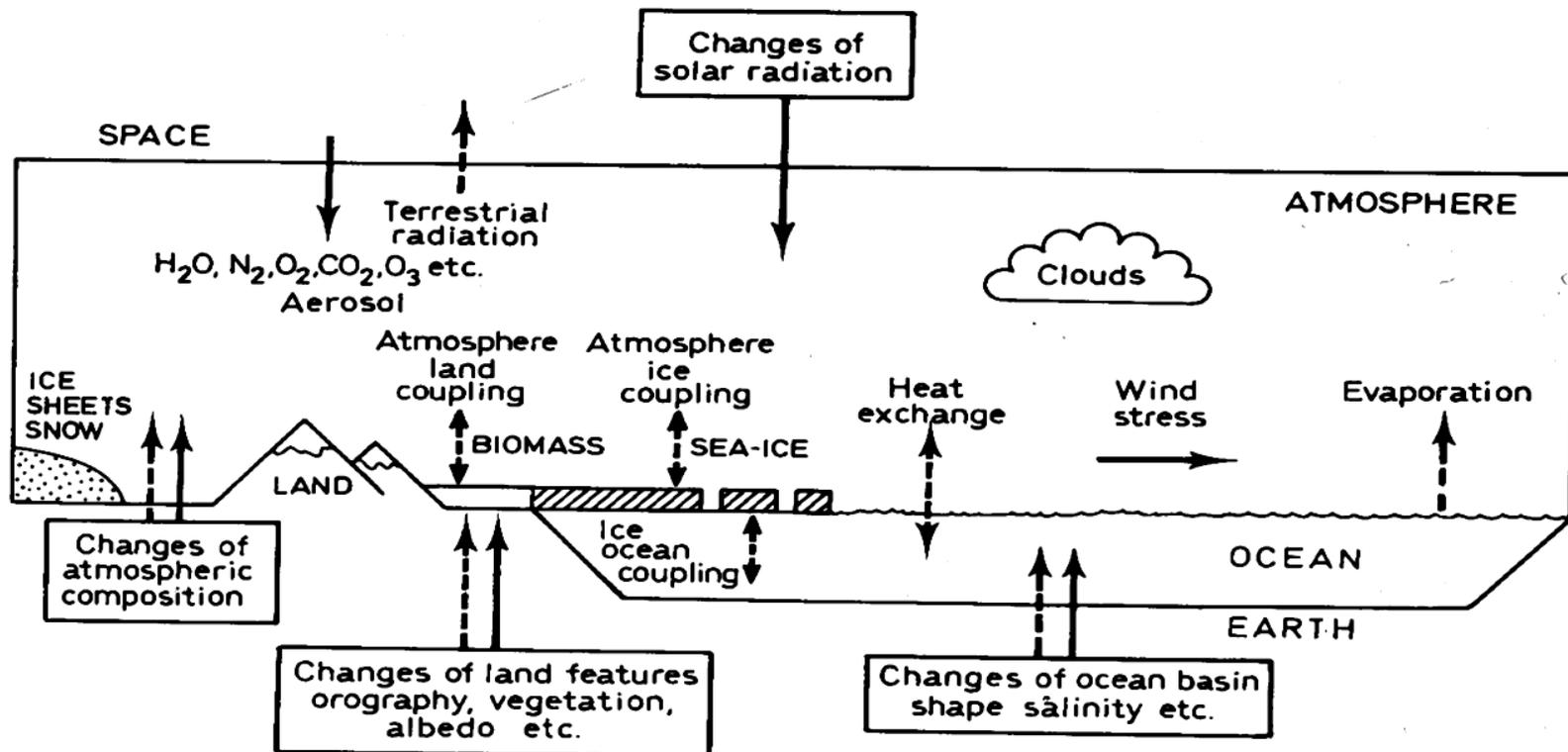
A.153. R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, L. Tello, Mathematical and Numerical Analysis of a Nonlinear Diffusive Climate Energy Balance Model. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008. (PDF)

A.150. R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, P. Galán de Sastre , A finite element algorithm of a nonlinear diffusive climate energy balance model, *Pure and Applied Geophysics*, 165, nº 6, 2008, 1025-1048. (PDF)

3. La “Trilogía Universal” y el clima global.

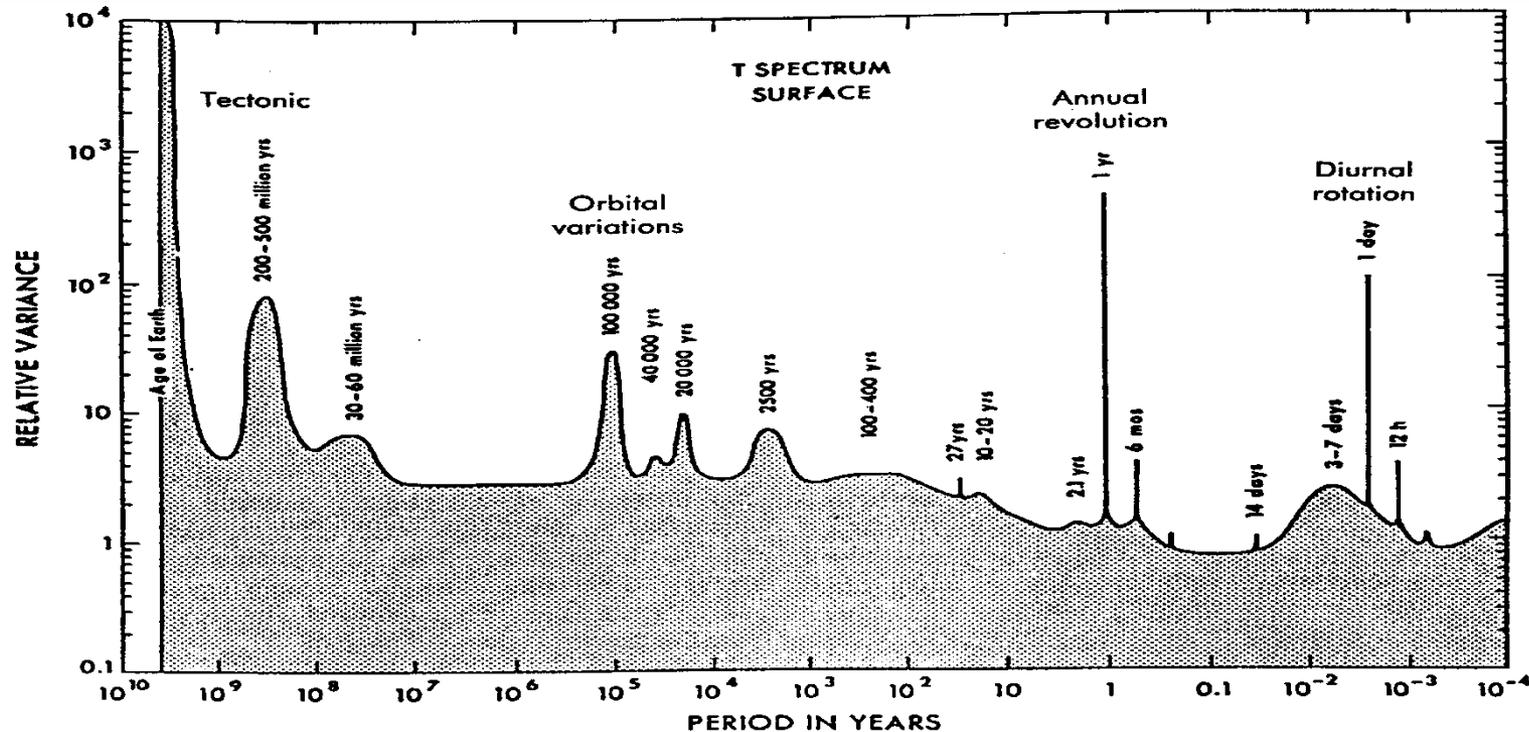


El problema real = CLIMA: componentes externos e internos del sistema climático



Escalas temporales y espaciales: Jerarquía de Modelos

Climatología / Meteorología



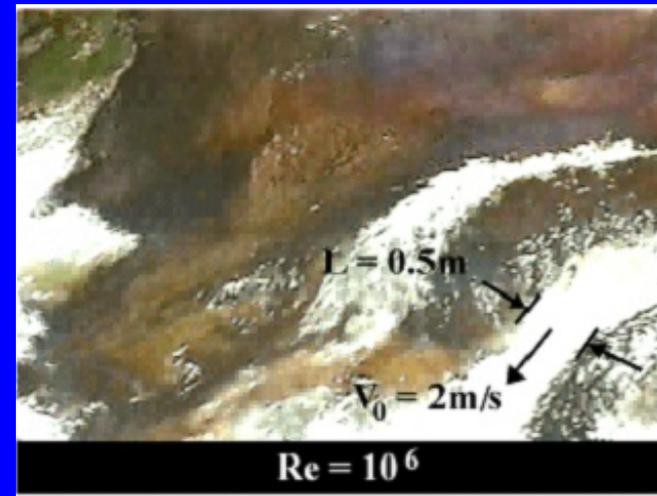
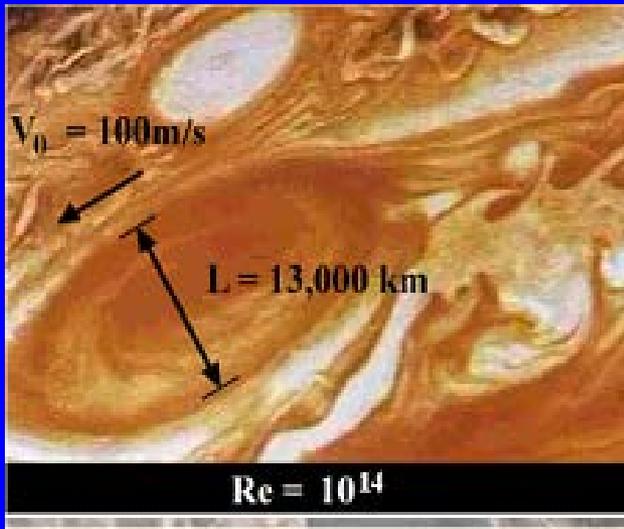
Espectro de variaciones climáticas

Importancia fundamental de las escalas

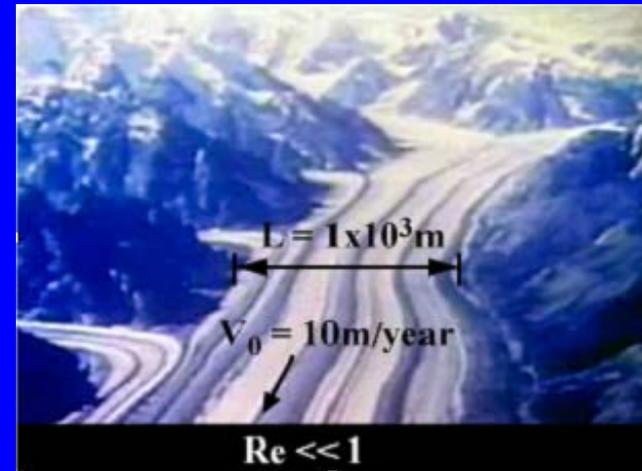
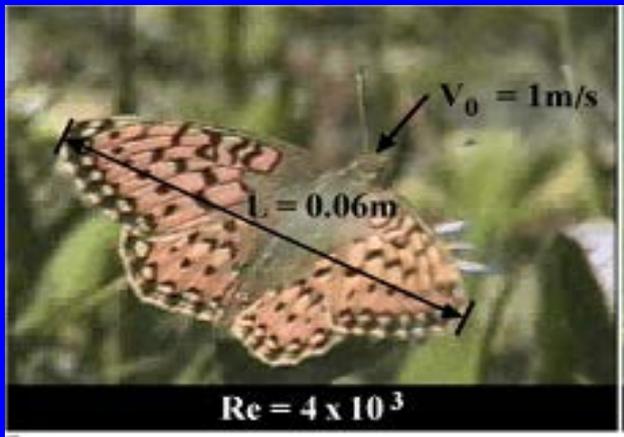
Richard Feymann:

Peso/tensión superficial

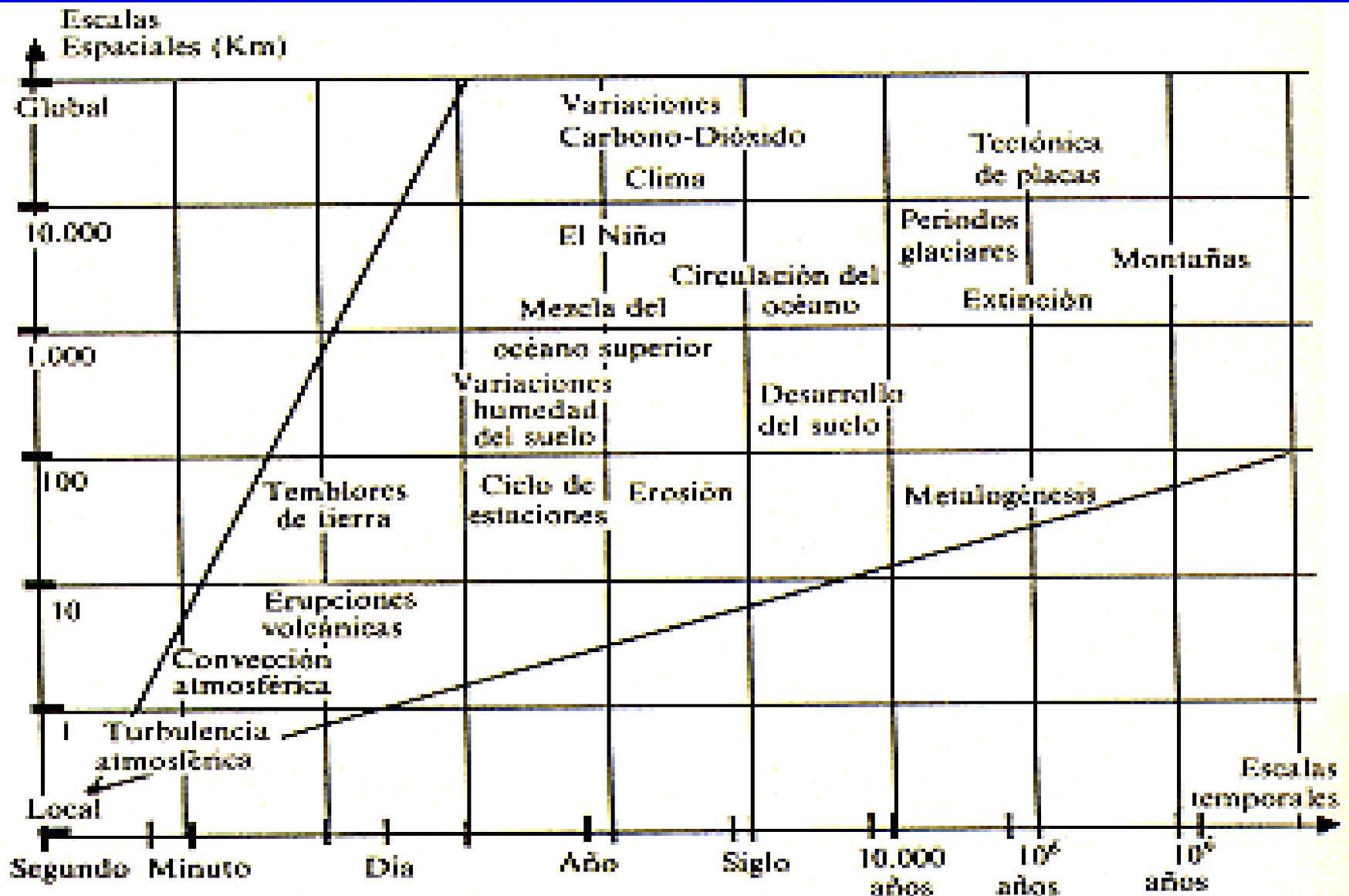




$$Re = \frac{VL}{\nu}$$



Algunas escalas características



Modelos globales / locales.

Modelos globales de Balance de Energía.

Clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider,1992)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

Predicción del tiempo
meteorológico

Modelos climáticos

Pronóstico

Modelos realistas

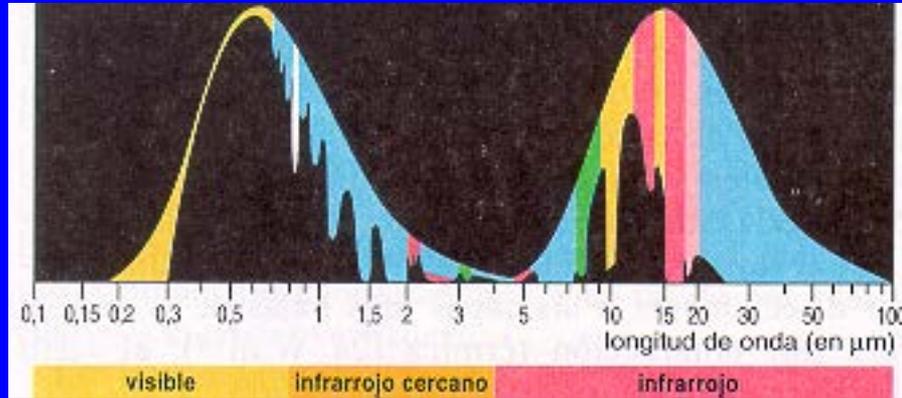
Métodos computacionales

Diagnóstico

Modelos simplificados

Métodos cualitativos

Balance de radiación de energía



S. Arrhenius (1896), ...

W.D. Sellers(1969),

M.I. Budyko (1969),....

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + D$$

R_a

Albedo

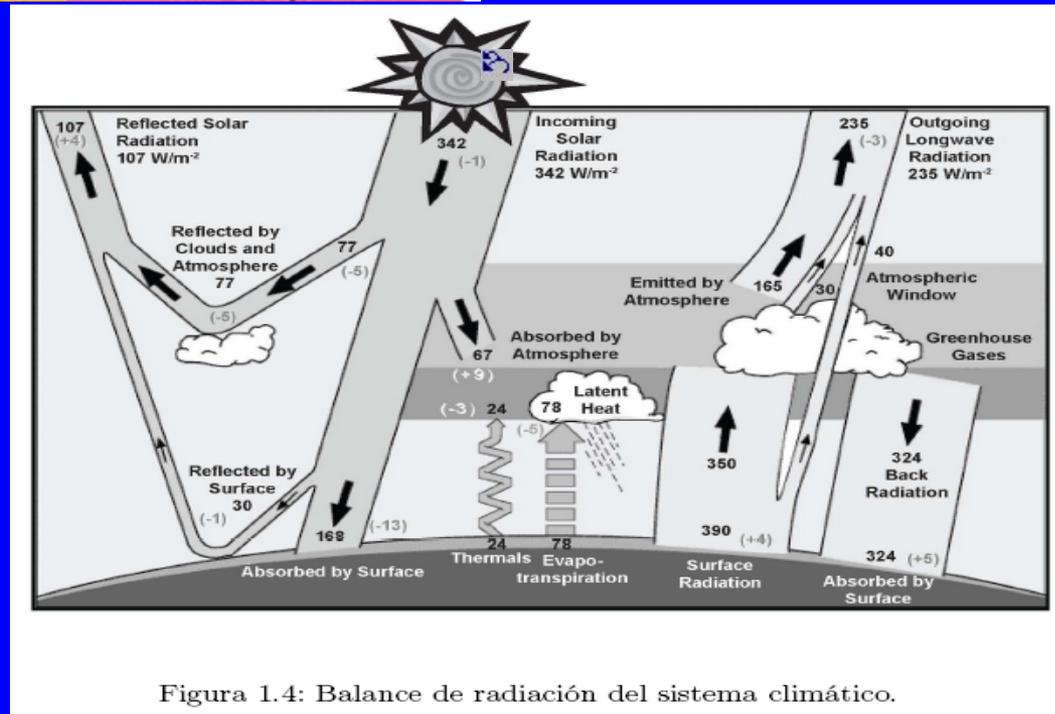
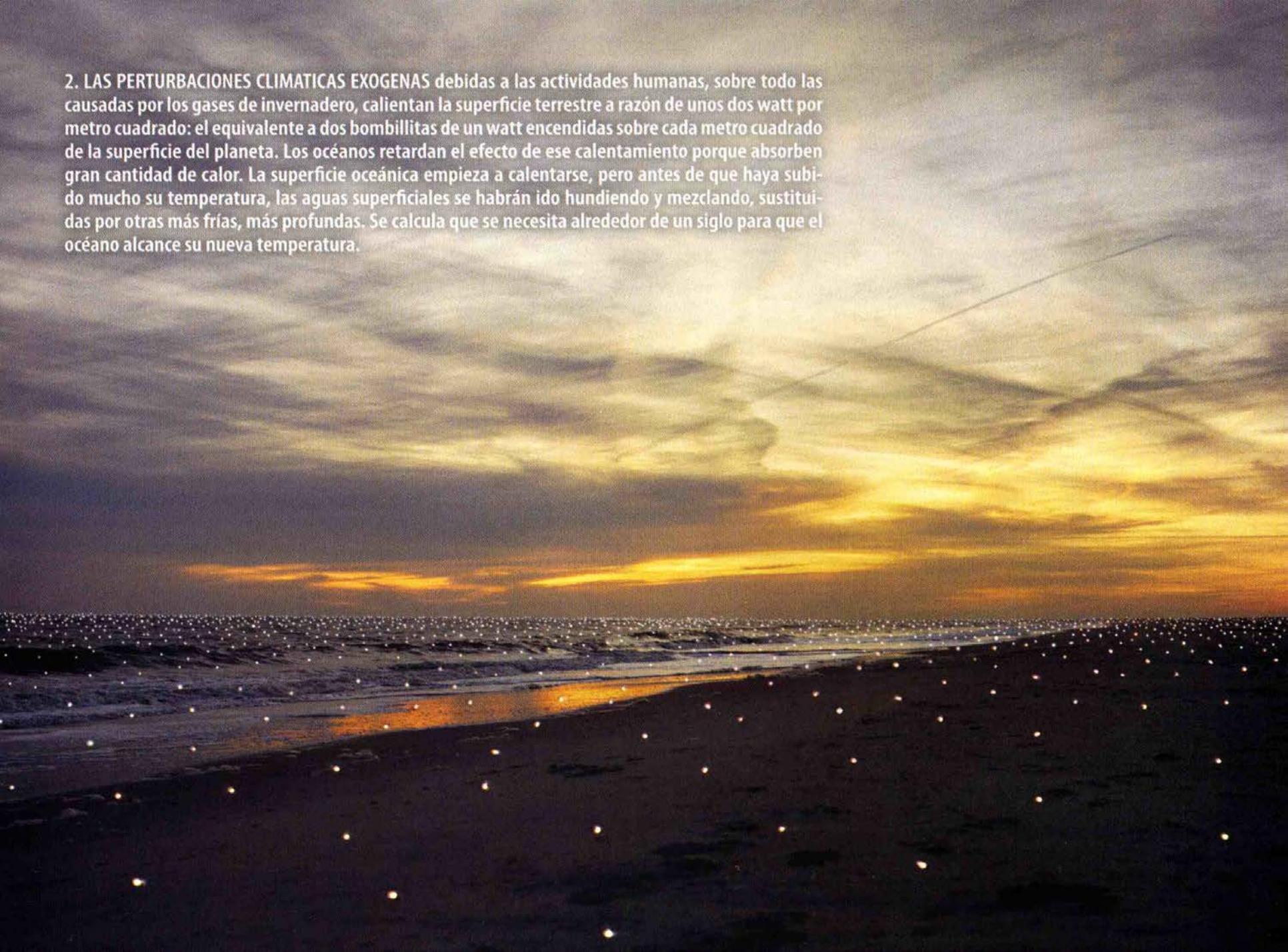


Figura 1.4: Balance de radiación del sistema climático.

R_e
Efecto invernadero

D

2. LAS PERTURBACIONES CLIMATICAS EXOGENAS debidas a las actividades humanas, sobre todo las causadas por los gases de invernadero, calientan la superficie terrestre a razón de unos dos watt por metro cuadrado: el equivalente a dos bombillitas de un watt encendidas sobre cada metro cuadrado de la superficie del planeta. Los océanos retardan el efecto de ese calentamiento porque absorben gran cantidad de calor. La superficie oceánica empieza a calentarse, pero antes de que haya subido mucho su temperatura, las aguas superficiales se habrán ido hundiendo y mezclando, sustituidas por otras más frías, más profundas. Se calcula que se necesita alrededor de un siglo para que el océano alcance su nueva temperatura.



Leyes de estado

$$R_a = QS(x)\beta(u)$$

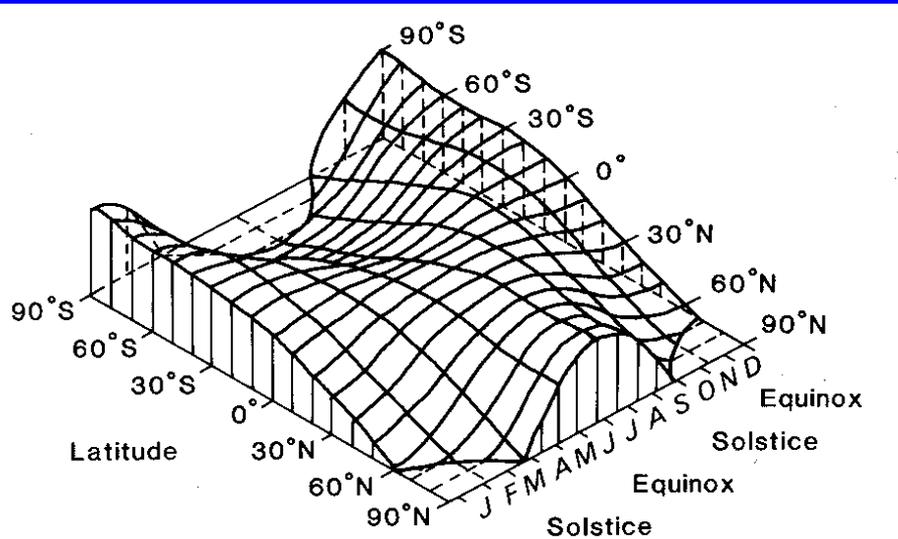


Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of

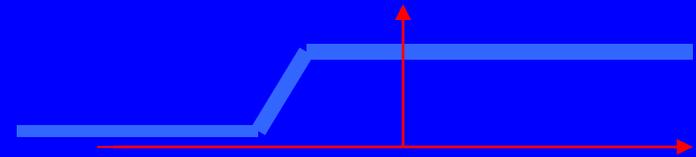
$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ coalbedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 & \text{si } u \ll -10 \\ 0.71 & \text{si } u \gg -10 \end{cases}$$

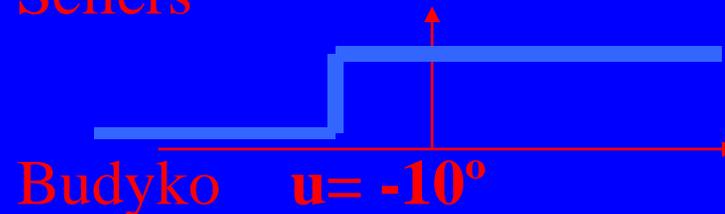


Earth Radiation Budget Satellite

Satélite (ESA) *Ingenio* (CDTI),...



Sellers



Budyko

$u = -10^\circ$

$R_e = \sigma u^4$ Ley de Stefan-Boltzman **Sellers**

$R_e = A + Bu$ Ley de enfriamiento de Newton **Budyko**

Relación empírica, Depende de gases de invernadero, cambios antropogénicos,... (variables internas)

Sobre el operador de difusión D

Jerarquía

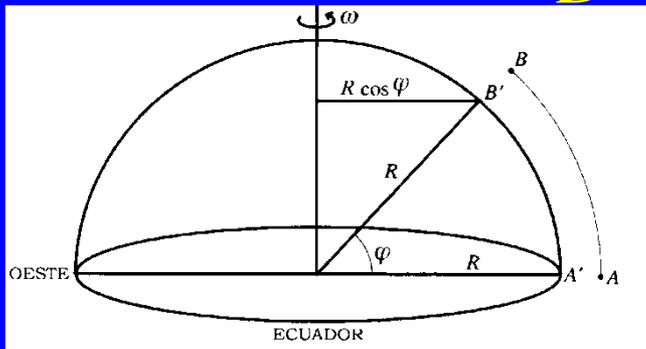
Modelo 0-dimensional $D=0$

$$c \frac{du}{dt} = Q\beta(u) - R_e(u)$$

Modelo 1-dimensional

$$D = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(1-x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$x = \cos \varphi$$



Difusión bidimensional

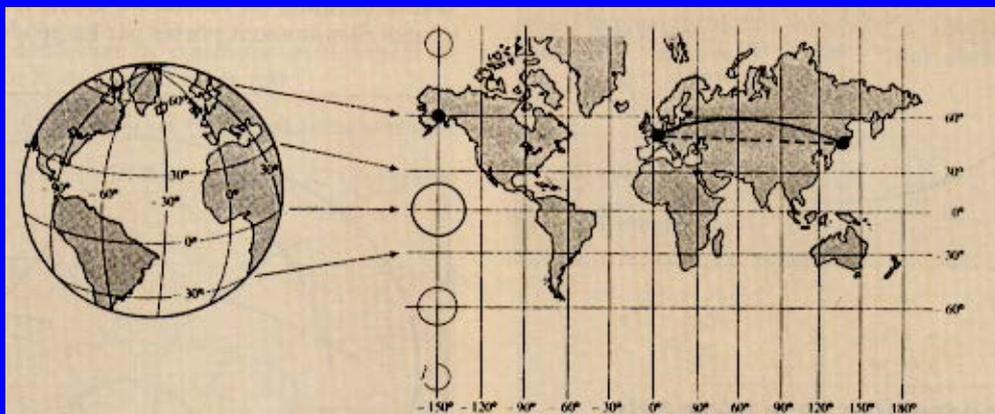
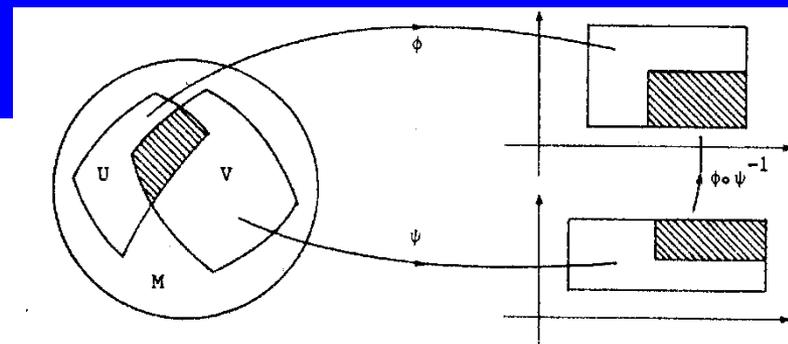
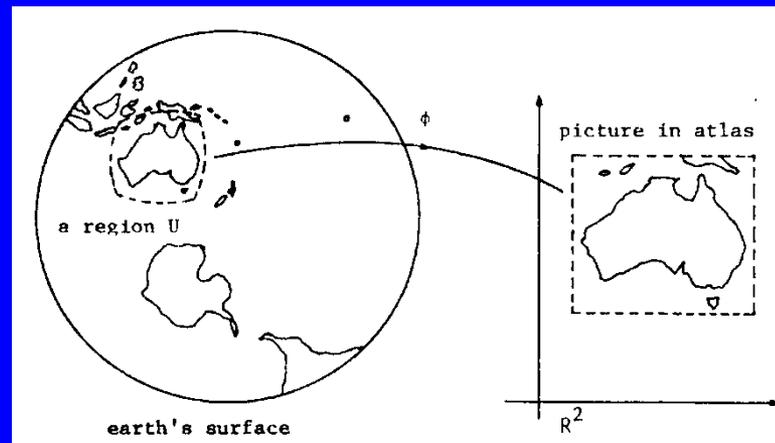
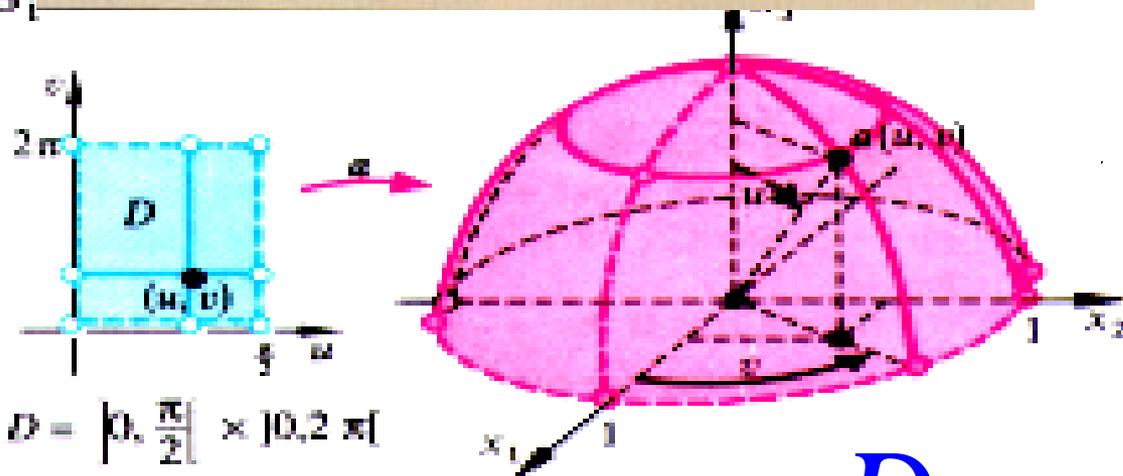


Figure 10 Projection de Mercator : $(\varphi, \theta) \rightarrow (u = \varphi, v = \log(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})))$



B₁



$$D = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] 0, 2\pi \right[$$

$\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ déf. par $(u, v) \mapsto \alpha$

$$\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$D = \operatorname{div}(k(x) \nabla u)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) + R_e(x, u) + \text{div}(k(x)\nabla u)$$

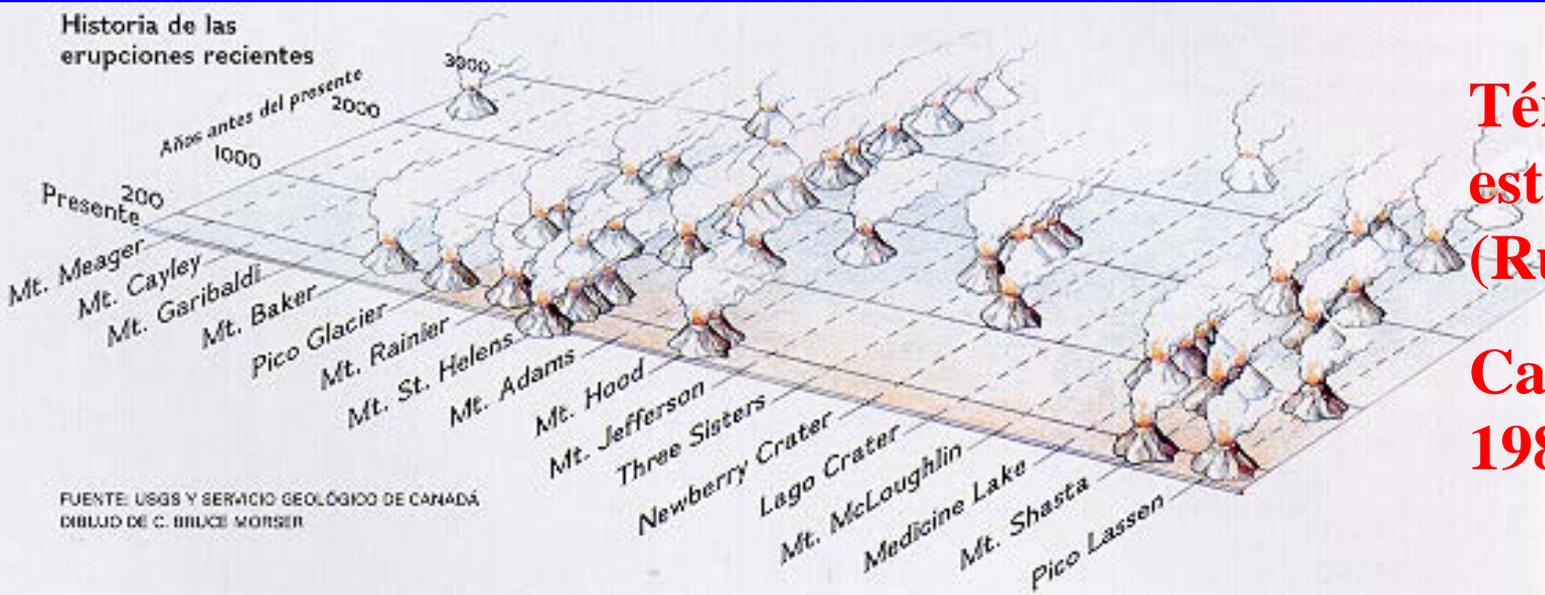
$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

Modelos estocásticos : Volcanes

$R_e(x, u)$

**Término
estocástico
(Ruido blanco)**

**Cahalan-North,
1982**



$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} + Bu \in QS(x)\beta(u) + h(x) + \epsilon\phi \frac{dW_t}{dt}, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times \mathbb{R} \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (-1, 1), \end{array} \right.$$

W_t is a two-dimensional scalar Wiener process in a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) .

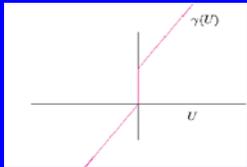
Modelos más complejos:

- Términos de retardo (promedios,...)
- Acoplamiento con las ecuaciones de de la energía interna del océano profundo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la dinámica de grandes masas de hielo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la Mecánica Celeste
- Acoplamiento con las ecuaciones del manto como medio visco-elástico
- Acoplamiento con modelos para la biosfera

- These climate EBM do not consider the effect of the deep ocean on the Earth surface temperature.
- Glacial–Holocene transition.
- Watts - Morantine [1990].

A model including the coupling surface/deep ocean.

J.I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello (2013)



$$\frac{\partial \gamma(U)}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla U) + w \frac{\partial U}{\partial z} \ni 0 \quad (0, T) \times \Omega,$$

$$\hat{F}(x, \nabla_{\mathcal{N}} U) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (0, T) \times \mathcal{N},$$

$$\partial \Omega = \mathcal{N} \cup \mathcal{M},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} u) + \frac{\partial U}{\partial n} + F(x, \nabla_{\mathcal{M}} u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f \quad \mathcal{M}$$

$$U(0, x) = U_0(x) \quad x \in \Omega,$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \mathcal{M}$$

U \equiv ocean temperature,

w \equiv vertical velocity,

$\gamma(U)$ \equiv latent heat of fusion (melting or freezing),

$$U|_{\mathcal{M}} = u$$

Teoría de las Glaciaciones de Milankovitch (1879-1958)



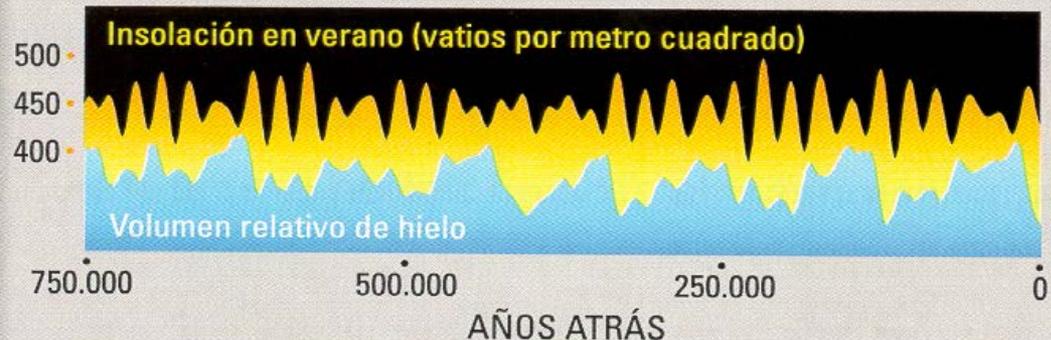
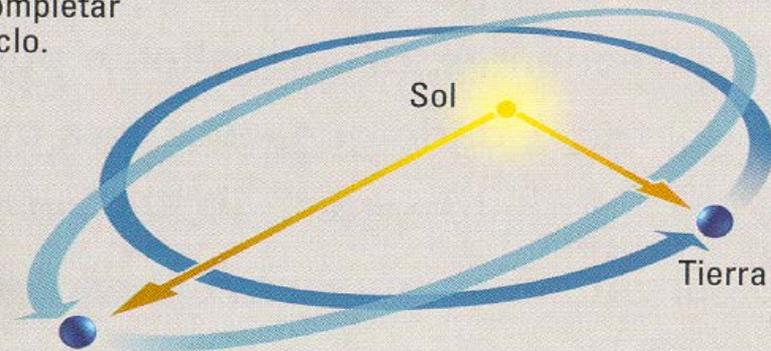
- *irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,
- *cálculo de tablas de gran precisión.
- *estimaciones globales sobre la evolución de lo que él llamó *el clima matemático*

CICLOS DE MILANKOVITCH

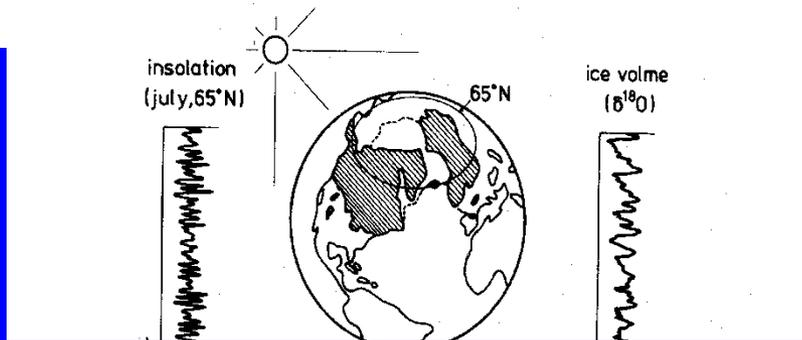
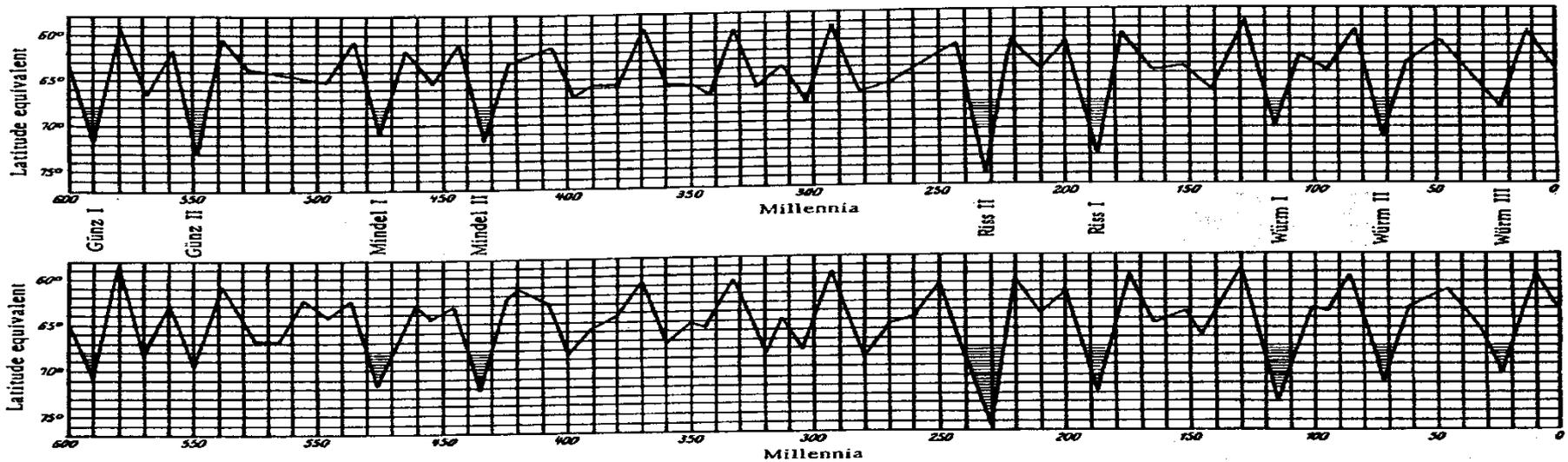


Una oscilación como de peonza del eje de la Tierra crea un ciclo de 23.000 años.

Las variaciones en la órbita de la Tierra alrededor del Sol siguen un ciclo de 100.000 años.



Curvas de radiación de Milankovitz



Condiciones para Glaciación

Veranos, Hem.Norte

¿Hemisferio Sur?

¿Glaciares de montaña hacia el Sur?

Strait of Gibraltar



JACQUES-LOUIS LIONS
de l'Institut
Président du Conseil 2000

Paris, le 13/3/00

Prof. Gidon PARÉS
Dep. Analysis Matemática
Univ. de Malaga

Fax.

Amable à A. Valle
et à ses collègues

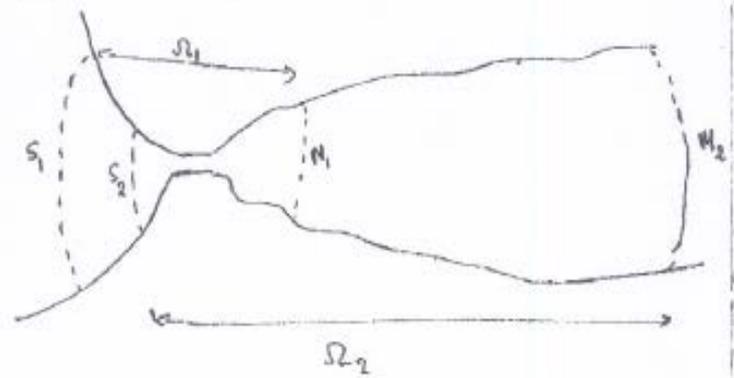
Cher Prof. Bardi

Merci beaucoup pour votre lettre, vos explications et les blous de
Jorge Macías, qui m'ont beaucoup aidé. Merci!

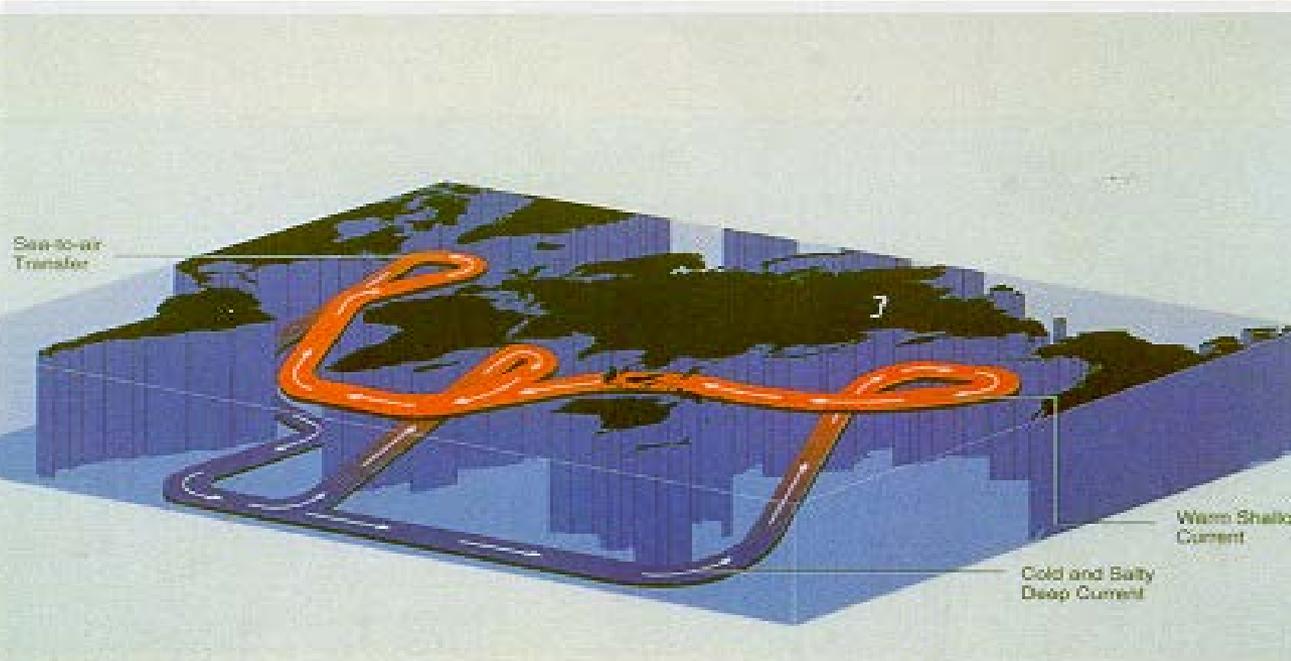
Merci aussi pour les commentaires sur la transport à l'échelle de Gibraltar.

Si il y avait un intérêt à regarder la pb. stroboussini, on pourrait

peut-être utiliser une méthode de genre rendant.

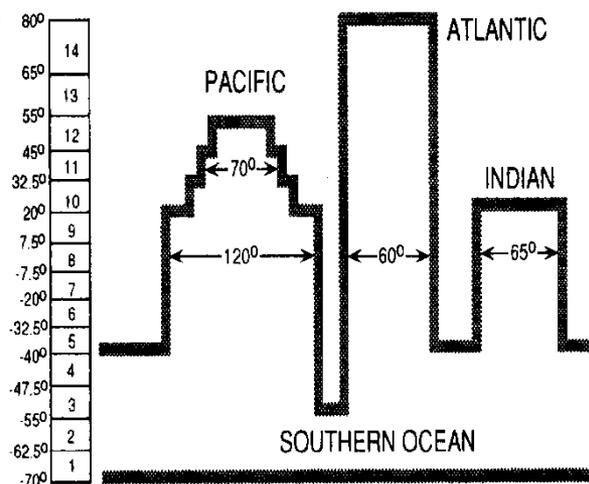
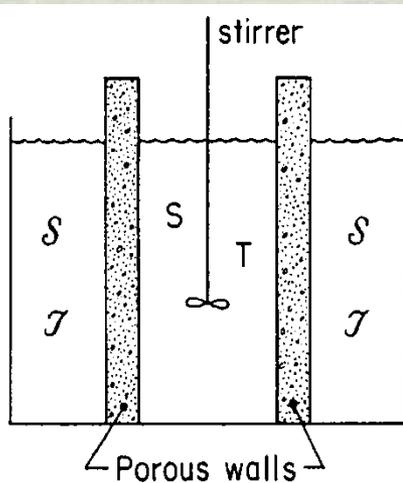


Modelos de salinidad oceánica



$$\frac{dT}{dt} = c(T - T)$$

$$\frac{dS}{dt} = d(S - S)$$



Broecker-Denton(1989)

Stommel (1961)

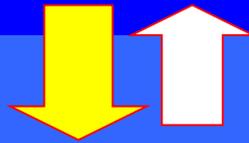
Rahmstorf (1995),

D(2006)

La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

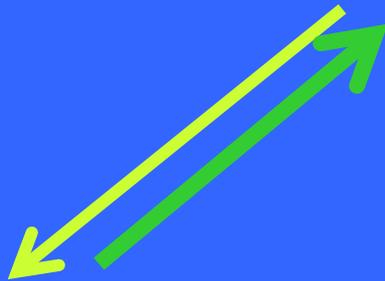
Sistema real

Predicción



**Modelos
matemáticos**

**Análisis
matemático**



Two-dimensional EBM (formulation on manifolds).

$$\begin{cases} c(x)u_t - \operatorname{div}(k(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f \text{ on } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ on } \mathcal{M} \end{cases}$$

- \mathcal{M} is a C^∞ 2-D connected compact oriented Riemannian manifold without boundary.
- $p \geq 2$, $Q > 0$,
- β is a bounded maximal monotone graph of \mathbb{R}^2 ,
- $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and increasing function such that $\mathcal{G}(0) = 0$, and $|\mathcal{G}(\sigma)| \geq C|\sigma|^r$ for some $r \geq 1$,
- $S \in C^1(\mathcal{M})$, $0 < S_2 \leq S(x) \leq S_1$, $f \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$,
- $c \in L^\infty(\mathcal{M})$, $c(x) \geq c_0 > 0$, $k \in C(\mathcal{M})$, $k(x) \geq k_0 > 0$,

Some functional spaces on manifolds

$L^p(\mathcal{M}) := \{u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable, } \int_{\mathcal{M}} |u|^p dA < +\infty\},$
 $1 < p < \infty$, where

$$dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \sqrt{\det g^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

$$\int_{\mathcal{M}} |u|^p dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda |u(\mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda))|^p \sqrt{\det g^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

$L^\infty(\mathcal{M}) := \{u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable, } \text{ess sup}_{\mathcal{M}} |u| < \infty\}$

$L^p(T\mathcal{M}) := \{X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} : \int_{\mathcal{M}} | \langle X, X \rangle |^{\frac{p}{2}} dA < +\infty\}$

$$X = X_1 \mathbf{e}_\theta + X_2 \mathbf{e}_\varphi, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = g(\cdot, \cdot).$$

$$V = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla u \in L^p(T\mathcal{M})\}, \quad p \geq 2$$

reflexive Banach space

$$\|u\|_V = \|u\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})}.$$

Let \mathcal{M} be a 2-D compact Riemannian manifold. Then the following **continuous imbedding** holds:

$$\text{if } p = 2, \quad V \hookrightarrow L^q(\mathcal{M}), \quad \forall q \in [2, \infty),$$

$$\text{if } p > 2, \quad V \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{M}).$$

If $2 \leq p < \infty$ then the imbedding $V \subset L^2(\mathcal{M})$ is compact.

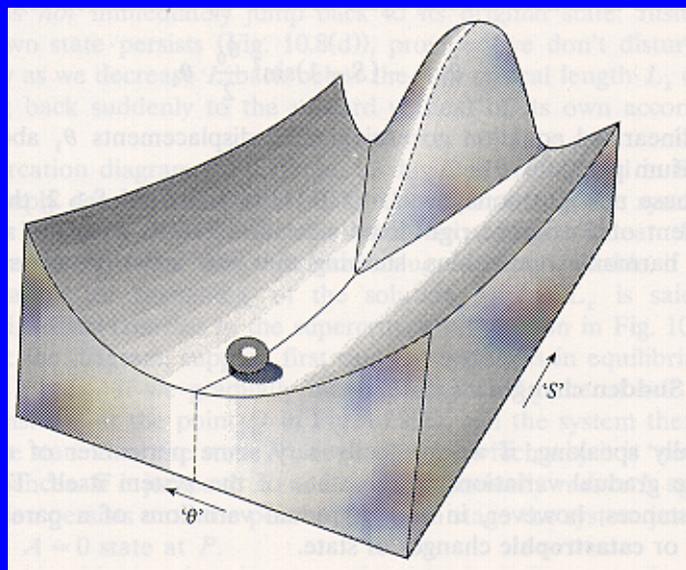
- For any $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$, there exists at least a bounded weak solution $u \in L^2((0, \infty); V)$,

$$V = \{v \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla v \in L^p(T\mathcal{M})\}.$$

- 2-D, $p \geq 2$,
 - ▷ β Lipschitz function (Sellers): **uniqueness** (by standard methods for nonlinear parabolic equations). Uniqueness.
 - ▷ β multivalued in $u = -10$: **Nonuniqueness**. Uniqueness of non-degenerate solutions.

Stabilization of solutions as $t \rightarrow \infty$ to a solution of the stationary problem.

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f_\infty \text{ on } \mathcal{M}.$$



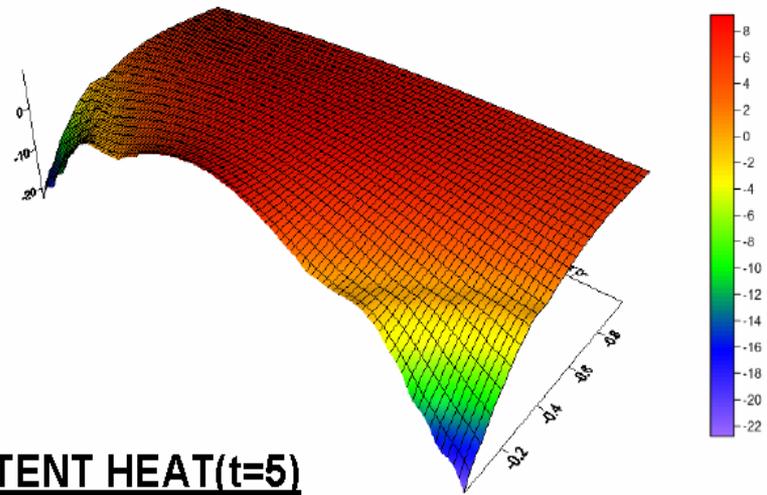
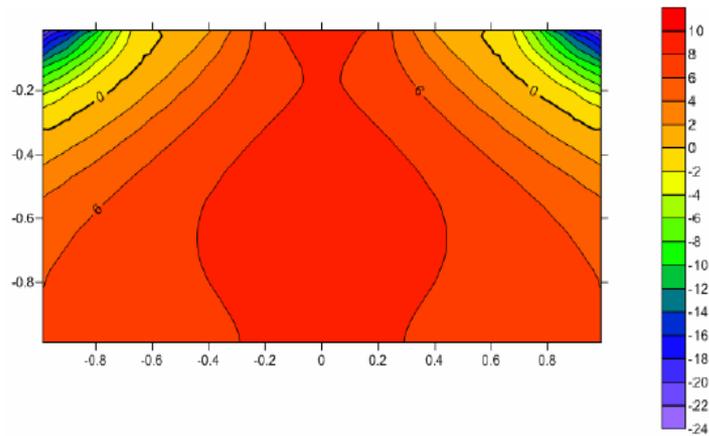
Theorem. Let $U_0 \in L^\infty(\Omega)$ and $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$. There exists at least a bounded weak global solution of (P) .

- ▷ A counterexample to the uniqueness of evolution solution. Case $\gamma(U) = U$.
- ▷ Stationary solutions for the case $\gamma(U) = U$.

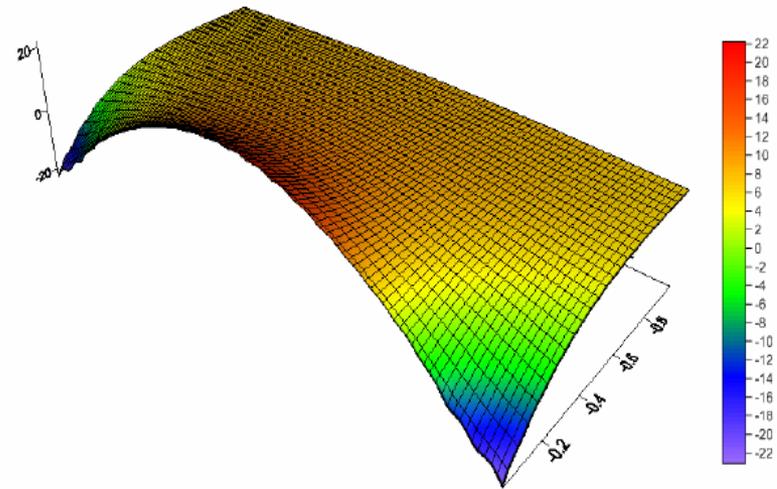
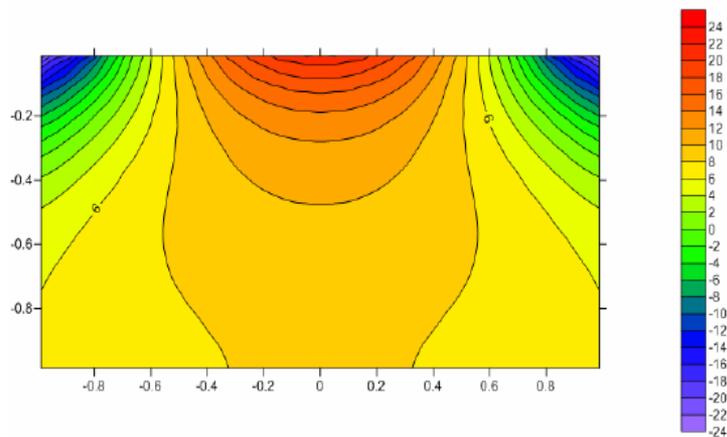
COMPARISON OF RESULTS WITH AND WITHOUT LATENT HEAT

Una “demostración rigurosa” de la conclusión estrella del informe del IPCC
www.climatechange2013.org/report/

WITH LATENT HEAT (t=5)

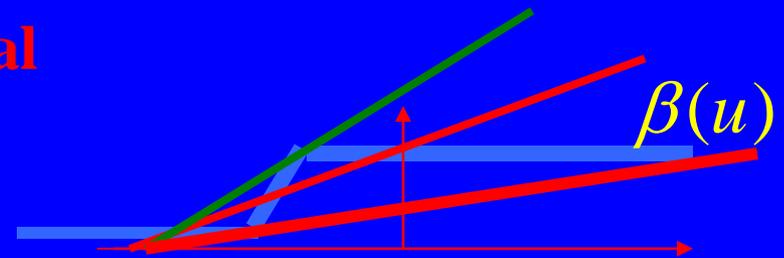


WITHOUT LATENT HEAT (t=5)

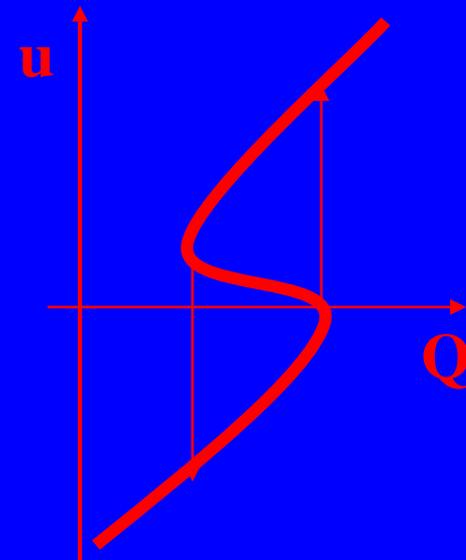


Bifurcación e Histéresis en 0-d

Equilibrios del Modelo 0-dimensional



$$A + Bu = Q\beta(u)$$



Existence of at least **three solutions** if Q is in a bounded interval.
Uniqueness of solution for Q small or big enough.

Existence of an unbounded connected **S-shaped set** $\{(Q, u)\}$.

existence of a global attractor for the multivalued case.

- Study the existence of infinitely many solutions of a one-dimensional model,

$$(P) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' + \mathcal{G}(u) + C \in Q\beta(u) & x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

- The coalbedo function β is multivalued.
- $Q \in (Q_1, Q_2)$.

The Edge of the Glacier = Free Boundary of the Glacier Flow

Las frontera libres



Para todo $t \in [0, t_{\text{máx}}]$, encontrar el conjunto $\Gamma_0(t) = (S_-(t), S_+(t)) \subset (-1, 1)$ y la función

$$\eta : \mathcal{Q} = \bigcup_{t \in [0, t_{\text{máx}}]} \Gamma_0(t) \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que :

$$\frac{D\eta}{Dt} \geq \frac{e^{-\gamma}}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta^{n+2}}{n+2} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \quad \text{en } \mathcal{Q}$$

$$\eta \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}$$

(48)

$$\left(\frac{D\eta}{Dt} - \frac{e^{-\gamma}}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta^{n+2}}{n+2} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \right) \eta = 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}$$

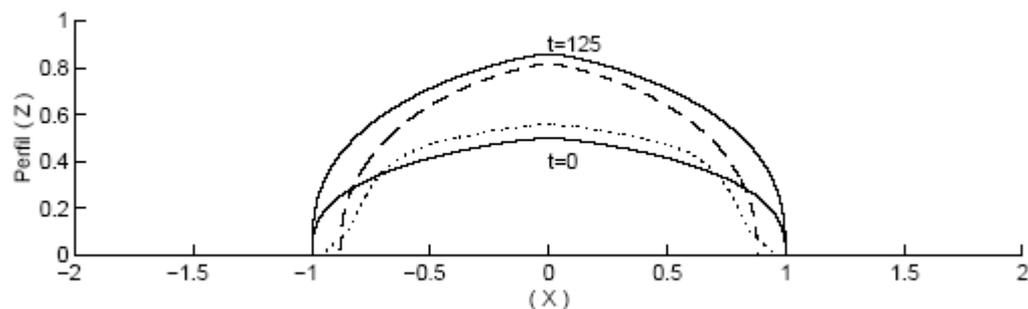
$$\eta = 0 \quad \text{en } \{S_-(t)\} \cup \{S_+(t)\}, \quad t \in (0, t_{\text{máx}}); \quad \eta(0, x) = \eta_0(x) \quad \text{en } (-1, 1),$$

donde se ha utilizado para la derivada material respecto de la velocidad de deslizamiento basal, u_b , la notación

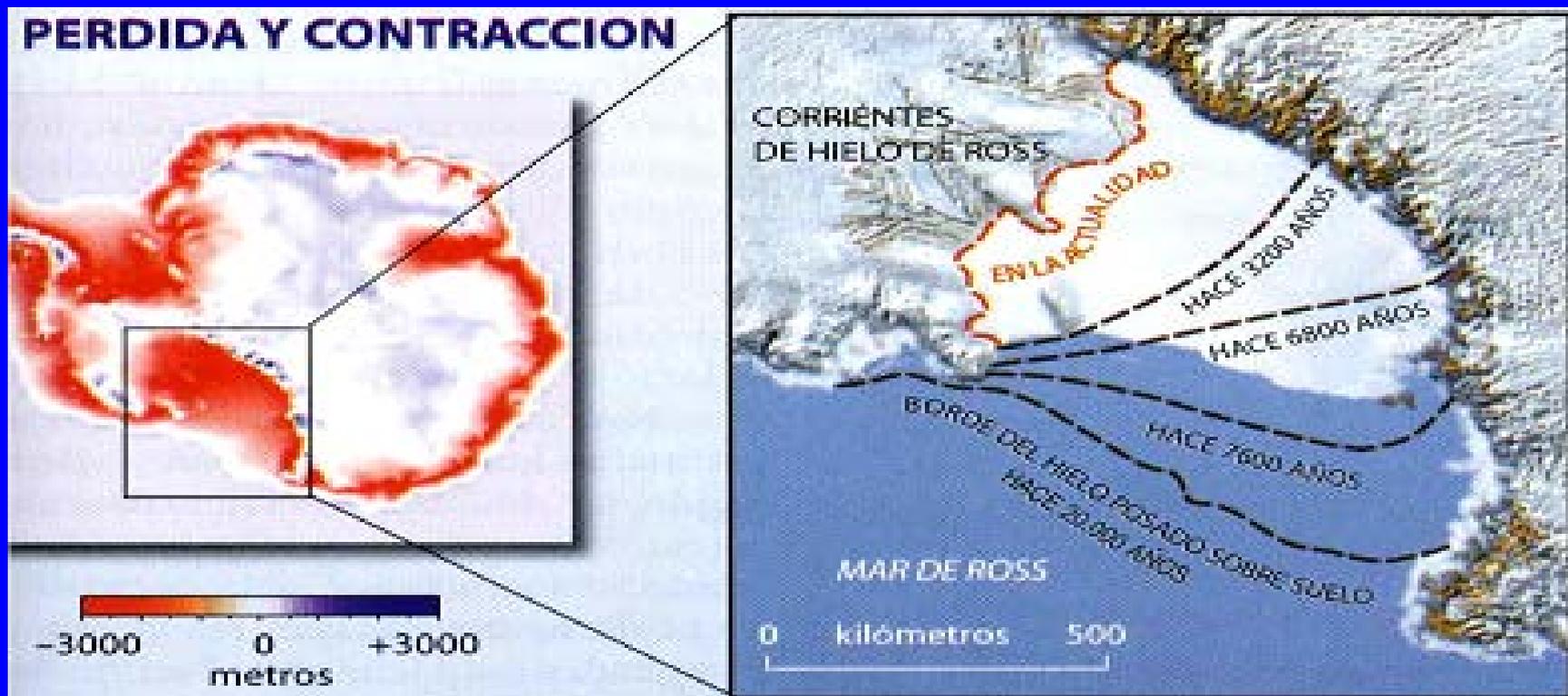
$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_b \eta). \quad (49)$$

Además, la función a representa la tasa de acumulación-ablación.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D}{Dt} \left(u^{3/8} \right) - \mu \left(|u_x|^2 u_x \right)_x - a \geq 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\ \left[\frac{D}{Dt} \left(u^{3/8} \right) - \mu \left(|u_x|^2 u_x \right)_x - a \right] u = 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \partial\Omega \\ u = u_0(x) = \eta_0^{8/3}(x) & \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$



Movimiento de la frontera libre en EBM



EL CAMBIO DEL ESPESOR de los hielos desde el último período glacial (*arriba, izquierda*) ha supuesto una pérdida (*rojo*) de unos 5,3 millones de kilómetros cúbicos, en gran parte en la Antártida Occidental. El borde de la capa de hielo que toca fondo marino ha retrocedido con particular rapidez en el mar de Ross (*detalle, a la derecha*) a lo largo de los últimos 7000 años; se ha retirado unos 700 kilómetros hacia el interior del continente.

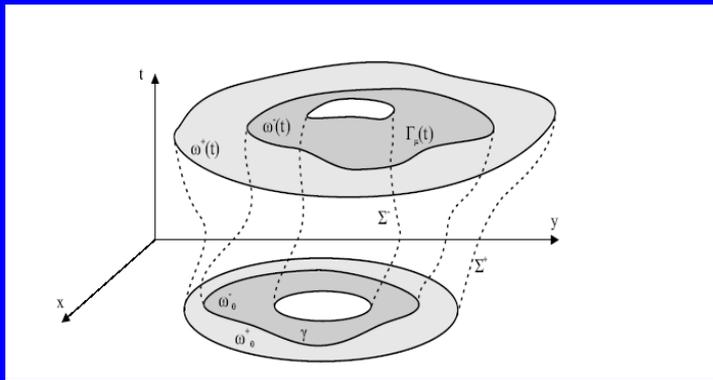
$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u \in a \mathbf{H}(u - \mu) \quad \text{in } D_T, \\ u = \phi \quad \text{on } S_T, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \end{array} \right.$$

Let $\Omega \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, be a ring-shaped domain with the exterior boundary $\partial_e \Omega$

and the interior boundary $\partial_i \Omega$, $\partial_i \Omega \cap \partial_e \Omega = \emptyset$. Given $T > 0$, we denote by D_T the

cylinder $D_T = \Omega \times (0, T]$ with the “lateral boundary”

$$S_T = \{\partial \Omega_e \times (0, T]\} \cup \{\partial \Omega_i \times (0, T]\}$$



$$\mathbf{H}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0, \\ [0, 1] & \text{if } s = 0, \\ 0 & \text{if } s < 0. \end{cases}$$

The main goal of this paper is to study the dynamics and regularity of the level set Γ_μ which separates the regions

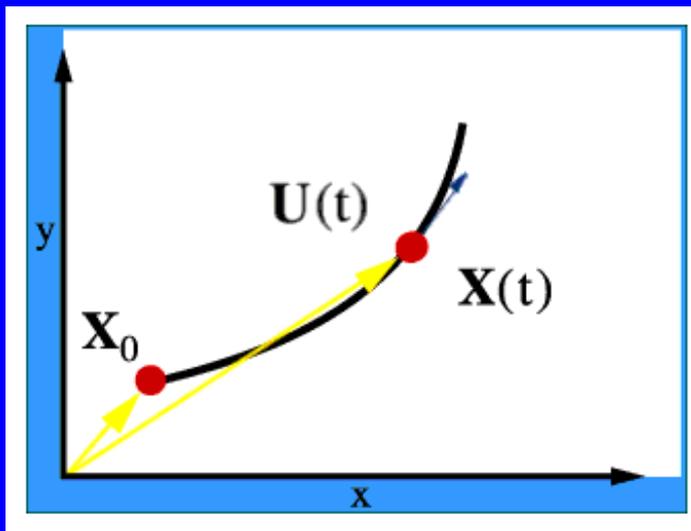
$$D_T^+ = \{(\mathbf{x}, t) \in D_T : u(\mathbf{x}, t) > \mu\} \quad \text{and} \quad D_T^- = \{(\mathbf{x}, t) \in D_T : u(\mathbf{x}, t) < \mu\}.$$

We want to answer the following questions:

1. What are the topological and regularity properties of the level set Γ_μ ?
2. Given the initial function u_0 , how does Γ_μ start moving at the time $t = 0$?
3. Is it possible to characterize the evolution of Γ_μ in terms of the solution u and its derivatives?

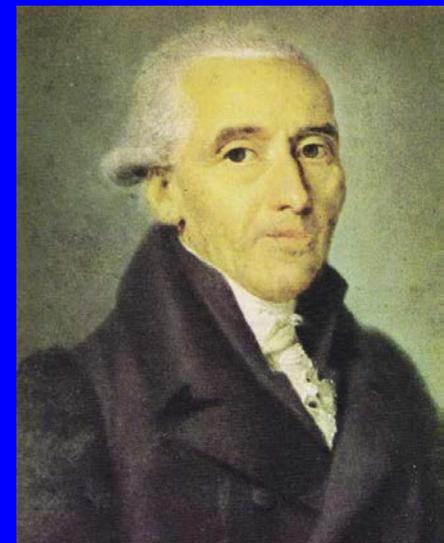
Our study of the level set Γ_μ is based on the introduction of a system of Lagrangian coordinates frequently used in Continuum Mechanics. Every positive solution of problem (3) can be formally considered as a solution of the problem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div} (u \nabla \ln u) + a h_u & \text{in } D_T, \\ u = \phi \text{ on } S_T, \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (7)$$



$$\mathbf{U}(t; \mathbf{X}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)}{\partial t}$$

$$\mathbf{a}(t; \mathbf{X}_0) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)}{\partial t^2}$$



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Theorem 4. *Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. There exists a function $U(\mathbf{y}, t)$ such that $U \in W^{4,q}(\omega_0^\pm \times (0, T))$, $U_t \in W^{2,q}(\omega_0^\pm \times (0, T))$, and the surface $\Gamma_\mu(t)$ is parametrized by the bijective mapping*

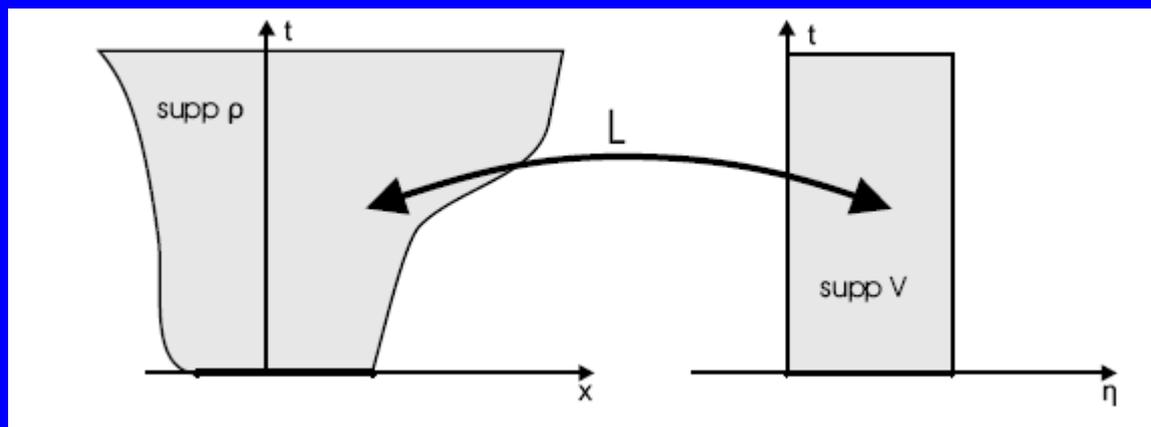
$$\gamma \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{y} + \nabla U(\mathbf{y}, t) \in \Gamma_\mu(t).$$

The velocity of advancement of the surface $\Gamma_\mu(t)$ in the normal direction is given by the formulas

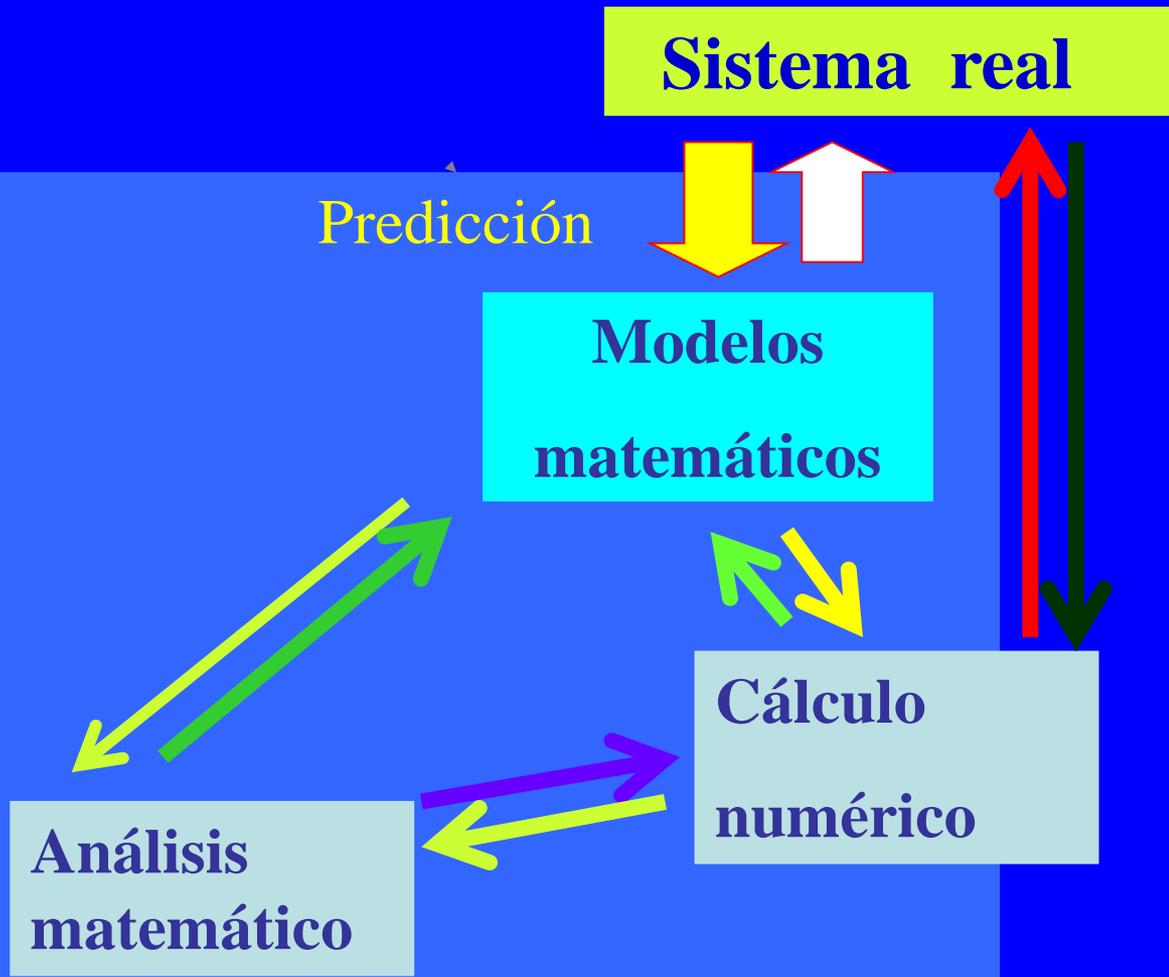
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\omega^\pm(t) \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_\mu(t)} \left[|\nabla \ln u| - \frac{\nabla p \cdot \nabla u}{|\nabla u|} \right] = \nabla_{\mathbf{y}} U_t(\mathbf{y}, t)|_\gamma \cdot \mathbf{n},$$

where \mathbf{n} denotes the unit normal to $\Gamma_\mu(t)$. Moreover, if $u_0 \in C^2(\Omega^\pm)$ and $\partial\omega_0^\pm \in C^2$, then the surface γ starts moving with normal velocity $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{n}$, where $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$ is given by (11) and the function $p \equiv p_0$ is a solution of the problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(u_0 \nabla p_0) + a \mathbf{H}(u_0 - \mu) = 0 \quad \text{in } \omega_0^+ \cup \omega_0^-, \\ [\nabla p_0 \cdot \mathbf{n}]|_\gamma = [\nabla \ln u_0 \cdot \mathbf{n}]|_\gamma, \\ \nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = |\nabla \ln u_0| - \frac{\Delta u_0 + a}{|\nabla u_0|} \quad \text{on } \partial \omega_0^+, \\ \nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = |\nabla \ln u_0| - \frac{\Delta u_0}{|\nabla u_0|} \quad \text{on } \partial \omega_0^-. \end{array} \right.$$



La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

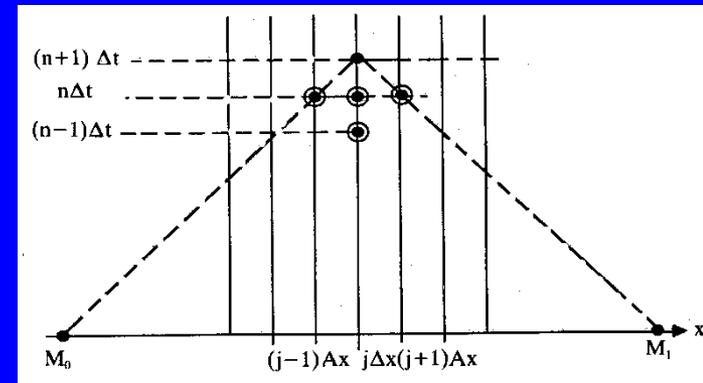
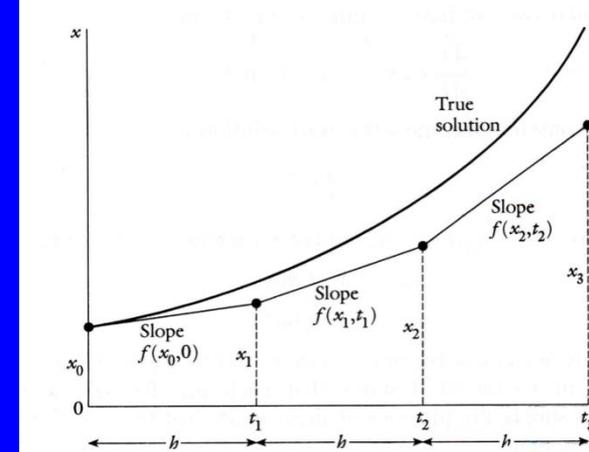


Modelos discretos

•Diferencias finitas

- En tiempo
- En espacio
- En ambas variables

Diferencias finitas espaciales



$$N > 1 \text{ nodos}$$

$$x_i = -1 + (i - 1)h$$

$$h = \frac{2}{N-1}$$

$$y_i(t) \approx y(t, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$y_{xx}(t, x_i) \approx \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{h^2}$$

$$y_x(t, x_N = 1) \approx \frac{y_{N+1}(t) - y_N(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_{N+1} = y_N$$

$$y_x(t, x_1 = -1) \approx \frac{y_1(t) - y_0(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_1 = y_0$$

$$y_i(0) = y(0, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - k \frac{y_2 - y_1}{h^2} = R_a(-1, y_1, v) - R_e(-1, y_1), & i = 1, \\ \dot{y}_i - k \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = R_a(x_i, y_i, v) - R_e(x_i, y_i), & i = 2, \dots, N-1, \\ \dot{y}_N - k \frac{y_N - 1 - y_N}{h^2} = R_a(1, y_N, v) - R_e(1, y_N), & i = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))^T \in \mathbb{R}^N \quad v(t) \in \mathbb{R}$$



$$(P_h) \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) + A_N \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}_a(\mathbf{y}(t), v(t)) - \mathbf{R}_e(\mathbf{y}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

$$A_N = \frac{k}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N \times N}$$

simétrica y definida positiva

•Elementos finitos

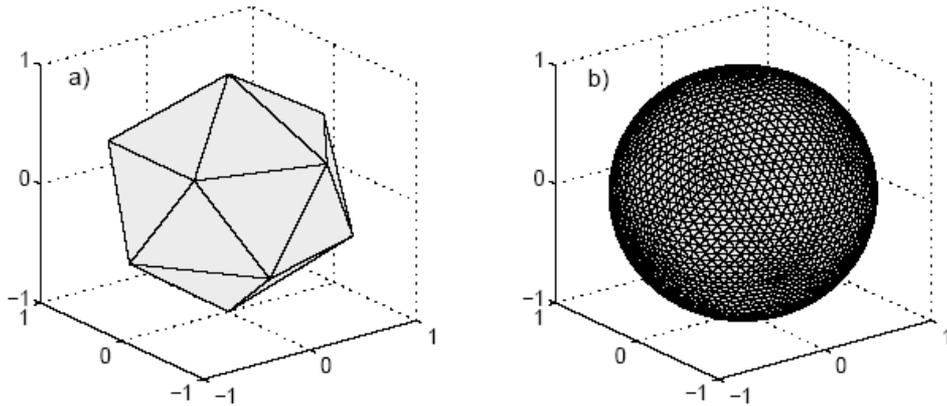


Figure 1: Initial Icosahedron and mesh after 4 refinements.

$$\mathcal{M}_h := \cup_j \Omega_j, \quad \Omega_j \in \mathcal{D}_{hk}.$$

$$\phi : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}$$

$$\hat{V}_h = \{\hat{v}_h \in C^0(\mathcal{M}_h) : \hat{v}_h|_{\Omega_j} \in P_1(\Omega_j), 1 \leq j \leq N_k\},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a\hat{x}}{\sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + (z\hat{x})^2}} \\ \frac{a\hat{y}}{\sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + (z\hat{x})^2}} \\ \frac{a\hat{z}}{\sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + (z\hat{x})^2}} \end{pmatrix}$$

$$(P_{h,\Delta t}) \begin{cases} \int_{\mathcal{M}} c \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} v_h dA + \int_{\mathcal{M}} \langle k \nabla_{\mathcal{M}} U^n, \nabla_{\mathcal{M}} v_h \rangle dA + \\ \int_{\mathcal{M}} (BU^n + C)v_h dA = \int_{\mathcal{M}} QS^n Z^n v_h dA + \int_{\mathcal{M}} f^n v_h dA, \end{cases}$$

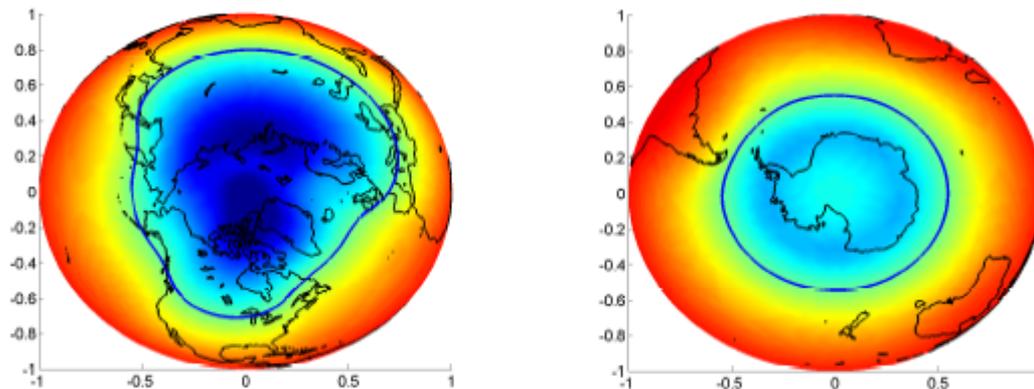
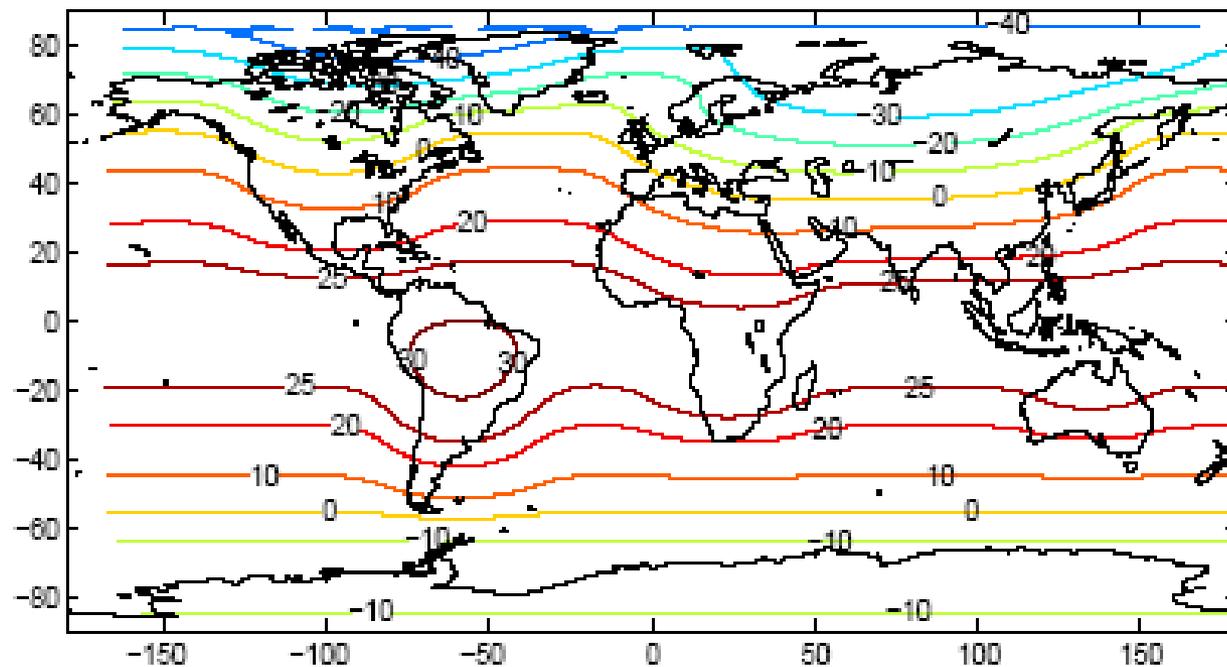


Figure 4: -2°C January snow line. Left: northern hemisphere; right: southern hemisphere .

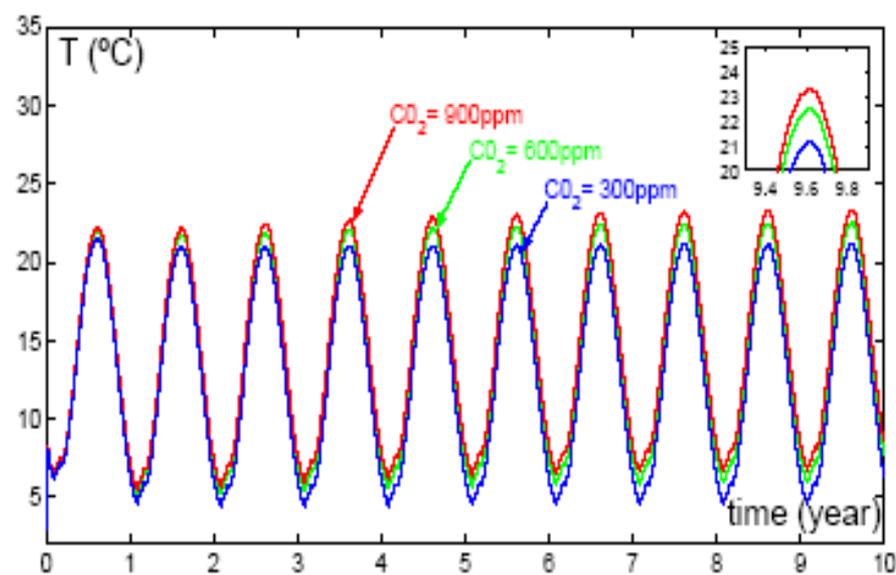
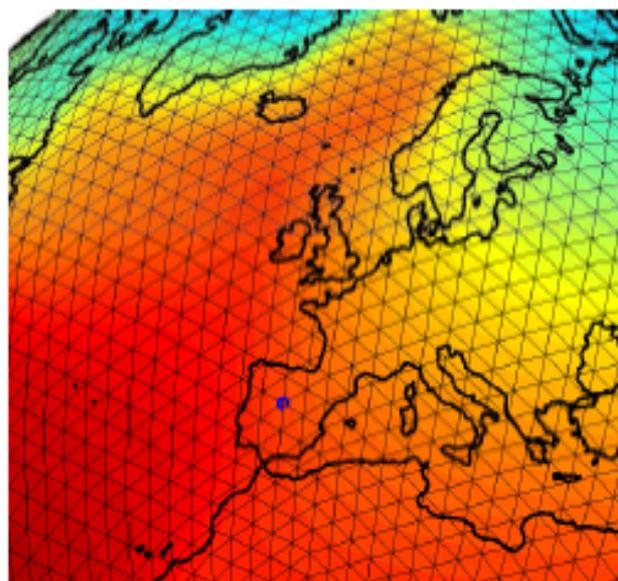
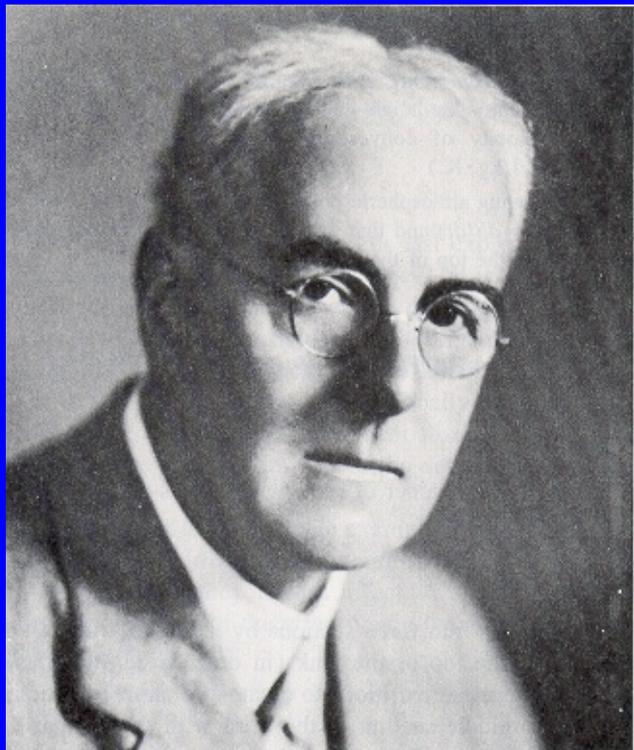


Figure 7: CO₂ influence on temperature at a point near Madrid. In the box, it is shown the temperature corresponding to the month of July .

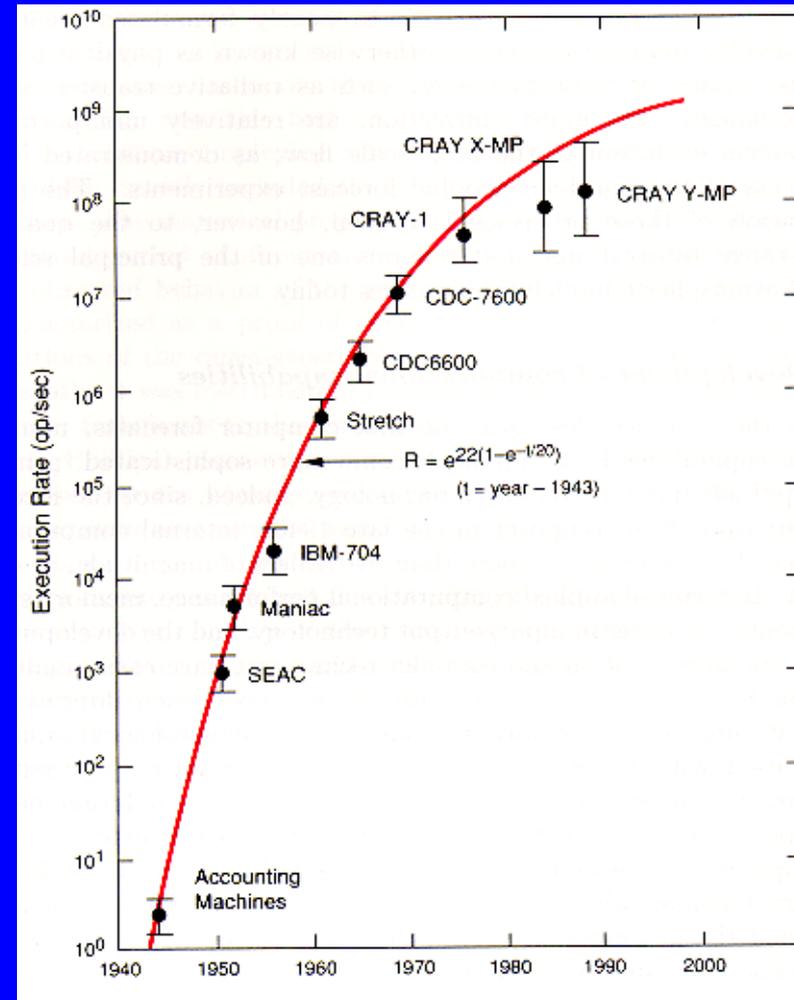
Super-ordenadores: Cálculo paralelo.

Las 64.000 máquinas de
Richardson



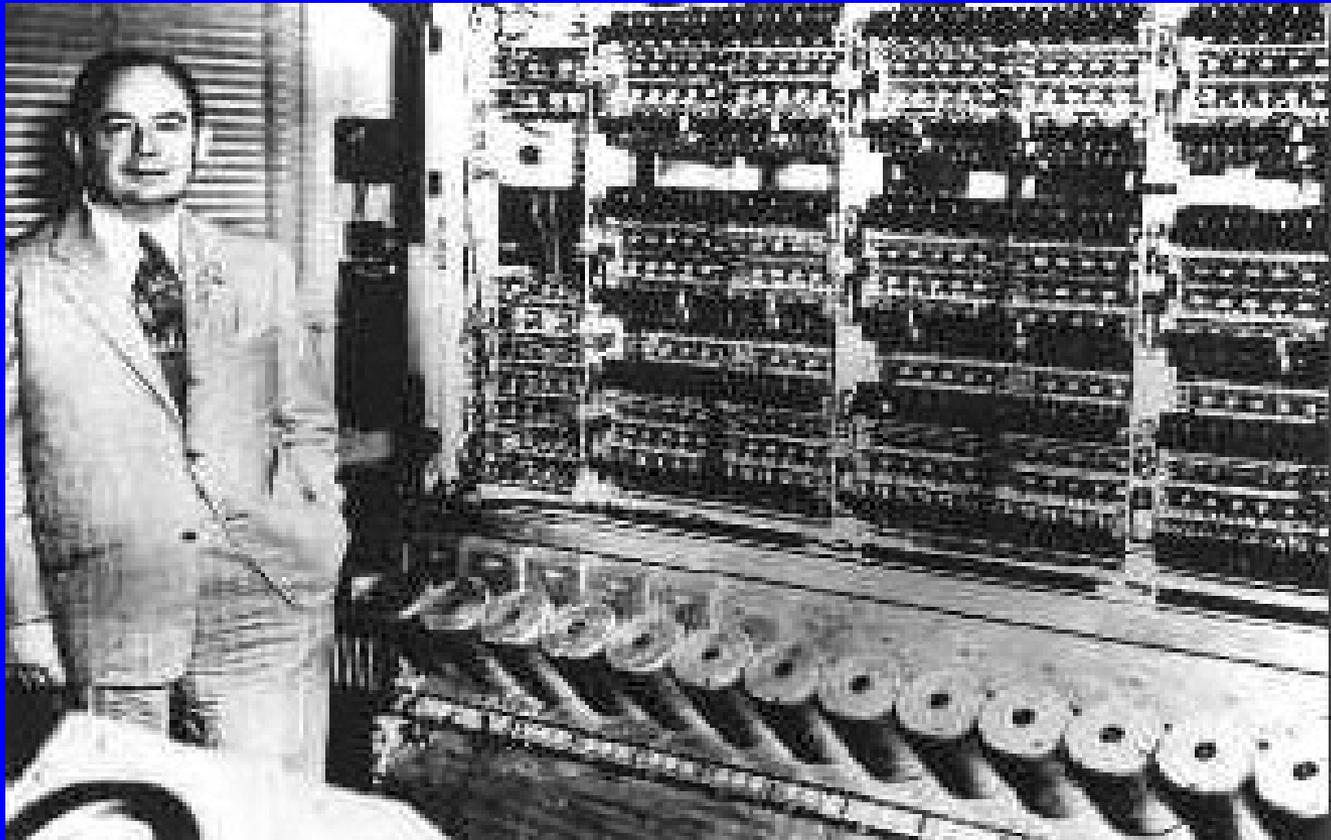
Lewis Fry Richardson

1881 - 1953

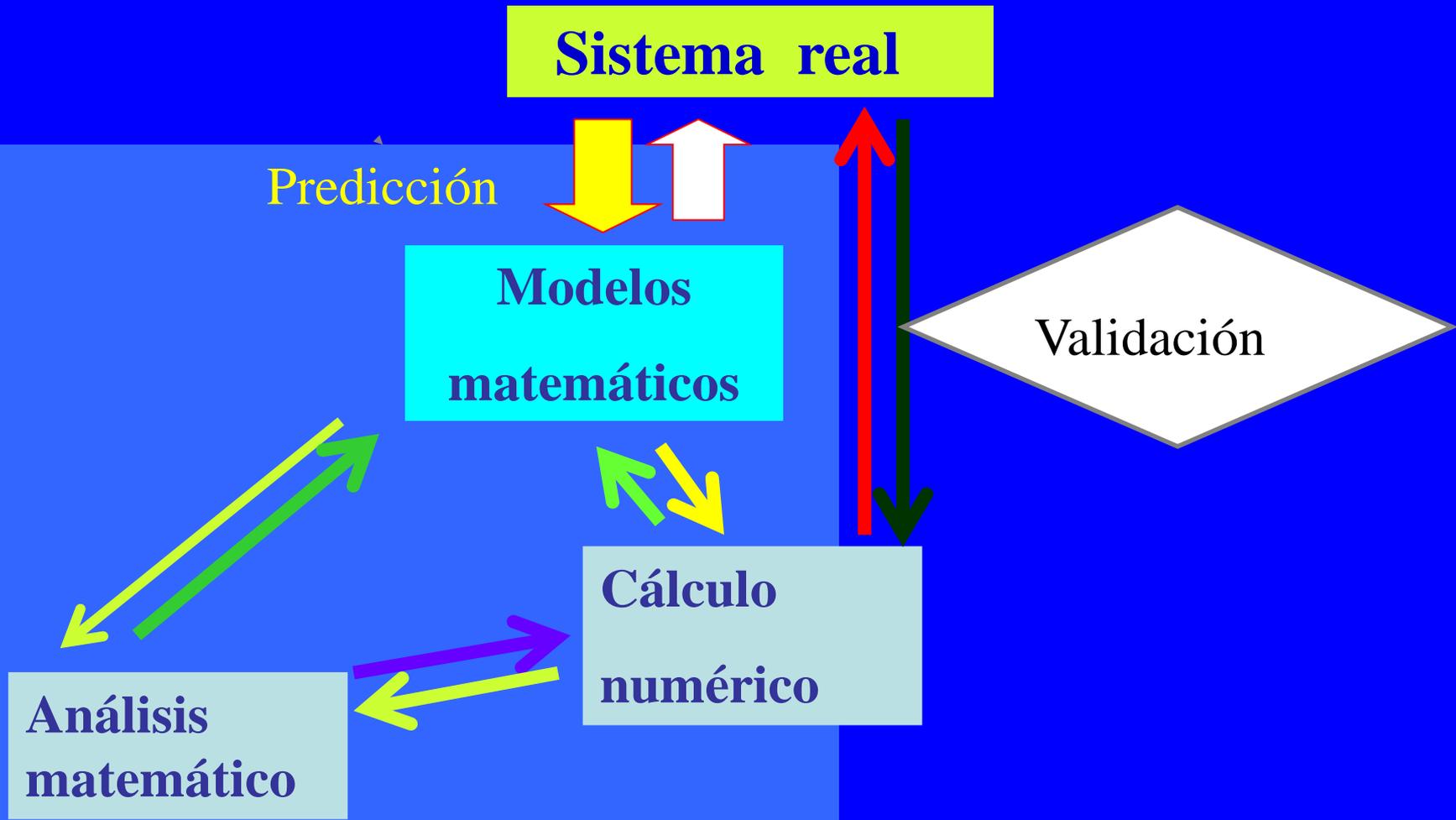


Ley de G.E. Moore (1965) : “La potencia de computación se duplica cada año”

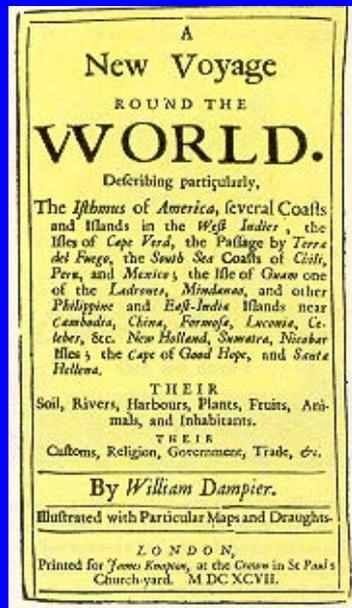
John von Neumann escogió la Meteorología Numérica como futuro banco de pruebas del ordenador del *Institut for Advanced Study* (**IAS** Princeton).



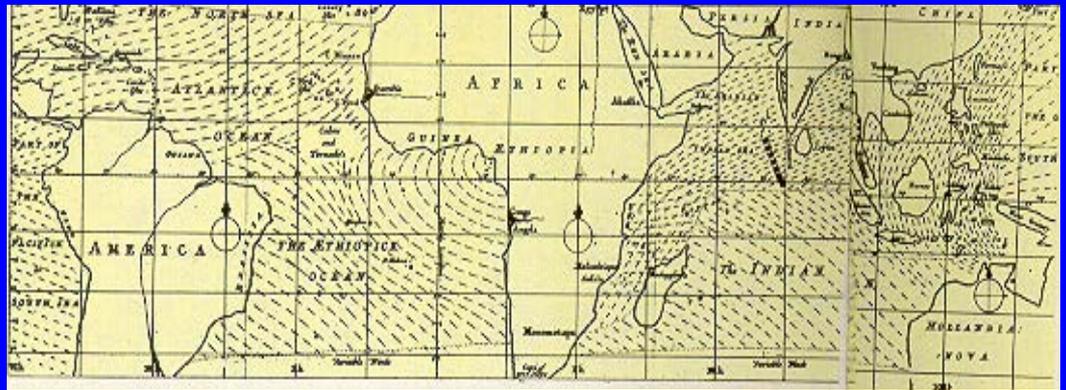
La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



Validación: toma de datos, satélites



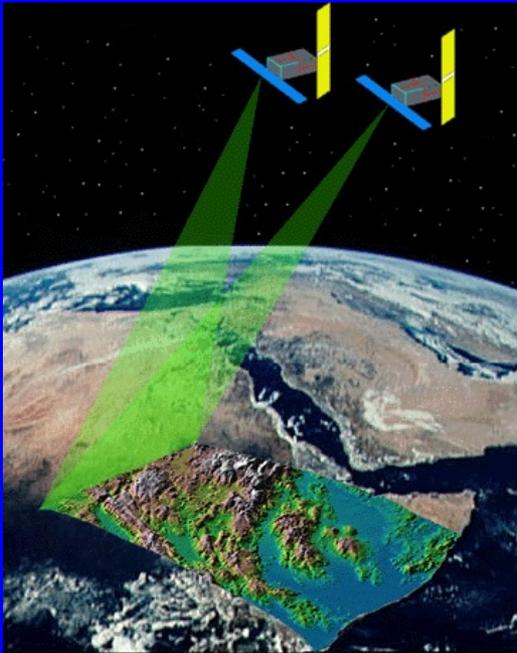
Transmisión de datos: Francia 1863



Datos pioneros: 1697
Capitan W. Dampier,

Edmund Halley (1686): Astrónomo, Circulación
general de la atmósfera y convección térmica

Validación...



Siglo XXI



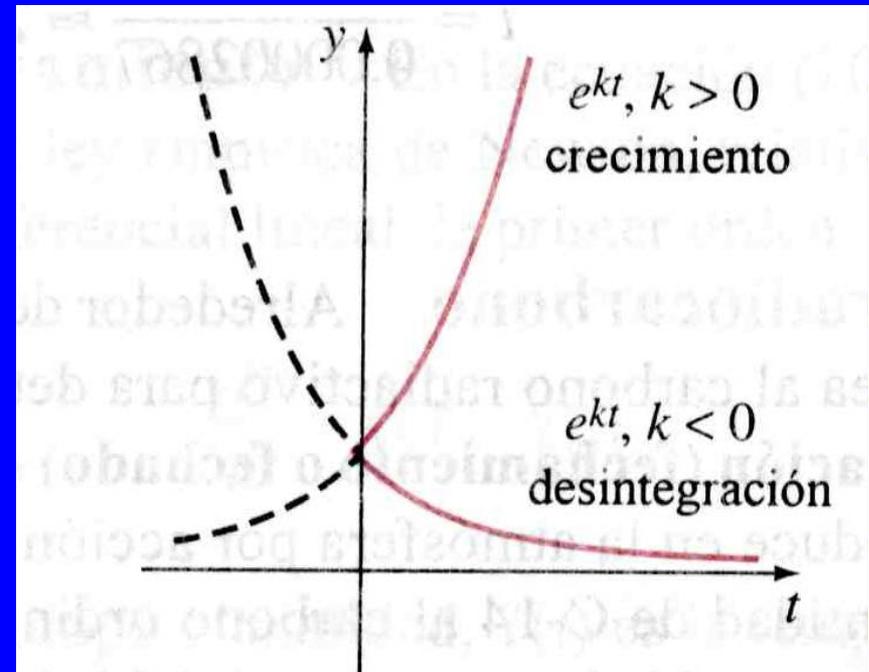
4.500 millones de años

Validación...

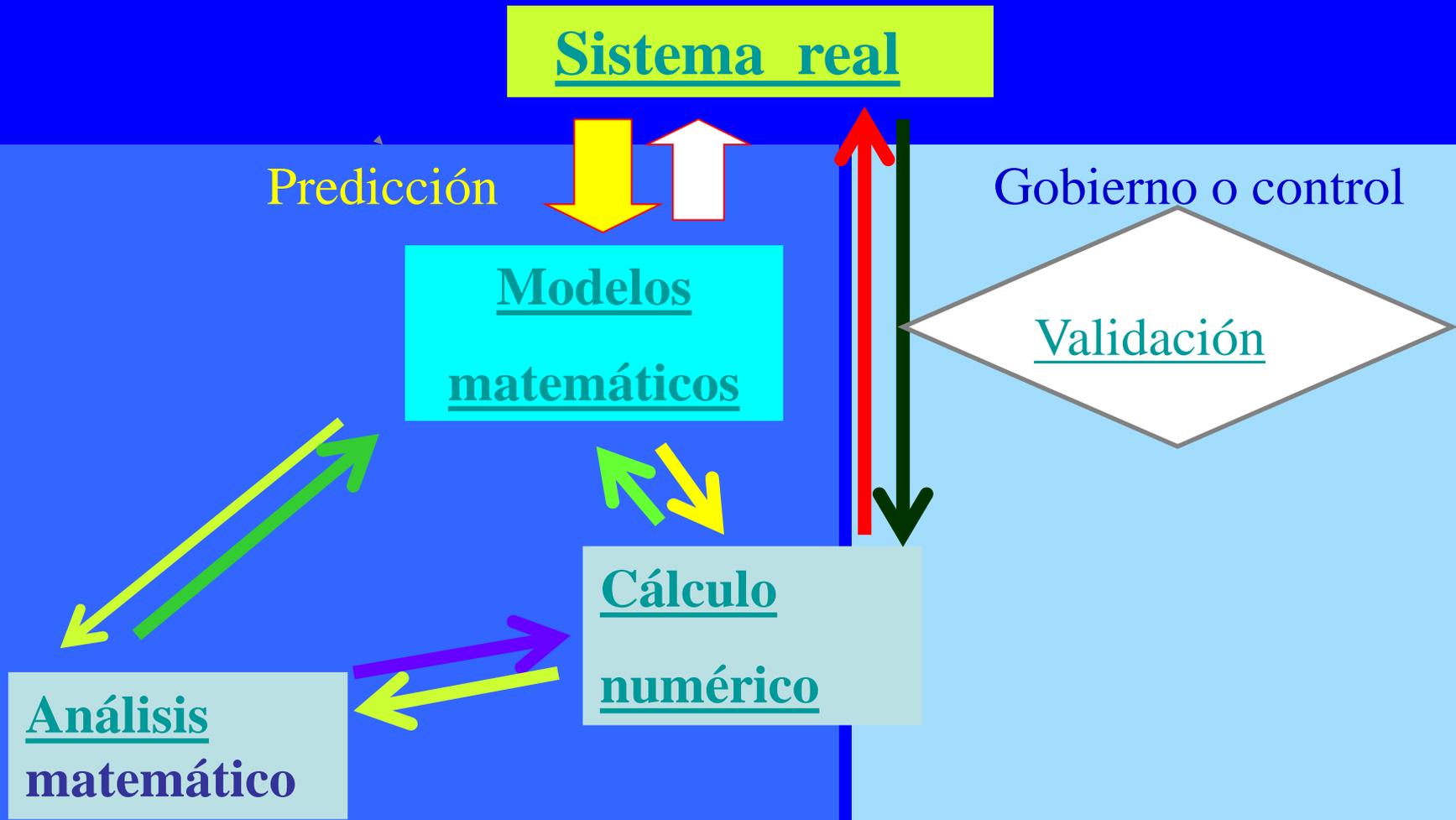
Willard Frank Libby
1947

C14: 5.730 años de vida media

U 238: 4.500 millones de años
de vida media



La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



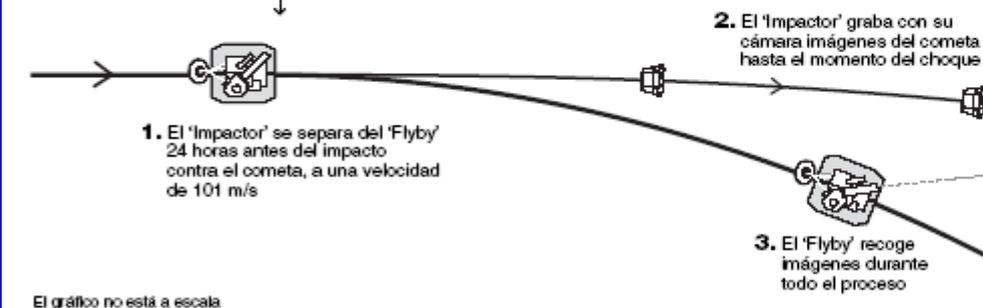
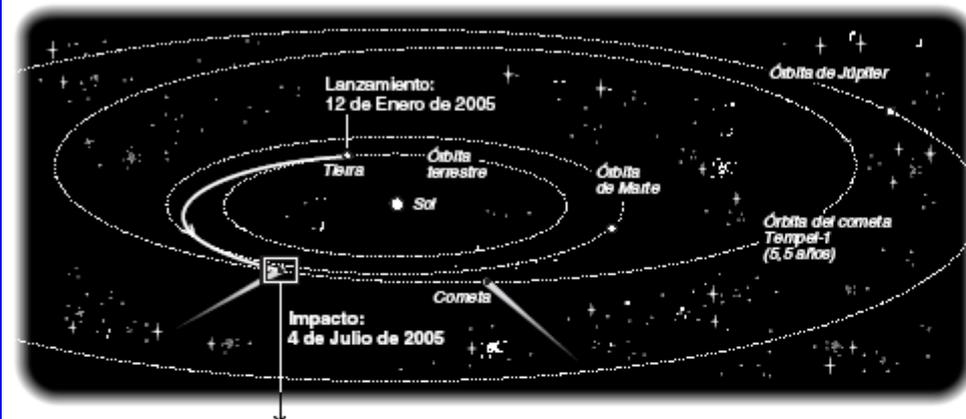
Gobierno o control



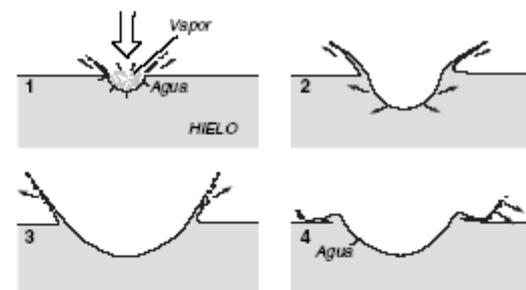
Roma 1555

Misión 'Deep Impact'

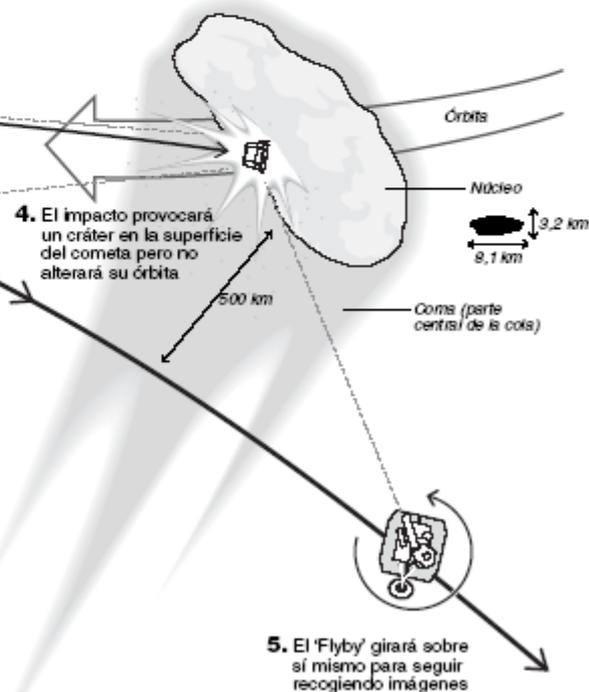
Hoy comienza la misión de la NASA que estudiará la composición del núcleo del cometa Tempel 1 al estrellar contra él un proyectil de 370 kg a una velocidad relativa de 10,2 km/s.



SECUENCIA DEL IMPACTO



La profundidad y diámetro del cráter aportarán datos sobre la composición y dureza del núcleo, información hasta ahora no comprobados.



Impacto profundo

M. R. E., Madrid
Hacer un agujero en un cometa a unos 130 millones de kilómetros de la Tierra es el objetivo de la sonda que la NASA tiene previsto lanzar hoy desde Cabo Cañaveral, en Florida. Con el nombre de

EE UU lanza hoy la nave 'Deep Impact', que estrellará un proyectil contra el cometa Tempel 1 para descubrir sus misterios

proyectil hará un cráter relativamente poco profundo pero espectacular, como un estadio de béisbol". Sin embargo, explica Yeomans, si el cometa es una bola dura de hielo, el cráter será más profundo pero no tan gran-