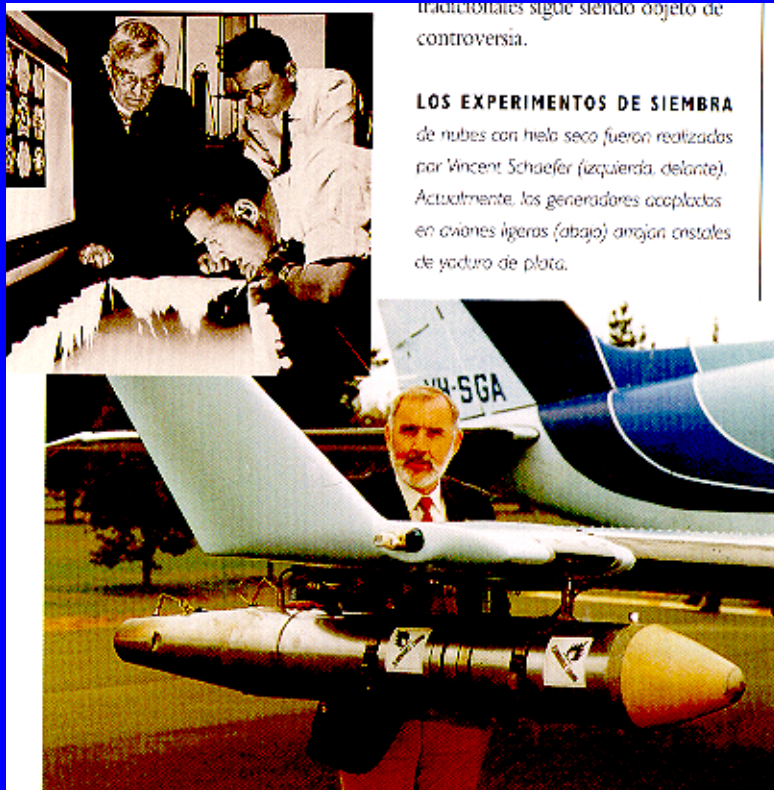


Ejemplos de acciones sobre el medio ambiente.

Acciones locales. Siembra de nubes



tradicional sigue siendo objeto de controversia.

LOS EXPERIMENTOS DE SIEMBRA

de nubes con hielo seco fueron realizadas por Vincent Schaefer (izquierda, delante). Actualmente, los generadores acoplados en aviones ligeros (abajo) arrojan cristales de yoduro de plata.

EL PAÍS, jueves 13 de mayo de 1999

DEPORTES

El Parma se corona sin rival

El **Marsella** se rinde al primer contratiempo y acaba goleado en la final de la **Copa de la UEFA**

MARSELLA	0
PARMA	3

Olimpico de Marsella: Porato; Blondeau, Issa, Blanc, Domoraud, Da Silva (Camara, m. 46); Brando, Bravo, Gourvenec, Pires; y Maurice.

Parma: Buffon; Thuram, Sensi, Cannavaro; Fuser, Dino Baggio, Boghossian, Vanoli; Verón (Fiore, m. 76); Chiesa (Balbo, m. 72) y Crespo.

Goles: 0-1. M. 26. Blanc cabecea pillado hacia su portero, Hernán Crespo adivina la cesión, se anticipa y bate a Porato por arriba.

0-2. M. 36. Vanoli ajusta un cabezazo al palo izquierdo tras un centro preciso de Fuser.

0-3. M. 55. Verón centra desde la derecha, Crespo deja pasar el balón y Chiesa fusila a la escuadra.

Árbitro: Dallas (Escocia). Mostró tarjeta amarilla a Blondeau.

65.000 espectadores en el estadio Luzhnikí de Moscú. Final de la Copa de la UEFA. Campeón, el Parma.

JOSÉ MIGUÉLEZ
No es el Parma un equipo voraz, de esos que siempre quieren más y más. Por eso la final de Moscú concluyó en 3-0. Simplemente en 3-0. La superioridad italiana fue mucho más grande que el resultado. Pero se sintió tan seguro, tan dueño de



Los jugadores del Parma celebran el triunfo con la Copa de la UEFA. / REUTERS

El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes

Siembra: hielo seco, humo de yoduro de plata.,.,



10:37 LST-16,100'



11:12 LST-14,250'
26 min. después de la inseminación



11:20 LST-16,100'
34 min. después de la inseminación



11:31 LST-16,200'
45 min. después de la inseminación

1972:
Cambrige,
EE.UU.

Catastrofes naturales

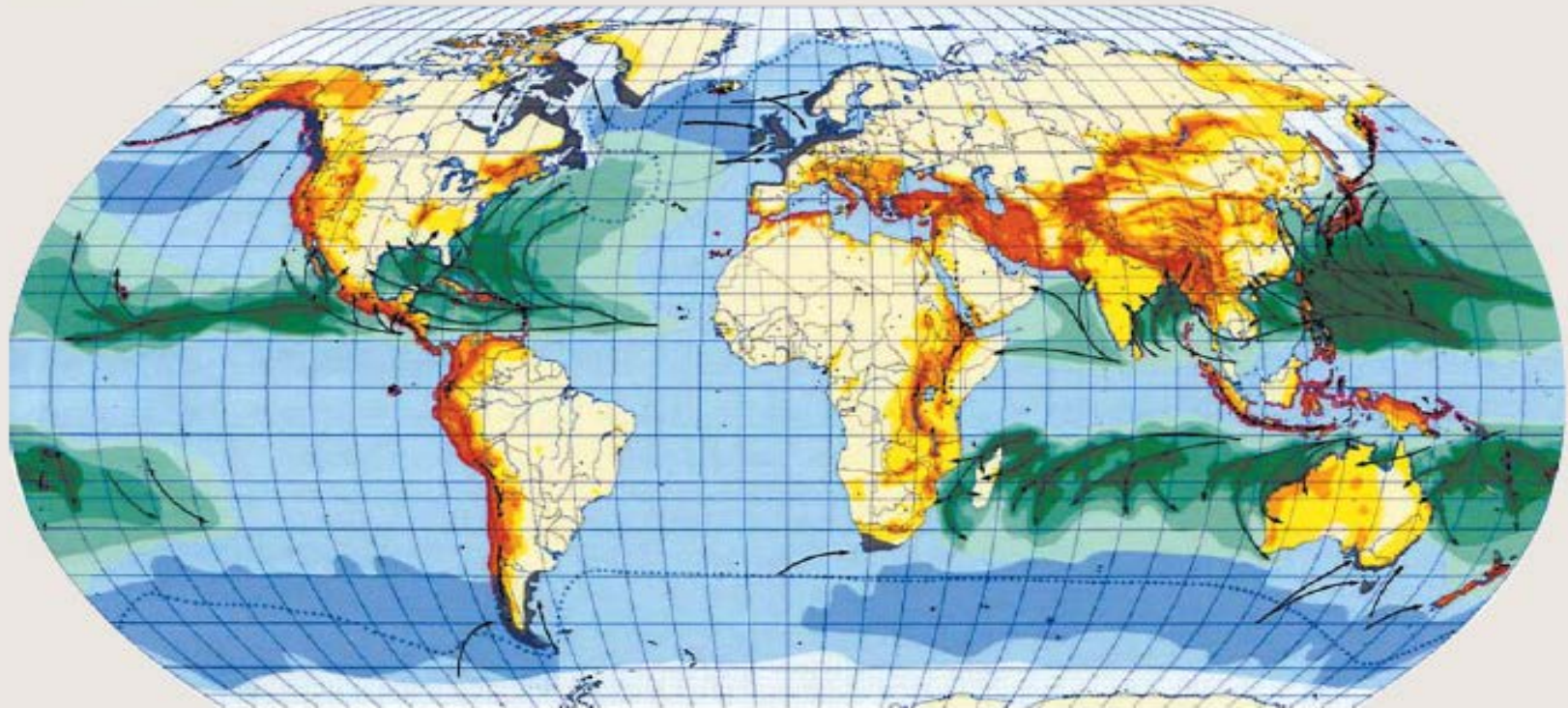
Visión pesimista

EL EFECTO DE LOS DESASTRES NATURALES AUMENTA CADA AÑO POR LA ACCIÓN DEL HOMBRE

Un mundo de catástrofes

<http://www.elpais.es/suplaydomingo>

Atlas de los desastres naturales



SEÍSMO

Escala Mercalli

de terremotos (1-13)

□ Zona 0. M (<5)

□ Zona 1. M (6)

□ Zona 2. M (7)

□ Zona 3. M (8)

□ Zona 4. M (9->)

TORMENTAS TROPICALES

Escala Saffir-Simpson

de huracanes (1-5)

□ Zona 0. SS1 (118-153 km/h)

□ Zona 1. SS2 (154-177 km/h)

□ Zona 2. SS3 (178-209 km/h)

□ Zona 3. SS4 (210-249 km/h)

□ Zona 4. SS5 (Más de 250 km/h)

TORMENTAS DE INVIERNO Y EXTRATROPICALES

□ Peligro de tormentas extratropicales principalmente en invierno

→ Ruta de la principales tormentas

OTROS

▲ Límite de presencia de icebergs

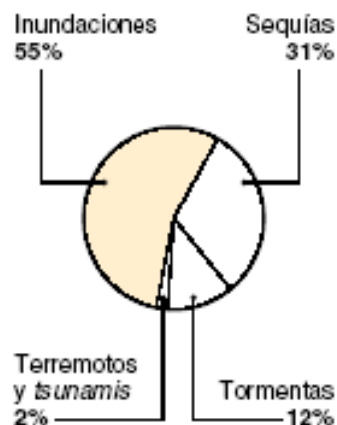
□ Hielo

□ Temporal con olas de más de 5 metros

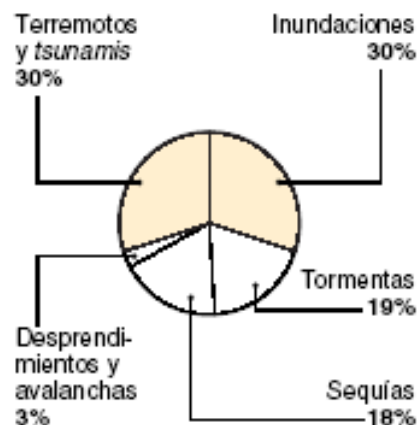
Desastres naturales

N° de afectados	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	TOTAL
Sequías	16.946.500	26.791.404	3.620.000	7.330.100	19.882.535	30.502.145	176.477.015	86.757.493	339.901.401	70.274.114	778.122.707
Terremoto	790.785	1.640.722	5.501.102	1.227.462	2.139.320	6.881.400	2.408.826	8.796.841	611.608	3.955.700	33.953.766
Epidemias	6.564.353	445.078	643.994	334.311	879.459	476.548	1.030.908	200.976	969.159	125.956	11.670.742
Temperaturas extremas	1.108.184	535.278	200	614.580	36.386	725.246	27.686	213.161	103.986	1.839.908	5.204.615
Hambrunas	3.900.000	4.308.000	3.575.590	1.686.000	5.612.950	9.144.594	1.000.000	1.000.000	3.983.000		34.210.134
Inundaciones	127.687.833	198.116.395	178.451.143	44.956.366	290.072.569	149.969.693	62.505.835	34.494.674	277.408.430	166.827.751	1.530.490.689
Plagas		200									200
Desprendimientos	298.406	1.122.349	8.936	33.951	209.131	15.291	208.176	67.351	271.454	458.629	2.693.674
Erupciones	235.750	25.876	6.572	7.200	7.808	34.055	118.996	78.346	278.050	25.000	817.653
Olas gigantes			24	29.000		1.300	17.260		1.720		49.304
Incendios	3.067.413	11.839	5.811	53.159	166.904	18.830	39.035	5.739	26.124	8.833	3.403.687
Tormentas	38.311.466	13.771.290	28.144.129	13.594.067	26.784.268	23.889.154	15.459.454	30.645.189	110.694.349	10.781.408	312.074.774
Total afectados	198.910.690	246.768.431	219.597.501	69.866.196	345.791.330	221.658.256	259.293.191	162.259.770	734.249.281	254.297.299	2.712.691.945
Fallecidos	14.098	54.583	55.226	55.330	90.116	101.671	44.320	63.885	51.177	78.442	609.638
Número de desastres	225	263	228	274	329	385	546	459	508	380	3.597

■ AFECTADOS

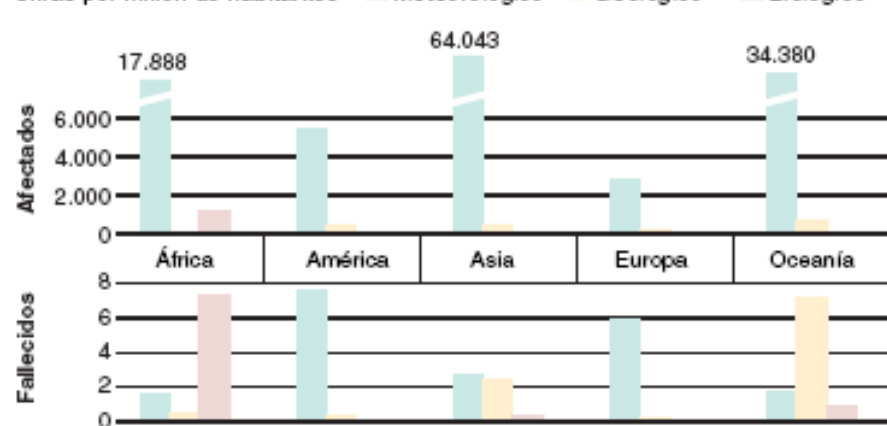


■ FALLECIDOS



■ FALLECIDOS Y AFECTADOS POR CONTINENTES

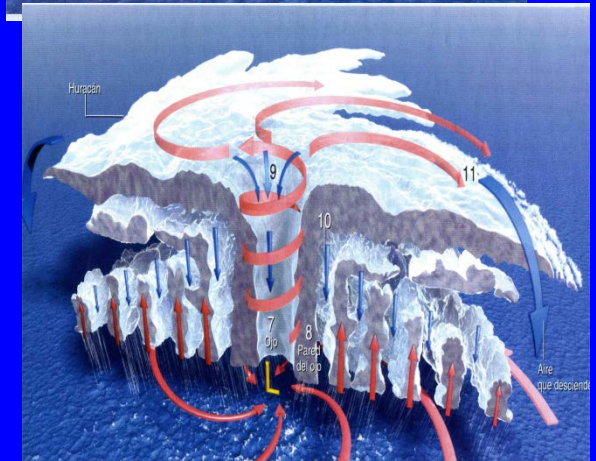
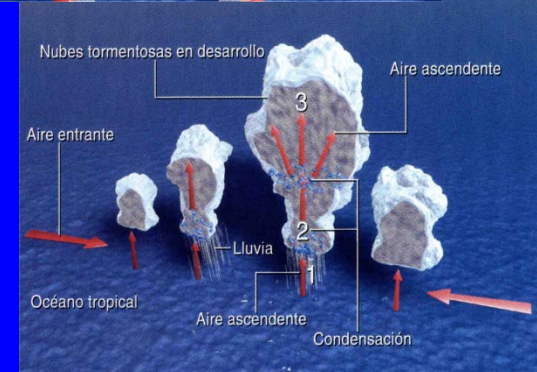
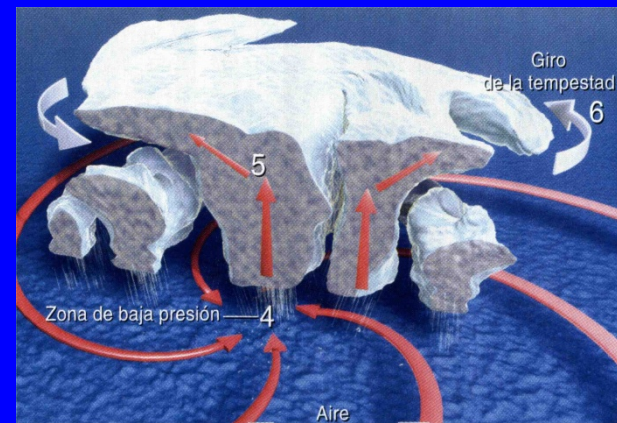
Cifras por millón de habitantes



Fuente: ONU.

EL PAÍS

Visión optimista (quizá en exceso)

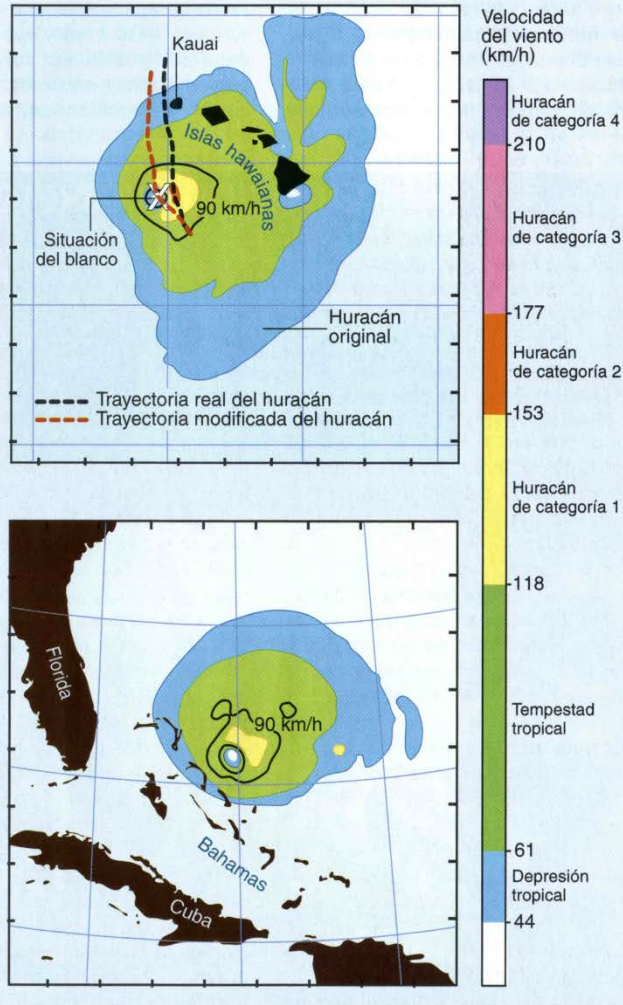


CONTROL DE HURACANES SIMULADOS

Se recurre a modelos informáticos para simular dos huracanes devastadores de 1992, Iniki y Andrew. Los colores representan categorías de velocidad del viento. Las líneas de nivel negras indican vientos de 90 km/h; este valor viene a coincidir con el umbral de devastación del meteoro.

En las simulaciones de Iniki (*derecha*), la trayectoria original del ojo (*línea negra de trazos*) lleva los vientos más fuertes de la tempestad sobre la isla hawaiana de Kauai. Pero cuando varias de las condiciones iniciales del modelo, entre ellas la temperatura y humedad en diversos puntos, se alteraron ligeramente, la trayectoria simulada de la tempestad (*línea roja de trazos*) se desplazó hacia el oeste de Kauai, pasando sobre un blanco elegido a 97 kilómetros de la isla. Después siguió hacia el norte; llegó a un enclave de la isla más a su oeste que el huracán real.

Los mapas de los mares próximos a las Bahamas y Florida (*abajo*) muestran simulaciones de Andrew en su estado inalterado (*izquierda*) y en una forma artificialmente perturbada (*derecha*). Aunque los vientos catastróficos persisten en el caso controlado, las velocidades máximas se han reducido bastante: un huracán de categoría 3 se ha quedado en huracán de categoría 1, mucho menos brutal.



ACTUACIONES SOBRE LOS HURACANES

Las simulaciones informáticas de los huracanes indican que ciertas variaciones en la precipitación, evaporación y temperatura del aire podrían alterar la trayectoria de la tempestad o debilitar sus vientos. La actuación podría tomar varias formas: una siembra aérea de nubes, sobre objetivos meticulosamente seleccionados, con yoduro de plata u otros materiales inductores de precipitación podría servir para privar a la violenta pared del ojo del huracán —la característica fundamental de una gran tempestad tropical— del agua que necesita para crecer e intensificarse (*izquierda*). Se podría distribuir aceite biodegradable sobre la superficie del mar en la tra-

yectoria del huracán para reducir la evaporación, que es la fuente de la energía de una tempestad (*centro*). Futuras estaciones orbitales de producción de electricidad mediante energía solar, que quizá recurran a grandes espejos para focalizar los rayos del sol y a paneles de células fotovoltaicas para cosechar esa energía y transferirla a la Tierra, emitirían microondas, sintonizadas de manera que las absorbiesen las moléculas de vapor de agua de la tempestad o sus alrededores (*derecha*). Las microondas harían vibrar las moléculas de agua y calentarían así el aire circundante. El huracán se debilitaría entonces o se movería en la dirección deseada.



Avión que siembra nubes

Materiales que inducen precipitación

Huracán

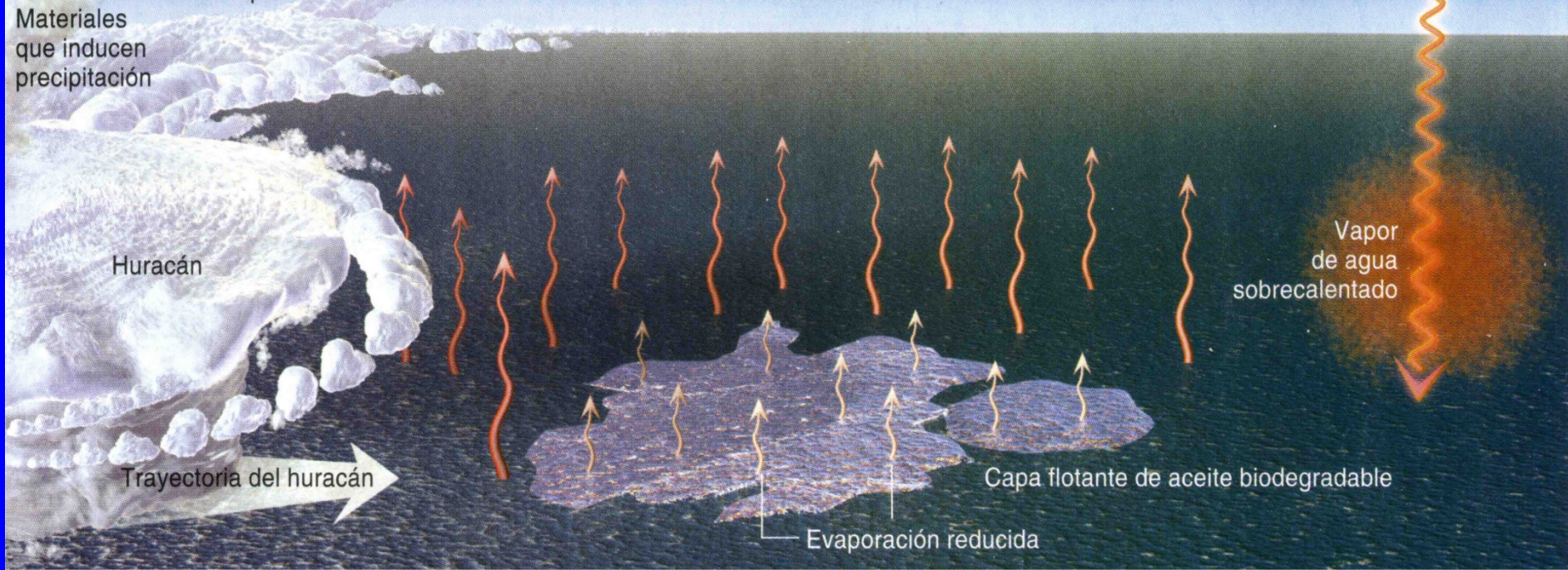
Trayectoria del huracán

Capa flotante de aceite biodegradable

Evaporación reducida

Vapor de agua sobrecalentado

Estación orbital productora de energía

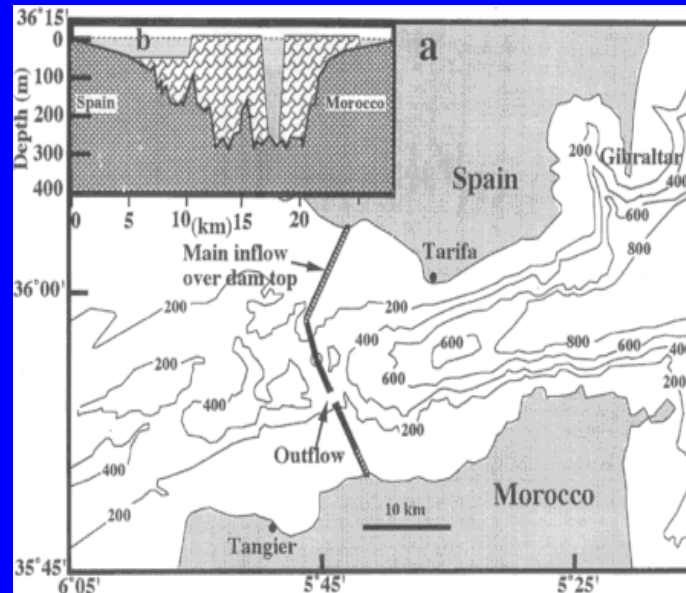
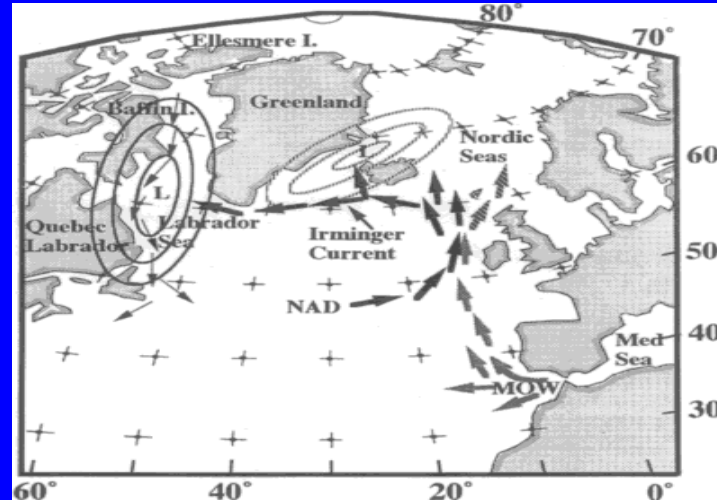


Acciones globales

¿Diques en Gibraltar?

R.G. Thomson

American
Geophysical
Union, 1997



Milankovitch insolation
at 25°N decreases

African monsoons
weaken, Nile discharge
diminishes

Mediterranean hydrologic
deficit increases

Mediterranean salinity
rises, Outflow at
Gibraltar increases

Outflow water upwelling
off Scotland increases

Warm surface water
diverted to Labrador
Sea, cold upwelling
water enters Nordic Seas

Warmer Labrador Sea,
greater advection of
moisture into Canada

Canadian ice-sheet growth
begins as Nordic Seas
and Europe cool

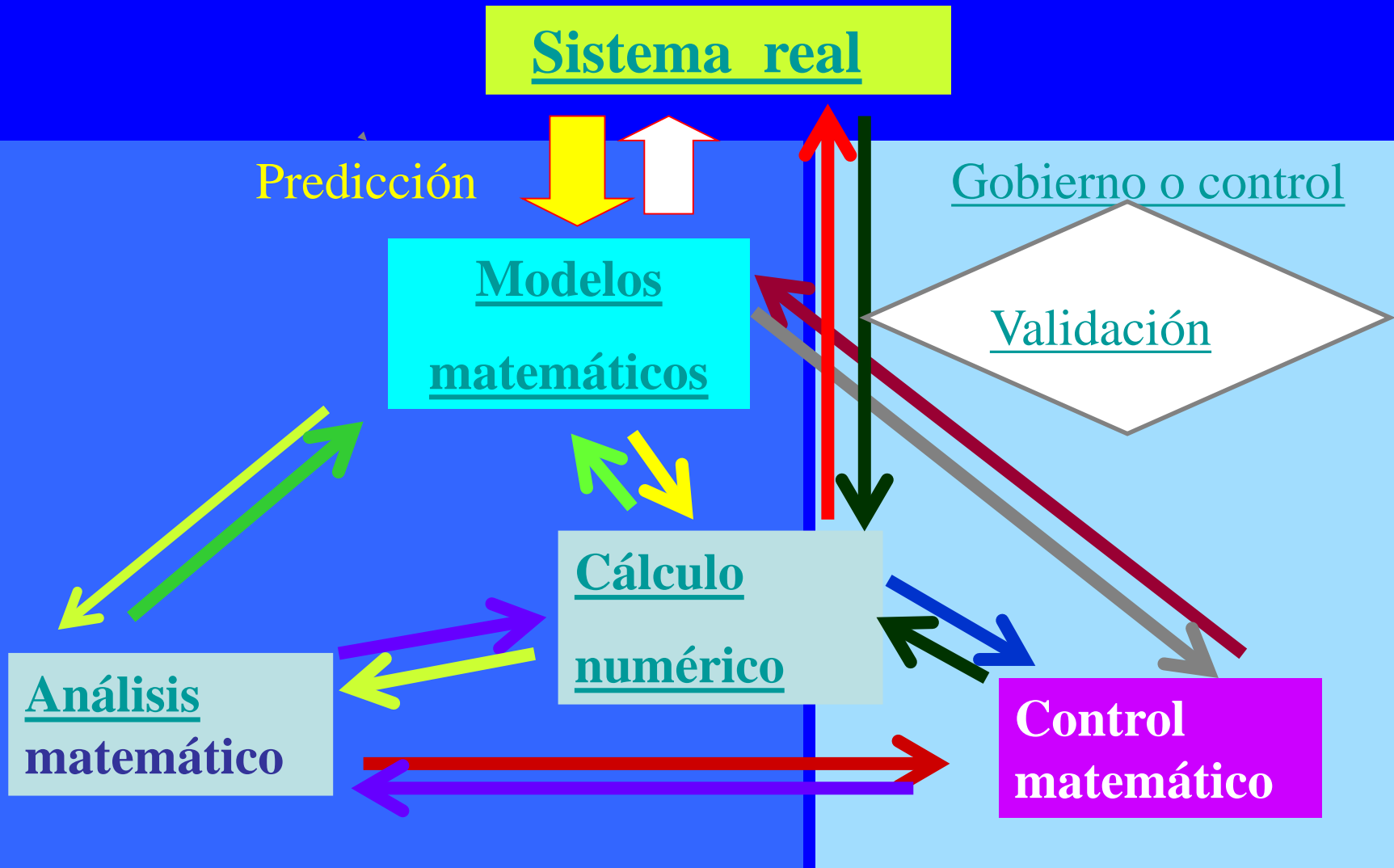
J. von Neumann (1955): Modificación artificial del albedo



The screenshot shows the EL PAÍS website interface. At the top, the logo 'EL PAÍS.COM' is followed by the section 'Sociedad'. The date 'Jueves, 15/11/2007, 00:26 h' is displayed in the top right. A navigation bar includes links for 'Inicio', 'Internacional', 'España', 'Deportes', 'Economía', 'Tecnología', 'Cultura', 'Gente y TV', 'Sociedad', 'Opinión', 'Blogs', and 'Participa'. Below this, there are links for 'El Viajero', 'EPS', 'Domingo', 'Salud', 'Futuro', and 'Educación'. A banner for 'AVANCE' offers a PDF of the newspaper's cover. The main article title is 'Repulsa mundial a un intento de sembrar de hierro el océano', with a subtitle 'Una empresa de EE UU pretende fertilizar el agua marina para absorber CO 2'. The author is listed as 'MARÍA JOSÉ VIÑAS - Santa Cruz - 14/11/2007'.

Captura de CO₂ ...

La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



Teoría de Control / Teoría de juegos

- Estructura general:

$y = \text{estado}(s), \quad u = \text{control}(es)$

- Ley de estado: $F(y_t, Ay, Bu) = 0$ (A y B operadores)
- Funcional de observabilidad: $J(u) = g(u, y(u))$

Problema: optimizar $J(u)$ sobre un conjunto K de posibles controles

- T^a Control: u escalar (un único control)
- T^a de Juegos: u con múltiples componentes
¡Posible conflicto de intereses!

Díaz, J.I., Lions, J.-L.,

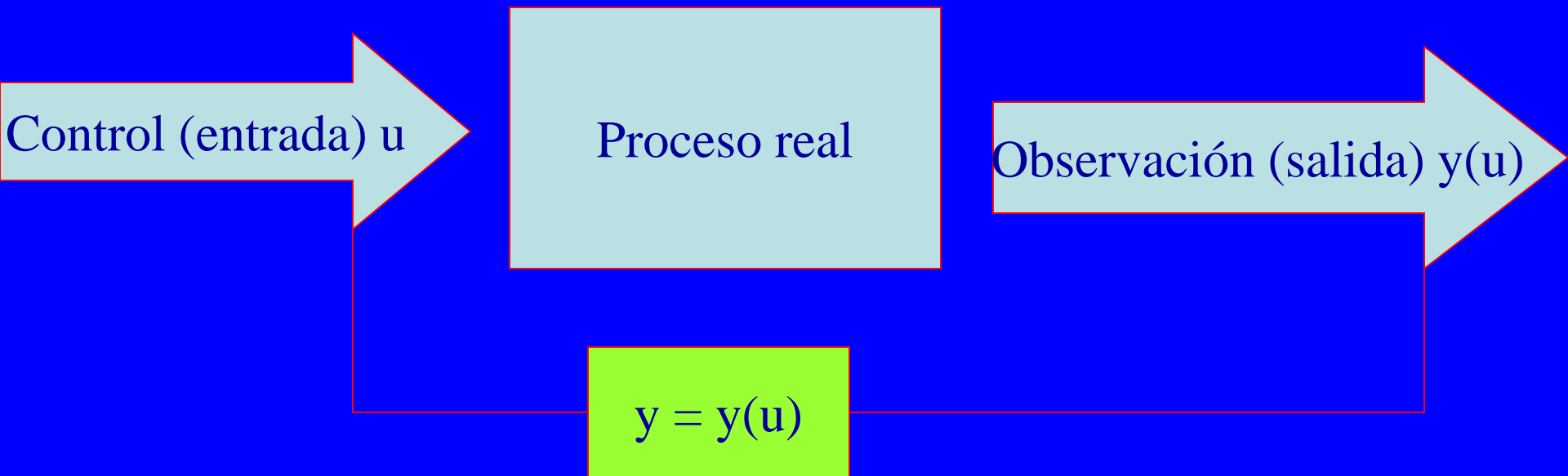
On the Approximate Controllability of Stackelberg-Nash Strategies.

En Mathematics and Environment,

Actas de la Vioconferencia sobre Environment de la EMS,

J.I. Díaz ed., Springer Verlag, Berlin, 2002.

Teoría de Control: planteamiento general



Objetivo: Encontrar el control u para que la observación $y(u)$ sea lo “mejor posible”

Óptimos en espacios de dimensión infinita

La componente económica. Cumbres Mundiales.

Teoría de juegos. Teoría de la decisión bajo incertidumbre₈₂

Mathematical approach

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + A(\mathbf{y}) = \text{sources} + \text{sinks} + \text{actions}$$
$$\mathbf{y}(\cdot, 0) = \mathbf{y}_0(\cdot),$$

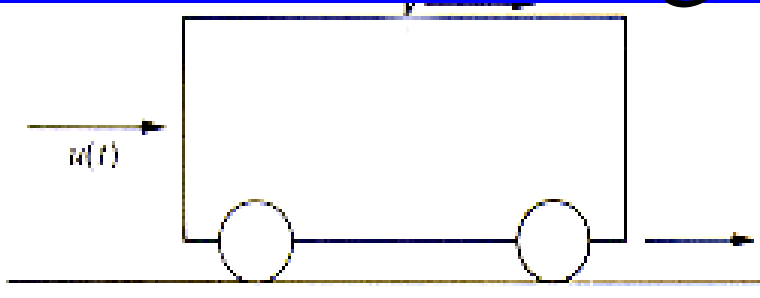
(“actions” = active controls=**unknowns**)

Suppose we are not satisfied with the initial state and that it would be “better” to be near (ideal target state) \mathbf{y}^T : **Given $T > 0$** , can we "drive the system" (by choosing the actions) in such a manner that $\mathbf{y}(\cdot, T)$ let as close as possible to \mathbf{y}^T ?

* a concrete \mathbf{y}^T : **inverse problem**

* \mathbf{y}^T arbitrary in a functional space X : **approximate controllability in X**

bang-bang controls



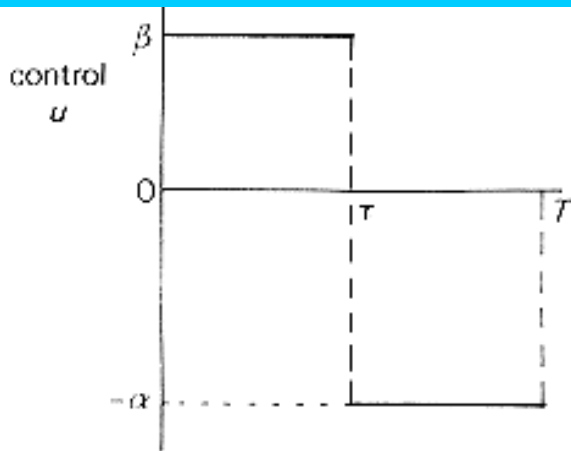
$$V(0)=0$$

$$V(T)=0$$

$$\text{Acceleration } u(t), \quad -\alpha \leq u(t) \leq \beta$$

$$v'(t) = u(t)$$

Problem: find $u(t)$ such that T minimum



ODE with discontinuous coefficients

C. Caratheodory (1873-1950),.....

The von Neumann problem



John von Neumann (1955): *Probably intervention in atmospheric and climate matters will come in a few decades, and will unfold on a scale difficult to imagine at present*

To act on the atmospheric climate by acting on the albedo : **the von Neumann problem**

A single “player” and a single control v (terminology of Control Theory and Games Theory).

In a first part of the lecture, I will report some results on a mathematical formulation (raised to me by J.L. Lions: fax of May 15th, 1999).

Energy Balance Models, M.I. Budyko and W. D. Sellers, (1969):

$$y_t - \Delta y + By + C = QS(x)(\beta(y) + v(x)H(y)) \text{ in } (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$$

$$y = u_i \text{ on } \Gamma \times (0, T)$$

$$y(0, \cdot) = y_0(\cdot) \text{ on } (\mathcal{M} - \mathcal{I}),$$

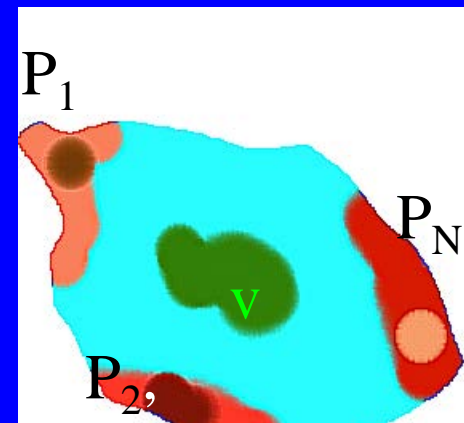
find $v(x)$ such that $y(T; v) = y^T$.

The second part of the lecture: a different problem, many players (nonnecessarily cooperating among them).

An example (an academic scenario) : to maintain “clean ” a resort lake), Ω . Now, the state of the system is $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i(x, t)$ concentrations of various chemical products in the lake or of living organisms (solutions of a set of diffusion-convection equations).

Several local agents or local plants P_1, P_2, \dots, P_N .

Each plant decide its policy w_i . But, there is a different action v made by a representative authority or general manager (**leader**) in contrast to the rest of the players **followers**).



Formulation introduced in Economy by
H von Stackelberg (1934)



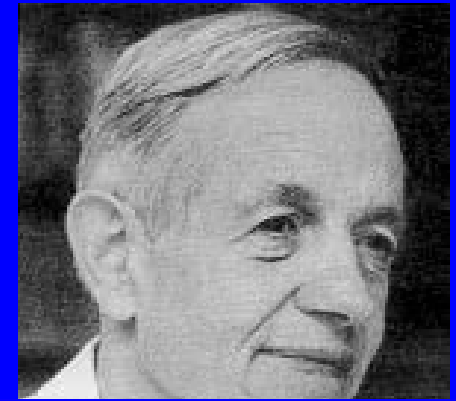
The general goal of the manager (control \mathbf{v}): to “drive the system” at time T , $\mathbf{y}(T:\mathbf{v})$, as close as possible to an ideal state \mathbf{y}^T . Each plant has (essentially) the same goal but it will be particularly careful to the state \mathbf{y} near its location.

Let ρ_i be a smooth function given in Ω .

$$\rho_i(x) \geq 0, \rho_i = 1 \text{ near } P_i.$$

Then P_i try to choose such that $\mathbf{y}(T:\mathbf{v})$, will be “close” to $\rho_i \mathbf{y}^T$ and to achieve this at minimum cost.

$$J_i(v; w_1, \dots, w_N) = \frac{1}{2} \|w_i\|^2 + \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i(\mathbf{y}(\cdot, T) - \mathbf{y}^T)\|^2,$$



The “local” controls w_1, w_2, \dots, w_N assume that the leader has made a choice v and try to find an equilibrium (J.F.Nash,1951) of their cost J_i , i.e., one looks for w_1, w_2, \dots, w_N (as functions of v) such that

$$\left. \begin{aligned} J_i(v; w_1, \dots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots, w_N) &\leq J_i(v; w_1, \dots, w_{i-1}, \widehat{w}_i, w_{i+1}, \dots, w_N) \\ , \forall \widehat{w}_i, \text{ for } i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \right\}$$

The leader v wants now that the global state (i.e. the state $y(.,T)$ in the whole Ω) let as close as possible from y^T

But,..., not always there exists a Nash equilibrium. We shall prove later some sufficient conditions for the existence and uniqueness of it.

We shall show is that if there is existence and uniqueness of a Nash equilibrium for the followers, then the leader can control the system (in the sense of approximate controllability).

Remark.

Stackelberg's type strategy is not the only one possible! One could also replace the Nash equilibrium by a Pareto equilibrium for the followers (see, for instance, J.L. Lions (1986)). Here all the controls w_i agree to work in a strategy where v is the leader, and they agree to work in the context of a Nash equilibrium. Their personal (selfish) interest are expressed in the cost functions J_i as we shall see later.

Remark. Rio (1992), Agenda 21, International Scientific and Technological Community, IPGC,...

Remark. A general reference:

J.L. Lions, *El planeta Tierra*, Espasa, Madrid, 1992

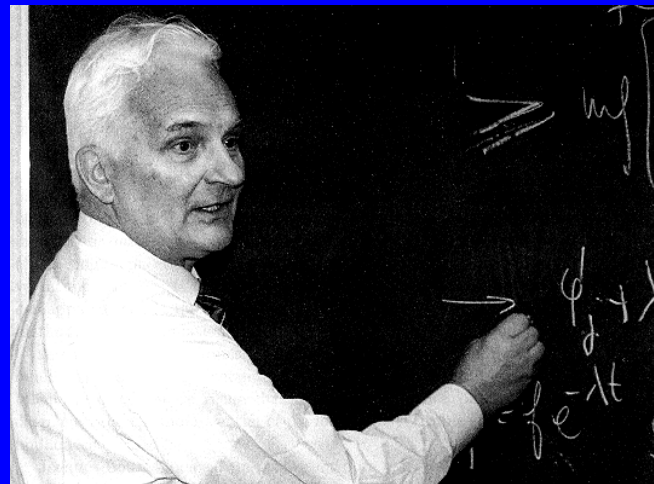
The plan of the rest of this part of the course is the following:

2. The von Neumann problem

J.I. Díaz: Modelos matemáticos en Climatología; la conjetura de von Neumann, In *Les Mathematiques y les seus aplicacions*, Editorial de la UPV, Valencia, 2001, pp. 67-98

3. The Stackelberg-Nash strategies: the optimal leader action.

J. I. Díaz and J.L. Lions, On the Approximate Controllability of Stackelberg-Nash Strategies. In *Ocean Circulation and Pollution Control: A Mathematical and Numerical Investigation (Proceedings of the Diderot Video-conference Amsterdam-Madrid-Venice, December, 1999)* Springer Verlag, 2004 (J.I. Díaz, ed.) pp.17-28.



The von Neumann problem

Energy Balance Models have a diagnostic character and intended to understand the evolution of the global climate on along time scale.

Their main characteristic is the high sensitivity to the variation of solar and terrestrial parameters

Used in the study of the Milankovitch theory of the ice-ages
(R.North, 1984)

The distribution of temperature $y(x,t)$ is expressed pointwise after a standard average process, where the spatial variable x is in the Earth's surface

$$y(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

S. Arrhenius (1896),

W.D. Sellers(1969), M.I. Budyko (1969),....

The von Neumann conjecture

Artificial modification of the coalbedo near the ice cups.

To simplify the exposition

$$R_e(x,r) = Br + C, \quad B > 0.$$

x-dependent Sellers type coalbedo function (Henderson-Sellers).

$$\beta(x, u) = \begin{cases} \beta_i(x) & u < u_i, \\ \beta_i(x) + \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right)(\beta_w(x) - \beta_i(x)) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w(x) & u > u_w, \end{cases}$$

The modification proposed by von Neumann corresponds to

$$\beta(x, u: v) = \beta(u) + v(x)\chi_\omega(x)H(u)$$

$$H(u) = \begin{cases} 0 & u < u_i, \\ \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right) & u_i \leq u \leq u_w, \\ 1 & u > u_w. \end{cases}$$

We assume that the modification is out side the ice cups

$$\omega = \mathcal{M} - \mathcal{I}.$$

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + By + C &= QS(x)(\beta(y) + v(x)H(y)) && \text{in } (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T), \\ y &= u_i && \Gamma \times (0, T), \\ y(0, \cdot) &= y_0(\cdot) && \text{on } (\mathcal{M} - \mathcal{I}), \end{aligned}$$

Inverse Problem: find $v(x)$ such that $y(T;v)=y^T$

Theorem

Let $y_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$, $y_0 = u_i$ on Γ and

$$\Delta y_0 - B y_0 - C + Q S(x) \beta(y_0) \leq 0 \quad \mathcal{M} - \mathcal{I}.$$

Let $y^T \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$, $y^T = u_i$ on Γ and

$$\Delta y(T : 0) \leq \Delta y^T \quad \mathcal{M} - \mathcal{I}.$$

$$\Delta y^T \leq \Delta y(T : 0) + Q S(x) (\beta_w - \beta_i) (H(y(T : 0)) + \delta) \quad \mathcal{M} - \mathcal{I}.$$

Then, there exists

$v \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$ with $v(x) \in [-\mu, 0]$, $\forall x \in (\mathcal{M} - \mathcal{I})$

such that $y(T:v)=y^T$ on $\mathcal{M}-\mathcal{I}$

Remark. To decrease the temperature

$$v(x) \in [-\mu, 0], \quad x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}, \quad \mu = \beta_w - \beta_i.$$

and so, $y(T : -\mu) \leq y^T \leq y(T : 0)$ on $(\mathcal{M} - \mathcal{I})$.

Idea of the proof.

The existence of $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ is reduced to find a fixed point for

$$(\mathcal{T}v)(x) = \frac{y_t(T : v) + By(T : v) + C - \beta(y(T : v)) - \Delta y_d + QS(x)(v(\gamma y(T : v) + \delta))}{QS(x)(H(y(T : v)) + \gamma y(T : v) + \delta)}$$

$$\gamma > \frac{\beta_w - \beta_i}{u_w - u_i}, \quad \delta > \gamma(-u_i)$$

T is a decreasing operator on a suitable “interval”: Amann fixed point theorem on Hölder spaces.

3. The Stackelber-Nash strategies for the approximate controllability

Let A be a second order elliptic operator

$$A\varphi = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x) \varphi$$

with smooth coefficients and

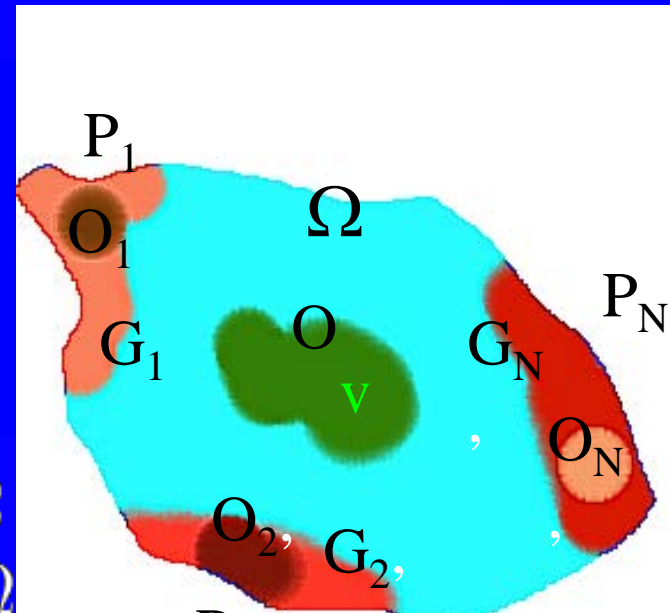
$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

We assume the state equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = v\chi + \sum_{i=1}^N w_i \chi_i$$

χ is the characteristic function of $\mathcal{O} \subset \Omega$

χ_i is the characteristic function of $\mathcal{O}_i \subset \Omega$



Remark. The control of the leader is distributed in O and the control of the follower i is distributed in O_i .

Remark. Since the system is linear there is no restriction in assuming the initial state, sources and sinks to be zero.

We assume that the boundary conditions $y = 0$ on $\partial\Omega \times (0, T)$.

We introduce

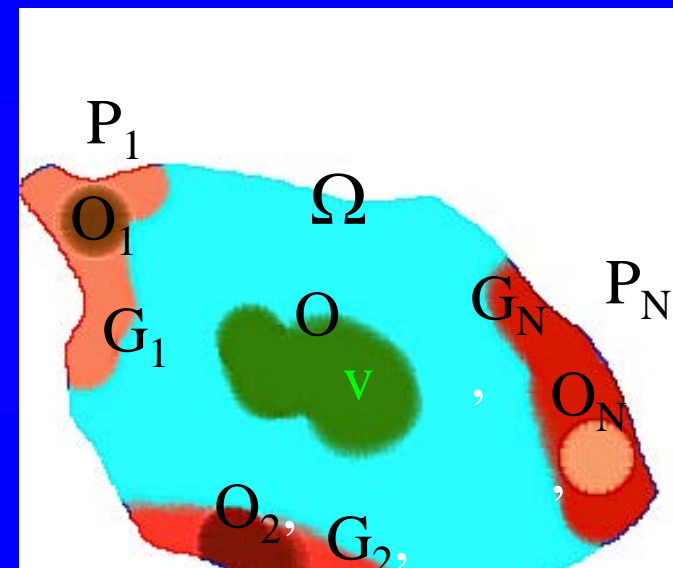
$$\left. \begin{array}{l} \rho_i \in L^\infty(\Omega), \rho_i \geq 0, \\ \rho_i = 1 \text{ in a domain } G_i \subset \Omega. \end{array} \right\}$$

G_i represents the region of the lake the plant P_i is particularly interested (the place near P_i for instance!). If P_i is selfish, then $\rho_i = 0$ outside.

We define the cost function J_i

$$J_i(v; w_1, \dots, w_N) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} w_i^2 dx dt + \frac{\alpha_i}{2} \left\| \rho_i y(T; v, \mathbf{w}) - \rho_i y^T \right\|^2,$$

$\|\cdot\|$ is the norm in $L^2(\Omega)$



We assume

$$v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)), w_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$$

Given $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, we now define

$$\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}, \text{ a Nash equilibrium for the cost functions } J_1, \dots, J_N .$$

This Nash equilibrium can be defined as a function of \mathbf{v} :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(v) \text{ or } w_i = w_i(v), \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = v\chi + \sum_{i=1}^N w_i(v)\chi_i$$

The initial problem for this system admits a unique solution $y(\mathbf{x}, t; \mathbf{v}, \mathbf{w}(\mathbf{v}))$

Theorem. Assume that there exists a unique Nash equilibrium. Then, when \mathbf{v} spans $L^2(O) \times (0, T)$, the functions $\mathbf{y}(x, t; \mathbf{v}, \mathbf{w}(\mathbf{v}))$ describe a dense subset of $L^2(\Omega)$. In other words, there is approximate controllability when a Stackelberg-Nash strategy is followed.

A non constructive proof of the theorem.

The Nash equilibrium is characterized by

$$\int_0^T \int_{O_i} w_i \widehat{w}_i dx dt + \alpha_i \int_{\Omega} \rho_i^2 (y(T; v, \mathbf{w}) - y^T) \widehat{y}_i(T) dx = 0 \quad \forall \widehat{w}_i,$$

where

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial t} + A \widehat{y}_i &= \widehat{w}_i \chi_i, \\ \widehat{y}_i(0) &= 0, \text{ in } \Omega, \quad \widehat{y}_i = 0 \text{ in } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \right\}$$

We introduce the adjoint state \mathbf{p}_i
$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p_i}{\partial t} + A^* p_i &= 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ p_i(x, T) &= \rho_i^2(x) (y(x, T; v, \mathbf{w}) - y^T(x)) \text{ in } \Omega, \\ p_i &= 0 \text{ in } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \right\} \quad A^* \text{ adjoint of } A.$$

Multiplying and integrating by parts

$$\int_{\Omega} \rho_i^2 (y(T; v, \mathbf{w}) - y^T) \widehat{y}_i(T) dx = \int_0^T \int_{\Omega} p_i \widehat{w}_i \chi_i dx dt,$$

so that

$$\int_0^T \int_{O_i} (w_i + \alpha_i p_i) \widehat{w}_i dx dt = 0, \quad \forall \widehat{w}_i,$$

$$\text{i.e., } w_i + \alpha_i p_i \chi_i = 0.$$

We want to show that the set described by $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \mathbf{v}, \mathbf{w}(\mathbf{v}))$ is dense.

By the Hahn-Banach theorem, it suffices to show that if \mathbf{f} is given in $L^2(\Omega)$, and we assume that

$$(\mathbf{y}(\cdot, T; v), \mathbf{f}) = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega) \text{ then, } \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Let us define the auxiliary adjoint problem

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A^* \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A \psi_i &= -\alpha_i \varphi \chi_i, \\ \varphi(T) &= f + \sum_i \psi_i(T) \rho_i^2, \\ \psi_i(0) &= 0, \\ \varphi = 0, \psi_i = 0 &\text{ in } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \right\}$$

Multiplying the first (resp. the second) equation by \mathbf{y} (resp. \mathbf{p}_i) we get

$$\begin{aligned} & -(f + \sum_i \psi_i(T) \rho_i^2, \mathbf{y}(T)) + \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + A \mathbf{y} \right) dx dt + \\ & \sum_i (\psi_i(T), \mathbf{p}_i(T)) + \\ & + \sum_i \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i \left(-\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} + A^* \mathbf{p}_i \right) dx dt \\ & = - \sum_i \alpha_i \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \mathbf{p}_i \chi_i dx dt. \end{aligned}$$

Then

$$-(f, y(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi v \chi dx dt = 0.$$

Therefore $\varphi = 0$ on $\mathcal{O} \times (0, T)$.

Using Mizohata's Unique Continuation theorem

$$\varphi = 0 \text{ on } \Omega \times (0, T).$$

and $\psi_i = 0$ in $\partial\Omega \times (0, T)$ imply that

$$\psi_i = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \forall i = 1, \dots, N,$$

so that $f = 0$ and the proof ends.

A criterion for the existence and uniqueness of Nash equilibria:

Let

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_i &= L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T)), \\ \mathcal{H} &= \prod_{i=1}^N \mathcal{H}_i, \\ L_i \widehat{w}_i &= \widehat{y}_i(T) \end{aligned} \right\} \text{which defines } L_i \in L(\mathcal{H}_i; L^2(\Omega)).$$

Since \mathbf{v} is fixed, one can write

$$y(T; v, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N L_i w_i + z^T, \quad z^T \text{ fixed.}$$

With these notations we can rewrite

$$J_i(v; \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|w_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2} \left\| \rho_i \left(\sum_j L_j w_j - \eta^T \right) \right\|^2$$

$\eta^T = y^T - z^T$. Then $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ is a *Nash equilibrium* iff

$$\begin{aligned} (w_i, \widehat{w}_i)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i (\rho_i (\sum_j L_j w_j - \eta^T), \rho_i L_i \widehat{w}_i) &= 0. \\ \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \widehat{w}_i \end{aligned}$$

Or, equivalently

$$w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{j=1}^N L_j w_j \right) = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \eta^T), \forall i = 1, \dots, N,$$

$L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); \mathcal{H}_i)$ is the adjoint of L_i

Or, vectorially

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{w} &= \text{given in } \mathcal{H} \\ \mathbf{L} &\in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}) \\ (\mathbf{L} \mathbf{w})_i &= w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{j=1}^N L_j w_j \right). \end{aligned} \right\}$$

Proposition. Assume that $\alpha = \alpha_i \quad \forall i$ and

$\alpha \|\rho_i - \rho_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2$ is small enough, for any $i, j = 1, \dots, N$.

Then \mathbf{L} is invertible. In particular there is a unique Nash equilibrium

Proof. We can write

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^N \|w_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 + \alpha \left\| \sum_{i=1}^N \rho_i L_i w_i \right\|^2 \\ &+ \alpha \sum_{i,j=1}^N (\rho_i - \rho_j)^2 (L_j w_j, L_i w_i) \end{aligned}$$

Then, by applying Young's inequality

$$(\mathbf{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}^2, \text{ for some } \gamma > 0.$$

The conclusion is now consequence of the Lax-Milgram theorem.

Remark. It is possible to show (see Díaz-J.L. Lions (1999)) that the assumptions are optimal in some suitable sense.

Remark: There are infinite controls \mathbf{v} leading to the approximate controllability.

The optimal leader action: a constructive proof . Given $\delta > 0$

we want to find the best leader control \mathbf{v} in the sense that

$$\inf_{v \in L^2(\omega \times (0, T))} \left\{ \frac{1}{2} \int_{O \times (0, T)} |v|^2 dx dt, \quad y(T, v) \in y^T + \delta B_{L^2(\Omega)} \right\}, \quad \text{B unit ball.}$$

Theorem. i) The minimum \mathbf{v} is given by $v = \varphi \chi$

from the unique solution $\{y, p_1, \varphi, \psi_1\}$ of the Optimality System

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i \chi_i = \varphi \chi,$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial t} + A^* p_i = 0$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A^* \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A \psi_i = -\alpha_i \varphi \chi_i$$

$$\varphi(T) = f + \sum \psi_i(T) \rho_i^2, \quad p_i(T) = \rho_i^2 (y(T) - y^T),$$

$$y(0) = 0, \quad \psi_i(0) = 0$$

$$y = p_i = \varphi = \psi_i = 0 \text{ on } \Sigma$$

with \mathbf{f} given by the minimization problem

$$\inf \{I(f) : f \in L^2(\Omega)\},$$

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_{O \times (0,T)} |\varphi|^2 dxdt + \delta \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} f y^T dx$$

ii) The minimization dual problem has a unique solution

Idea of the Proof. i) Let

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{O \times (0,T)} |v|^2 dxdt$$

$$G(f) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } f \in y^T + \delta B_{L^2(\Omega)} \\ +\infty & \text{otherwise on } L^2(\Omega) \end{array} \right\}$$

Then, an equivalent formulation is

$$\inf_{v \in L^2(O \times (0,T))} (F(v) + G(Lv)), \quad \text{where } Lv = y(T:v).$$

By Fenchel and Rockafellar's (1967) duality

$$\inf_{v \in L^2(O \times (0, T))} (F(v) + G(Lv)) = - \inf_{f \in L^2(\Omega)} (F^*(L^* f) + G^*(-f))$$

where L^* is the adjoint operator and F^* the conjugate function

$$F^*(\varphi) = \sup_{\hat{\varphi}} ((\varphi, \hat{\varphi}) - F(\hat{\varphi})).$$

But, $F^*(\varphi) = \varphi$, $G^*(f) = \delta \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} f y^T dx$, and $L^* f = \varphi \chi$

which gives conclusion i). The proof of ii) comes from the fact that $I(f)$ is strictly convex, continuous and coercive (by the Unique Continuation theorem).

Remark. f is characterized as the unique solution of the Variational Inequality

$$(y(T; f) - y^T, \hat{f} - f) + \delta \left\| \hat{f} \right\| - \delta \|f\| \geq 0, \\ \forall \hat{f} \in L^2(\Omega).$$

Remark: Non linear state equations 1. Sublinear case

A) Controllability via linearisation and fixed point arguments for state equations with A given by .

$$Ay = -\Delta y + f(y), \text{ or } Ay = -\Delta y + \operatorname{div} \mathbf{f}(y)$$

f, \mathbf{f} sublinear at the infinity,

$$|f(s)| \leq C_1 + C_2|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}, |s| > \overline{M}$$

Henry (1976), Fabre, Puel, Zuazua (1992),...

B) Controllability via a penalized optimal control problem.

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(O \times (0, T))}^2 + \frac{k}{2} \|y(T; v) - y_T\|_{L^2(\Omega)}^2$$

passing to the limit, as k increases to infinity.

(Idea of J.L. Lions, Málaga, 1991)

Non linear state equations 2. Superlinear case.

Obstruction

Semilinear equation: Henry (Bamberger), 1976,
energy method

Universal super and subsolutions over the exterior to the
control subdomains

Burger equation

J.I.Díaz, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, t. 1
312, Série I, 519-522, 1991, and J.I.Díaz and A.M.Ramos, *Revista de la
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Nat. de Madrid*, Tomo
LXXXIX, 11-30, 1995

H. Brezis and E.H. Lieb, Long Range Atomic
Potentials in Thomas-Fermi Theory, *Commun. Math.
Phys.*,. 65,(1979), 234-246.

Remark. Some related numerical experiences: control for EBM

J.I. Díaz and A. M. Ramos, In CD-Rom Proceedings European Congress Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000).

$$y_t - y_{xx} + y^3 = \arctgy + u(t)\delta_{1/2} \text{ in } (0,1) \times (0,T),$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0 \quad t \in (0,T),$$

$$y(x,0) = y^0(x) \quad x \in (0,1),$$

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,T)} + \frac{k}{2} \|y(T, \cdot; u) - y_d\|_{L^2(0,1)}$$

$$k = 10^{12}$$

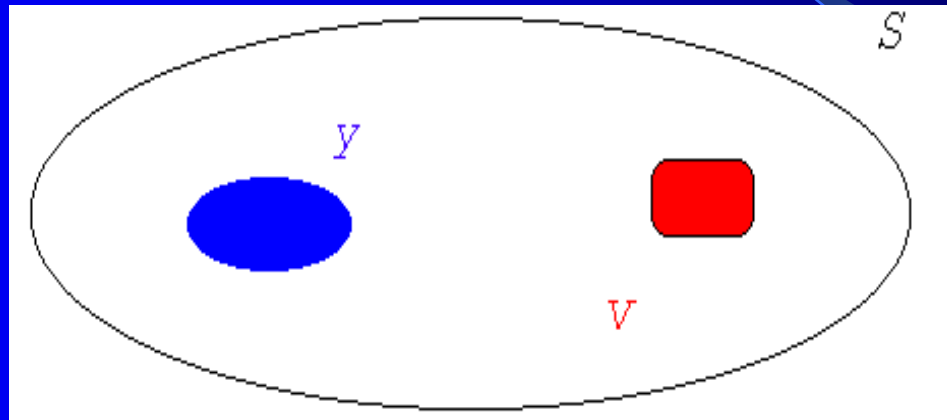
The cost of control decreases with complexity:

J.I. Díaz and J.L. Lions (Semilinear heat equation with blow-up)

CRAS, 2000, IFIP (Chemonix, 2000: Birkhauser)

Motivation

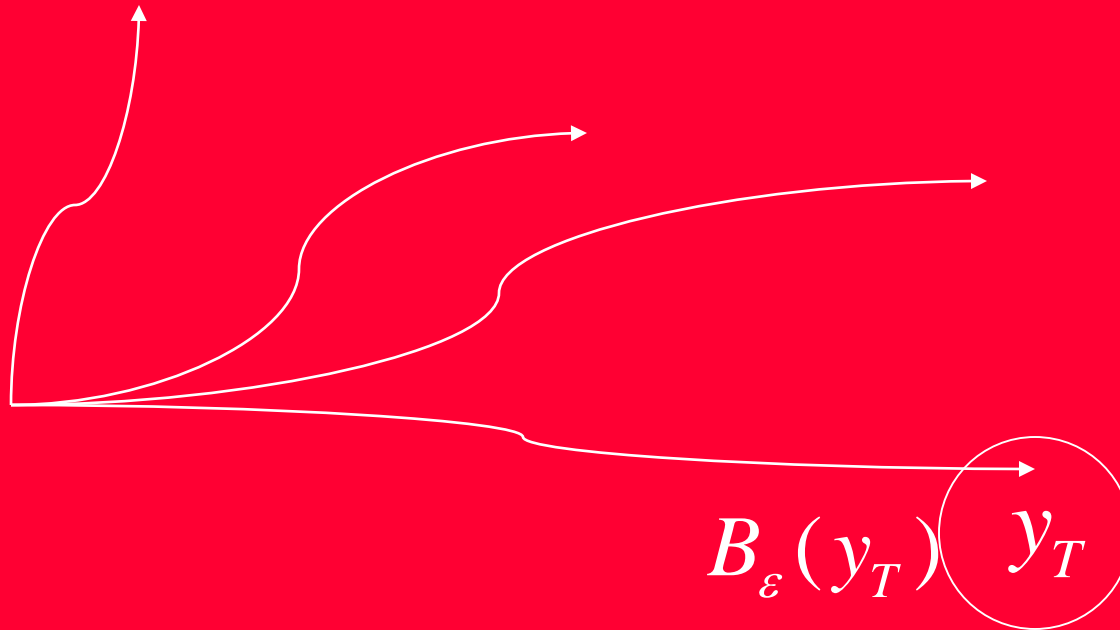
Approximate Controllability Problem



$S(t)$ =System (Physical Phenomenon, Financial Market, etc.)

$v(t)$ = Control perturbing System S

$y(t;v)$ =Variable describing some relevant aspects of S



Aproximate Controllability Question:

Can we find u such that $y(T;u) \in B_\varepsilon(y_T)$?

($\Leftrightarrow \|y(T;u) - y_T\| < \varepsilon$?)

Some known results 1

$$\Omega \subset \square^n; T > 0; w \subset \Omega; y_T \in L^2(\Omega); \varepsilon > 0$$

$$Q := \Omega \times (0, T); \Sigma := \partial\Omega \times (0, T); q := w \times (0, T)$$

1) Linear Heat Equation

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = v \chi_w & \text{in } Q \\ y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

OK (Lions 90):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in L^2(q) / \left\| y(T; u_\varepsilon) - y_T \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

Some known results 2

2) Semi Linear
Heat Equation

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = v \chi_w & \text{in } Q \\ y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

If $f(s)$ is sublinear at infinity $\Rightarrow OK$.

(Fabre-Puel-Zuazua 92; Diaz-Ramos 95)

If $f(s) = |s|^{p-1}s$, $p > 1 \Rightarrow$ Not OK. (Obstruction Phenomenon)

(Diaz-Ramos 95)

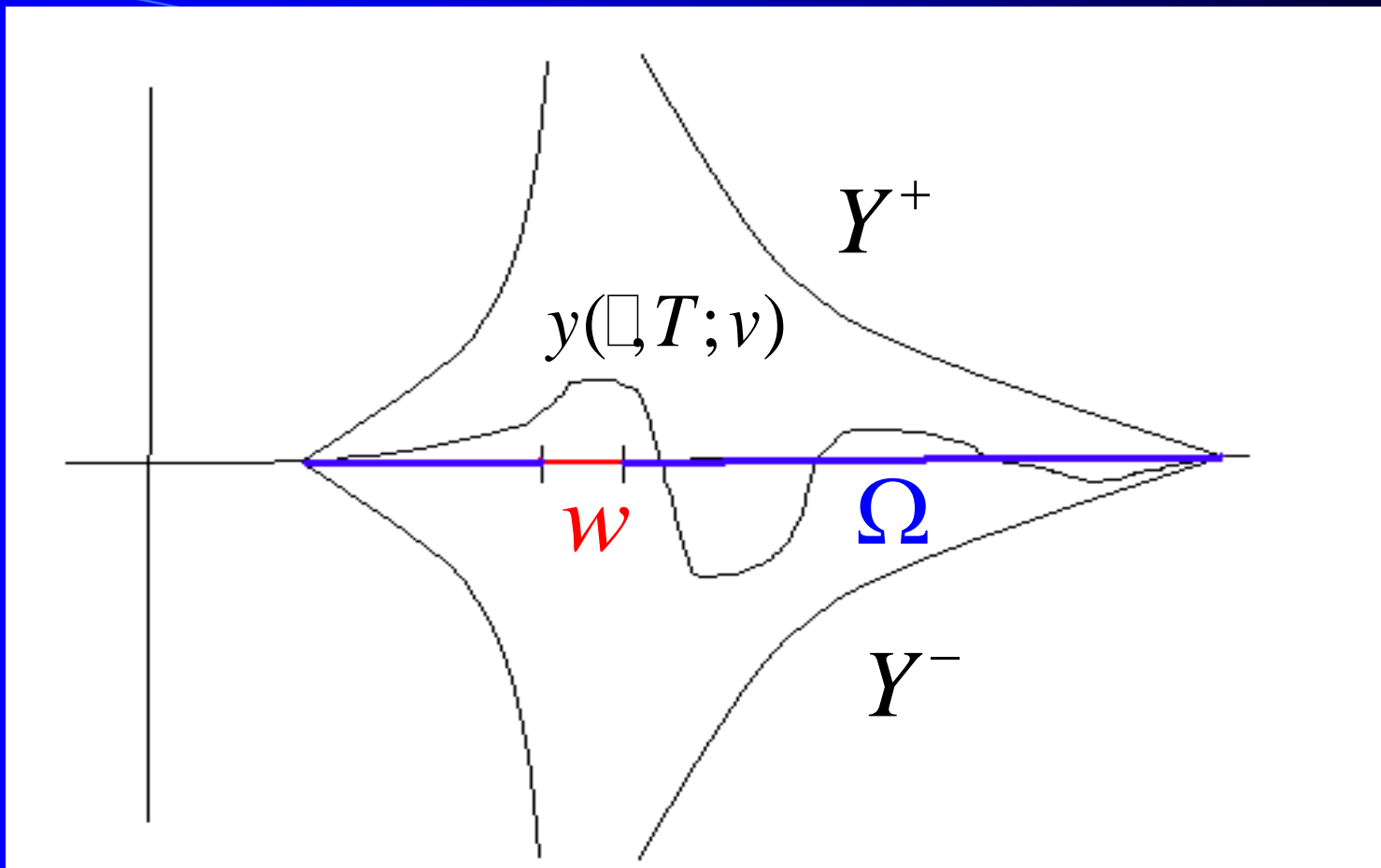
Obstruction Phenomenon

$f(s) = |s|^{p-1} s$, with $p > 1$ and $y(t, x; v)$
solution of the semilinear heat equation

Díaz-Ramos 95:

$$\exists Y^+, Y^- \in L^2(Q \setminus q) : \forall v \in L^2(q),$$

$$Y^-(x, t) \leq y(x, t; v) \leq Y^+(x, t), \text{ a.e. } (x, t) \in Q \setminus q$$



\Rightarrow No Approximate controllability

Díaz 1994:

Approximate Controllability under the assumption:

$$Y^-(x, T) \leq y_T(x) \leq Y^+(x, T) \quad a.e. x \in \Omega \setminus w$$

Technical and non constructive proof.

We want to numerically validate this result

We need:

A numerical scheme to compute suitable controls

Formulation of the Problem

$\Omega = (0,1)$; $w = \{a\}$; $f \in C^1$ \square superlinear

$v \in L^2(0,T)$; $y_0 \in L^2(0,1) \Rightarrow y(T) \in L^2(0,1)$

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + f(y) = v(t)\delta(x-a) & \text{in } Q \\ y(0,t) = 0 = y(1,t) & t > 0 \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_t^\pm - Y_{xx}^\pm + f(Y^\pm) = 0 & \text{in } Q \setminus q \\ Y^\pm(0,t) = 0 = Y^\pm(1,t); Y^\pm(a,t) = \pm\infty & t > 0 \\ Y^\pm(0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Penalty Method:

$$Y^-(x, T) \leq y_T(x) \leq Y^+(x, T) \quad a.e. x \in \Omega \setminus w$$

We solve the Optimal Control Problem:

$$(CP)_k \begin{cases} \text{Find } u_k \in L^2(q): \\ J_k(u_k) \leq J_k(v) \quad \forall v \in L^2(q) \end{cases}$$

where

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{k}{2} \|y(T, v) - y_T\|_{L^2(0, 1)}^2$$

We hope that $y(T; u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_T$ in $L^2(\Omega)$

To solve $(CP)_k$ we try to solve $\nabla J_k(u) = 0$

It is easy to prove that

$$\nabla J_k(v) = v + p(a, \cdot)$$

where

$$\begin{cases} -p_t - p_{xx} + f'(y)p = 0 & \text{in } Q \\ p(0, t) = 0 = p(1, t) & t > 0 \\ p(T) = k(y(T; v) - y_T) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Time Discretization

$$\Delta t = T / N, t^n = n\Delta t \Rightarrow 0 < t^1 < \dots < t^N = T$$

$$(CP)_k^{\Delta t} \begin{cases} \text{Find } u_k^{\Delta t} \in \mathfrak{R}^N : \\ J_k^{\Delta t}(u_k^{\Delta t}) \leq J_k^{\Delta t}(v) \quad \forall v \in \mathfrak{R}^N \end{cases}$$

where

$$J_k^{\Delta t}(v) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N |v^n|^2 + \frac{k}{2} \left((1 - \theta) \left\| y^{N-1} - y_T \right\|_{L^2(0,1)}^2 + \theta \left\| y^N - y_T \right\|_{L^2(0,1)}^2 \right)$$

Second order accurate time scheme:

$$y^0 = y_0,$$

$$\begin{cases} \frac{y^1 - y^0}{\Delta t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{2}{3} y^1 + \frac{1}{3} y^0 \right) + f(y^1) = \frac{2}{3} v^1 \delta(x - a) \\ y^1(0) = y^1(1) = 0, \end{cases}$$

and for $n \geq 2$,

$$\begin{cases} \frac{\frac{3}{2} y^n - 2y^{n-1} + \frac{1}{2} y^{n-2}}{\Delta t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} y^n + f(y^n) = v^n \delta(x - a) \\ y^n(0) = y^n(1) = 0, \end{cases}$$

To solve $(CP)_k^{\Delta t}$ we try to solve $\nabla J_k^{\Delta t}(u) = 0$

It is easy to prove that

$$\nabla J_k^{\Delta t}(v) = \left\{ v^n + p^n(a) \right\}_{n=1}^N$$

where

$$p^{N+2} = -8k(1-\theta)(y^{N-1} - y_T) - 2k\theta(y^N - y_T),$$

$$p^{N+1} = -2k(1-\theta)(y^{N-1} - y_T),$$

and for $n = N, \dots, 1,$

$$\begin{cases} \frac{3/2 p^n - 2p^{n+1} + 1/2 p^{n+2}}{\Delta t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} p^n + f'(y^n) p^n = 0 \\ p^n(0) = p^n(1) = 0, \end{cases}$$

Full Discretization

$$(CP)_{k,h}^{\Delta t} \begin{cases} \text{Find } u_{k,h}^{\Delta t} \in \mathfrak{R}^N : \\ J_{k,h}^{\Delta t}(u_{k,h}^{\Delta t}) \leq J_{k,h}^{\Delta t}(v) \quad \forall v \in \mathfrak{R}^N \end{cases}$$

$$J_{k,h}^{\Delta t}(v) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N |v^n|^2$$

$$+ \frac{k}{2} \left((1 - \theta) \left\| y_h^{N-1} - y_T \right\|_{L^2(0,1)}^2 + \theta \left\| y_h^N - y_T \right\|_{L^2(0,1)}^2 \right)$$

$\left\{ y_h^n \right\}_{n=1}^N$ obtained with time discretization + F.E.M.

To solve $(CP)_{k,h}^{\Delta t}$ we try to solve $\nabla J_{k,h}^{\Delta t}(u) = 0$

$$\nabla J_{k,h}^{\Delta t}(v) = \left\{ v^n + p_h^n(a) \right\}_{n=1}^N$$

$\left\{ p_h^n \right\}_{n=1}^{N+2}$ obtained with time discretization + F.E.M.

Finally, quasi-Newton method `a la BFGS
(Liu-Nocedal 89) to solve $\nabla J_{k,h}^{\Delta t}(u) = 0$

Numerical Experiments

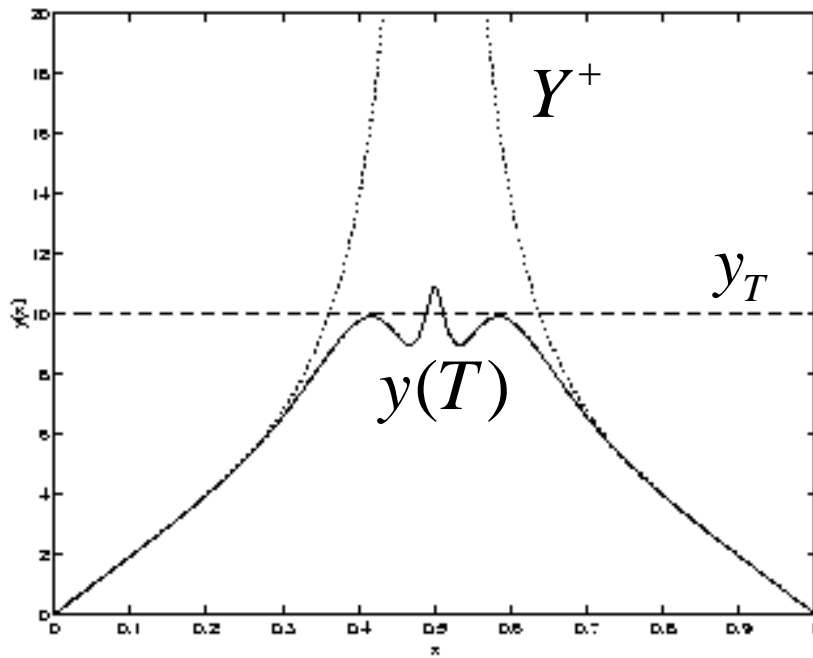
$$T = 1, \quad N = 1000, \quad h = \frac{1}{512},$$

$$k = 10^{12}, \quad a = 0.5, \quad \theta = \frac{2}{3}, \quad y_0 = 0$$

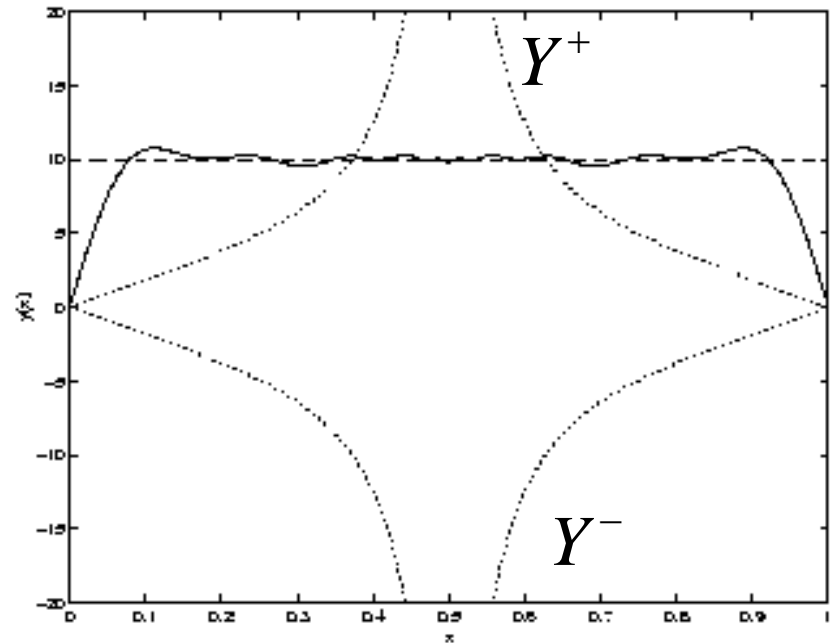
BFGS algorithm: $v_1, v_2, \dots, v_p, \dots$

$$\text{Stop: } \left\{ \begin{array}{l} \|\nabla J_{k,h}^{\Delta t}(v_p)\|_{\infty} \leq 10^{-5}, \text{ or} \\ \frac{|J_{k,h}^{\Delta t}(v_{p-1}) - J_{k,h}^{\Delta t}(v_p)|}{\max\{|J_{k,h}^{\Delta t}(v_{p-1})|, |J_{k,h}^{\Delta t}(v_p)|, 1\}} \leq 2 \cdot 10^{-9} \end{array} \right.$$

Test 1: $y_T \equiv 10$

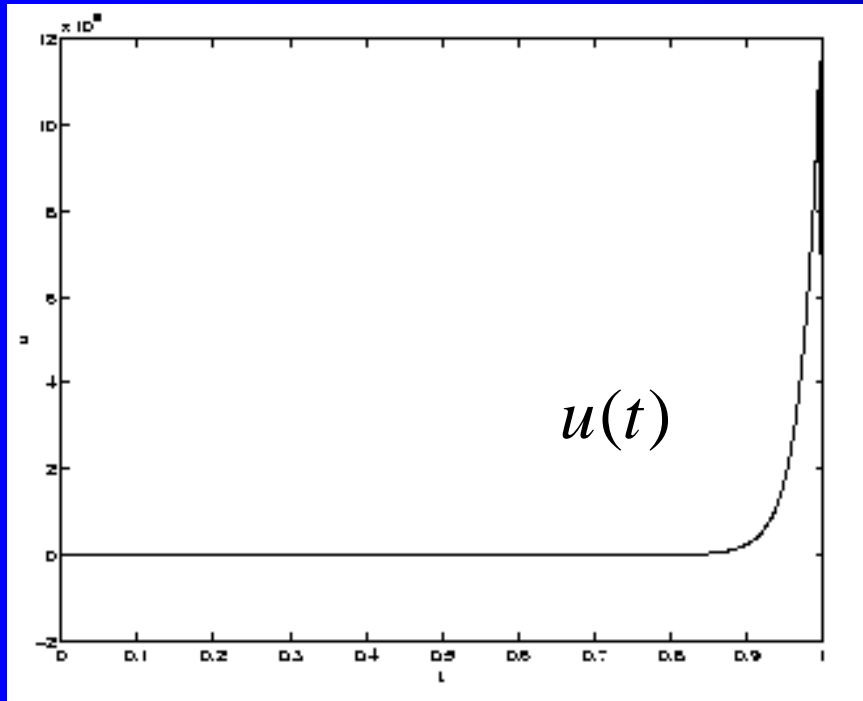


$$f(y) = y^3$$

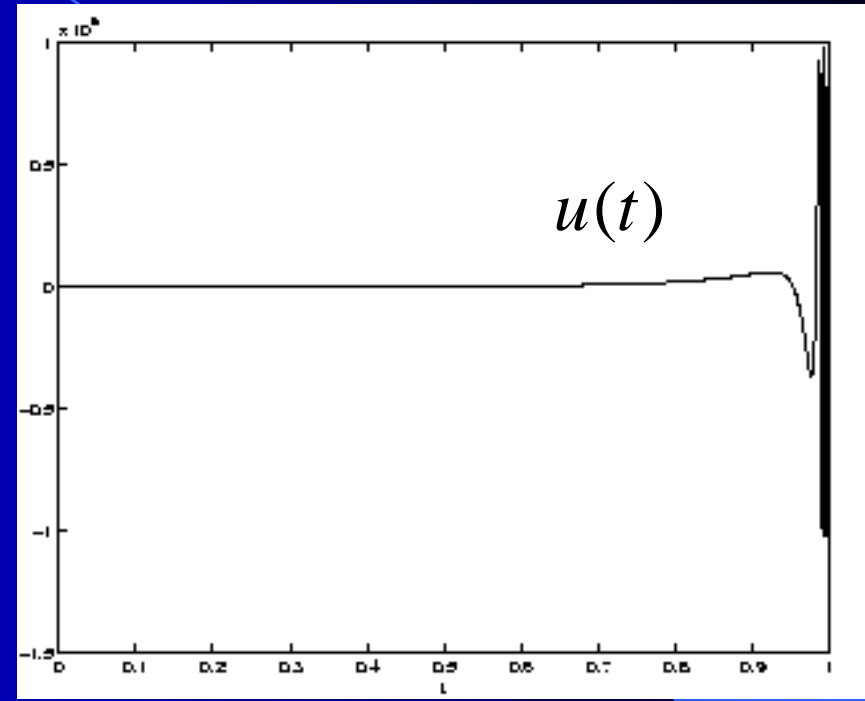


$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

Test 1: $y_T \equiv 10$

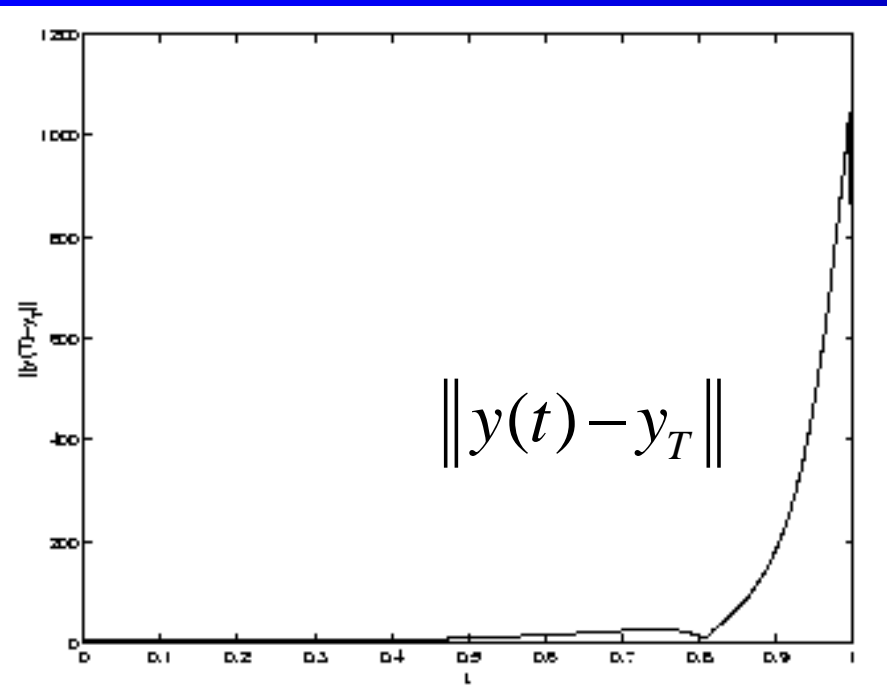


$$f(y) = y^3$$

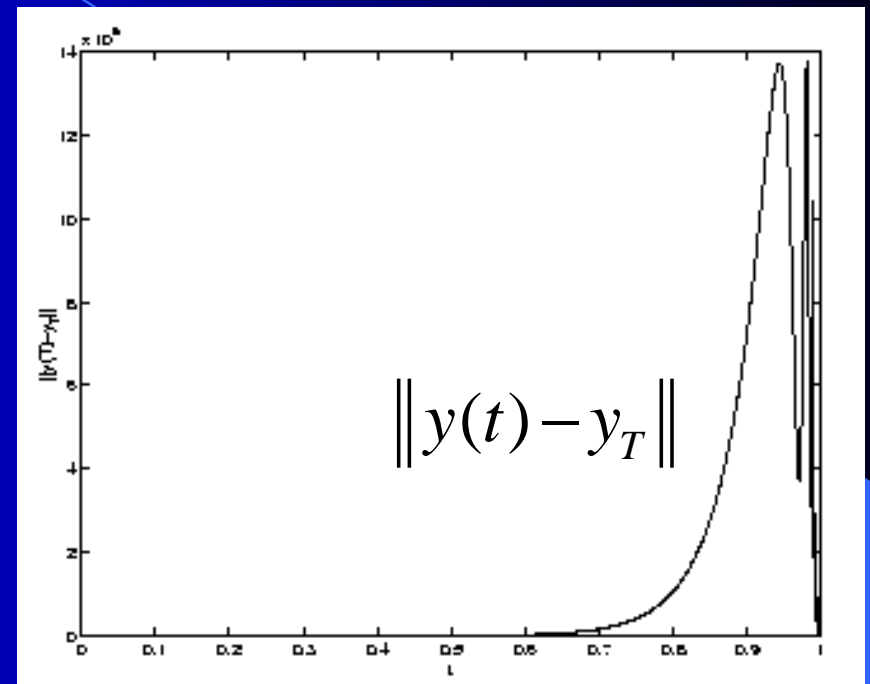


$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

Test 1: $y_T \equiv 10$



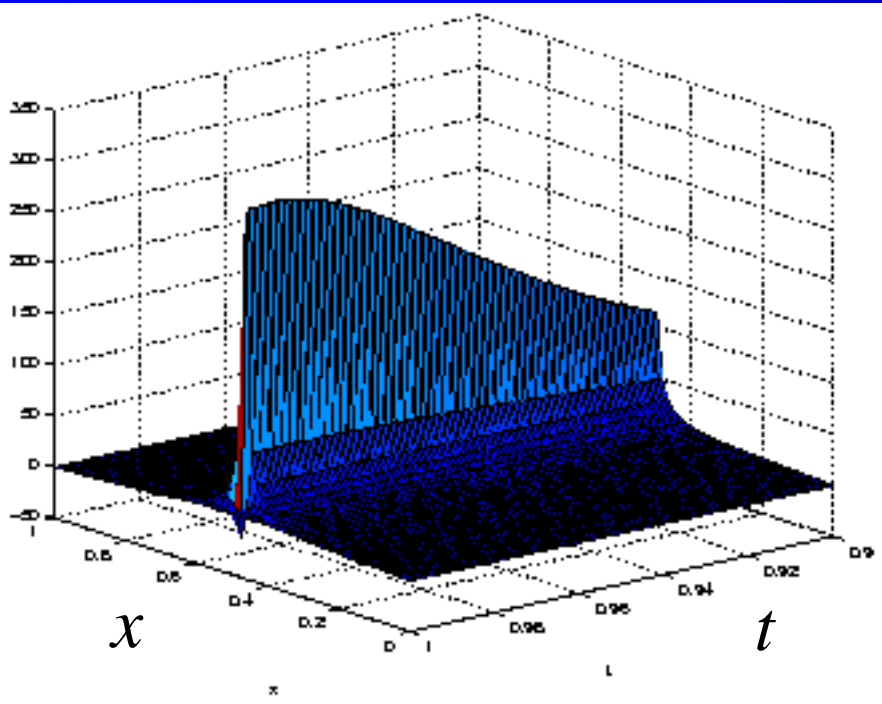
$$f(y) = y^3$$



$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

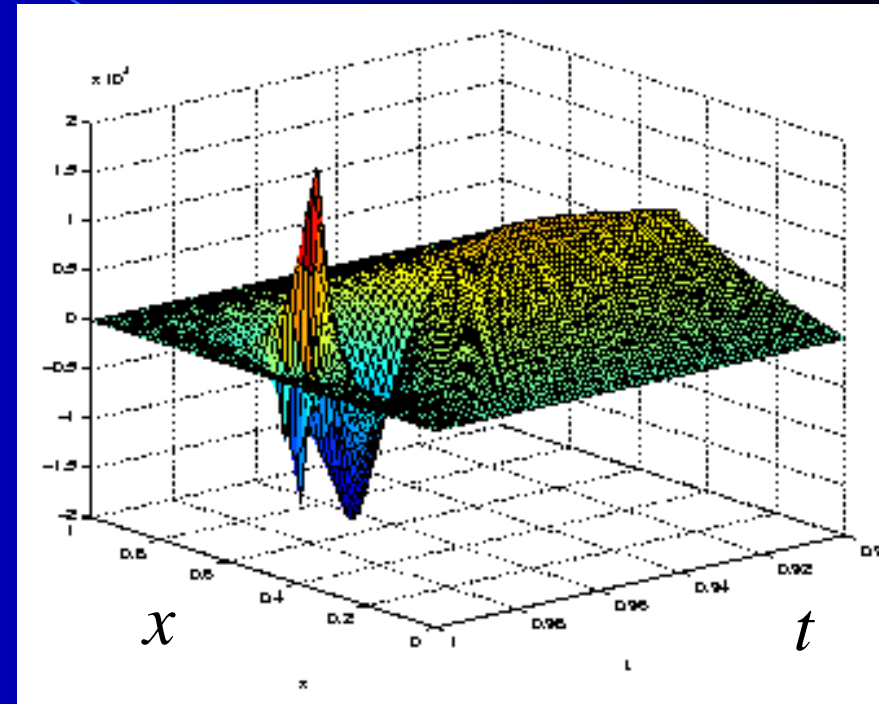
Test 1: $y_T \equiv 10$

$t \in (0.9, 1)$



$$f(y) = y^3$$

$t \in (0.9, 1)$

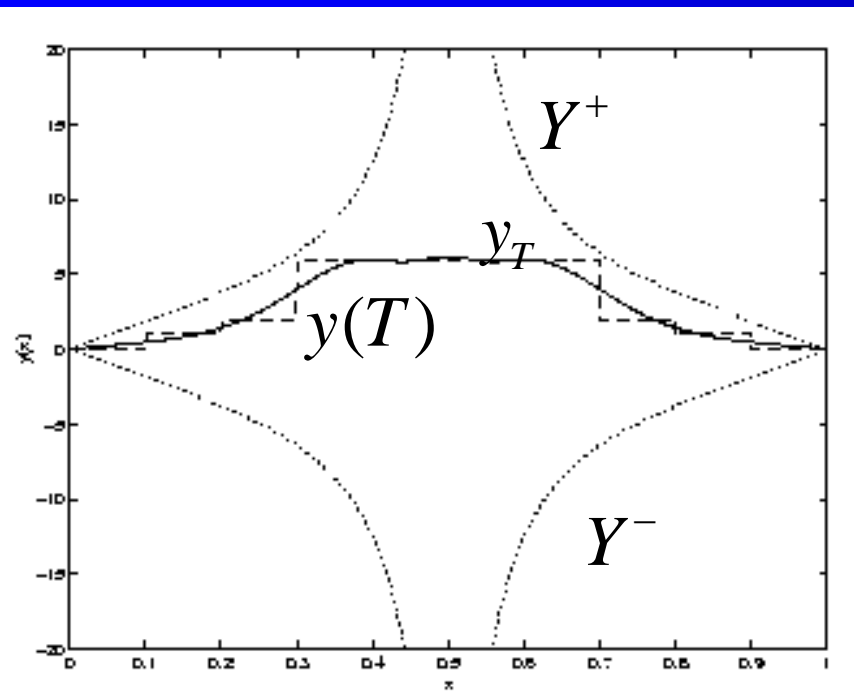


$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

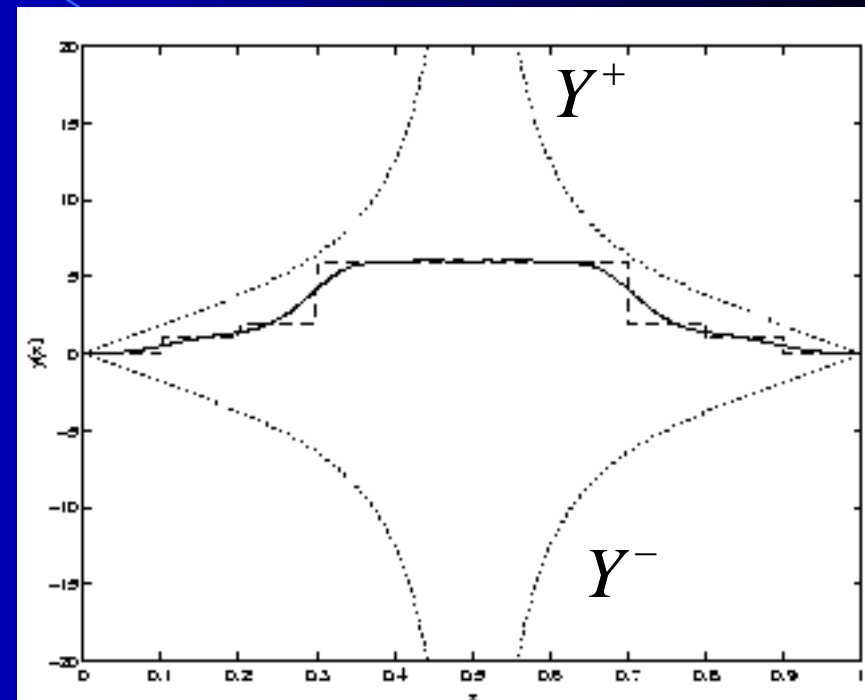
Test 1: $y_T \equiv 10$

	$f(y) = y^3$	$f(y) = \text{arctg}(y)$
$\ y(0;T) - y_T\ (= \ y_T\)$	10	
$\ y(u;T) - y_T\ $	6.0711	2.1205
$\ u\ $	$1.3468 \cdot 10^5$	$9.5798 \cdot 10^4$
$J(0)$	$5 \cdot 10^{13}$	
$J(u)$	$1.616 \cdot 10^{13}$	$2.145 \cdot 10^{12}$

Test 2:

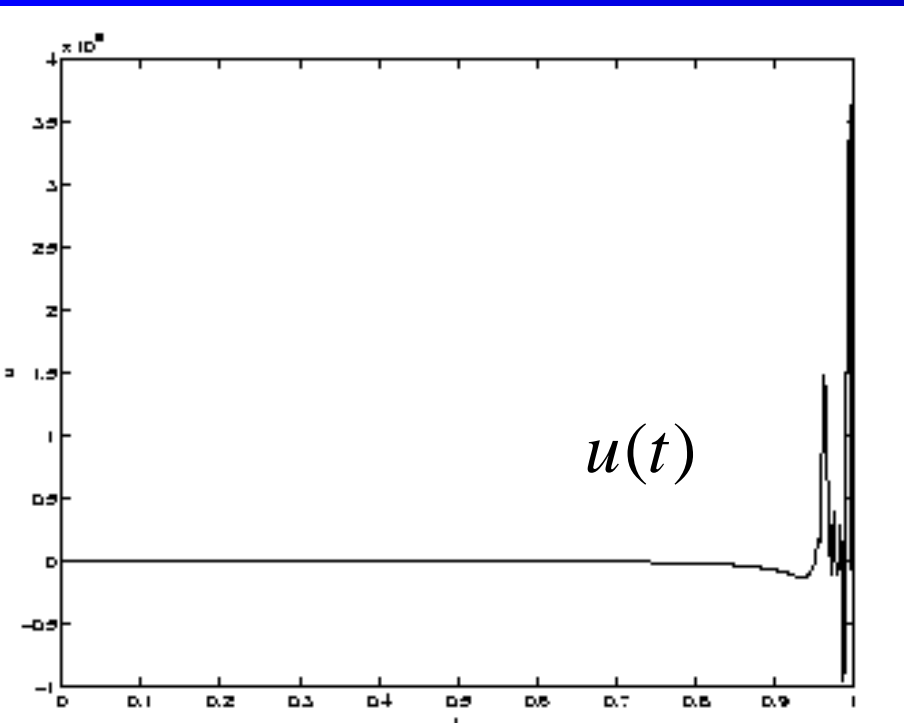


$$f(y) = y^3$$

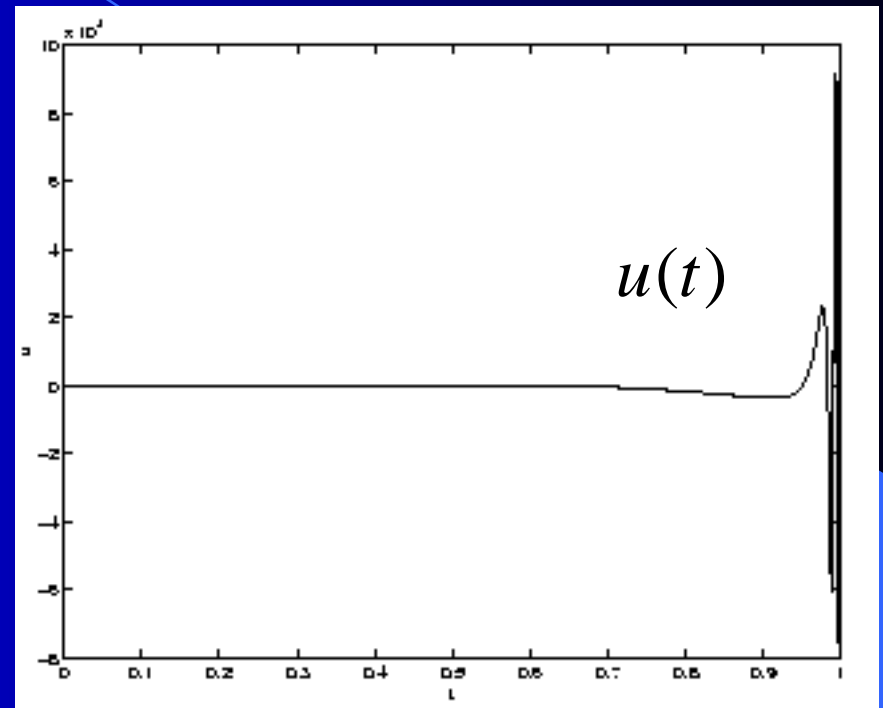


$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

Test 2:

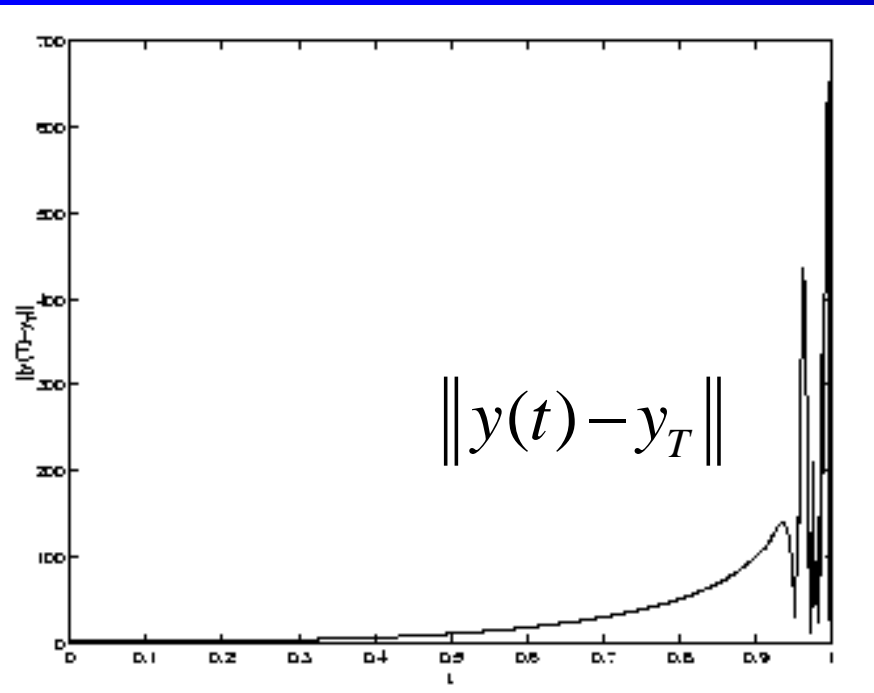


$$f(y) = y^3$$

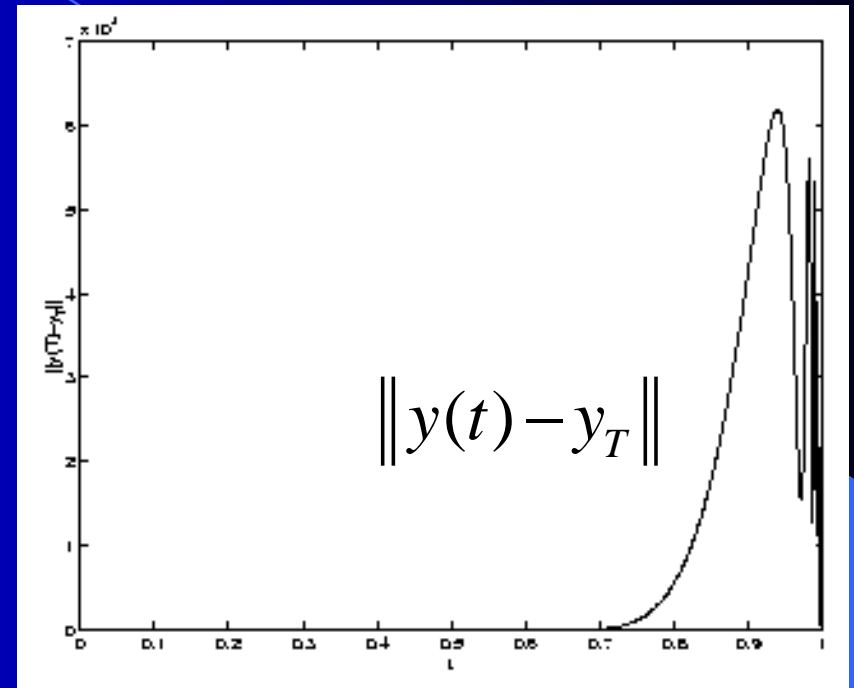


$$f(y) = \arctg(y)$$

Test 2:



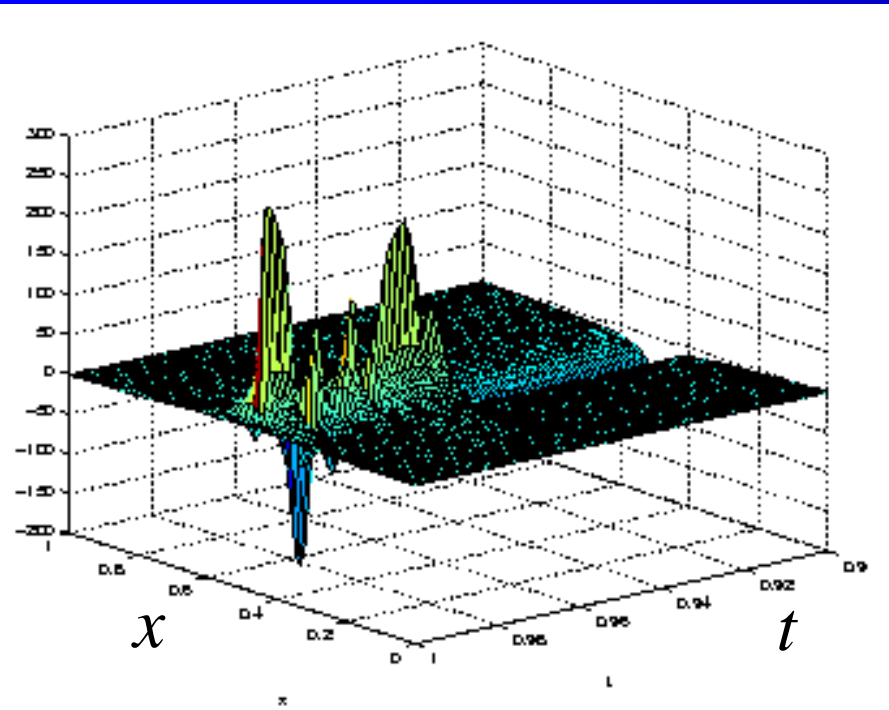
$$f(y) = y^3$$



$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

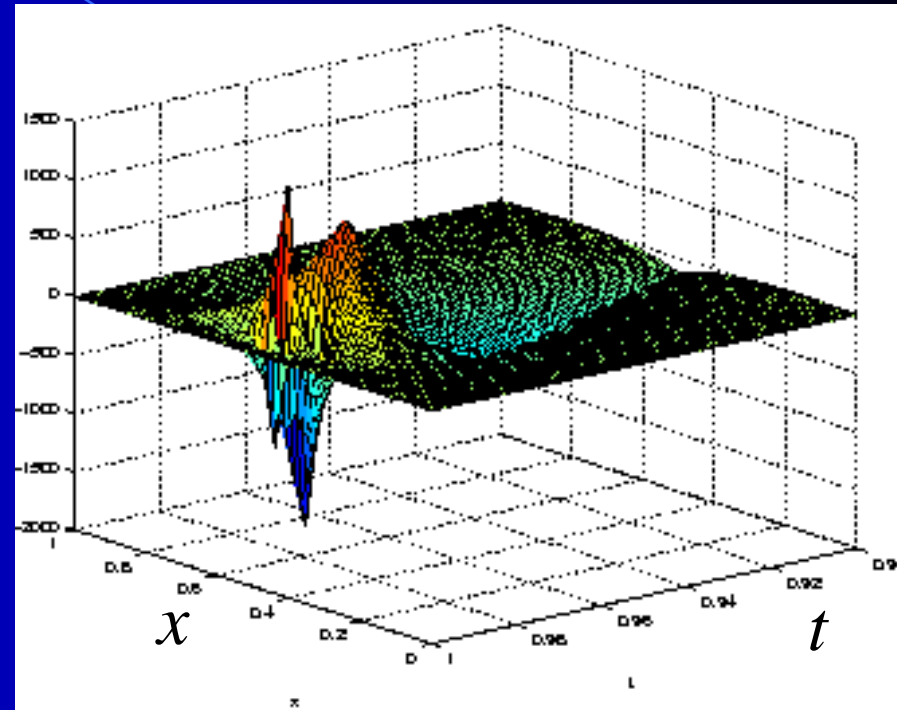
Test 2:

$t \in (0.9, 1)$



$$f(y) = y^3$$

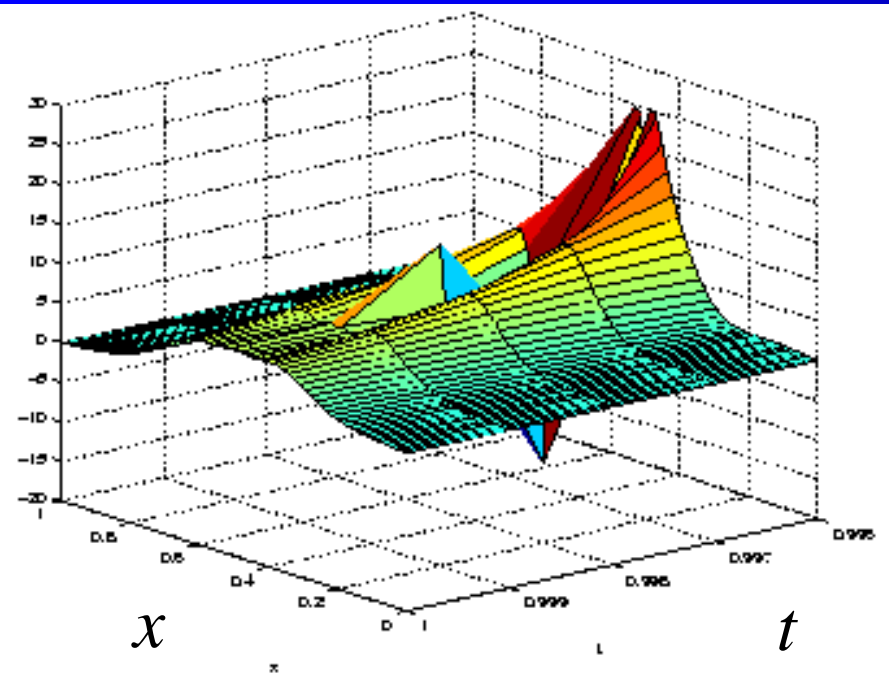
$t \in (0.9, 1)$



$$f(y) = \text{arctg}(y)$$

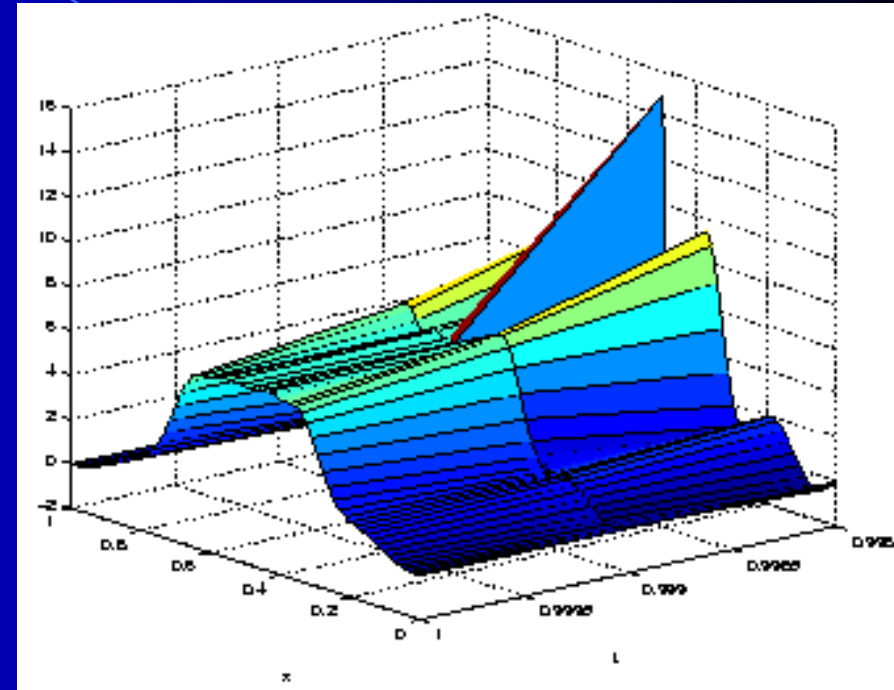
Test 2:

$$t \in (t^{N-4}, 1)$$



$$f(y) = y^3$$

$$t \in (t^{N-2}, 1)$$

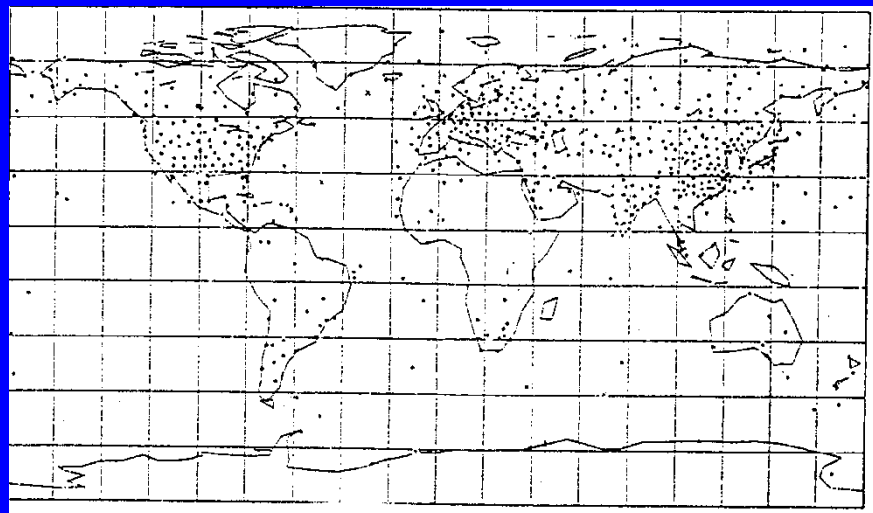


$$f(y) = \arctg(y)$$

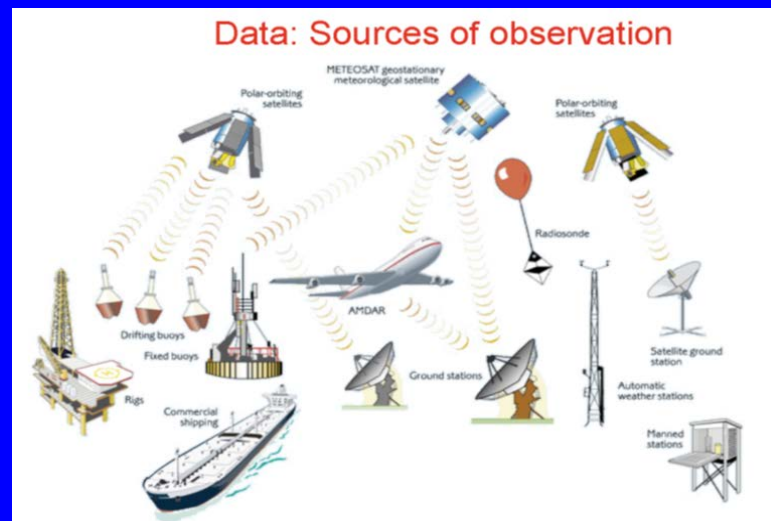
Test 2:

	$f(y) = y^3$	$f(y) = \operatorname{arctg}(y)$
$\ y(0;T) - y_T\ (= \ y_T\)$	3.9240	
$\ y(u;T) - y_T\ $	0.1898	0.1435
$\ u\ $	$2.4651 \cdot 10^4$	$7.3360 \cdot 10^3$
$J(0)$	$7.699 \cdot 10^{12}$	
$J(u)$	$1.930 \cdot 10^{11}$	$1.434 \cdot 10^{11}$

Teoría matemática de Datos Incompletos, Centinelas y Asimilación (según J.-L. Lions)



Radio-sondas: perfiles
verticales de temperatura,
viento y humedad



$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f_1 + g_1$$

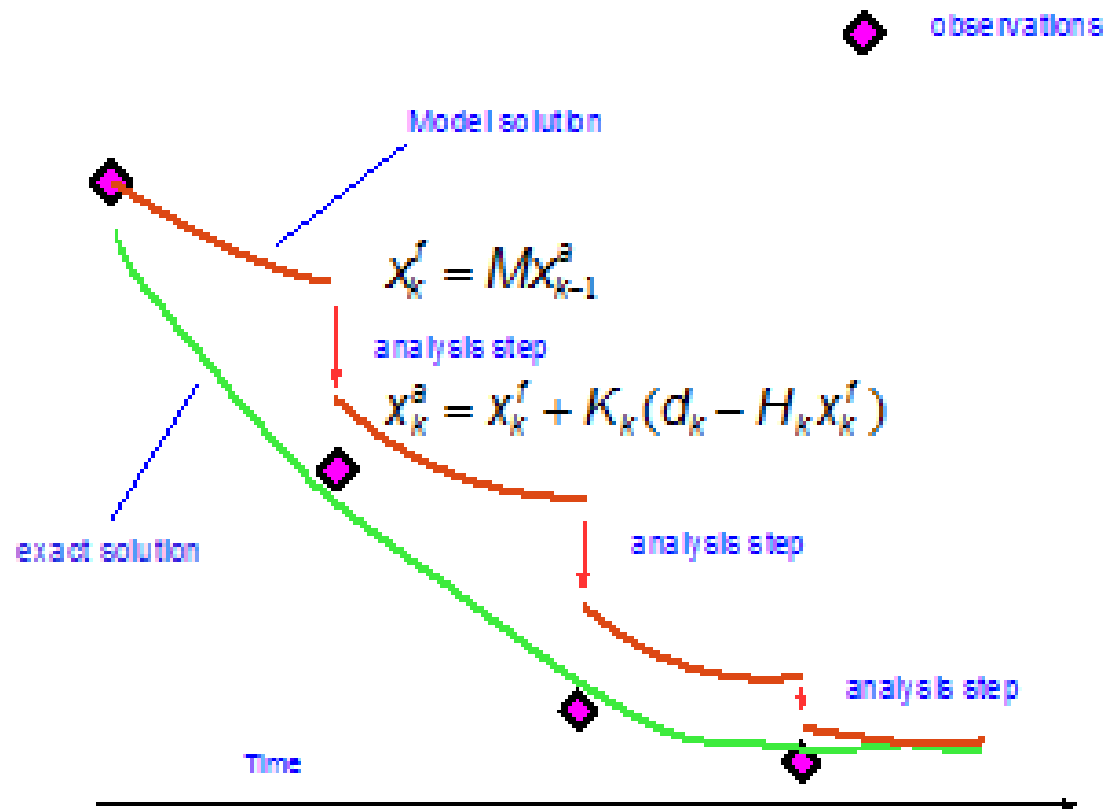
$$Bu = f_2 + g_2$$

$$u(t_0) = u_0 + g_0$$

f_1 , f_2 y $u_0 \equiv$ datos disponibles

g_1 , g_2 y $g_0 \equiv$ datos desconocidos

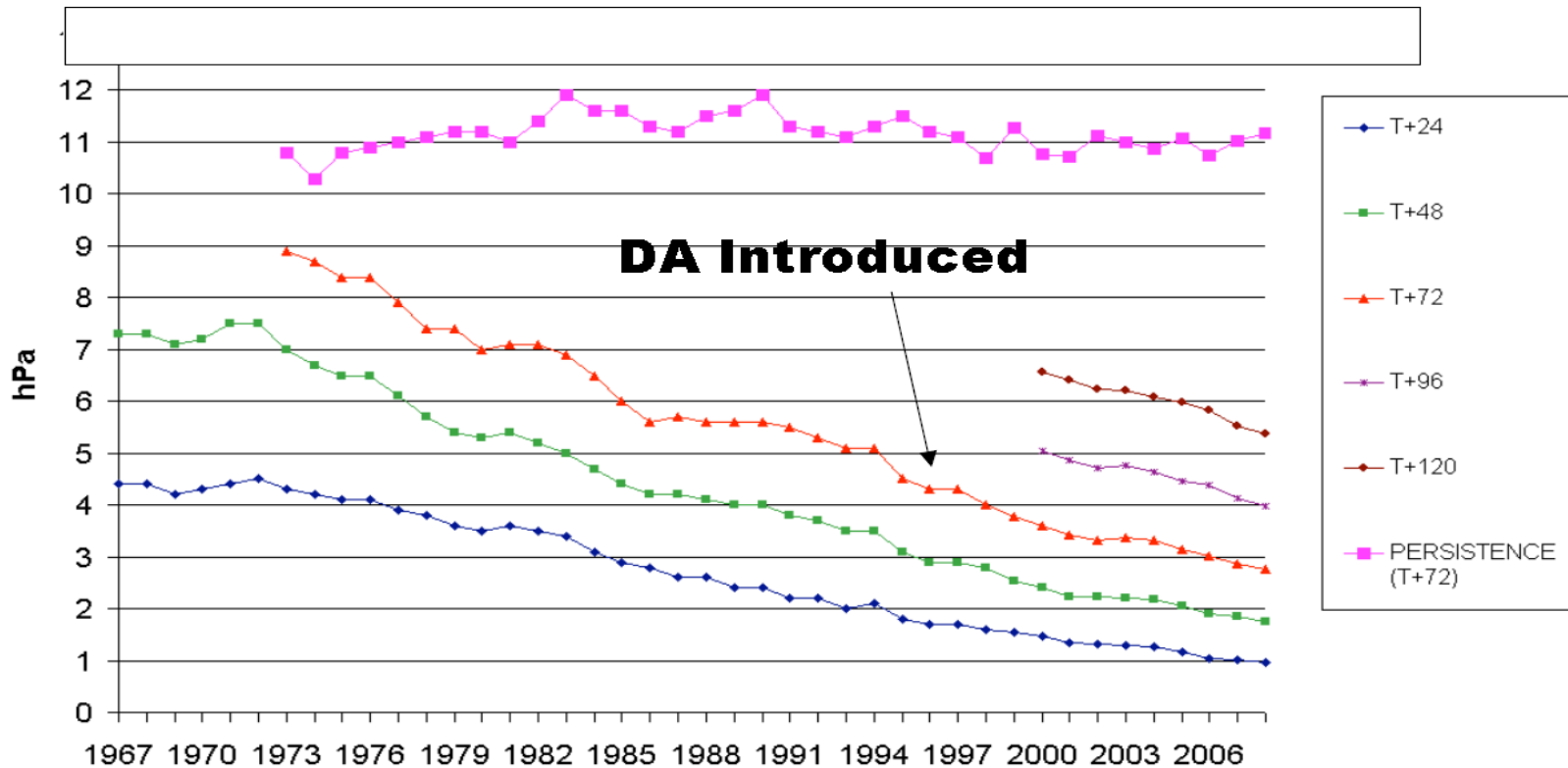
DATA ASSIMILATION



Data assimilation is the optimal way of combining a complex model with uncertain data

Performance Improvements

“Improved by about a day per decade”



P.A. Browne, C. J. Budd, C. Piccolo and M.J.P. Cullen, (2013)

- The effect of numerical model error on data assimilation

Assumptions about the error

x_B

Data error: Gaussian, Covariance R

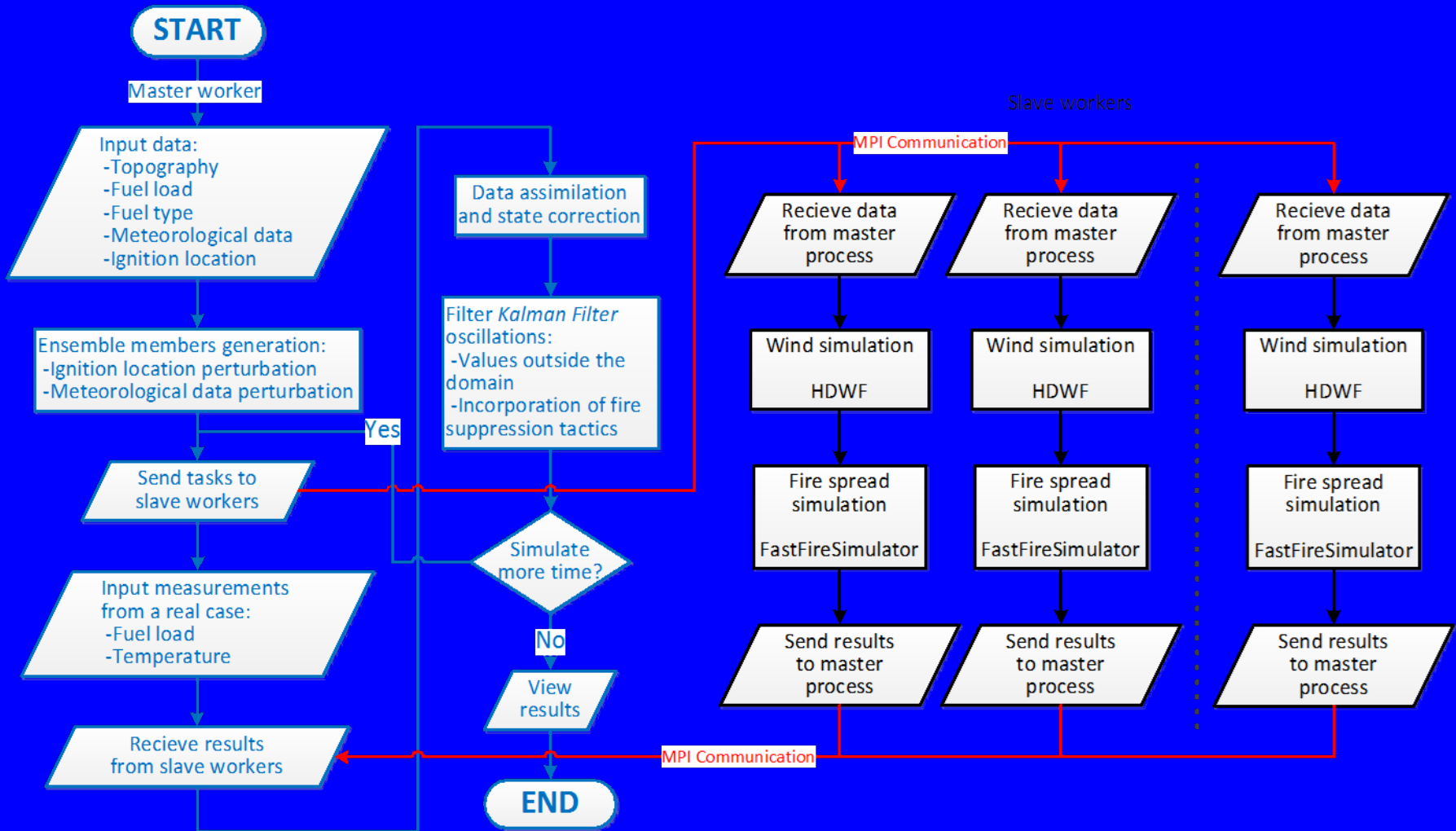
Background (NWP) error: Gaussian, Covariance B

BLUE: Find x_a which minimises

$$J(x_a) = \frac{1}{2}(x_a - x_b)^T B^{-1}(x_a - x_b) + \frac{1}{2}(Hx_a - y)^T R^{-1}(Hx_a - y)$$

Kalman filter: Continuously updates the forecast and its error given the incoming data.





L. Ferragut, M.I. Asensio, S. Monedero, J. Ramírez. Scientific advances in fire modelling and its integration in a forest fire decision system. Modelling, Monitoring and Management on Forest Fire I. WIT Transactions on Ecology and the Environment, 119 pp 31-38 (2008)

El modelo utilizado para analizar el problema será:

$$x^f = Ax + w \quad (1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz que relaciona el estado predicho x^f con el estado en el instante anterior x en ausencia de ruido; y $w \in \mathbb{R}^n$ es el error asociado al modelo, cuya matriz de covarianza es $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Por otra parte, tenemos el modelo de medida:

$$d = Hx + v \quad (2)$$

donde $H \in \mathbb{R}^{d \times n}$ es una matriz que relaciona la medida d con el estado medido x ; y $v \in \mathbb{R}^d$ es el ruido presente en la medición, cuya matriz de covarianza es $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Para el error del modelo w y el ruido de medida v se asumirán las suposiciones estadísticas habituales: independencia, distribución de probabilidad normal, media nula y matrices de varianza-covarianza Q y R respectivamente.

La siguiente ecuación proporciona una estimación óptima en el sentido de que minimiza la varianza del error $x^a - x$. Esta estimación se expresa como una combinación lineal del estado predicho x^f y la sopesada diferencia entre la medición realizada d y la predicción de la medición Hx^f :

$$x^a = x^f + K(d - Hx^f) \quad (3)$$

En la anterior ecuación, la diferencia $(d - Hx^f)$ es el residuo que refleja la discrepancia entre la medición realizada d y la predicción de la medición Hx^f .

El problema se encuentra ahora calcular el valor de $K \in \mathfrak{R}^{n \times d}$ que hace mínima la matriz de covarianza P del error $x^a - x$.

Desarrollando a partir de (3):

$$P = E\left[(x^a - x)(x^a - x)^t\right] = \dots = (I - KH)Q(I - KH)^t + KRK^t \quad (4)$$

Buscamos el valor de K que minimiza la varianza del error $x^a - x$, esto es, el valor de K que hace mínima la traza de P la cual, teniendo en cuenta que Q y R son simétricas, queda:

$$tr(P) = tr(Q) + tr(KHQH^tK^t) - 2tr(QH^tK^t) + tr(KRK^t) \quad (5)$$

Derivando (5) en función de K e igualando a cero para minimizar la función obtenemos el valor de K buscado, llamado *ganancia de Kalman*:

$$K = QH^t(HQH^t + R)^{-1} \quad (6)$$

En la ecuación (6) se puede ver como a medida que la varianza R de las mediciones se aproxima a cero, K tiene un valor que hace que se dé más peso a la medición realizada d .

$$\lim_{R \rightarrow 0} K = H^{-1} \quad (7)$$

De igual forma que antes, a medida que la varianza Q del estado predicho se aproxima a cero, K tiende a cero de forma que se desprecie el residuo $(d - Hx^f)$ y se dé más peso a la predicción del modelo.

$$\lim_{Q \rightarrow 0} K = 0 \quad (8)$$

Finalmente, sustituyendo (6) en (4) obtenemos la varianza P del error $x^a - x$:

$$P = (I - KH)Q \quad (9)$$

uso a problemas no lineales, entre ellas los denominados *Extended Kalman Filter* (EKF) y *Ensemble Kalman Filter* (EnKF).

5. Condiciones iniciales incompletas

5.1. Planteamiento del problema

Sea $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$, el estado, escalar o vectorial, dado como la solución de una ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, \quad (3.65)$$

donde A es un operador diferencial en las variables espaciales, no necesariamente lineal, y donde f representa el balance total de fuentes y sumideros. Para definir el estado hace falta añadir a (3.65) la

condición inicial

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad , \quad u^0 \text{ dado en } \Omega, \quad (3.66)$$

y unas condiciones de contorno que, variando según los casos, formulamos simbólicamente en la forma

$$Bu = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega \text{ y } t > 0. \quad (3.67)$$

Según hemos visto en los ejemplos de las distintas secciones anteriores, u puede ser un campo de velocidades, de temperaturas, etc., en la atmósfera, en el océano... Es claro que, por impedimentos obvios, u^0 no puede ser conocida completamente en todo punto de Ω . Por el contrario, a medida que pasa el tiempo recibimos informaciones suplementarias que aquí representaremos por

$$\mu_j(u) = j\text{-ésima medición de } u, u = c_j$$

donde c_j es un número conocido. El problema que se plantea es: ¿cómo calcular u a partir de estas mediciones de la mejor manera posible?

Observación 5.1

El carácter de $\mu_j(u)$ varía. Podemos tener

$$\mu_j(u) = u(x_j, t_j)$$

medida de u en el punto x_j en el instante t_j . Puede tratarse también de una medición de una componente de u en (x_j, t_j) . Podríamos igualmente medir los valores medios, de forma más general

$$\mu_j(u) = \int_{\Omega} g_j(x) u(x, t_j) dx,$$

(media ponderada por g_j) medida en el instante t_j , etc.

Observación 5.2

Hemos encontrado ya en la una situación de este tipo, pero allí el dato inicial era conocido. En contraste con esto, los coeficientes y las condiciones de contorno eran parcial o totalmente desconocidas.

Por yuxtaposición de los métodos de la Subsección 3.1.4 y de las observaciones que siguen, dispondremos de un método para todas las situaciones.

Al menos dispondremos de la *idea inicial* de los métodos, pues, por razones que aparecerán en el capítulo siguiente, hará falta completar de manera importante las técnicas involucradas.

5.2. Método de la Teoría de Control

Introducimos un sistema donde la ecuación de estado es idéntica a 3.65, es decir

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad (3.68)$$

con las mismas condiciones de contorno (3.67),

$$By = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (3.69)$$

y con la condición inicial

$$y(x, 0) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.70)$$

donde ν representa el control.

La información de la que disponemos sobre u^0 no define por completo a una función, sino un *conjunto* de funciones, que denotamos por \mathcal{U}_{ad} . Dicho de otra forma, \mathcal{U}_{ad} denota el conjunto de todas las funciones $v(x)$ posibles que satisfacen la misma información que u^0 . Supondremos pues que

$$v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (3.71)$$

Para cada v fija, el sistema (3.68), (3.69), (3.70) define el estado del sistema $y(x, t; v)$. Podemos entonces calcular

$$\mu_j(y(x, t; v)) \quad (3.72)$$

y, exactamente como en la Subsección 3.1.4, medimos la “distancia” entre los valores numéricos (3.72) y los resultados c_j de las mediciones (??), mediante la expresión

$$J(v) = \sum_{j=1}^N (\mu_j(y(x, t; v)) - c_j)^2, \quad (3.73)$$

donde N denota el número total de mediciones. Se puede decir entonces que la “mejor elección” de v es aquella que minimiza $J(v)$:

$$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Esta formulación es un algo imprecisa pues, en caso de existir tal infimo, podría haber más de una función v conduciendo a tal extremo inferior. Se requiere introducir algunas restricciones sobre la *estructura* de la solución, así como limitaciones sobre el estado ligadas a las propiedades del operador y *que dependen del horizonte temporal en el que estemos interesados*. Entramos entonces en la llamada *Teoría de la Asimilación* a la que nos referiremos en el próximo capítulo.

6. Asimilación optimal

6.1. Planteamiento del problema

Consideremos, como en la Sección 3.3, una ecuación de estado “general”

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f \quad (4.105)$$

con condiciones de contorno conocidas que se suponen tenidas en cuenta en todo lo que sigue, y una condición inicial conocida de manera imperfecta:

$$u(0) = u^0 + \text{incertidumbre.} \quad (4.106)$$

Supondremos que $u(0)$ es de hecho un control. Se define entonces el estado del sistema $y(t)$ como la solución de

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y) = f \quad (4.107)$$

con

$$y(0) = v, \quad (4.108)$$

donde v es un control elegir lo mejor posible. La expresión (4.106) da ya información sobre v . Esto se indica por

$$v \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.109)$$

(conjunto de controles admisibles). Se busca “el mejor v posible” definido como el elemento que minimiza sobre \mathcal{U}_{ad} una función coste

$$J(v) = F(y(v), v) \quad (4.110)$$

donde $y(v)$ designa la solución de (4.107), (4.108) (con las condiciones de contorno).

Lo que resta es: (i) elegir el funcional F , (ii) mostrar que tales elecciones optimales son posibles y organizar los cálculos correspondientes.

Algunos datos suplementarios son suministrados por mediciones sobre el estado o sobre las componentes del estado. Para fijar ideas

$$y(x_j, t_j) = c_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.111)$$

(medida del estado en el punto x_j en el instante t_j). (Numerosas variantes son posibles sin cambiar lo esencial de lo que sigue). Como en la Sección 3.3, se puede elegir en estas condiciones

$$J(v) = \sum_{j=1}^N (y(x_j, t_j; v) - c_j)^2. \quad (4.112)$$

Esta elección, variación evidente del método de los mínimos cuadrados de Gaus y Legendre, no utiliza la estructura del operador $\partial/\partial t + A$ en (4.105). Ninguna referencia es hecha en (4.112) ni a la variedad lenta ni a la variedad inercial. La (o una) elección optimal de v , correspondiente a

$$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.113)$$

no tiene, pues, por qué suministrar un estado inicial que no dé lugar rápidamente a oscilaciones parásitas inútiles para nuestro objetivo (salvo, obviamente, si \mathcal{U}_{ad} es muy pequeño y muy próximo a una variedad inercial). Es necesario, pues, modificar (4.112) introduciendo un “criterio lento”.

6.2. Criterio lento

Denotemos por z a la componente de y , a precisar, que conduce a oscilaciones parásitas. En la terminología de la previsión metereológica z será la componente “gravedad” del estado. Si se define un algoritmo $y \rightarrow z$ de paso de y a z entonces $y(v) \rightarrow z(v)$ queda definido para cada v . Se desea, pues, que la cantidad

$$J_1(v) = \int_0^T \left\| \frac{\partial z}{\partial t}(v) \right\|^2 dt \quad (4.114)$$

sea “pequeña”, siendo T el horizonte temporal en el que se puede efectuar la predicción y donde $\| \cdot \|$ designa una norma, escogida la más simple posible, en el espacio de los estados.

Una herramienta general de la que se dispone para convertir una cantidad “pequeña” en un problema del Cálculo de Variaciones es la *penalización* . Se introduce así

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} J_1(v), \quad (4.115)$$

J dado por (4.112), J_1 dado por (4.114), donde ε es un número positivo “pequeño”. Lo que se busca entonces es

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(v). \quad (4.116)$$

El término $(1/\varepsilon)J_1(v)$ es muy grande para ε muy pequeño y así v está restringido a hacer $J_1(v)$ pequeño: en otro caso hay penalización. Este método admite una justificación teórica en situaciones muy generales y constituye una potente herramienta del Cálculo de Variaciones .

Con las notaciones de la Sección 3.3 precedente se podría elegir, entre otras posibilidades,

$$z = \sum_{k=1}^{\beta} (y(v), b_k) b_k. \quad (4.117)$$

Observación 5.1

Otra posibilidad, que no excluye la precedente, es reemplazar la ecuación de estado (4.107) por la ecuación de estado proyectada no linealmente sobre una variedad inercial (o lenta) y después utilizar el método de mínimos cuadrados.

Observación 5.2

La etapa siguiente es demostrar la existencia de v solución de (4.116). Desde este punto de vista interesa añadir un término “regularizante” y considerar en vez de $J(v)$ la expresión

$$J_1(v) = J(v) + \gamma \|v\|^2, \quad \gamma > 0, \quad (4.118)$$

donde $\|v\|$ es una norma, tan simple como sea posible, en el espacio de los estados iniciales. El término $\gamma \|v\|^2$ de (4.118) asegura que v permanece “acotado”.

Observación 5.3

Como continuación, interesaría encontrar algoritmos que permitan calcular v optimal, y eso a medida de la evolución del cálculo. Se “asimilan” los datos, tanto como sea posible, a medida que se obtienen. De ahí la denominación “método de asimilación”. Estos métodos tienen una larga historia y, por otra parte, no todos ellos están basados en la Teoría de control óptimo. Referimos de nuevo al lector a Morel, Lefevre y Rabreau [332], Le Dimet y Talagrand [235], Le Dimet, Sasaki y White [234], a la tesis Courtier [105] y a Le Dimet y Charpentier [233] así como a las bibliografías correspondientes. Técnicas análogas se utilizan en la modelización de los océanos y, por tanto, en los sistemas acoplados océano-atmósfera. Véase Ratier [392], Roquet y Ratier [397], Blayo, Blum y Verron [56].

Observación 5.4

Se podrían utilizar ideas análogas a las condiciones de contorno, aunque esto no parece haber sido desarrollado.

Observación 5.5

Esta observación es una continuación de la Observación 4.9. Se modifica la ecuación de estado (4.108) por la adición de un resto, o término *fuentes*,

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y) + w = f. \quad (4.119)$$

El estado se convierte así en una función de v y de w : $y = y(v, w)$. Se trata entonces de determinar simultáneamente v y w por minimización de un funcional del tipo

$$J_2(v, w) = \sum_{k=1}^{\beta} \int_0^T \left(\frac{\partial y}{\partial t}(v, w), b_k \right) dt^2 + \gamma_1 \|v\|^2 + \gamma_2 \|w\|^2 \quad (4.120)$$

Cfr. Lions [264]. Otras elecciones de funcionales son indicadas en Lions [258].

Observación 5.6

Las ecuaciones de evolución con varias escalas de tiempo han dado lugar a otros tipos de trabajos. Señalemos en particular el “principio de las derivadas acotadas” Kreiss [222], [223] para “filtrar” ciertos modos de oscilación. Los métodos de escalas múltiples y de tiempos múltiples son de uso corriente en problemas de perturbaciones singulares y capas límites. Cfr. Lions [253] y la bibliografía de ese trabajo.

6.3. Multiplicador de Lagrange

A título de ejemplo y con el fin de dar una idea sencilla de las diferentes técnicas asociadas a la puesta en marcha de las ideas introducidas en la Sección 5.2, consideraremos un modelo lineal a propósito del cual introduciremos el punto esencial: *el multiplicador de Lagrange*.

6.3. Multiplicador de Lagrange

A título de ejemplo y con el fin de dar una idea sencilla de las diferentes técnicas asociadas a la puesta en marcha de las ideas introducidas en la Sección 5.2, consideraremos un modelo lineal a propósito del cual introduciremos el punto esencial: *el multiplicador de Lagrange*.

Sea el estado dado por

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (4.121)$$

$$y(x, t) = 0 \quad \text{si } x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.122)$$

y

$$y(x, 0) = v(x), \quad \text{variable de control.} \quad (4.123)$$

Suponemos que las informaciones sobre el estado inicial “real” se expresan como en (4.109), pero esta vez con la precisión

$$\mathcal{U}_{ad} = \text{conjunto convexo cerrado del espacio } L^2(\Omega), \quad (4.124)$$

donde $L^2(\Omega)$ representa el espacio de las funciones de cuadrado sumable sobre Ω . Se considera el funcional de coste

$$J(v) = \sum_{i=1}^N (y(x_i, t_i; v) - c_i)^2 + \gamma \int_{\Omega} v^2 dx, \quad \gamma > 0, \quad (4.125)$$

donde $x_i \in \Omega$, $0 < t_1 < T$. Entonces el problema

$$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.126)$$

admite una solución única u (el control optimal) que está caracterizado por la Inecuación Variacional

$$(J'(u), v - u) \geq 0 \quad \text{para todo } v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad u \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.127)$$

donde, por definición

$$(J'(u), \varphi) = \frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda\varphi)|_{\lambda=0},$$

y por tanto

$$(J'(u), v - u) = 2 \sum_{i=1}^N (y(x_i, t_i) - c_i)(y(x_i, t_i; v) - y(x_i, t_i)) + 2\gamma \int_{\Omega} u(v - u) dx \quad (4.128)$$

en donde se ha utilizado la notación

$$y(x, t; u) = y(x, t) \quad (\text{estado optimal}).$$

Transformamos (4.106) mediante la introducción de un *estado adjunto* (también *multiplicador de Lagrange*). Para ello introducimos la función $p(x, t) = p$ definida por

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \sum_{i=1}^N (y(x, t) - c_i) \delta(x - x_i, t - t_i) & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ p = 0 & \text{si } x \in \Gamma, \quad t \in (0, T), \\ p(x, T) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (4.129)$$

siendo $\delta(x - x_i, t - t_i)$ la delta de Dirac en el punto $\{x_i, t_i\}$. Si se toma ahora el producto escalar de la ecuación (4.129) con $y(v) - y$, se obtiene después de integrar sobre $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \times (0, T)} \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p \right) (y(v) - y) dx dt \\ &= \sum_{j=1}^N (y(x_i, t_i) - c_i) (y(x_i, t_i; v) - y(x_i, t_i)). \end{aligned} \quad (4.130)$$

Integrando por partes, el primer miembro de (4.130) resulta

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega \times (0, T)} \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p \right) (y(v) - y) dx dt \\ &= \int_{\Omega} p(x, 0)(y(x, 0; v) - y(x, 0)) dx = \int_{\Omega} p(x, 0)(v - u) dx. \end{aligned}$$

A partir de (4.130) y (4.128) se ve entonces que la condición (4.127) es equivalente a

$$\int_{\Omega} (p(x, 0) + \gamma u(x))(v(x) - u(x)) dx \geq 0 \quad \text{para todo } v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.131)$$

Si no se utiliza ninguna información en $t = 0$, transfiriendo todas las informaciones a tiempos positivos (lo que no restringe la generalidad), (4.131) se reduce a

$$p + \gamma u = 0. \quad (4.132)$$

La solución optimal viene entonces dada por la resolución del sistema de optimalidad

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \sum_{i=1}^N (y - c_i) \delta(x - x_i, t - t_i), \\ y(x, 0) + \frac{1}{\gamma} p(x, 0) = 0, \quad p(x, T) = 0 \text{ en } \Omega, \\ y = 0, \quad p = 0 \text{ si } x \in \Gamma, \quad x \in (0, T). \end{array} \right. \quad (4.133)$$

Observación 5.7

La estructura del sistema asociado a la asimilación optimal será también de este tipo, pero con las siguientes modificaciones: en primer lugar, en vez de la simple ecuación del calor se tendrá *uno* de los modelos de la atmósfera, o de la atmósfera y el océano, etc. En segundo lugar, el conjunto de ecuaciones de estado es no lineal; para definir el estado adjunto el sistema adjunto será entonces el conjunto de ecuaciones adjuntas del sistema linealizado en una solución optimal. Por último, en los casos no lineales no hay razón de que haya una única solución optimal. Sin embargo, de hecho la resolución del sistema se hace por iteraciones. Escogiendo como primera iteración un estado casi probable, habrá convergencia hacia “la” solución buscada. Este procedimiento puede crear dificultades serias para tiempos T muy largos, cuando, precisamente, lo que se busca es ver si pueden aparecer modificaciones importantes. Una vez más se llega al interés de introducir *algoritmos adaptativos* .

Observación 5.8

El sistema (4.133) puede ser “desacoplado”. Se llega entonces a expresar $p(x, t)$ en “tiempo real” con respecto a $y(x, t)$ por medio de la solución de una ecuación en derivadas parciales de tipo Riccati (Jacopo Francesco Riccati, conde de Venecia, (1676-1754)), generalización a dimensión infinita del filtro de Kalman [212], [213]. El caso no lineal presenta, en este aspecto, muy serias dificultades.

Observación 5.9

También se puede interpretar p como expresión del gradiente de la función $J(v)$ (de hecho este gradiente es $2(p(x,0) = u(x))$). Dar un algoritmo iterativo de resolución de (4.133) es equivalente a elegir un algoritmo de gradiente para $J(v)$. Cfr. Glowinski [164] y la bibliografía de este trabajo.

Observación 5.10

En Lions [250] se podrán encontrar muchos otros ejemplos de sistemas de optimalidad; en especial cuando el control se ejerce desde la frontera del dominio Ω o sobre una parte de ésta.

Observación 5.11

La ecuación adjunta (y el multiplicador de Lagrange) se encontrará también en todo estudio de sensibilidad de un criterio dado con respecto a variaciones de los parámetros del problema, ya que, como se acaba de ver, es un modo de expresión del gradiente del funcional.

Observación 5.12

Los cálculos sobre el estado adjunto mencionados en la Observación 5.7 se hacen muy pesados especialmente en los casos discretizados correspondientes a los cálculos numéricos. En este contexto se utilizan cada vez más métodos informáticos de cálculo simbólico.

Observación 5.13.

Todos los modelos considerados tienen siempre sus *datos incompletos*. Condiciones iniciales, condiciones de contorno, interfases, coeficientes diversos, etc., son conocidos solamente de manera parcial. Por otra parte, la “cantidad de información” de la que se dispone continúa (felizmente) creciendo y está llamada a crecer considerablemente gracias a las observaciones de los satélites en curso de preparación en el mundo. La anterior situación es habitual en el estudio de “sistemas complejos” (aquí único por la magnitud del sistema estudiado). Una de las primeras cuestiones que se plantean es cómo “asimilar” de la mejor manera estas informaciones a medida que sean disponibles. Las dificultades encontradas ahora parecen emanar más del tamaño de los problemas que de dificultades conceptuales. Métodos de control optimal, así como de variedades lentas, son utilizadas en este contexto.

La cuestión fundamental es: ¿se culmina con un sistema dinámico tridimensional de componentes caóticos o turbulentos y con datos incompletos? ¿Es posible predecir alguna propiedad? ¿Es posible establecer argumentos plausibles?

Observación 5.14.

El siguiente problema matemático parece nuevo (desde el punto de vista matemático): consideremos un cierto modelo cuya ecuación de estado es

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + A\mathbf{y} + f(\mathbf{y}) = 0 \quad (4.134)$$

junto con funciones iniciales y condiciones de contorno incompletas.

En general, no se está interesado en la previsión de *todo* el estado (por otra parte, fuera de alcance), sino en la de unas *funciones de estado*. Las primeras funciones que se pueden considerar son *medias regionales* o globales. Sea $h_0(x)$ una función dada sobre una región ω en la que se quieren hacer previsiones. Supondremos

$$h_0 \geq 0, \quad \int_{\omega} h_0(x) dx = 1. \quad (4.135)$$

¿Es posible calcular

$$\int_{\omega} h_0(x) y_j(x, t) dx \quad (4.136)$$

sobre la j -ésima componente de \mathbf{y} ? (por ejemplo, la temperatura media). Se chocha aquí con el problema clásico de la no conmutatividad de la operación media con expresiones no lineales (y el problema del cierre en turbulencia). Pero una de las cuestiones esenciales es la de los *sucesos extremos*: prever la “probabilidad” de veranos sucesivos muy calurosos, etc. Sea $\mathbf{y} \rightarrow \mu(\mathbf{y})$ una operación de promedio espacial (del tipo de (4.136)). Se considera el promedio temporal

$$\frac{1}{t_0} \int_{t-t_0}^t \mu(\mathbf{y}(s)) dx = F_{\mathbf{y}}(t). \quad (4.137)$$

Se dice que la situación es “excepcional” si

$$F_{\mathbf{y}}(t) \in K, \quad K = \text{“conjunto excepcional”}. \quad (4.138)$$

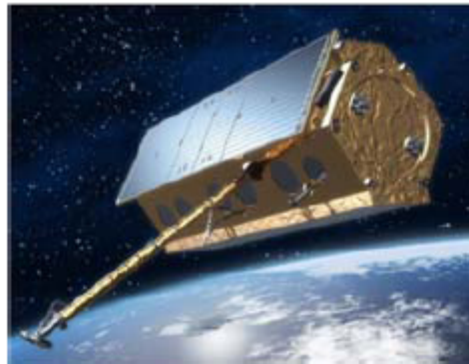
¿Es posible obtener estimaciones sobre el conjunto de los t para los que (4.138) tiene lugar? Existen nociones de este género “robustas”, *i.e.*, insensibles, al hecho de tener datos incompletos?

Estas cuestiones pueden ser también abordadas por métodos dinámico-estadísticos como en la subsección desarrollada anteriormente. Sería muy interesante de analizar el alcance de estos métodos en problemas “clásicos” de turbulencia en los que ciertas experiencias (en túneles de viento) son posibles. Esto daría lugar a test de validez suplementaria. A este respecto pueden consultarse los trabajos de Ghil, Legras y Vautard mencionados anteriormente, así como Alonso, Ortiz y Ruiz de Elvira [4], Maqueda, Ortiz y Ruiz de Elvira [309] y Díez, Ortiz y Ruiz de Elvira [131].

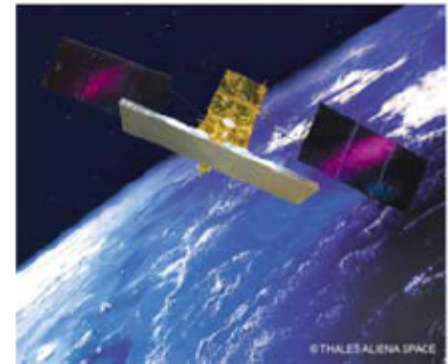
Spaceborne SAR Systems: Newest and Future Missions



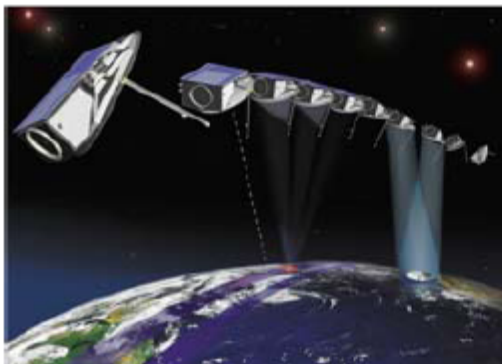
RADARSAT-2
Canadian Space Agency (CSA)
C-band (quad.-pol), 2006-today



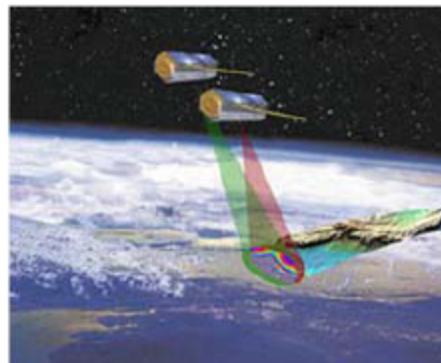
TerraSAR-X
German Aerospace Center (DLR)
X-band (quad.-pol), 2007-today



COntstellatIon of small Satellites for the
Mediterranean basin Observation
Cosmo-SkyMed, Italian Space Agency
(ISA)
X-band (quad.-pol), 2007-today



SAR-Lupe
BWB, Germany
X-band, 2007-today



TanDEM-X
German Aerospace Center (DLR)
X-band (quad.-pol), 2010



SENTINEL
European Space Agency (ESA)
C-band, 2014?



Gracias por vuestra atención