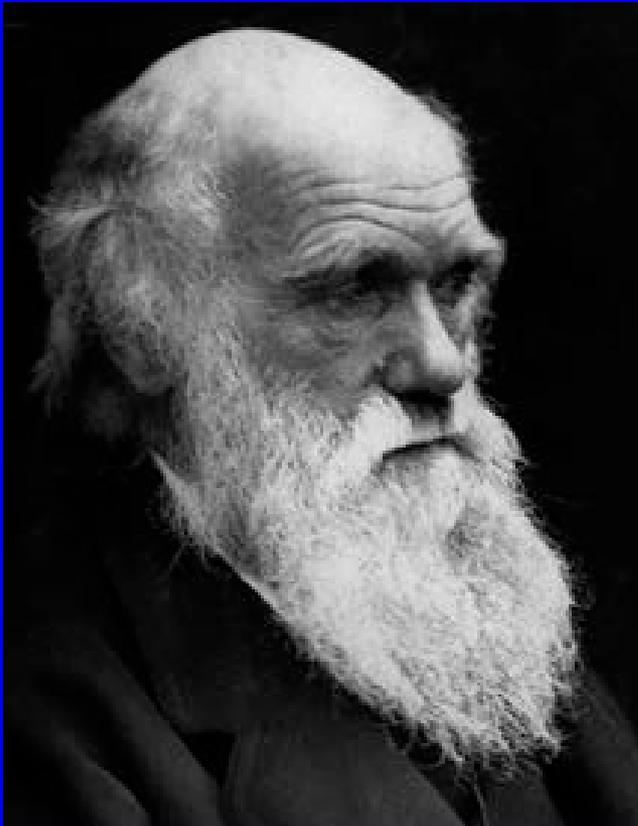


# Matemáticas en torno a Darwin

**J.I. Díaz**

Real Academia de Ciencias  
Universidad Complutense  
de Madrid



**Instituto de España**

**Madrid, 18 de mayo de 2009**

**CHARLES DARWIN: UNA VIDA Y UNA  
VISIÓN DEL MUNDO**

CURSOS 2009



MAYO

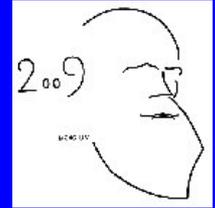
11  
12  
13  
18  
19  
20

a las 19:30 h.

Coordinado por  
JOSÉ M. SÁNCHEZ RON  
de la Real Academia Española  
y Contador del Instituto de España

# 1. Introducción

2009, año de Darwin: dos celebraciones globales (tsunami Darwin)



*Charles Darwin*  
The Complete Work of Charles Darwin Online

Obras completas de Darwin en la red <http://darwin-online.org.uk/>

En Estados Unidos <http://www.darwinday.org/index.html>



En la Sociedad Española de Biología Evolutiva

[http://www.sesbe.org/darwin\\_day](http://www.sesbe.org/darwin_day)

En la UCM:

<http://www.ucm.es/centros/webs/fbio/index.php?tp=El%20A%F1o%20de%200Darwin&a=centro&d=16096.php>

Real Academia de Ciencias y Fundación Areces: noviembre 2009

Despliegue editorial y mediático (prensa, televisión, internet,...) excepcional.

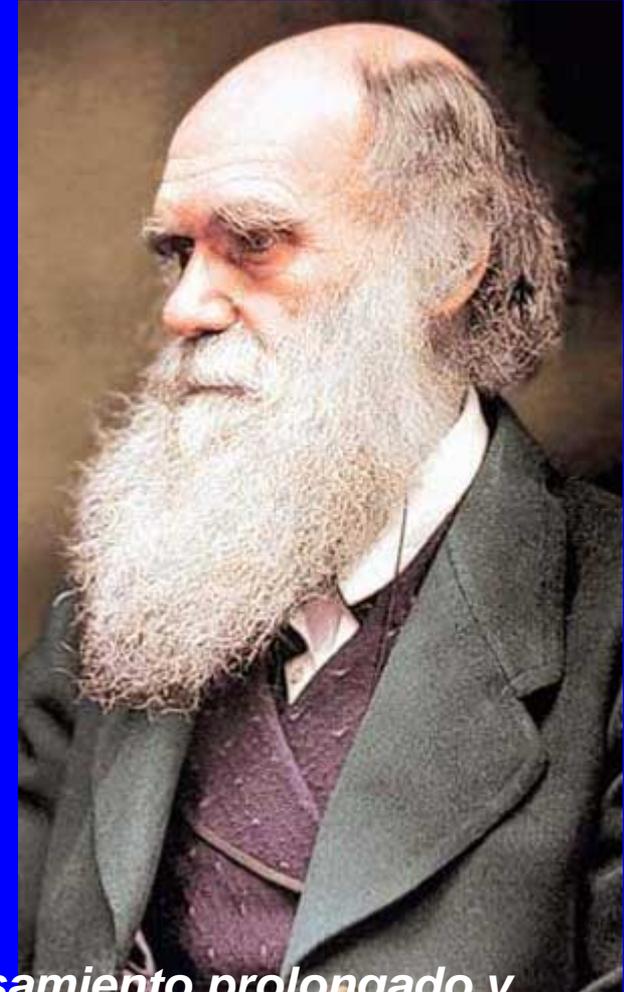


## 200 aniversario de Charles Robert Darwin (1809-1882):

Numerosos testimonios (autobiografía, cartas,...), reconociendo su ineptitud para las matemáticas:

**¿Cuáles fueron las posibles interacciones entre Darwin y la matemática de su época?**

Objeto de la segunda parte de esta charla.



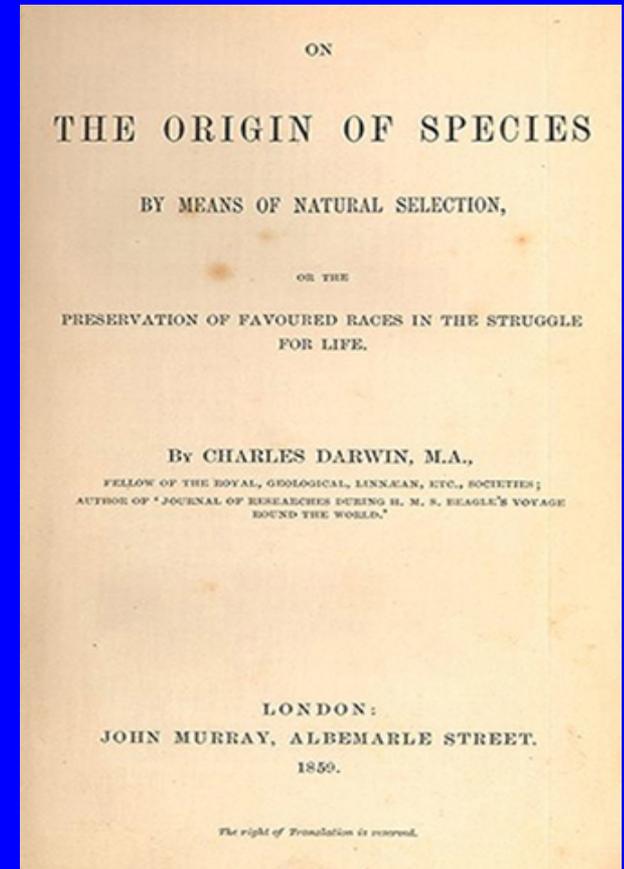
***“Mi capacidad para el pensamiento prolongado y puramente abstracto es muy limitada; además, nunca habría tenido éxito en el terreno de la metafísica o las matemáticas”.***

## 150 aniversario de “El origen de las especies” (1859):

Ninguna fórmula matemática en el libro

¿Cuál ha sido el papel de esa obra en el desarrollo posterior de las matemáticas?

Objeto de la Sección 3 de esta charla.



## 2. Darwin y la matemática de su época

Numerosos testimonios reconociendo su ineptitud para las matemáticas.

Palabras del propio Darwin.

Ch. Darwin: *Autobiography*,  
John Murray, Londres, 1887,  
Collins, Londres, 1956.

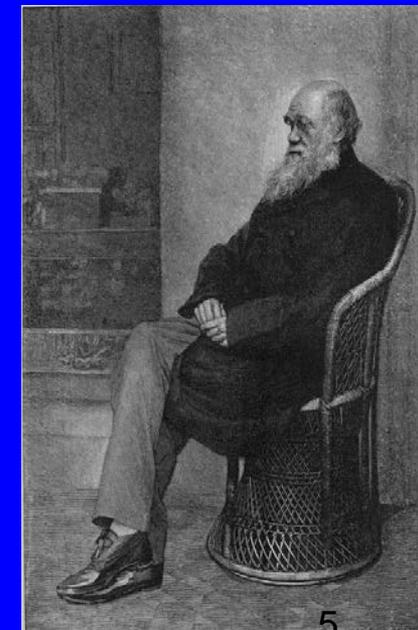
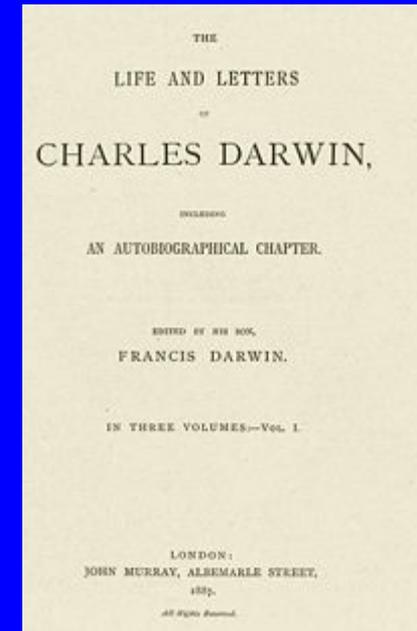
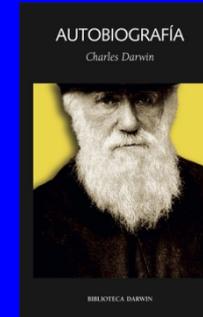
N. Barlow, *The Autobiography of Charles Darwin*, New  
York University Press, Nueva York, 1989

Véase, p. e. la traducción española:  
Ch. Darwin, *Autobiografía*, Laetoli, Navarra, 2008.

120 páginas escritas, inicialmente, en 1876 (ampliación  
hasta su muerte en 1882). Censurado por Francis Darwin  
y Emma Wedgwood.

Petición de un editor alemán: “*evolución de mi mente y mi  
carácter*”.

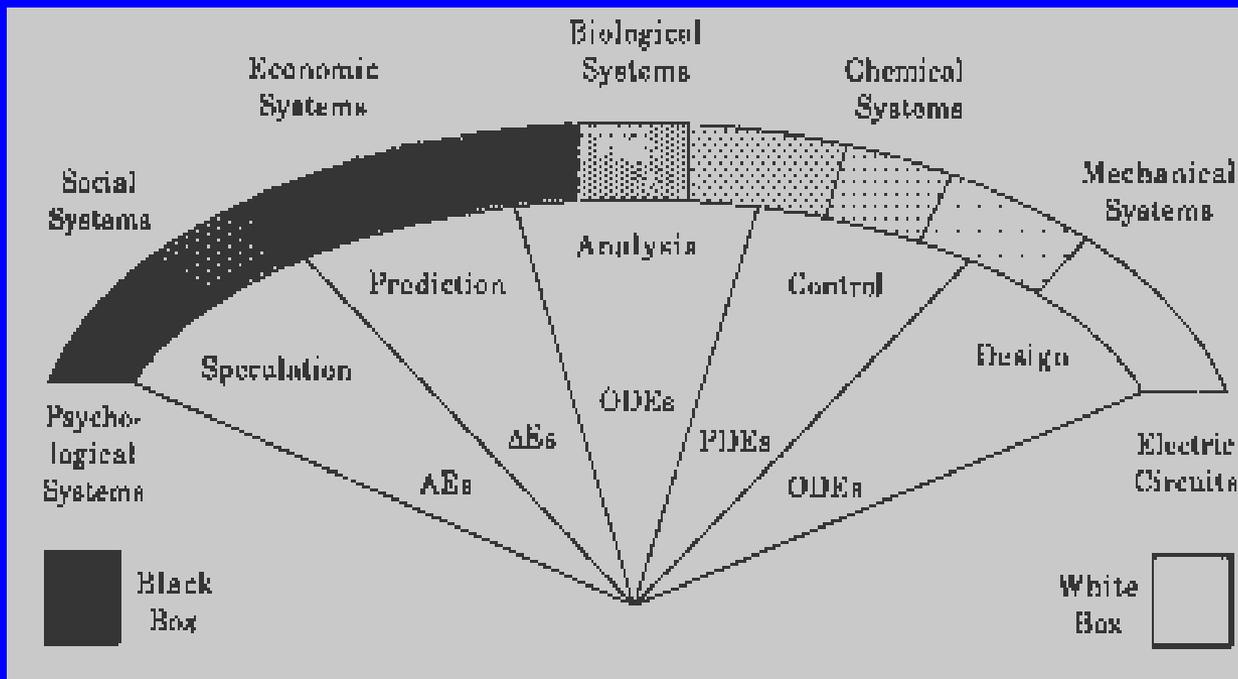
“*como si yo fuera un difunto que contempla su existencia  
restrospectivamente*”...



Recordemos sus palabras, en el último capítulo: *Valoración de mis capacidades mentales*

*Mi capacidad para el pensamiento prolongado y puramente abstracto es muy limitada; además, nunca habría tenido éxito en el terreno de la metafísica o las matemáticas.*

¿Se refería Darwin a la concepción de la matemática más alejada de la realidad?



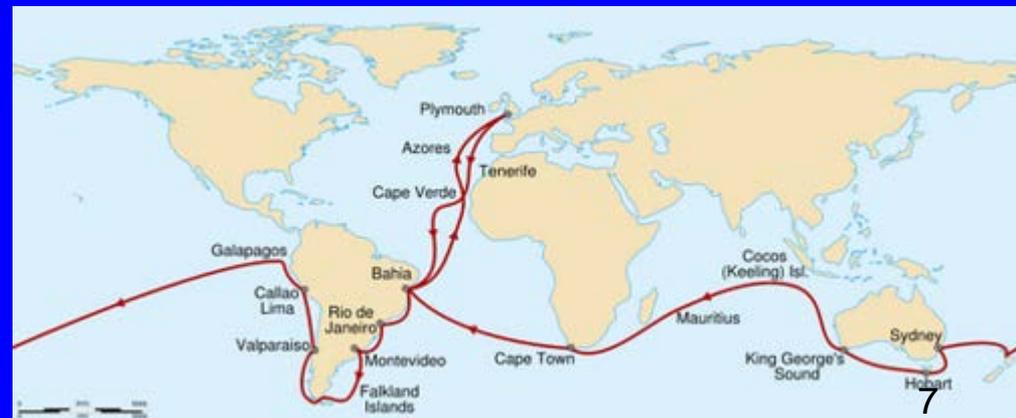
matemáticas del comportamiento / matemáticas de la naturaleza / matemática pura

En mi opinión, sus razonamientos eran ya muy cercanos a otras matemáticas.

Así, unas líneas antes, en su autobiografía, había reconocido:

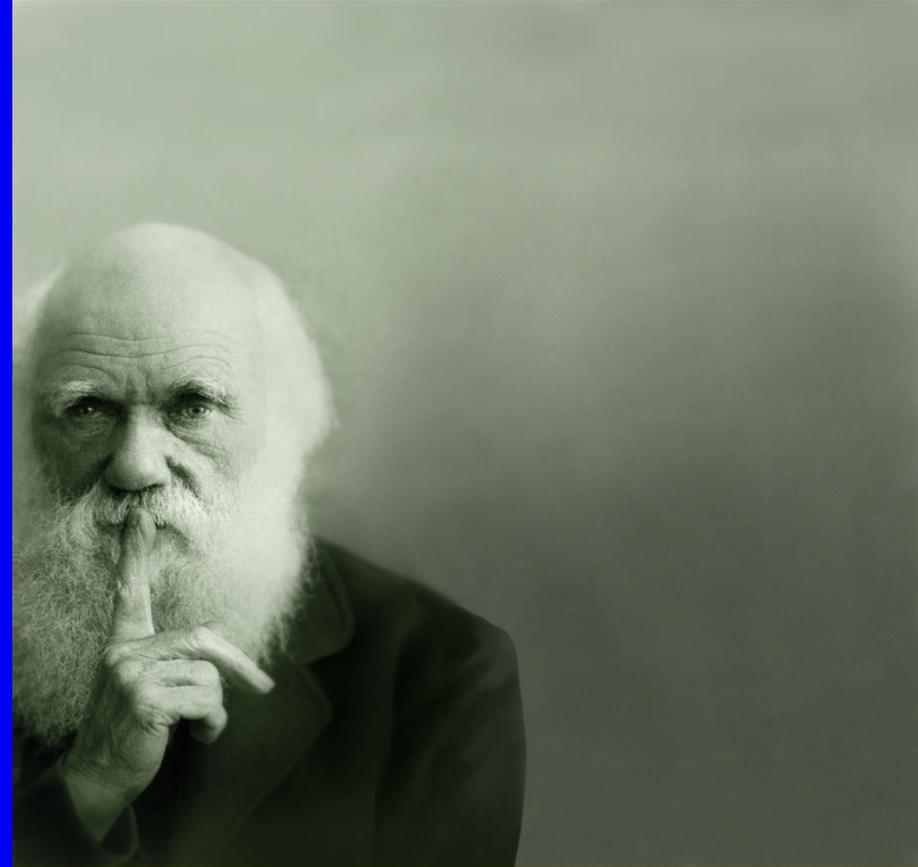
*Mi mente parece haberse convertido en una **máquina de moler grandes cantidades de datos para producir leyes generales**, ...*

De su viaje en el Beagle (1831-1836) trajo: una colección de 363 páginas de notas de zoología, 1.383 páginas de notas de geología (**Ch. Lyell, 1797-1875**), un diario de 770 páginas, 1.529 especies conservadas en frascos con alcohol, 3.907 especímenes disecados y una tortuga viva capturada en las Galápagos



Pero además, volviendo a sus palabras:

*Algunos críticos han dicho: "¡Oh!, es un buen observador, pero no posee un razonamiento poderoso". No creo que sea verdad, pues "El origen de las especies" es un largo argumento de principio a fin y ha convencido a un número considerable de gente bien dotada. Nadie podría haberlo escrito sin cierta capacidad de razonamiento.*



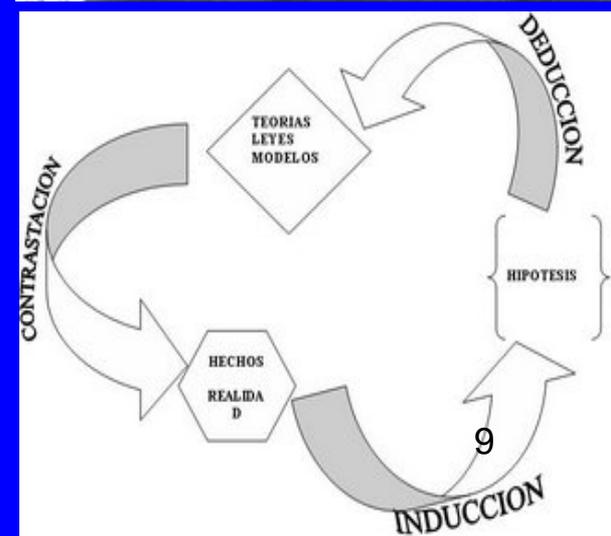
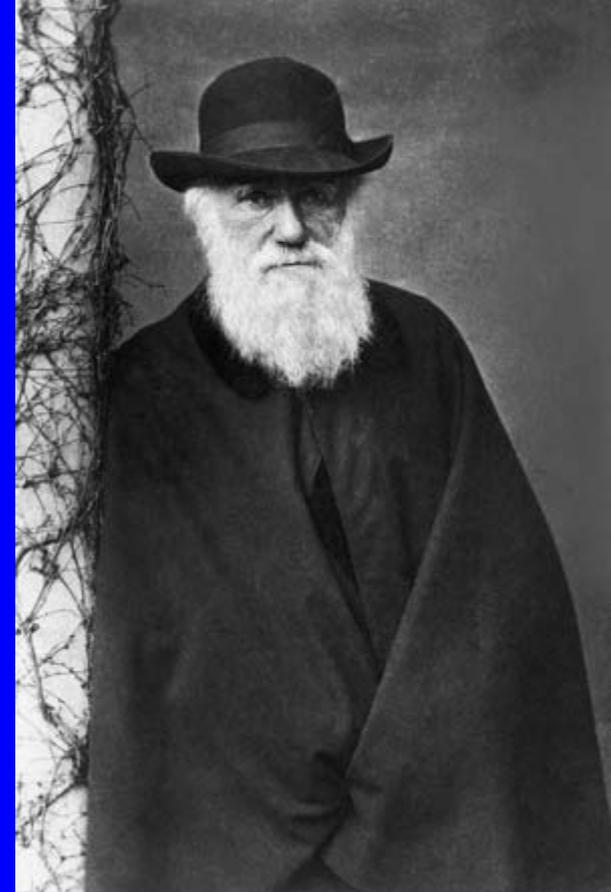
Comentaremos un poco más tarde la “gente bien dotada” que le frecuentaba

Hasta donde puedo juzgar, no estoy hecho para seguir ciegamente la guía de otras personas. **Me he esforzado constantemente por mantener mi mente libre, hasta el punto de abandonar, por más que la apreciara, cualquier hipótesis** (y hay que tener en cuenta que no puedo menos de formularlas sobre todo tipo de temas) **en cuanto se demostraba que los hechos la contradecían.**

En realidad, no tengo más remedio que actuar así, pues, exceptuado el caso de los arrecifes de coral, no puedo recordar ninguna hipótesis inicial que no haya tenido que dejar de lado o modificar considerablemente al cabo de un tiempo.

Termina con una reflexión sobre la que volveremos más adelante:

Esto me ha llevado, como es natural, a desconfiar notablemente del razonamiento deductivo en las ciencias mixtas.

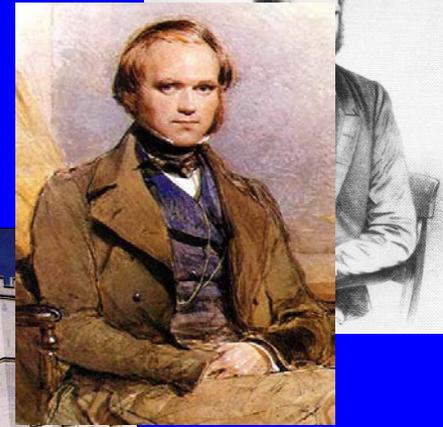


## Respecto de su paso por la universidad de Cambridge, 1828-1831

*Durante los tres años que pasé en Cambridge, perdí el tiempo, en lo que respecta a los estudios académicos, tan completamente como en Edimburgo y en el colegio. Probé con las matemáticas, y durante el verano de 1828 fui a Barmouth a recibir clases de un **profesor particular** (un hombre muy aburrido), pero progresé con mucha lentitud. El trabajo me resultaba repugnante, sobre todo porque **no era capaz de descubrir ningún sentido en las primeras fases del álgebra.***



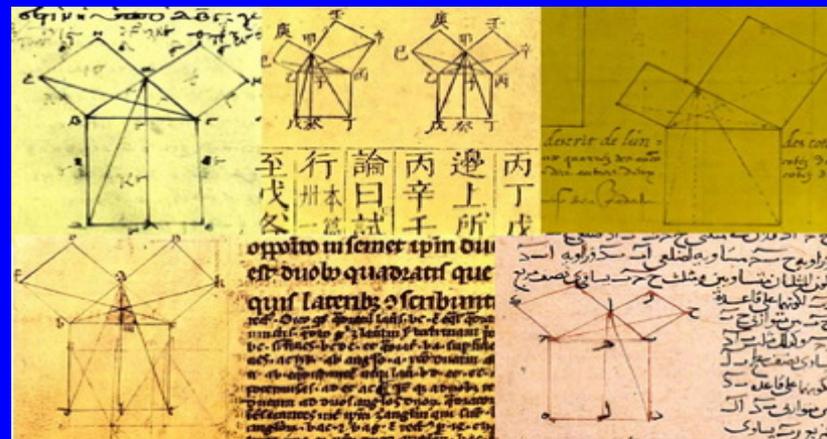
Christ's College, Cambridge



## Otras frases famosas lamentando no conocer más matemáticas:

*Aquella impaciencia constituía una gran necesidad y en años posteriores he lamentado profundamente no haber ido lo bastante lejos como para entender, al menos, algo de los grandes principios rectores de las matemáticas, **pues las personas que poseen ese talento parecen estar dotadas de un sentido adicional.** Sin embargo, no creo que pudiese haber ido más allá de un nivel muy bajo.*

En mi último año repasé un poco de álgebra y del sistema de Euclides, que me proporcionó un gran placer, como me había ocurrido en el colegio



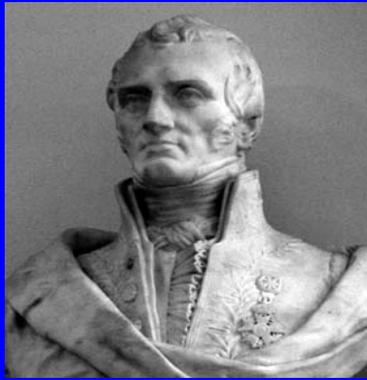
... Pero ninguna de mis dedicaciones en Cambridge fue, ni de lejos, objeto de tanto entusiasmo ni me procuró tanto placer como la de coleccionar escarabajos.



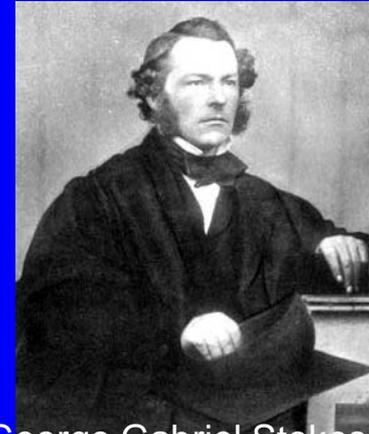
Volvamos a las matemáticas de su época (1809-1882).

Mis 3 conjuntos de hitos y personajes preferidos:

1º: Formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes de la mecánica de Fluidos



C. L. M. H. Navier (1785-1836)



Sir George Gabriel Stokes (1819-1903)

1664 Isaac Barrow

1669 Sir Isaac Newton

1702 William Whiston

1820 Robert Woodhouse

1822 Thomas Turton

1826 Sir George Biddell Airy

1828 Charles Babbage

1849 Sir George Stokes

1932 Paul Dirac

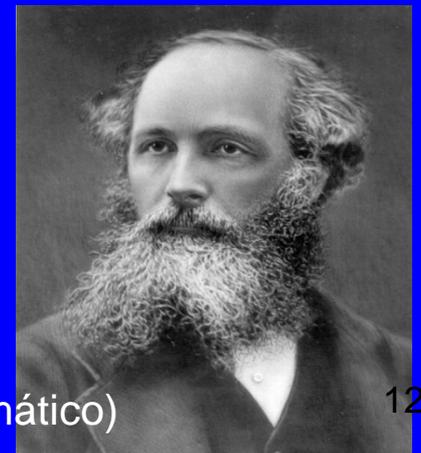
1969 Sir James Lighthill

1980 Stephen Hawking

De similar importancia (unos 30 años más tarde)

Ecuaciones de Maxwell

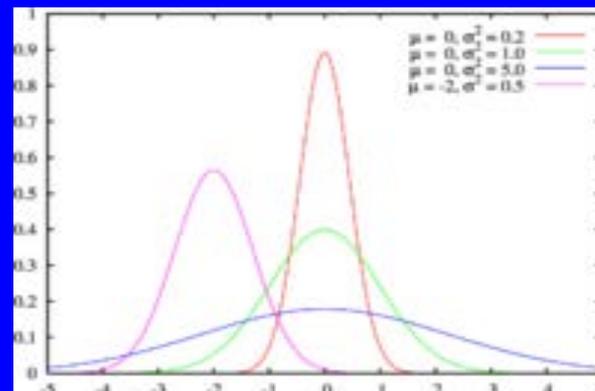
J. C. Maxwell (1831-1879)



Cátedra de física (era matemático)  
de Cambridge desde 1871

## 2º: Aparición de las geometrías no euclídeas

A principios del siglo XIX, y de modo independiente, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nicolai Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) y Ferdinand Schweickard (1780-1859) lograron construir la geometría hiperbólica que niega el quinto postulado de Euclides.



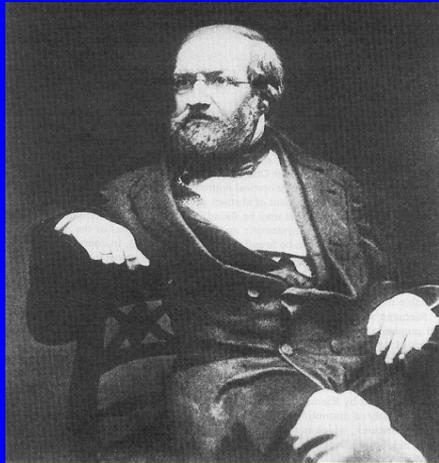
En 1823 publica *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, dedicado a la estadística: la distribución normal (Campana de Gauss)

Asociada a Gauss cuando analizaba datos astronómicos y algunos autores le atribuyen un descubrimiento independiente del de Abraham De Moivre de 1733.

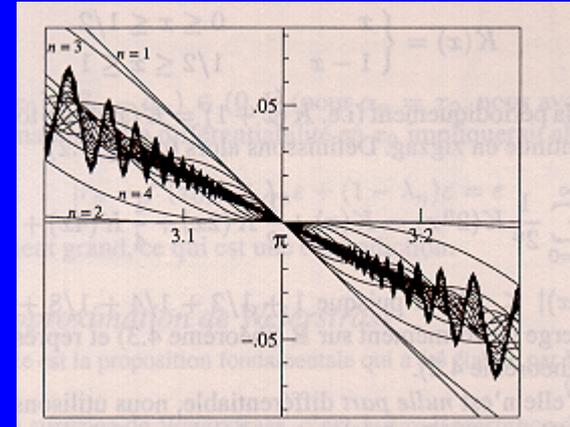
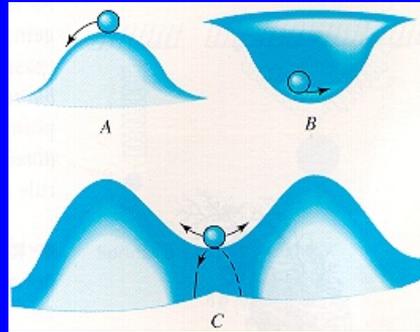


Alumno aventajado:  
G. F. B. Riemann (1826-1866)

Contemporáneo de Gauss (y de Darwin): J. P. G. L. Dirichlet (1805-1859)



Estabilidad en procesos temporales (de evolución)



3º: Fundamentación del análisis matemático

\*Riemann (1861): ejemplo de función continua y no derivable sobre un conjunto denso, Weierstrass (1872): existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto

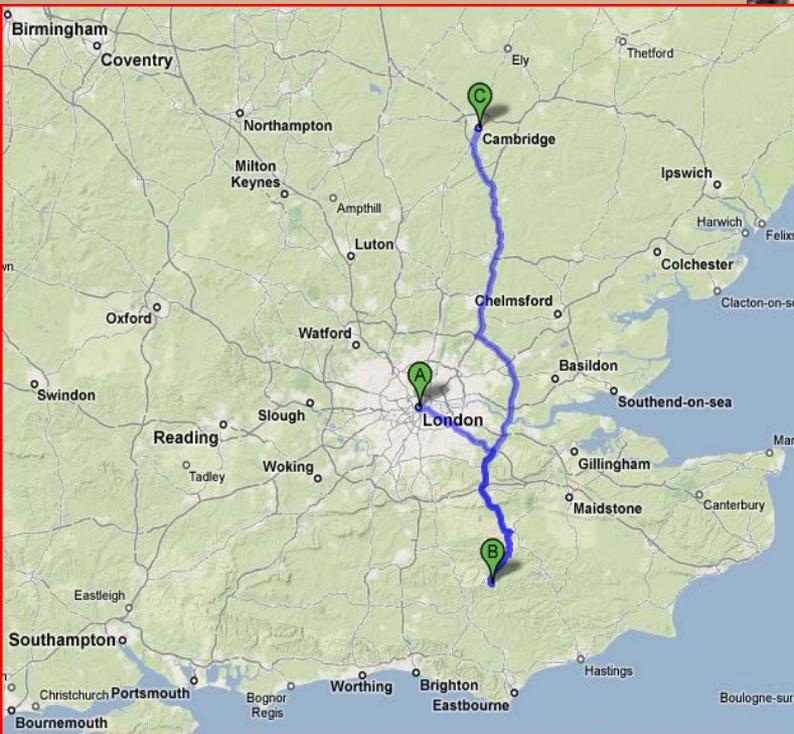


A.-L. Cauchy (1789-1857)



K. Weierstrass (1815-1897)

¿con qué “matemáticos” mantuvo Darwin algún contacto reseñable?



Darwin se instaló en Down desde 1842



*Darwin* DARWIN CORRESPONDENCE PROJECT

<http://www.darwinproject.ac.uk>

## Charles Babbage (1791-1871)



Otro gran creador en la época victoriana  
Máquina diferencial, cálculo analítico, criptografía,...,  
sistema de franqueo actual,...



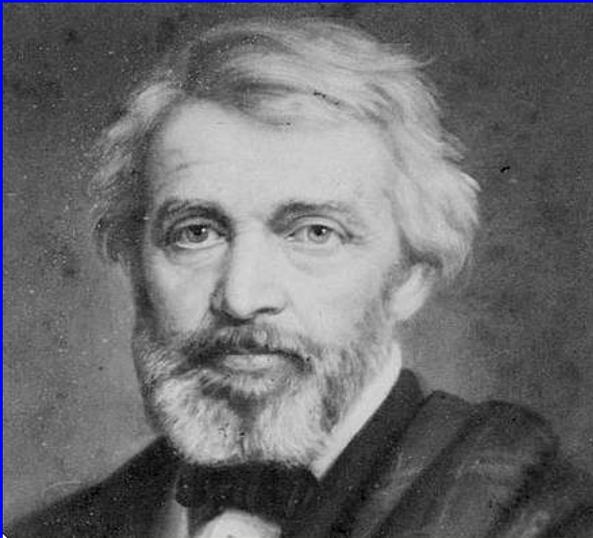
Se dice que: Babbage pudo introducir a Darwin la idea de que todo en la naturaleza funciona de acuerdo a ciertas leyes.

En su Autobiografía, Darwin escribe:

*Solía visitar bastante a menudo a Babbage y asistía con regularidad a sus famosas veladas. Siempre merecía la pena escucharle, pero era un hombre desilusionado y descontento; y tenía una expresión a menudo o generalmente taciturna ... creo que era más ladrador que mordedor.*

Más adelante, en la página 96 de la traducción española

*Recuerdo una divertida cena en casa de mi hermano [Erasmus Alvey Darwin (1804 – 1881)], donde, además de algunos otros, estuvieron Babbage y Lyell, a quienes les gustaba hablar. Pero Carlyle [Thomas Carlyle (1795-1881), historiador] no dejó hablar a nadie mientras discursaba durante toda la cena sobre las ventajas del silencio. Después de cenar, Babbage, con su estilo más adusto, agradeció a Carlyle su interesantísima conferencia sobre el silencio.*



Thomas Carlyle (1795-1881),

En la página 97 de la traducción española de su Autobiografía, Darwin escribe **[Thomas Carley]** *Ha demostrado un poder omnímmodo para grabar en las mentes algunas grandes verdades morales. Por otra parte, sus opiniones sobre la esclavitud eran repugnantes. Según él, el poder no se equivocaba. Su inteligencia me parecía muy estrecha, incluso dejando de lado todas las ramas de la ciencia, que él despreciaba....Se reía burlándose de la idea de que un matemático como Whewell pudiera juzgar, según sostenía yo, las opiniones de Goethe sobre la luz. Consideraba sumamente ridículo que alguien se interesara porque un glaciar se moviese un poco más deprisa o un poco más despacio, e, incluso, por el mero hecho de que se moviera. Hasta donde puedo juzgar, nunca conocí a un hombre con una mente tan poco idónea para la investigación científica.*

¿Quién era ese “matemático”, Whewell ?

William Whewell (1794-1866) Matemático interdisciplinar (mecánica, mineralogía, geología, astronomía, economía política, teología, educación, derecho internacional, arquitectura y filosofía de la ciencia). Fue Presidente de la Sociedad Geológica.

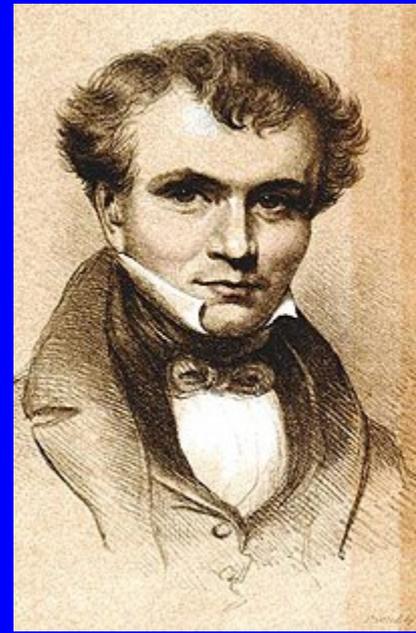
Asesoramiento científico y filosófico de Darwin (Lyell y Faraday). Lo conoció en casa de su profesor J. S. Henslow (1796 - 1861).

Whewell inventó los términos “anode,” “cathode,” e “ion” para Faraday. En 1833 Whewell inventó la palabra inglesa “scientist;” (científico) antes de ese momento “natural philosopher” y “man of science.”

Se ocupó, entre otras cosas de la dicotomía descubrimiento / invención en la investigación científica.

Escribió extensamente sobre el proceso de inducción (tras acumular abundantes datos experimentales) en ciencia que pudo interesar a Darwin.

*W. Whewell: The Philosophy of the Inductive Sciences, Founded Upon Their History.* Dos volúmenes, Londres. 1840, segunda edición en 1847, tercera edición 1857 (New York 1873).



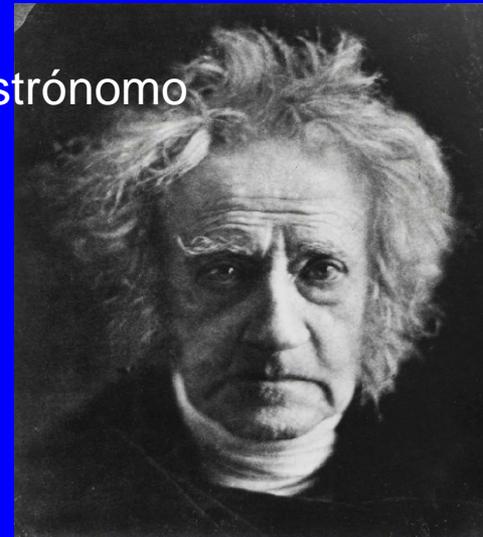
## Volvamos a la Autobiografía de Darwin:

*Durante mi último año en Cambridge leí con atención y hondo interés el “Viaje a las regiones equinocciales del Nuevo Continente” de Humboldt. Esta obra y la **Introduction on the Study of Natural Philosophy [Introducción al estudio de la Filosofía Natural]**, de sir J. Herschel, suscitaron en mí un empeño ardiente por añadir alguna aportación, aunque fuese la más modesta, a la noble estructura de la ciencia de la naturaleza. **Ningún libro, ni siquiera una docena de ellos, me influyó ni de lejos tanto como esos dos.***

¿Quién fue sir J. Herschel?

Sir John Frederick William Herschel (1792-1871) matemático y astrónomo inglés. (Su padre, William Herschel descubrió Urano en 1781)

Entre 1821 y 1823 estudió las estrellas binarias catalogadas por su padre, y logró en 1826 la Medalla de oro de la Real Sociedad Astronómica (también en 1836, la del Instituto de Francia en 1825). Sus contribuciones matemáticas fueron premiadas por la Royal Society.



John Herschel popularizó el uso de la fecha juliana en astronomía. Acuñó los términos "fotografía", "negativo", "positivo", y descubrió el uso del tiosulfato de sodio como fijador de las sales de plata (se lo comunicó a Daguerre) haciéndolas permanentes.

Intrigado (tras un viaje a Sudáfrica) por las ideas sobre una formación progresiva de los paisajes escribió a Lyell pidiendo una urgente búsqueda de las leyes naturales que se encontraban bajo "el misterio de los misterios" - cómo se crearon las especies.

Tomando un punto de vista gradualista de la evolución comentó:

*"¡Tiempo! ¡Tiempo! ¡Tiempo! - no debemos impugnar la Cronología de Las Escrituras, pero debemos interpretarlas de acuerdo con lo que sea que parezca ser la verdad según investigaciones objetivas, ya que no pueden haber dos verdades. Y realmente hay un margen suficiente: la vida de los Patriarcas pueden ser razonablemente extendidas entre 5000 y 50000 años cada uno como los días de la Creación a tantos mil millones de años"*

El documento circuló, y Charles Babbage incorporó extractos en su "Noveno Tratado de Bridgewater", que postulaba que las leyes estaban puestas por una entidad divina.

Cuando el HMS Beagle llegó a Ciudad del Cabo, el Capitán y el joven naturalista Charles Darwin visitaron al eminente Herschel el 3 de junio de 1836. Más tarde, Darwin escribiría El Origen de las Especies influenciado por Herschel

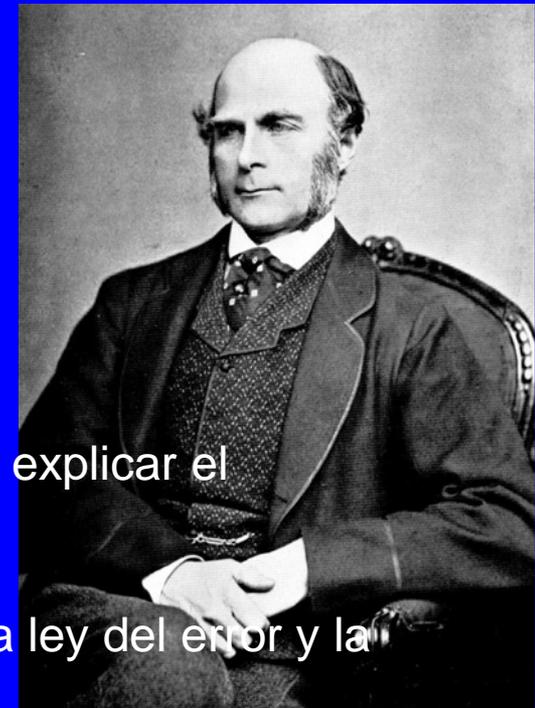
El familiar que más le pudo influir fue un primo segundo:

Sir Francis Galton (1822 –1911), estadístico pionero, con un amplio espectro de intereses (psicólogo, antropólogo, geógrafo, explorador, inventor, meteorólogo, ...).

Nunca fue profesor universitario (como Charles Darwin).

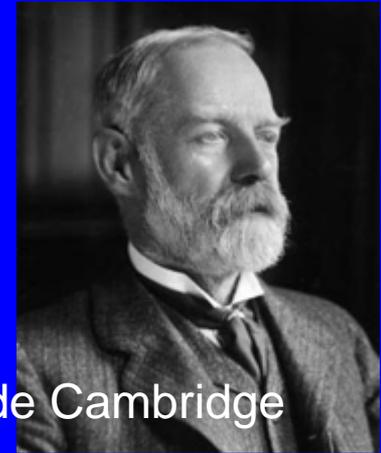
- Inventó el uso de la línea de regresión, siendo el primero en explicar el fenómeno de la regresión a la media.
- Pionero en el uso de la distribución normal (sobre 1880).
- Inventó la máquina Quincunx (instrumento para demostrar la ley del error y la distribución normal).
- Descubrió las propiedades de la distribución normal bivariada y su relación con el análisis de regresión
- En 1888 introdujo el concepto de correlación

En biología, Galton refutó la teoría de la *pangénesis* realizando una serie de experimentos con ratones, con el fin de comprobar si las transfusiones de sangre alteraban los caracteres heredables. Su trabajo con los guisantes y su posterior investigación en torno a la herencia de la altura lo condujeron a formular los conceptos de regresión y correlación y la *Ley de Galton* de la herencia ancestral.



Obviamente, Darwin no pudo ser insensible a la profesión de segundo hijo:

George Howard Darwin  
(1845-1912),



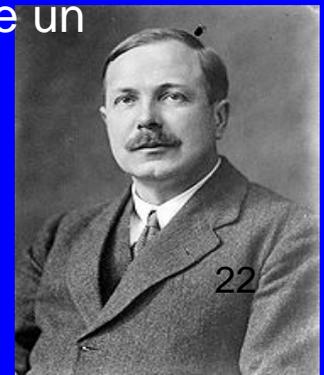
Catedrático de astronomía y filosofía experimental en la Universidad de Cambridge hasta 1884. Estudió los efectos de la marea en los planetas.

Aplicó un modelo de origen del sistema solar hoy en día considerado incorrecto (Thomson). Realizó un estudio pionero del problema de tres cuerpos en el caso de las órbitas del sistema Sol - Tierra - Luna. Estudió la estabilidad de rotación de fluidos motivado por su interés en la Luna.

Fue Presidente de la Real Sociedad Astronómica en 1899-1900 y ganó la Medalla del Oro de esa sociedad en 1892.

Su hijo (nieto de Ch. Darwin): Sir Charles Galton Darwin (1887-1962) fue un reputado físico-matemático de Manchester (Rutherford y Bohr)

De jubilado, volcó su atención en temas relacionados con la población mundial, la genética y la eugenesia ("El próximo millón de años" 1952).



## Método de Darwin de doble muestreo:

Darwin cultivó plantas para experimentar con ellas: unas ciertas flores las cruzó con otras y otras la fertilizó con si mismas. Observó que las híbridas eran más grandes que las puras Repitió el experimento con otras siete tipos de plantas , incluido el maíz. Como podía haber diferencia de suelos, luz o humedad, plantó las semillas por pares (cruzadas y puras). En el maíz, las puras tenían sólo el 84 % de la altura de la del maíz híbrido.

Si tomamos al azar una docena de hombres de dos países y medimos su altura media. Las alturas de los hombres de un mismo país varían mucho más que las alturas de una misma planta . Lo quiso cuantificar y preguntó a su sobrino Francis Galton que acaba de introducir la “desviación estandar” pero no lograr concluir nada valioso.

Años más tarde, la compañía de cerveza Guinness, habiendo oido que un estudiante de Oxford, William Sealy Gosset, había desarrollado un potente método estadístico le pidió ayuda pero él puso la condición de mantener el anonimato: nació el “test de t-Student”

W. S. Gosset (1876-1937)



Ese test aplicado a la desviación estándar de Galton mostraba cuanto de azar tenía la diferencia de alturas entre las plantas puras e híbridas: el azar intervenía en una proporción de 1 a 20.

Más tarde, Fisher calculó la desviación estándar pero de la diferencia de las plantas en cada tiesto y observó que la componente de azar era muchísimo menor: 1 entre 10.000. Ahora se podía tomar como prácticamente cierto que las plantas híbridas crecían más altas que las puras.



Sir Ronald A. Fisher, (1890-1962)

La idea metódica de Darwin de plantarlas en pares había sido la clave y hoy forma una de las partes de la Estadística conocida como *Diseño experimental* (pero murió sin Darwin saberlo).

Para concluir esta segunda parte:

Polémica Darwin / Wallace en contraste a la de Newton / Leibniz por la noción de derivada: ...

**Papel de “observador avanzado”, fuente de posteriores desarrollos matemáticos”**

Papel similar al jugado por Kepler con sus tres leyes experimentales previas a la demostración rigurosa por Newton a partir de sus tres leyes generales y la ley de gravitación universal (que de hecho también tuvo su punto de partida en las observaciones de Kepler)

XLIX

**CORRESPONSALES ESTRANEROS.**

---

RESIDENCIA.	NOMBRES.
Berlin.....	Sr. D. J. H. Alejandro Humbold.
Londres.....	Sr. D. Miguel Faraday.
Viena.....	Sr. D. N. Estinghausen.
París.....	Sr. D. Arturo Julio Morin.
Nápoles.....	Sr. D. Macedonio Melloni.
Berlin.....	Baron D. Leopoldo de Buch.
Londres.....	Sr. D. Roberto Brown.
Londres.....	Sr. D. Ricardo Owen.
reibernberg.....	Sr. D. Augusto Breithaupt.
Lisboa.....	Ilmo. Sr. D. Joaquin José da Costa de Macedo.
Poulkowa.....	Excmo. Sr. D. Federico Jorge Guillermo Struve.
S. Petersburgo.....	Excmo. Sr. D. Pablo Enrique Fuss.
Berlin.....	Sr. D. Juan Francisco Encke.
Gotinga.....	Sr. D. Carlos Federico Gauss.
Turin.....	Sr. D. N. Plana.
Copenhague.....	Sr. D. A. E. Oersted.
Neufchatel.....	Sr. D. Luis Agassiz.
París.....	Sr. D. Maria-Juan Pedro Flourens.
Berlin.....	Sr. D. Carlos Gustavo Jacobo Jacobi.
Giessen.....	Sr. D. Justo Liebig.
París.....	Sr. D. Pedro Mateo Orfila.
Leon de Francia.....	Sr. D. Leon Dufour.
París.....	Sr. D. Domingo Francisco Juan Arago.
Bruselas.....	Sr. D. A. Quetelet.
Londres.....	Sr. D. Juan Herschel.
París.....	Sr. D. Enrique Victor Regnault.
París.....	Excmo. Sr. D. Juan Bautista Dumas
París.....	Sr. D. M. J. E. Guerin-Meneville.
Vinebra.....	Sr. D. Edmundo Boissier.

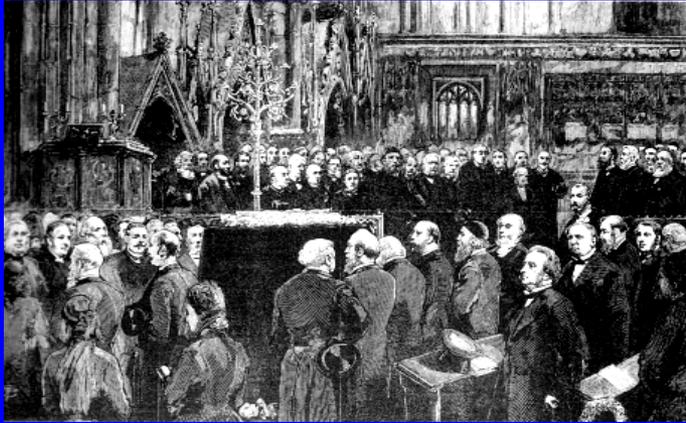
## Observación y Cálculo

Ya en 1847,  
fundación de la Real  
Academia de Ciencias



Brown, Agassiz, Humboldt,  
Herschel, Gaus,  
Faraday,...

Entierro, en abril de 1882, en la Abadía de Westminster,



Junto a varios de sus amigos, ...,  
y a unos 7 metros de la tumba de Newton



### 3. “El origen de las especies” como origen de nuevas matemáticas.

<http://www.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/13559620212026495222202/index.htm>

Dos interrelaciones matemáticas:

- modelos de poblaciones y
- modelos de genética evolutiva

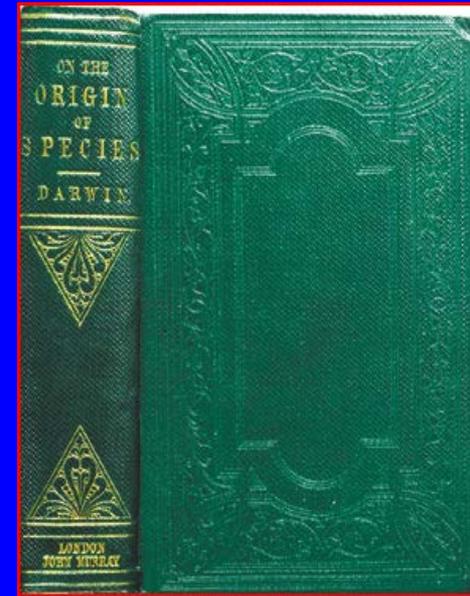


#### 3.1. Modelos de poblaciones y Darwin

*En octubre de 1838, es decir, 15 meses después de haber iniciado mi indagación sistemática, leí por casualidad y para entretenerme el libro de Malthus Sobre la población, y como, debido a mi larga y continua observación de los hábitos de los animales y las plantas, me hallaba bien preparado para darme cuenta de la lucha universal por la existencia, me llamó la atención enseguida que, en esas circunstancias, las variaciones favorables tenderían a preservarse, y las desfavorables a ser destruidas. El resultado de ello sería la formación de nuevas especies. Ahí tenía, por fin, una teoría con la que trabajar,...*

En el “Capítulo III. La lucha por la existencia:

**Progresión geométrica del aumento.**—La lucha por la existencia resulta inevitablemente de la elevada proporción en que tienden a aumentar todos los seres orgánicos. Todo ser que en el transcurso natural de su vida produce varios huevos o semillas, tiene que sufrir destrucción durante algún período de su vida, o durante alguna estación, o accidentalmente en algún año, pues, de lo contrario, según el principio de la progresión geométrica, su número llegaría a ser rápidamente tan excesivamente grande que ningún país podría mantener la producción. De aquí que, como se producen más individuos que los que pueden sobrevivir, tiene que haber en caso una lucha por la existencia, ya de un individuo con otro de la misma especie o con individuos de especies distintas, ya con las condiciones físicas de vida.



Es la doctrina de Malthus aplicada con doble motivo al conjunto de los reinos animal y vegetal, pues en este caso no puede haber ningún aumento artificial de alimentos, ni ninguna limitación prudencial por parte del matrimonio. Aunque algunas especies puedan estar aumentando numéricamente en la actualidad con más o menos rapidez, no pueden estarlo todas, pues no cabrían en el mundo.

No hay ninguna excepción a la regla de que todo ser orgánico aumenta naturalmente en progresión tan elevada que, si no es destruido, pronto, estaría la tierra cubierta por la descendencia de una sola pareja. Incluso el hombre, que es lento en reproducirse, se ha duplicado en veinticinco años, y, según esta progresión, en menos de mil años su progenie no tendría literalmente sitio para estar de pie.

Thomas Robert Malthus (1766 -1834), economista

$$B_n = rB_{n-1}$$

$r$  razón de crecimiento (se puede estimar por "mínimos cuadrados")

$$B_n = r^n B_0 \quad \text{Progresión geométrica}$$

Cálculo por Darwin (Cap.3) para el caso de elefantes

Modelo ya sugerido en 1760 por L. Euler

L. Euler, (1760). "A General Investigation into the Mortality and Multiplication of the Human Species,". En *Mathematical Demography: Selected Papers*, ed. D. Smith and N. Keyfitz. New York: Springer-Verlag. 1977

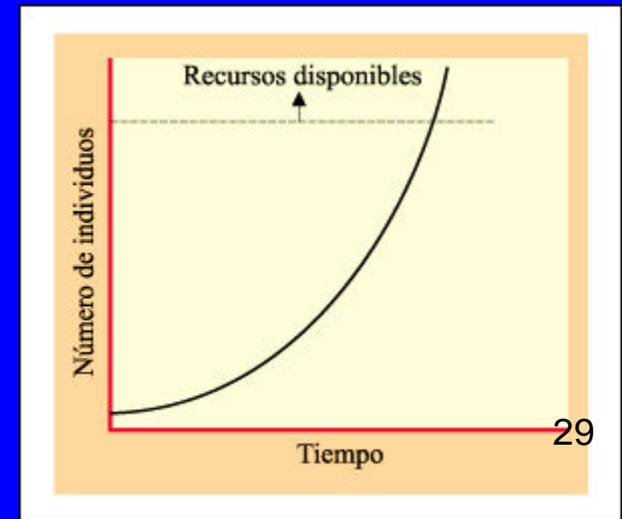


$$r = 1 + hb \quad P(t+h) = rP(t)$$

$$P(t+h) - P(t) = hrP(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = bP(t)$$

$$P(T) = P(0)e^{bT}$$

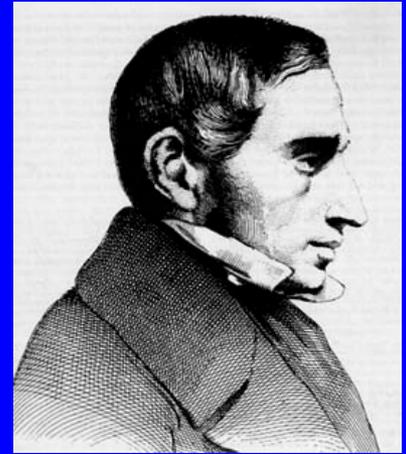


## Limitación al crecimiento

Pierre François Verhulst (1804-1849)

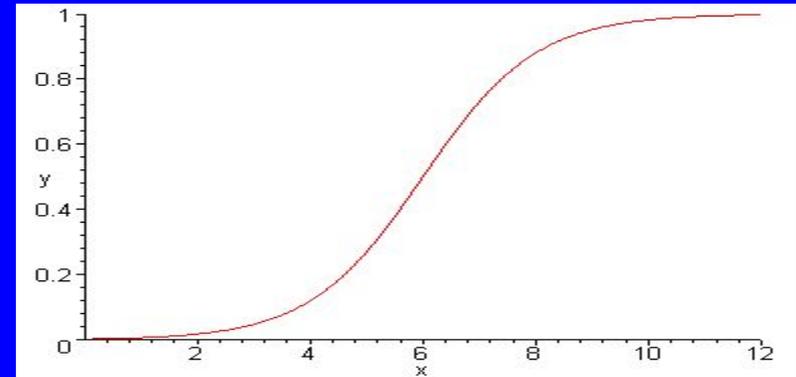
Verhulst, P. F., (1838). 'Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique* 10:113–121.

Verhulst, P. F., Recherches Mathematiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18, Art. 1, 1–45, 1845.



$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \quad \text{ecuación logística}$$

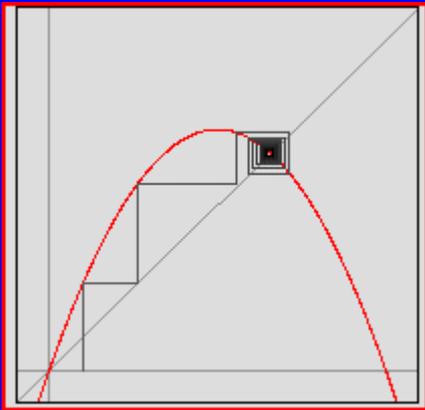
K capacidad (constante de saturación)



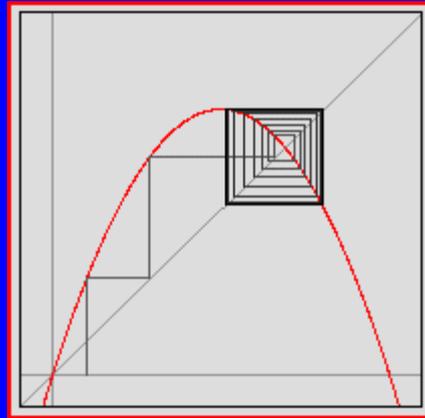
Versión por discretización del tiempo (tras renormalización de constantes)

$$P_{n+1} = \lambda P_n (1 - P_n)$$

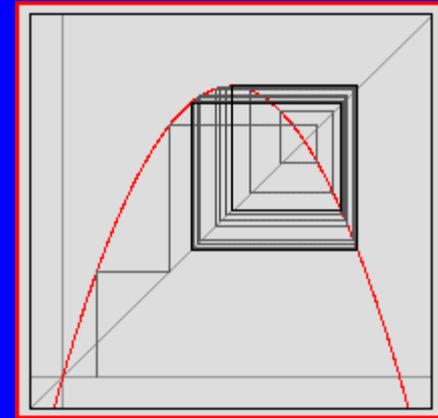
Ruta al caos  $\lambda \square 4$



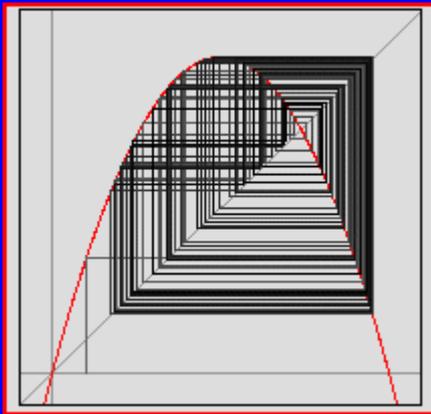
$$\lambda = 2,9$$



$$\lambda = 3,2$$



$$\lambda = 3,5$$



$$\lambda = 3,8$$

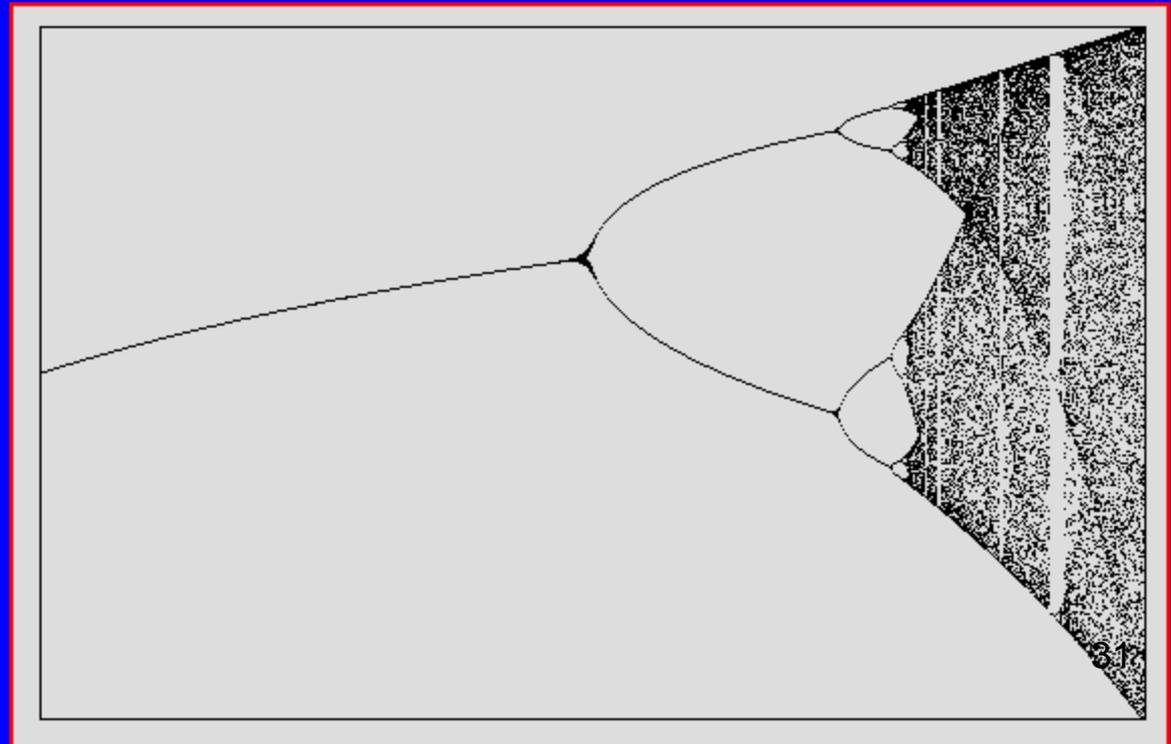
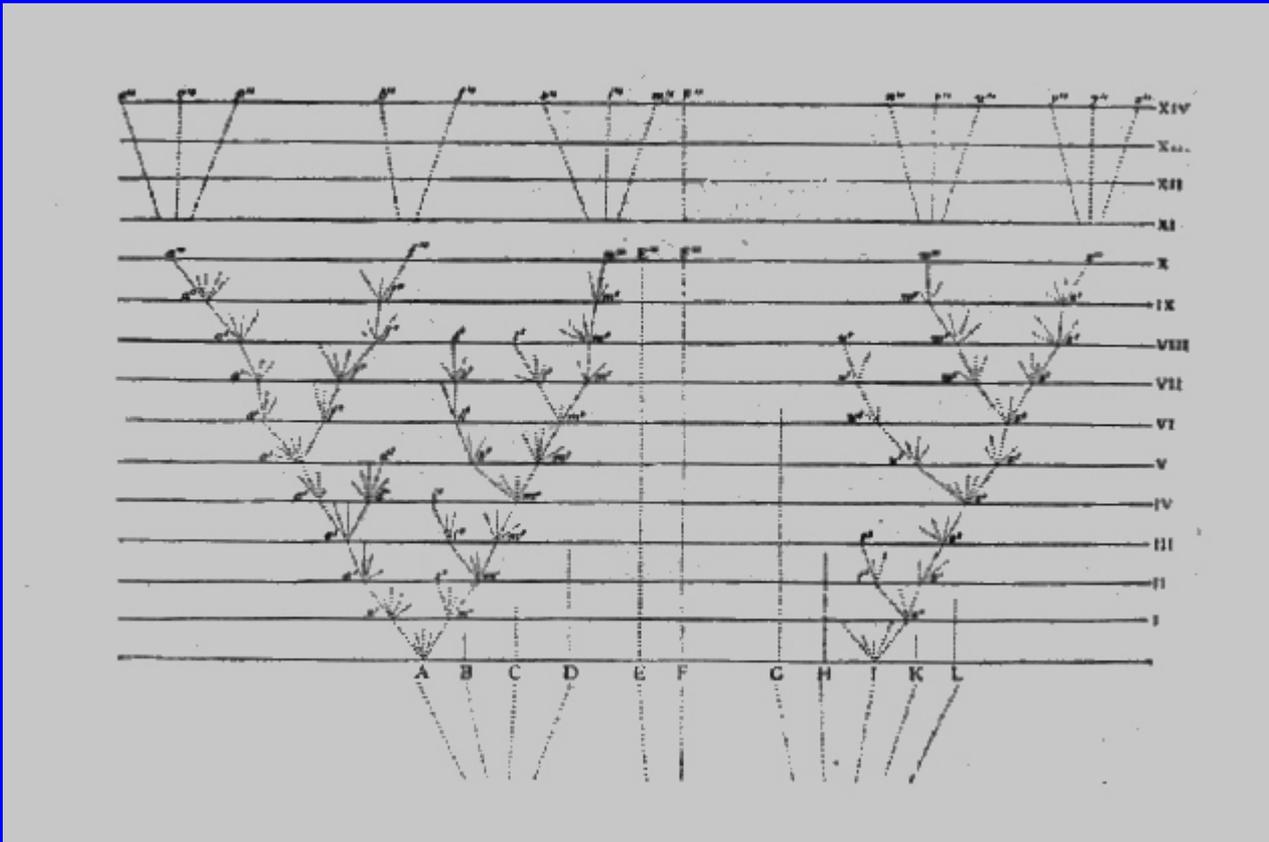


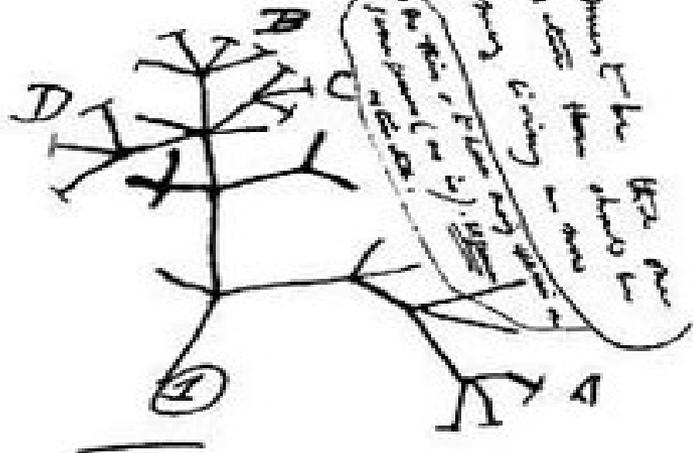
Diagrama de bifurcación  
de puntos periódicos,  
caos, fractales,...



*El origen de las especies, Capítulo V. Leyes de la variación*

*El árbol de la vida, ...*

I think



Then between A & B. various  
 sort of relation. C + B. The  
 first predation, B + D  
 rather greater interaction  
 then former would be  
 formed. - binary relation

## Modelos matemáticos más finos:

- a) Modelos de población estructurada por la edad
- b) Modelos de población estructurada por edades y sexos
- c) Modelos de población estructurada por edades y sexos con difusión geográfica
- d) Modelos (uniformes en el espacio) de competición de especies
- e) Modelos de poblaciones en competencia y estructuradas por edades y sexos con difusión espacial

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= d_i \nabla^2 u_i + u_i f_i(x, u), & x \in \Omega \\ 0 &= \alpha_i(x) \frac{\partial u_i}{\partial n} + \beta_i(x) u_i, & x \in \partial\Omega \\ u_i(x, 0) &= u_i^0(x), & x \in \Omega\end{aligned}$$

F. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics, and Epidemics*, 20 SIAM 1975.

R. S. Cantrell and C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2003,

## Dos detalles al respecto:

### a) Aportaciones pioneras de Vito Volterra

Observación (Ross (1911), Martini (1921), Lotka (1925),... ) y Cálculo (Volterra (1927),...)

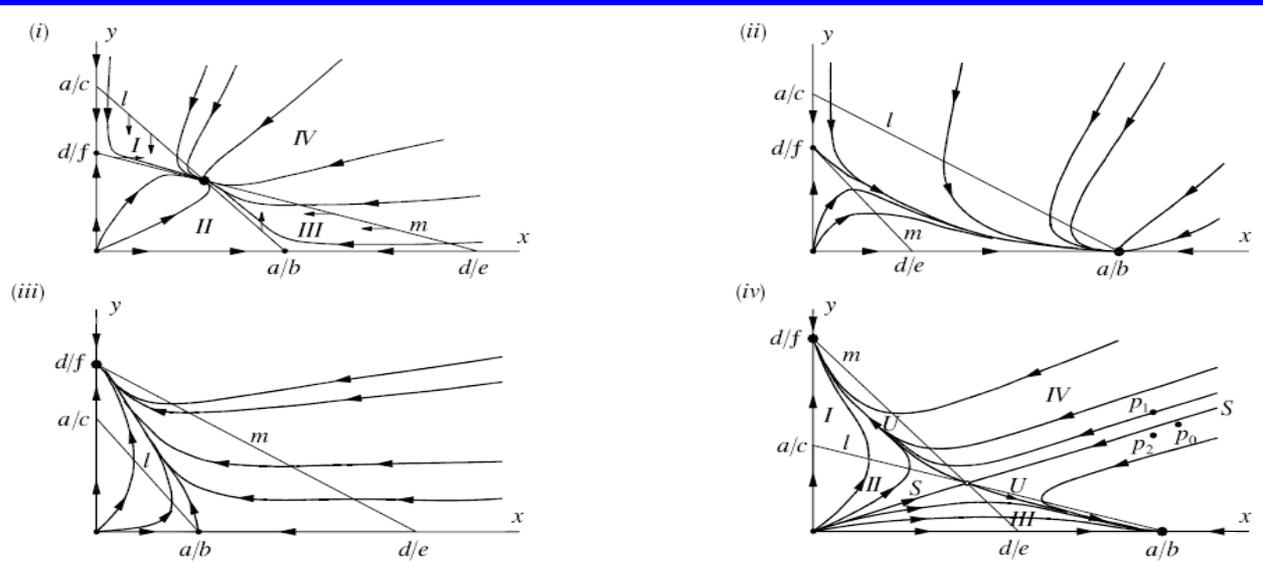
1931. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie.*

Paris: Gauthier-Villars

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\ \frac{dy}{dt} = y(b - ex - fy) \end{cases}$$



Vito Volterra (1860 - 1940)

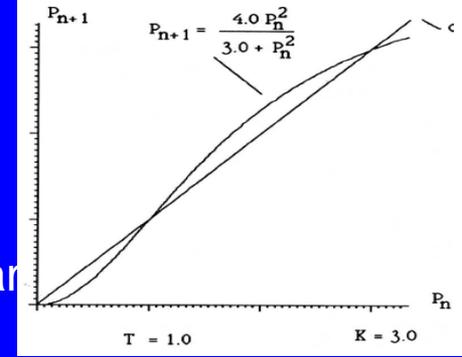


A.Kolmogorov: On the theory of Volterra concerning the struggle for existence, 1936, *Giornale Istituto Italiano degli Attuari*, 7, 74-80.

Teoría de juegos diferenciales de R. Isaac (Pareto, Stakelberg, Nash)

b) El fenómeno de extinción : [Capítulo IV.... Extinción producida por la selección natural]

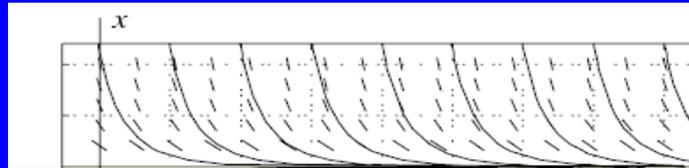
Fenómenos de extinción en tiempo finito en sistemas dinámicos discretos



Fenómenos de extinción en tiempo finito en sistemas dinámicos

Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

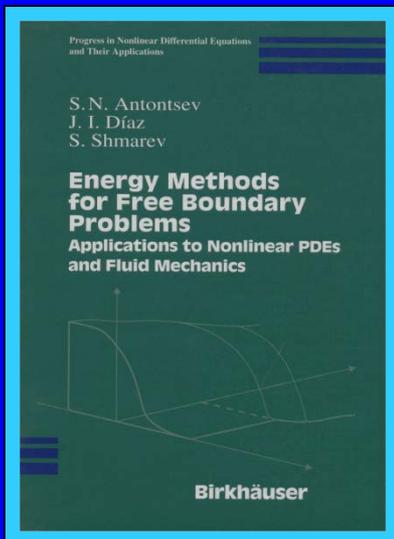
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx^\alpha - cy) & \alpha \in (-1, 0) \\ \frac{dy}{dt} = y(b - ex - fy) \end{cases}$$



Ecuaciones en derivadas parciales no lineales

FINITE EXTINCTION TIME FOR A CLASS OF  
NON-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS  
  
Gregorio DIAZ, Ildefonso DIAZ

COMM. IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 4(11), 1213-1231 (1979)



S.N. Antontsev, J.I. Díaz and S.I. Shmarev,  
*Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*,  
Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **48**, Birkhäuser, Boston, 2002.

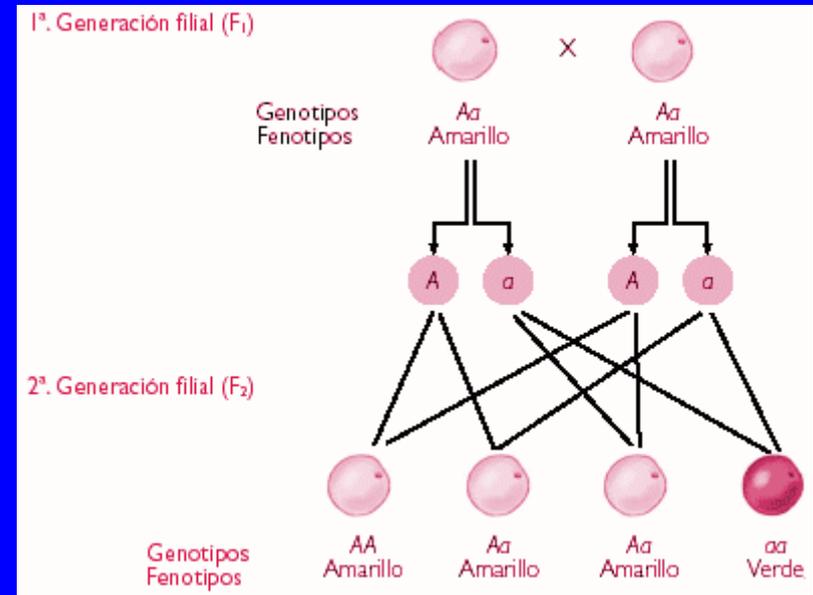
## 3.2. Darwin, genética evolutiva y modelos matemáticos

El capítulo dedicado a la herencia (Capítulo V) es el que ha requerido una mayor revisión. Su teoría de las *gemulas* no era consistente.

La adecuada comprensión (matemática) debió esperar casi 80 años a que se redescubriesen las tres Leyes de Medel



Gregor Johan Mendel (1821 –1884)



Explicó su trabajo "Experiments on Plant Hybridization", en dos congresos en Moravia en 1865 y lo publicó en 1866, en *Proceedings of the Natural History Society of Brunn*.

- Mendel conocía el libro de Darwin
- y este conoció su artículo por su cita en un libro de Focke.

Contraste: 2006: Perelman, conjetura de Poincaré, internet.

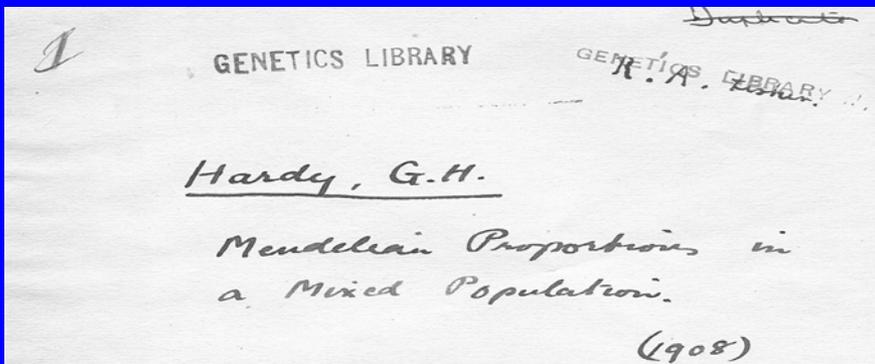
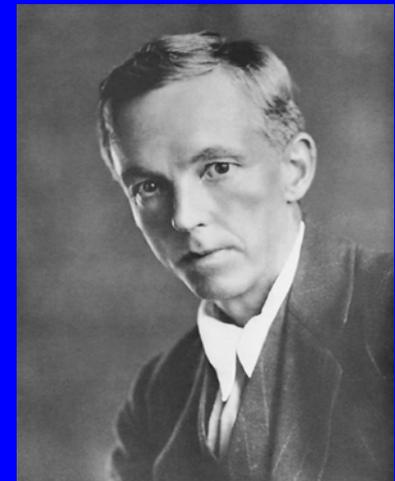
El matemático Godfrey Harold Hardy (1877-1947), Sadleirian Professor de Cambridge y uno de los matemáticos puros más activos de su época.

Hardy G. H. (1908) *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press; 10th edition (1993).

Colaboración desde 1911 con J. E. Littlewood (1885 –1977), desde 1914 con S. A. Rāmānujan (1887 1920) y desde 1924 con G. Polya (1887 –septiembre de 1985), entre otros.

En 1908 publicó una nota de dos páginas (embarazosa para él por su simplicidad matemática):

G.H. Hardy, 1908 Mendelian proportions in a mixed population. *Science* **28**: 49–50.



Respuesta a su amigo R.C. Punnet (de un College próximo al suyo) con el que solía jugar a *cricket*

No confundir con el biólogo A.C. Hardy (Revista de Occidente 1906)

Una de las obras más famosas de Hardy:

Escrito tras una trombosis cerebral que le llevó a intentar suicidarse

Reflexión melancólica, agridulce visión de la matemática, del género de las de H Poincaré (1945) y J. Hadamard (1948).

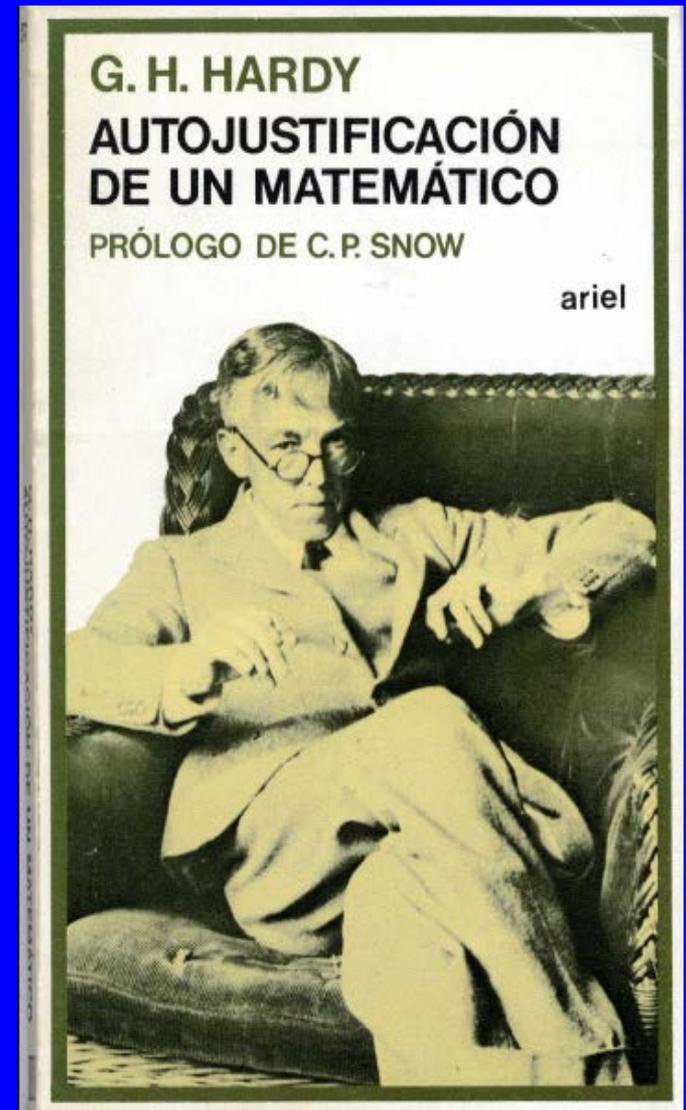
Edición en Nívola (1999) con prólogo de Miguel de Guzmán

Recensiones de

J.M. Sánchez-Ron (El País, 8/1/2000): “clásico de la ciencia”

y

J. Hernández (Revista de libros, Diciembre 2001): “la mejor descripción de lo que significa ser artista creador” Graham Greene

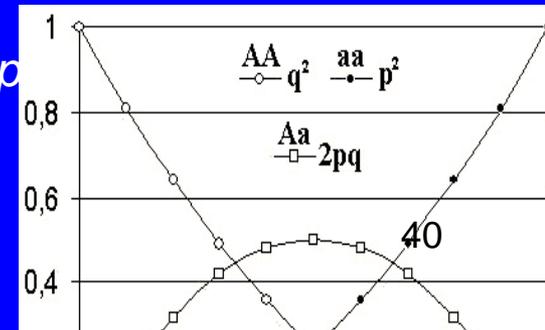


Su artículo de 1908:

*Al Editor de Science:* soy reacio a entrometerme en una discusión que concierne a temas de los que no tengo un conocimiento experto, y debería haber esperado que el sencillo argumento que deseo aportar fuera familiar para los biólogos. Sin embargo, ciertas observaciones del señor Udney Yule sobre las que el señor R. C. Punnett ha llamado mi atención sugieren que todavía merece la pena hacerlo...

Supongamos que  $Aa$  es un par de caracteres mendelianos, siendo el  $A$  dominante, y que en una generación cualquiera el número de dominantes puros ( $AA$ ), de heterocigotos ( $Aa$ ) y de recesivos puros ( $aa$ ) son  $p:2q:r$ . Finalmente, supongamos que los números son bastante grandes, de manera que se pueda considerar que el apareamiento es aleatorio, que los sexos están distribuidos uniformemente en las tres variedades y que todas son igualmente fértiles. Es suficiente un poco de matemática del nivel de las tablas de multiplicar para demostrar que en la siguiente generación los números serán  $(p+q)^2$ ,  $2(p+q)(q+r)$ ,  $(q+r)^2$ , o digamos  $p_1$ ,  $2q_1$ ,  $r_1$ .

La cuestión interesante es — **¿en qué circunstancias será esta distribución la misma que en la generación anterior?** Es fácil ver que la condición para esto es  $q^2 = p_1 r_1$ . Y como,  $q_1^2 = p_1 r_1$  para cualquier valor de  $p$ ,  $q$  y  $r$ , la distribución permanecerá en cualquier caso sin cambios tras la segunda generación.



Es la ley de Hardy-Weinberg: independientemente:

Dr Wilhelm Weinberg (1862 — 1937)



## La primera ley de Newton de la genética evolutiva

Según la ley de Hardy-Weinberg: dos ecuaciones para calcular la frecuencia de dos alelos de un gen determinado en una población grande de individuos

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1,$$
$$p + q = 1,$$

donde:

p: es la frecuencia de un alelo,

q: es la frecuencia del otro alelo ,

$p^2$ : es la fracción de población que es homocigótica para el alelo p,

$2pq$ : es la frecuencia de heterocigotos,

$q^2$ : es la fracción de población que es homocigótica para el alelo q.

La selección natural puede actuar en p y q en la primera ecuación, cambiando su frecuencia dentro de la población de individuos; y, obviamente, afecta la frecuencia de alelos dada en la segunda ecuación.

Las hipótesis originales del “equilibrio de Hardy-Weinberg” son que el organismo en consideración:

- Sea diploide, y el carácter en consideración no esté en un cromosoma que tiene un número distinto de copias en cada sexo, como el cromosoma **X** en los humanos
- Se reproduzca sexualmente, bien monoicamente o dioicamente
- Tenga generaciones discretas

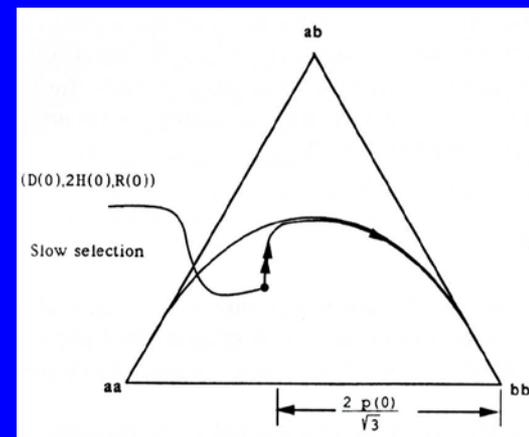
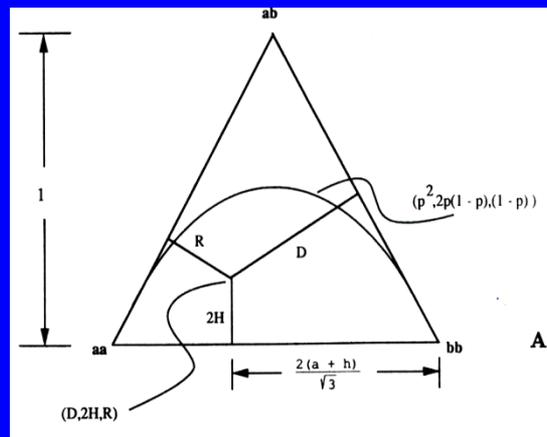
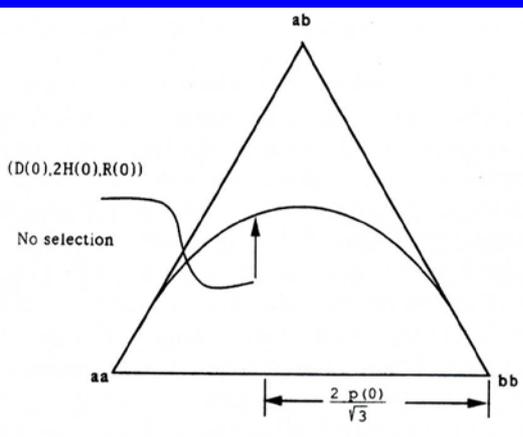
La población en consideración está idealizada:

- Existe apareamiento aleatorio en la población
- Tiene un tamaño infinito
- No experimenta *Selección*, ni *Mutación*, ni *Migración (flujo genético)*

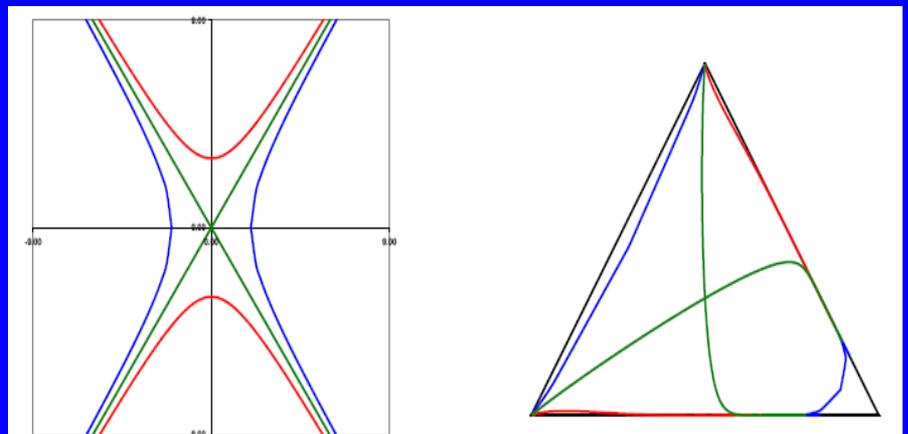
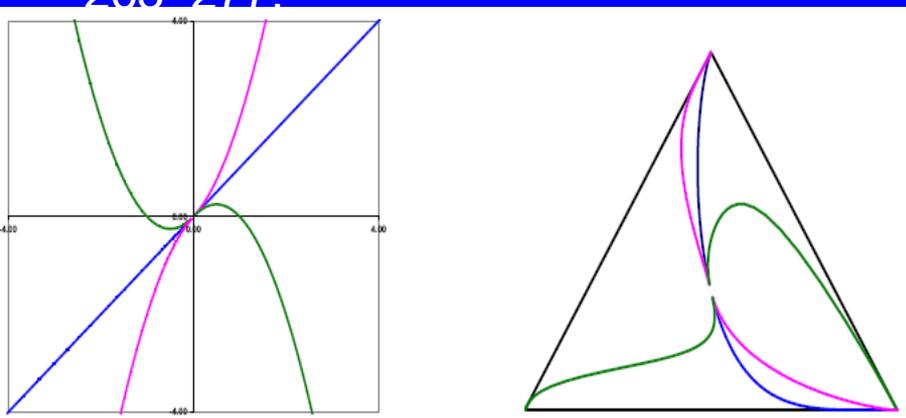
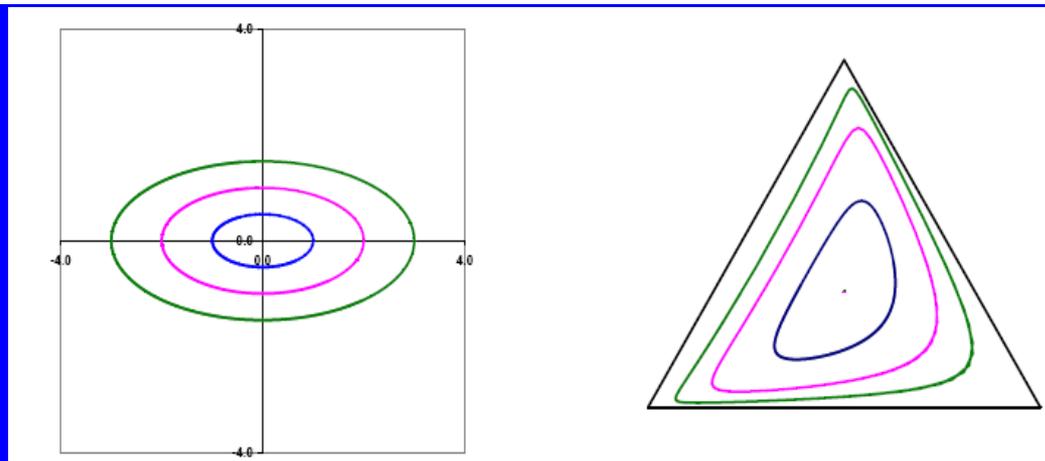
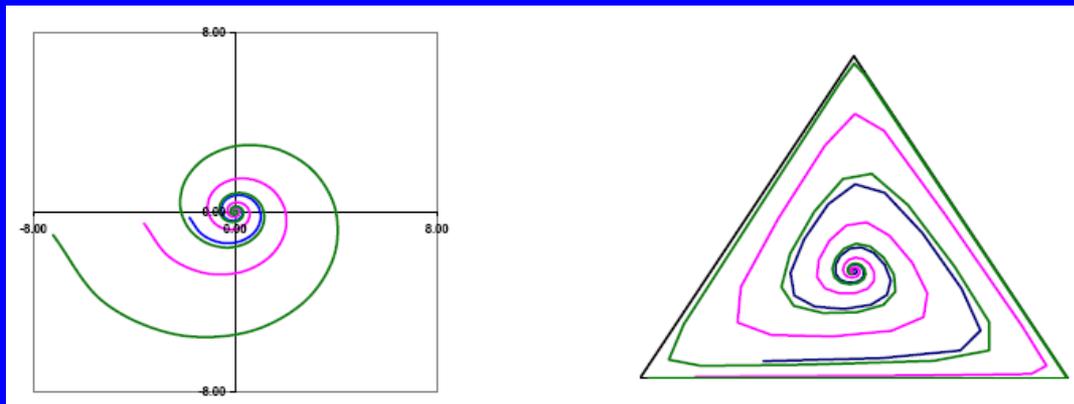
Fuera de ese marco hay evolución genética (modelos en ecuaciones diferenciales de evolución).

## Selección natural como papel similar al de fuerza en mecánica newtoniana

Diagrama de B. De Finetti (1926): Considerazioni matematiche sur l'ereditarieta Mendeliana, *Metron.*, 6, 1-41.



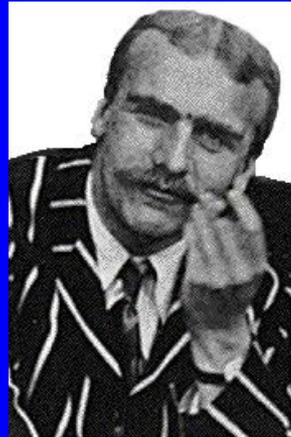
Es curioso que el carácter del sistema dinámico de masas puede ser diferente de las ecuaciones composicionales (linealidad versus no-linealidad, estabilidad versus inestabilidad, etc.): véase el artículo panorámico J. J. Egozcue, V. Pawlowsky-Glahn y J. L. Díaz-Barrero, Otros espacios euclídeos, *La Gaceta de la RSME*, Vol. 11 (2008), Núm. 2, Págs. 263–277.



## Neodarwinismo (Reino Unido: 1930)

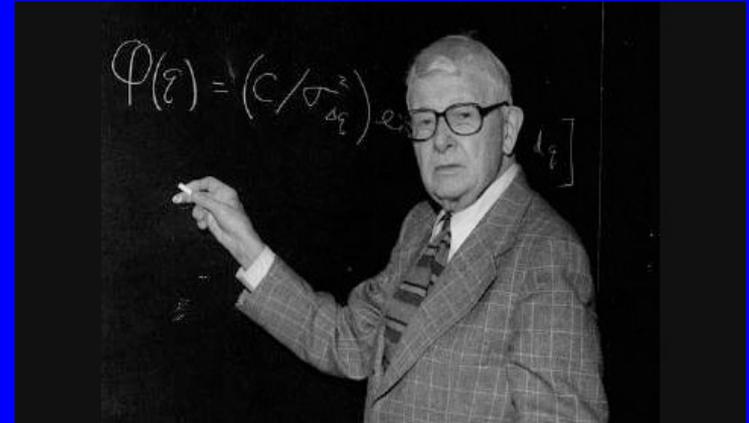


Sir Ronald A. Fisher,  
(1890-1962)

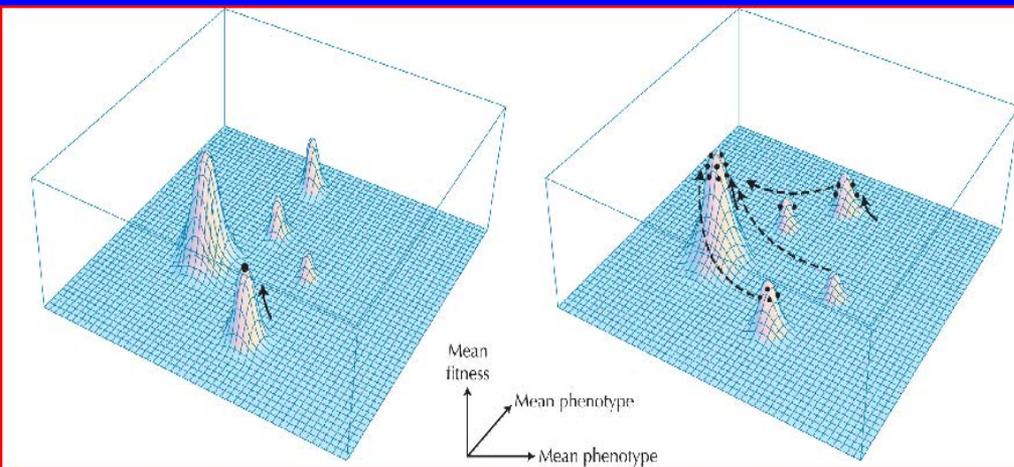


John Burdon Sanderson  
Haldane (1892 - 1964)

## Síntesis moderna (Estados Unidos: 1931,32)



Sewall Green Wright  
(1889 –1988).



La **selección natural** conduciría a la población a escalar el pico más cercano, mientras que la **deriva genética** causaría un deambular aleatorio por el paisaje.

Si tuviera más tiempo....

J.B.S. Haldane (1932). *The causes of evolution*. Longmans, New York.

R. A. Fisher (1937) The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics* 7:353–369,.

A. Kolmogorov, I. Petrovsky and N. Piscunov (1937), Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiere et son application a un probleme biologique, Bulletin Univ. Moscow, Ser. Internationale, Math., Mec. 1 1-25.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, t) = v(\pm x + ct),$$

Si la velocidad de onda  $c \geq 2$ , aparece una onda viajera (travelling wave) con

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} v(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = 1.$$

Si tuviera más tiempo....

Numerosas investigaciones matemáticas posteriores,...

Convergence to Travelling Waves for Quasilinear  
Fisher-KPP Type Equations

J.I. Díaz (#), S. Kamin (\*), P. Rosenau (\*)

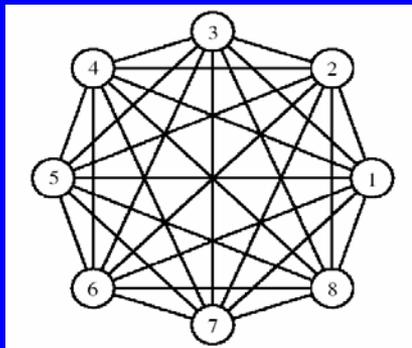
$$\begin{cases} u_t = \varphi(u)_{xx} + \psi(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Pero sería otra conferencia ...

Niles Edredge y Stephen Jay Gould: “el equilibrio puntuado”, (1970-1980).

I.Stewart, T. Elmhirst & J. Cohen (2003) Symmetry-breaking as an origin of species.  
 In *Proc.Conf. Bifurcations, Symmetry, Patterns, Porto, 2000*. Basel,  
 Birkhauser.

I.Stewart (2003): Speciation: a case study in symmetry bifurcation theory.  
 UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XLI, 67-88.

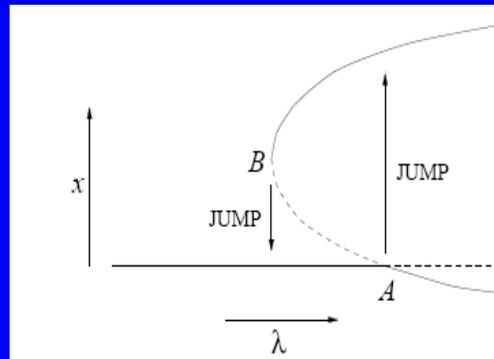
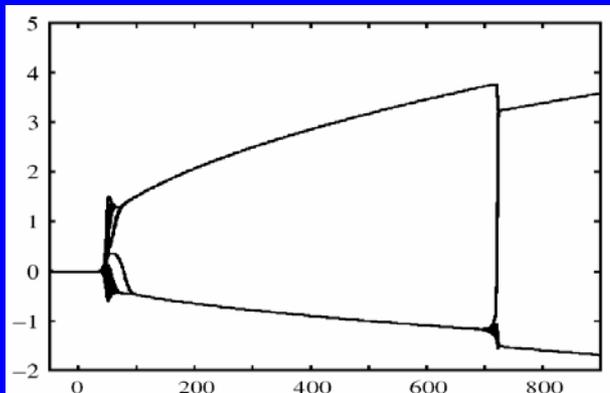


$$\frac{dx^i}{dt} = f_i(x^1, \dots, x^N, a),$$

$$f_{\sigma(i)}(x^1, \dots, x^N) = f_i(x^{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x^{\sigma^{-1}(N)})$$

$$\sigma \in S_N$$

Permutaciones de N elementos



Aplicación a los  
 pájaros pinzones de  
 las Islas Galápagos  
 (analizadas por  
 Darwin en 1835).

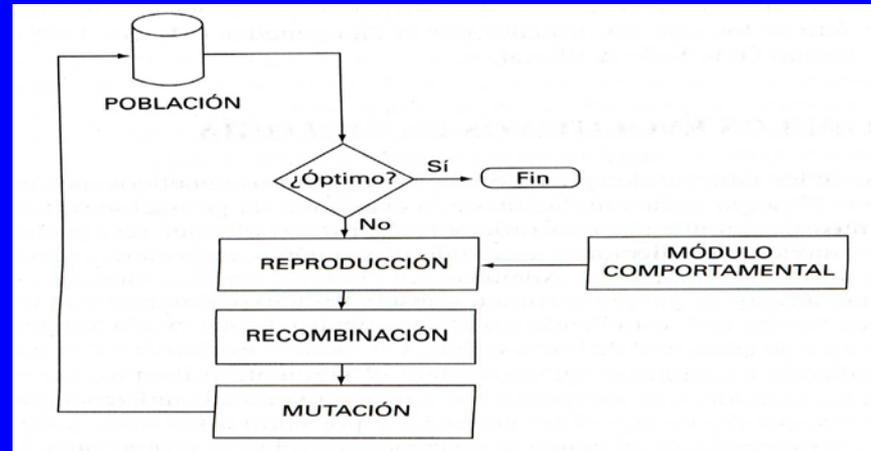
## Algoritmos genéticos y “El origen de las especies”

Comienzo en los años 50 (A. Fraser, H. Bremermann,...)

Popularización en los 70: John Henry Holland (1929-): *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor (1975), ...

Computación evolutiva,...

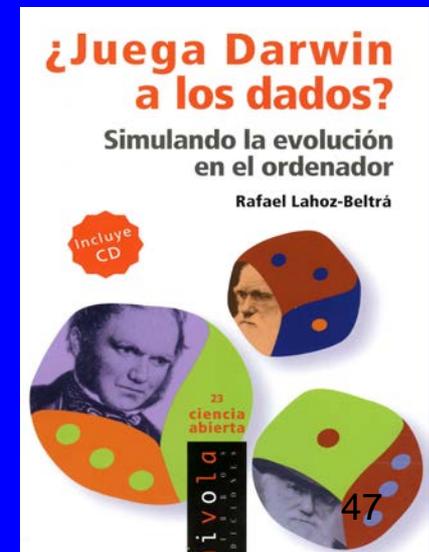
Inspirador: R. Dawkins, 1986, *El gen egoísta*, 1989, Labor. Madrid



Stacey, D.A.; Kremer, S. (1991), *The Guelph Darwin Project: the evolution of neural networks by genetic algorithms*  
*Neural Networks*, 1991, vol.2 - Page(s):957

**Proyecto Darwin**, simulador de evolución natural. Se inicia con 3 especies: Plantas, Recolectores, Predadores.

Cada animal tiene un “cerebro” formado por una red neuronal simple de perceptrones de dos niveles. El cerebro no mejora durante la vida de un animal, sino que va evolucionando naturalmente de generación en generación en base a pequeñas alteraciones genéticas.



## Para terminar:

En el *Origen de las especies* Darwin lanza una posible edad de la Tierra: polémica con Lord Kelvin

William Thomson, Lord Kelvin, (Belfast 1824 - Universidad de Glasgow, Escocia 1907)

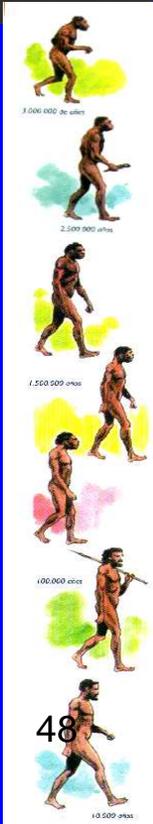
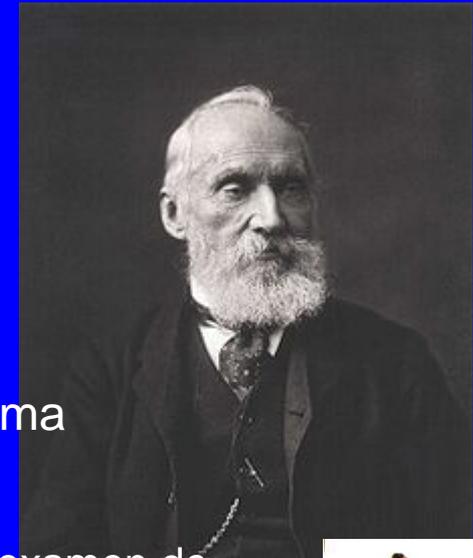
Físico y matemático: termodinámica, electrónica y profundos conocimientos de análisis matemático (sugirió a Stokes el teorema que lleva el nombre de este último)

De hecho, Stokes nunca publicó artículo alguno sobre el tema: examen de ingreso en Cambridge

Kelvin and Stokes; A comparative Study in Victorian Physics, D. B. Wilson, Adam Hilger, Bristol, 1987.

En 1862 realizó un primer cálculo sobre la edad de la Tierra (conducción de calor en esfera a temperatura homogénea, completamente fundida, y enfriándose por la superficie): entre 24 y 100 millones de años.

Gran desacuerdo con las estimaciones por parte de los geólogos y con Darwin (1869, Thomas H. Huxley) que estimaban necesaria una edad mucho mayor.



Darwin pidió a su hijo George (astrónomo) que revisara los cálculos: le dio la razón a Kelvin (y luego lo publicó en sus estudios de 1888 sobre el Sol y la Luna)

En 1891 John Perry, colaborador de Lord Kelvin, observa que no se debe despreciar la transferencia de calor por convección (únicamente en materiales fluidos) y que la edad de la Tierra debía ser mucho mayor.

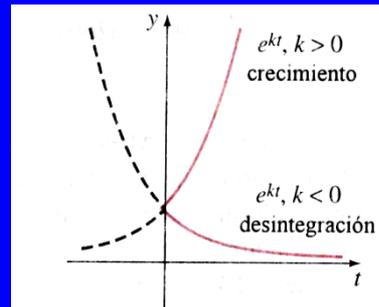
Avances fruto del descubrimiento de la radiactividad (Henri Becquerel en 1896, comunicación de Ernest Rutherford a Kelvin en 1904)



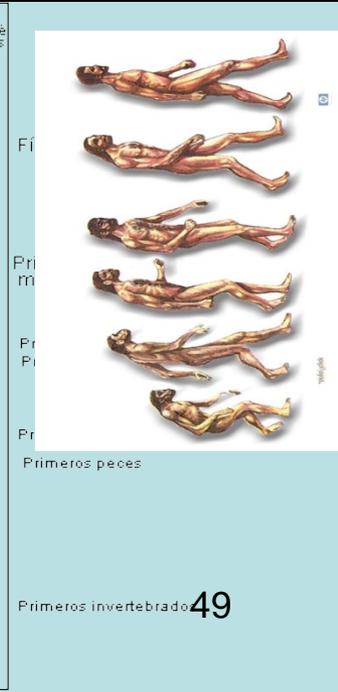
Técnicas de datación: Willard Frank Libby (1908-1980)

C14: 5.730 años de vida media,

U 238: 4.500 millones



Millones de años atrás	ESCALA DE TIEMPO GEOLÓGICO		Millones de años atrás
	Era	Período	
0			0
	Cenozoico (~ 1,5%)	Cuaternario	2
		Terciario	65
100	Mesozoico (~ 3% de la historia de la Tierra)	Cretácico	144
		Jurásico	213
		Triásico	248
200	Paleozoico (~ 8% de la historia de la Tierra)	Pérmico	286
		Carbonífero	320
		Pennsylvanian	320
		Mississippian	360
300	Devónico	Devónico	408
		Silúrico	438
		Ordovísico	505
400	Cámbrico	Cámbrico	590
500			700
600	Precámbrico (~ 90% de la historia de la Tierra)		700
700			4,600
4,600			4,600



En 1947, Libby probó que la Edad real era de **unos 4.600 millones de años** (Premio Nobel de 1960).

Triunfo de las conjeturas del libro de Darwin



*Tengo bastante imaginación y sentido común o sensatez, **como deben de tenerlas todos los abogados o médicos de éxito, pero no más, según creo.** Como saldo a favor, pienso que soy superior al común de los mortales para percatarme de cosas que no atraen fácilmente la atención y observarlas con cuidado.*

# Muchas gracias



## Otras mentes “bien dotadas” cercanas a Darwin y con conexiones a la matemática:

### Robert Brown

Frecuenté mucho a Robert Brown, "facile princeps botanico-rum", como le había llamado Humboldt; y **antes de casarme solía ir a verle casi todos los domingos por la mañana (CENSURADO)**. Me pareció notable sobre todo por la minuciosidad y la perfecta exactitud de sus observaciones. **Nunca me propuso grandes opiniones científicas en biología (CENSURADO)**. Sus conocimientos eran extraordinariamente amplios, y una gran parte de los mismos murió con él debido a su excesivo temor a cometer errores. Me transmitía su saber con la mayor franqueza, y sin embargo era extrañamente celoso en algunos puntos. Fui a verle dos o tres veces antes del viaje del *Beagle*, y en una ocasión me pidió que mirara a través de un microscopio y le describiera lo que veía. Así lo hice, y ahora creo que se trataba de las maravillosas corrientes de protoplasma de alguna célula vegetal. Luego le pregunté qué había visto, pero, a pesar de que yo era apenas poco más que un muchacho y estaba a punto de ausentarme de Inglaterra durante cinco años, me respondió: "Este es mi pequeño secreto". Supongo que temía que pudiese robarle su descubrimiento. Hooker me dijo que era un completo tacaño con sus plantas desecadas, y que lo sabía; él solía prestar especímenes a Hooker, quien se hallaba describiendo las plantas de la Tierra del Fuego, a pesar de saber muy bien que él mismo no iba a utilizar para nada las colecciones de aquella región. Por otra parte, era capaz de las acciones más generosas. Siendo un anciano de escasa salud y totalmente incapacitado para realizar esfuerzos duros, visitaba a diario (según me contó Hooker) a un antiguo criado que vivía lejos y a quien sostenía, y le leía en voz alta. Esto basta para compensar cualquier grado de miseria o celos científicos. Tendía a burlarse de cualquiera que escribiese sobre algo que no entendía totalmente; recuerdo que le elogí la *History of the Inductive Science [Historia de la ciencia inductiva]* de Whewell, y me respondió: "Sí, supongo que ha leído los prólogos de muchos libros".

### John Herschel





