

Glaciaciones y dinámica no lineal

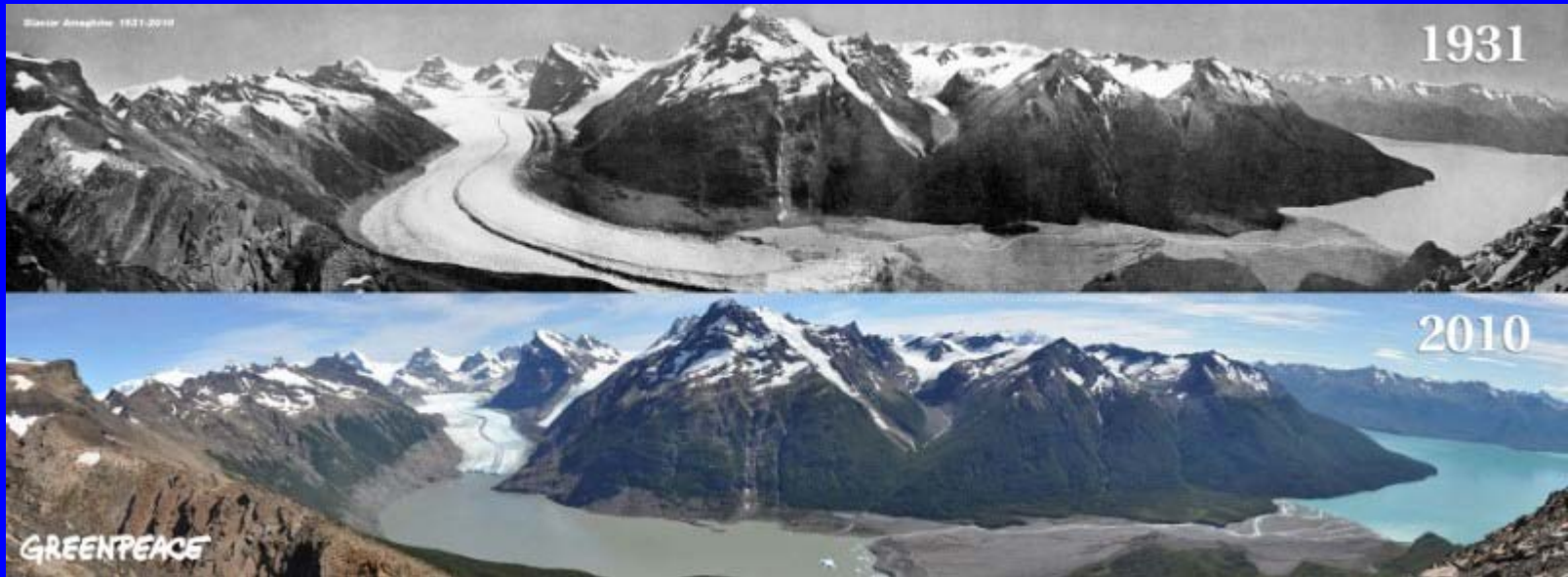
J.I. Díaz

Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid

Real Academia de Ciencias

Madrid, 14 de junio de 2012

1. Introducción: Noticia de 9 de febrero de 2012. Algunos datos actuales



Evidencia actual de la disminución de glaciares en el planeta (... una conferencia distinta a esta).

Objetivo peculiar: ¿ papel de los modelos matemáticos en el estudio de las Glaciaciones?

Rusia perfora un lago subglacial intacto durante 20 millones de años

El acceso al Vostok amenaza un entorno que acogería microorganismos aislado

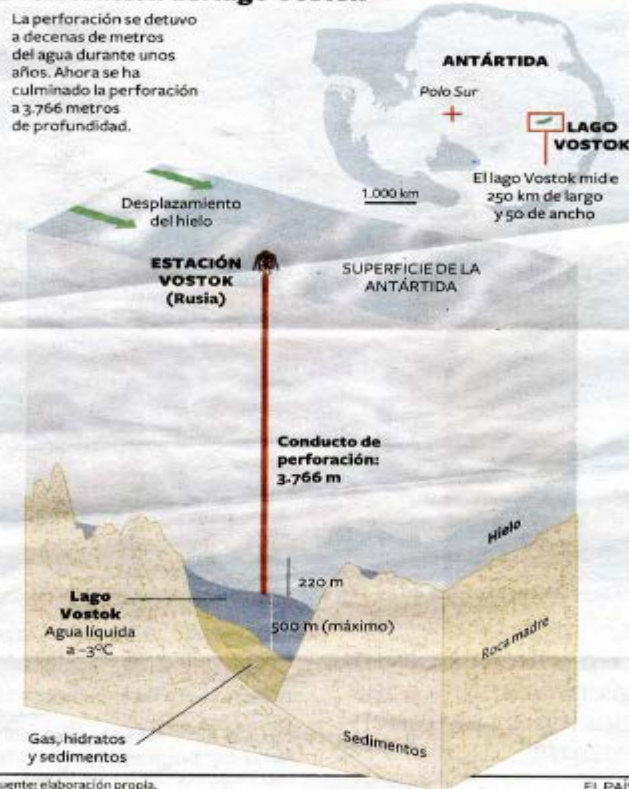
ALICIA RIVERA
Madrid

Uno de los pocos lugares vírgenes de la Tierra ha sido hollado. Rusia ha culminado su perforación hasta el gran lago Vostok, bajo más de tres kilómetros de hielo en el corazón de la Antártida y sellado desde hace 20 millones de años. La controvertida operación se había detenido en varias ocasiones, primero por el clamor de la comunidad científica internacional que temía la contaminación de esas aguas prístinas, y luego por problemas técnicos o, el año pasado, porque se echó encima el invierno en la base Vostok. Pero ayer, la Expedición Antártica Rusa anunció haber alcanzado la superficie del lago subglacial, a 3.766 metros de profundidad.

En esas aguas podría haber microorganismos adaptados a vivir en condiciones extremas y aislados durante millones de años, que no sólo aportarían información sobre la evolución, sino que darían pistas sobre la posibilidad de que haya alguna forma de vida en otros lugares del Sistema Solar, como los mares que tal vez tiene Europa, el satélite de Júpiter. La perforación "nos dará la posibilidad de evaluar la evolución de organismos vivos que han pasado mucho tiempo sin contacto con la atmósfera y la luz solar", declaró el responsable del programa, Valeri Lubin.

Perforación del lago Vostok

La perforación se detuvo a decenas de metros del agua durante unos años. Ahora se ha culminado la perforación a 3.766 metros de profundidad.



Fuente: elaboración propia.

des de productos químicos utilizados como lubricantes y anticongelantes de los equipos) será inevitable y arruinará no sólo las muestras sino las garantías de aislamiento del lago para investigaciones futuras.

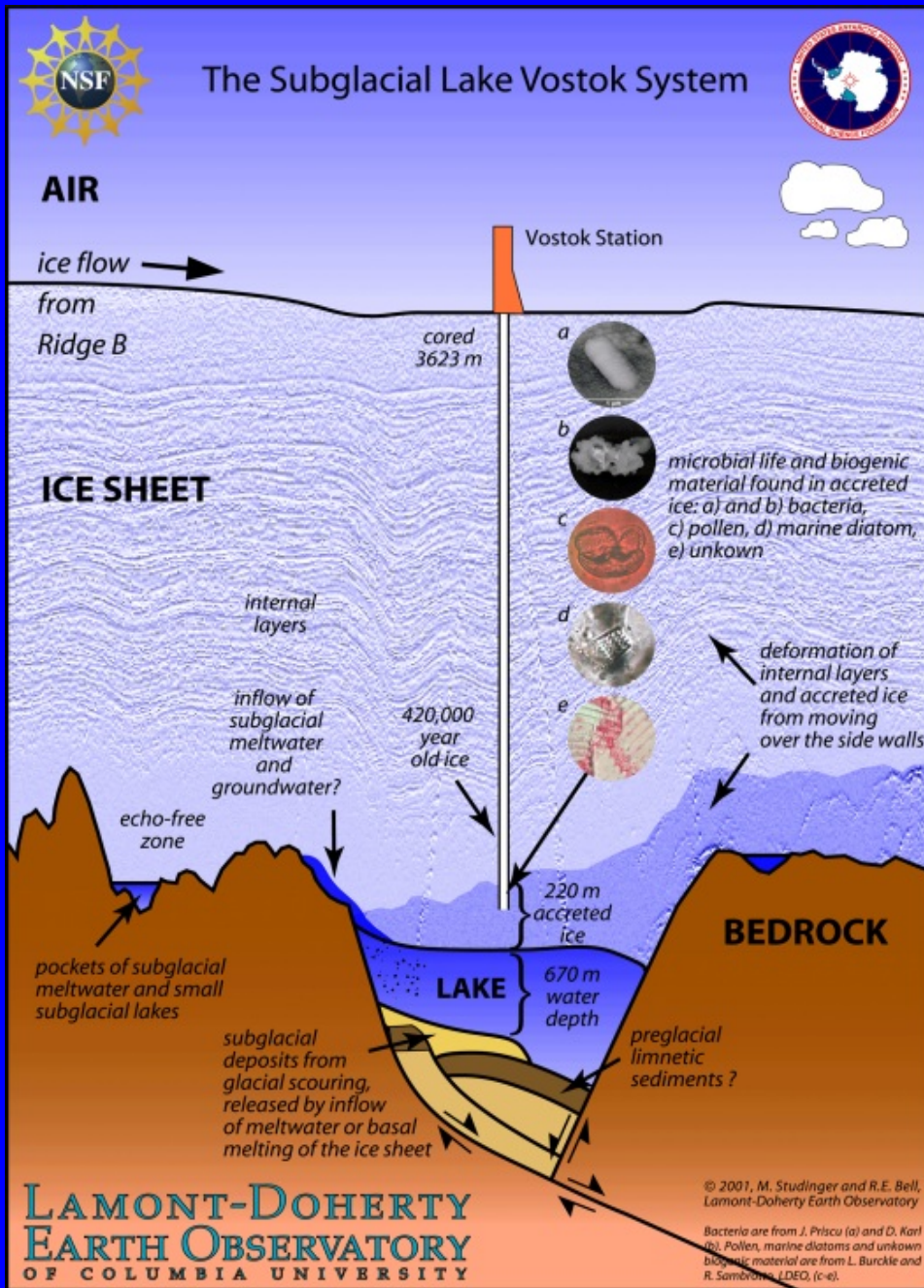
Hace unos años, Rusia retomó su perforación. Los ingenieros sustituyeron el queroseno utilizado como anticongelante por freón, pero en el mismo agujero ya contaminado. El SCAR había recomendado usar agua caliente como hacen los estadounidenses y los británicos en los lagos Whillans y Ellsworth, respectivamente. Los rusos argumentaron que esa tecnología exigía un suministro energético no disponible en la base. Otra idea era hacer perforaciones previas en lagos menores antes de pinchar el Vostok.

Los primeros litros de agua están contaminados con queroseno

pero eso quitaba la primicia a los rusos.

La Academia Nacional de Ciencias (EE UU) se ocupó de asunto. "La perforación y la toma de muestras en los lagos antárticos introducirá inevitablemente

EL PAÍS



<http://www.ldeo.columbia.edu/~mstudying/vostok.html>

Criosfera: en la actualidad unos 15 millones de kilómetros cuadrados (Antártida 13, Groenlandia 1,65)

En la actualidad :

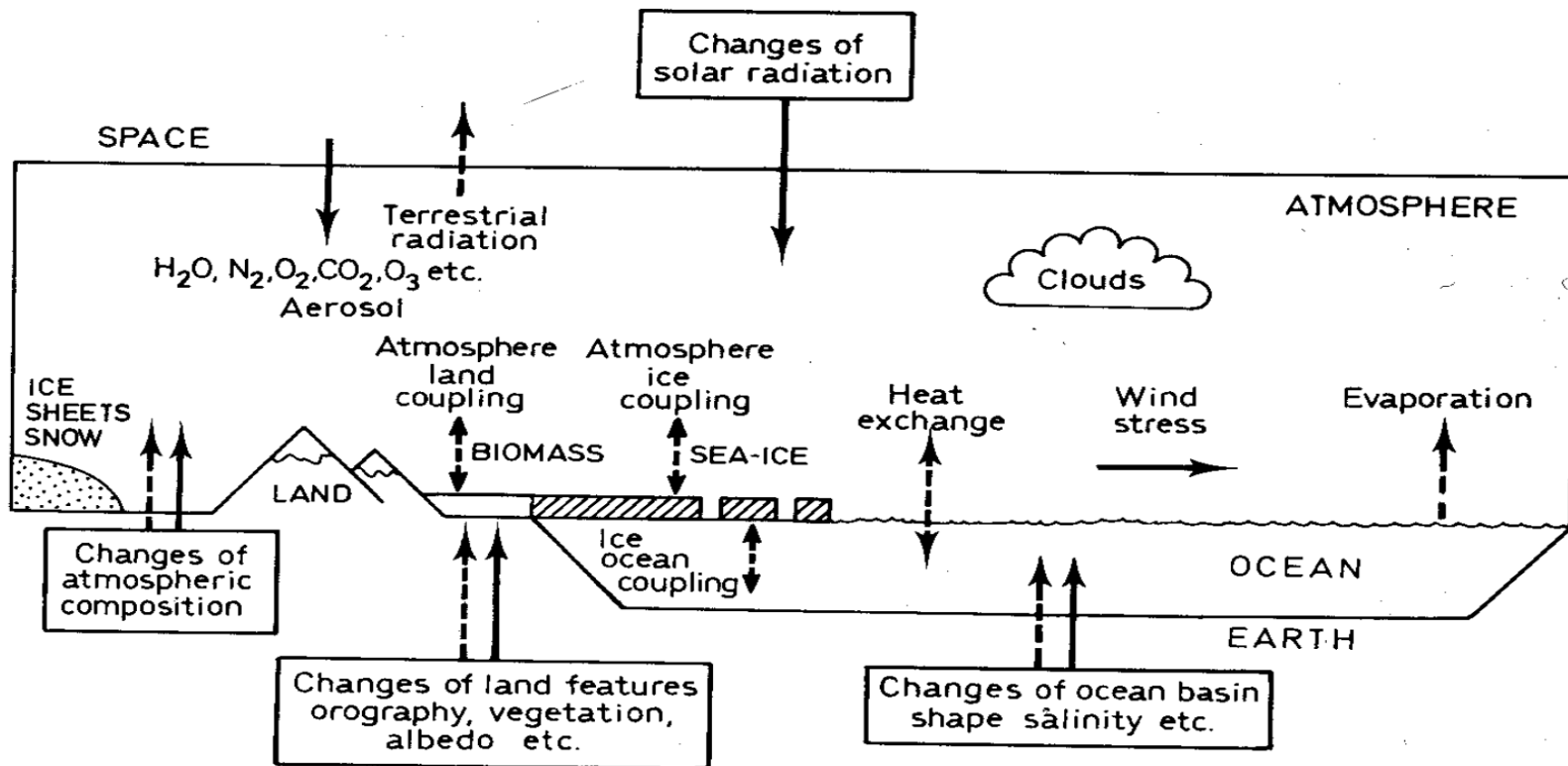
- Los glaciares cubren un 10-11 por ciento de toda la superficie de la Tierra.
- Si en el día de hoy, todos los glaciares se derritieran, el nivel del mar subiría alrededor de 70 metros



Año Polar Internacional 2007/2008

<http://www.ipy.org/>

Componentes externos e internos del sistema climático



2. Glaciaciones: Primeros testigos, descubrimiento simultáneo a la teoría de la evolución, la física del átomo y otros trazadores.

Bernard Kuhn (1787). Evidencia histórica de eras glaciales pasadas : cantos erráticos





El bloque errático que hay en primer término

Hacia 1820 , dos suizos (Jean de Charpentier e Ignace Venetz) encuentran evidencias de que los glaciares habían sido mayores en la antigüedad

Jean Agassiz (1807-1873) gran promotor de la idea de la existencia de Glaciaciones pasadas (expedición de 1837 a las montañas del Jura,...)



Más de un siglo para lograr una comunidad científica activa y estable

En el caso de los investigadores de la Academia de Ciencias españolas, además de una comunidad científica y de la información sobre la época que aportan, quedan el corralito de la vieja política científica de los científicos españoles del siglo XIX que en su momento fueron los médicos. En la época de los grandes médicos españoles, como los que hicieron la ciencia en España, para los científicos españoles que están en la época actual y que están en la época actual y que están en la época actual...

En las cartas que se leen en la Academia de Ciencias españolas, se ven referencias a los trabajos de los científicos españoles que están en la época actual y que están en la época actual...

Monsieur et très-honorable confrère,

De vos très-fidèles et dévoués confrères, le Président de l'Académie des sciences de Madrid se va en faisant le thème de membre correspondant et je vous prie d'être l'interprète de ma reconnaissance après celle de vos confrères de la même institution de la part de l'Académie de Madrid, de vos confrères de la même institution de la part de l'Académie de Madrid...

Depuis huit ou dix ans j'ai habité les États-Unis, et de circonstance en circonstance j'ai eu l'honneur de vous adresser des lettres et de vous adresser des lettres et de vous adresser des lettres...

En terminant cette lettre permettez-moi de vous demander s'il ne serait possible de former des relations d'échange d'objets d'histoire naturelle...

Las 'cartas españolas'

La ciencia española ha estado menos aislada de lo que se cree. Lo corrobora el descubrimiento y análisis de la correspondencia de Faraday, Von Humboldt, Gauss y otros grandes científicos del XIX con sus colegas de la Academia de Ciencias

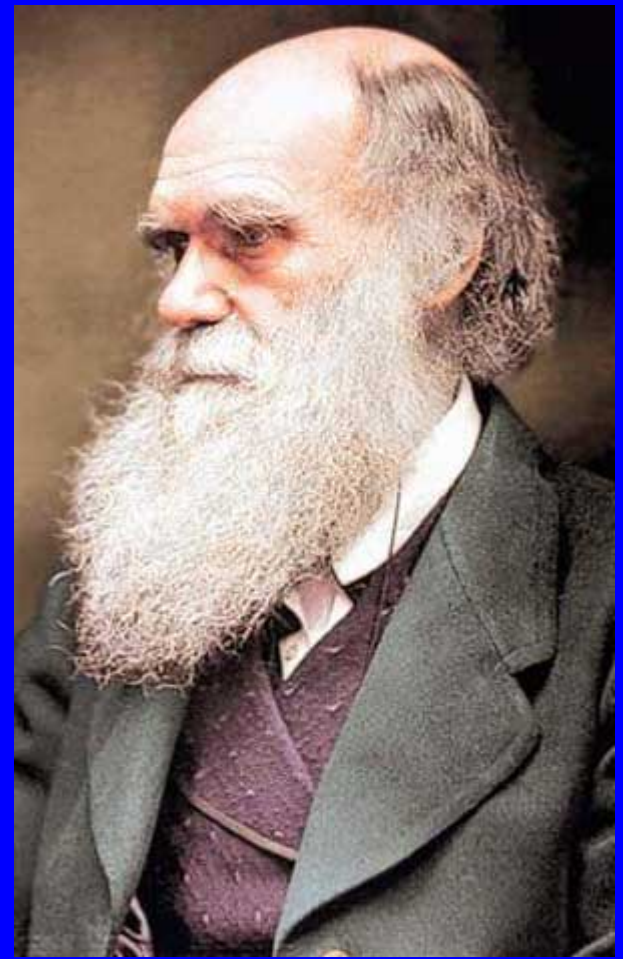


Simultaneidad con la teoría de Charles Robert Darwin (1809-1882)

“El origen de las especies” (1859): reciente 150 aniversario

De su viaje en el Beagle (1831-1836) trajo: 1.383 páginas de notas de geología (Ch. Lyell, 1797-1875),

una colección de 363 páginas de notas de zoología, un diario de 770 páginas, 1.529 especies conservadas en frascos con alcohol, 3.907 especímenes disecados y una tortuga viva capturada en las Galápagos



En el *Origen de las especies* Darwin lanza una posible edad de la Tierra: polémica con Lord Kelvin

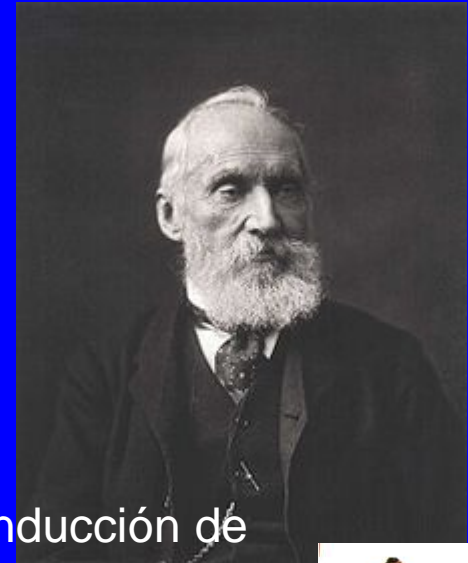
William Thomson, Lord Kelvin, (Belfast 1824 - Universidad de Glasgow, Escocia 1907)

Físico y matemático: termodinámica, electrónica y profundos conocimientos de análisis matemático

En 1862 realizó un primer cálculo sobre la edad de la Tierra (conducción de calor en esfera a temperatura homogénea, completamente fundida, y enfriándose por la superficie): **entre 24 y 100 millones de años.**

Gran desacuerdo con las estimaciones por parte de los geólogos y con Darwin (1869, Thomas H. Huxley) que estimaban necesaria una edad mucho mayor.

Darwin pidió a su hijo George (astrónomo) que revisara los cálculos: le dio la razón a Kelvin (y luego lo publicó en sus estudios de 1888 sobre el Sol y la Luna)



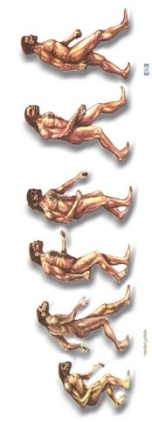
George Howard Darwin
(1845-1912),



En 1856 el físico alemán Hermann von Helmholtz y en 1892 el astrónomo canadiense Simon Newcomb presentaron sus propios cálculos de 22 y 18 millones de años respectivamente.

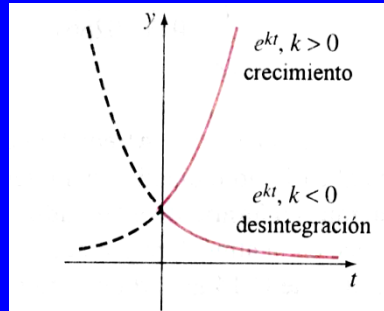
En 1891 John Perry, colaborador de Lord Kelvin, observa que no se debe despreciar la transferencia de calor por convección (únicamente en materiales fluidos) y que la edad de la Tierra debía ser mucho mayor.

Avances fruto del descubrimiento de la radiactividad (Henri Becquerel en 1896, comunicación de Ernest Rutherford a Kelvin en 1904)



Técnicas de datación: Willard Frank Libby (1908-1980)

C14: 5.730 años de vida media,
U 238: 4.500 millones



Miliones de años atrás	ESCALA DE TIEMPO GEOLÓGICO		Miliones de años atrás	
	Era	Período		
0	Cenozoico (~ 1,5%)	Cuaternario	0	
		Terciario	65	Fin de los Dinosaurios
100	Mesozoico (~ 3% de la historia de la Tierra)	Cretácico	144	
200		Jurásico	213	Primeros Dinosaurios, aves y mamíferos
		Triásico	248	
300	Paleozoico (~ 8% de la historia de la Tierra)	Pérmico	286	
		Carbonífero	320	Primeros reptiles
		Pennsylvanian	360	Primeros anfibios
		Mississippian	360	
400		Devónico	408	
	Silúrico	438	Primeras plantas terrestres	
500		Ordovísico	505	Primeros peces
		Cámbrico	590	
600	Precámbrico (~ 90% de la historia de la Tierra)		700	Primeros invertebrados
700			700	
4,600			4,600	

En 1947, Libby probó que la Edad real era de **unos 4.600 millones de años** (Premio Nobel de 1960).

Triunfo de las conjeturas del libro de Darwin

Hoy día, los geólogos y geofísicos consideran que la edad de la Tierra es de unos 4.540 millones de años (con un error máximo de 45 millones de años). Esta edad ha sido determinada mediante técnicas de fechado radiométrico de material proveniente de meteoritos y es consistente con la edad de las muestras más antiguas de material de la Tierra y de la Luna.

Se considera que algunos meteoritos representan el material primitivo a partir del cual se formó el disco solar de acreción. Algunos de estos meteoritos se han comportado como sistemas cerrados (por lo menos para ciertos isótopos) muy poco tiempo después de que se formaron el disco solar y los planetas. Estas suposiciones han sido confirmadas por observaciones científicas y numerosos fechados mediante isótopos, y es una hipótesis más robusta que suponer que una roca terrestre ha retenido su composición original.

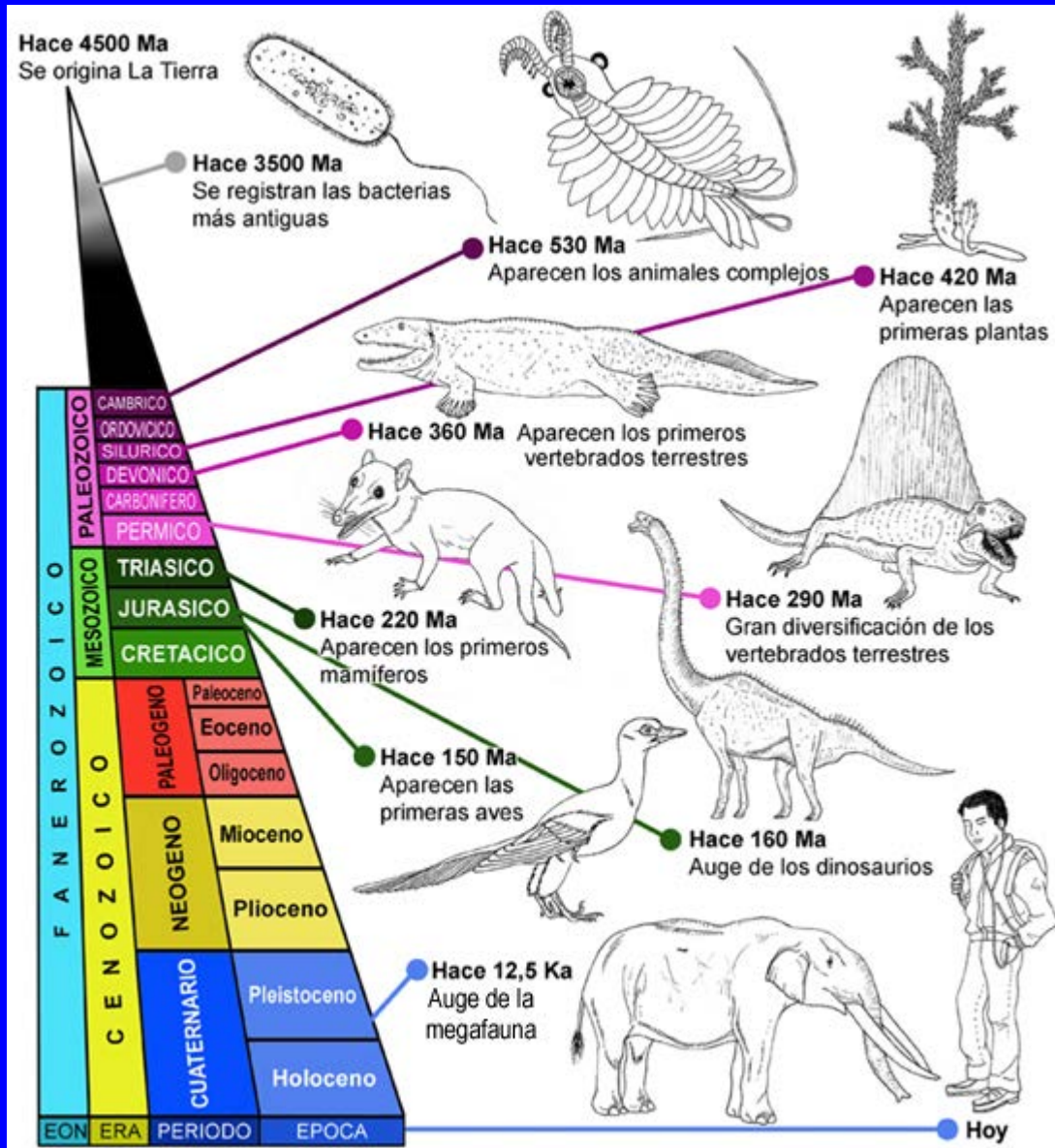
Sin embargo, se han usado rocas minerales de plomo arcaicas de galena para estimar la edad de la Tierra ya que las mismas son los más antiguos minerales formados solo a base de plomo en el planeta y poseen información sobre los más antiguos sistemas de isótopos homogéneos plomo-plomo del planeta. Mediante este método es que se obtuvo la edad de la Tierra de 4540 millones de años con un margen de error menor al 1% (45 millones de años).

3. Glaciaciones en eras pasadas

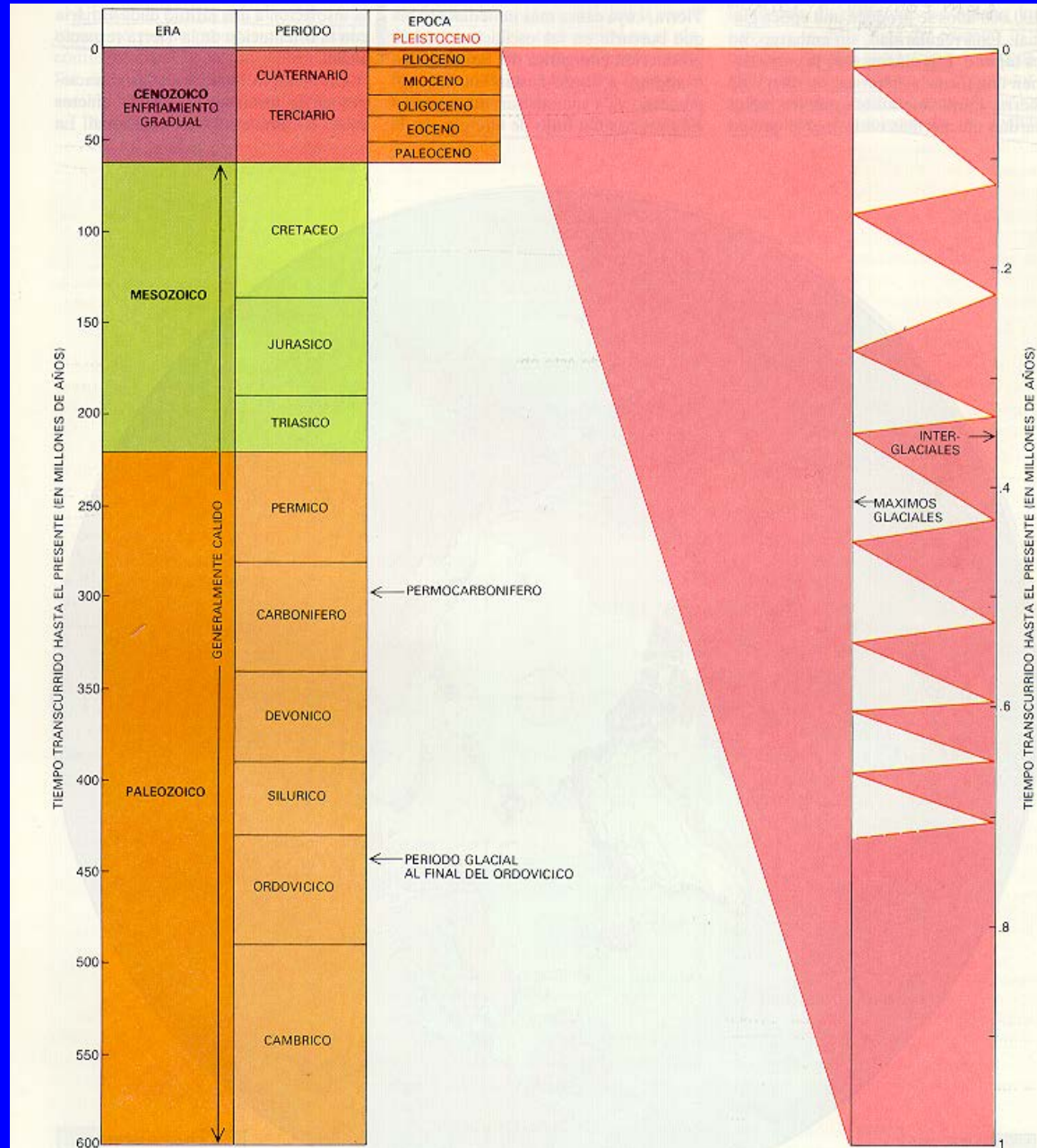
Escalas del tiempo geológico

Era	Periodo	Época	M. años	Eventos principales
Cenozoico	Cuaternario	Holoceno	0,011784	Final de la Era de Hielo y surgimiento de la civilización actual
		Pleistoceno	2,588	Ciclos de glaciaciones. Evolución de los humanos modernos. Extinción de la megafauna
	Neógeno	Plioceno	5,332	Formación del Istmo de Panamá. Capa de hielo en el Ártico y Groenlandia. Clima similar al actual. Australopitecos
		Mioceno	23,03	Deseccación del Mediterráneo. Reglaciación de la Antártida
	Paleógeno	Oligoceno	33,9 ± 0,1	Orogenia Alpina (Pirineos, Alpes e Himalaya). Formación de la Corriente Circumpolar Antártica. Brusco descenso de las temperaturas. Congelación de la Antártida. Familias modernas de animales y plantas
		Eoceno	55,8 ± 0,2	India colisiona con Asia. Máximo térmico del Paleoceno-Eoceno. Disminución del dióxido de carbono. Extinción de final del Eoceno
		Paleoceno	65,5 ± 0,3	Continentes de aspecto actual. Clima uniforme, cálido y húmedo. Florecimiento animal y vegetal

Era	Periodo	Epoca	Edad en millones de años	Primera forma de vida
Cenozoica	Cuaternario	Holoceno	0,01	
		Pleistoceno	2	Hombre
	Terciario	Plioceno	10	Mastodontes
		Mioceno	25	Dientes de sable
		Oligoceno	40	
		Eoceno	60	Ballenas
Paleoceno	65	Caballos		
Mesozoica	Cretácico		135	Cocodrilos
				Aves
	Jurásico		180	Mamíferos
				Dinosaurios
	Triásico		230	
	Pérmico		280	Reptiles
Pensilvaniense		310	Arboles	
Paleozoica	Carbonifero	Mississippiense	345	Anfibios
				Insectos
	Devónico		405	Tiburones
		Silúrico	425	Plantas terrestres
	Ordovícico		500	Peces
	Cámbrico		570	Plantas marinas
Proterozoica			2.500	Animales con concha
			3.500	Invertebrados
			3.800	Vida más antigua
			4.600	Rocas más antiguas
Arqueozoica			4.600	Meteoritos



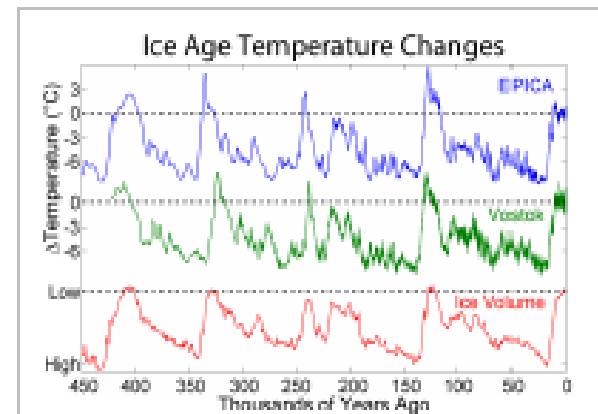
500 millones de años de Historia frente a 4.600



La glaciación más reciente acabó hace 10.000 años.

Se suele utilizar el término de **periodos glaciales** para los periodos más fríos de las glaciaciones; e **interglaciales** para los periodos más cálidos

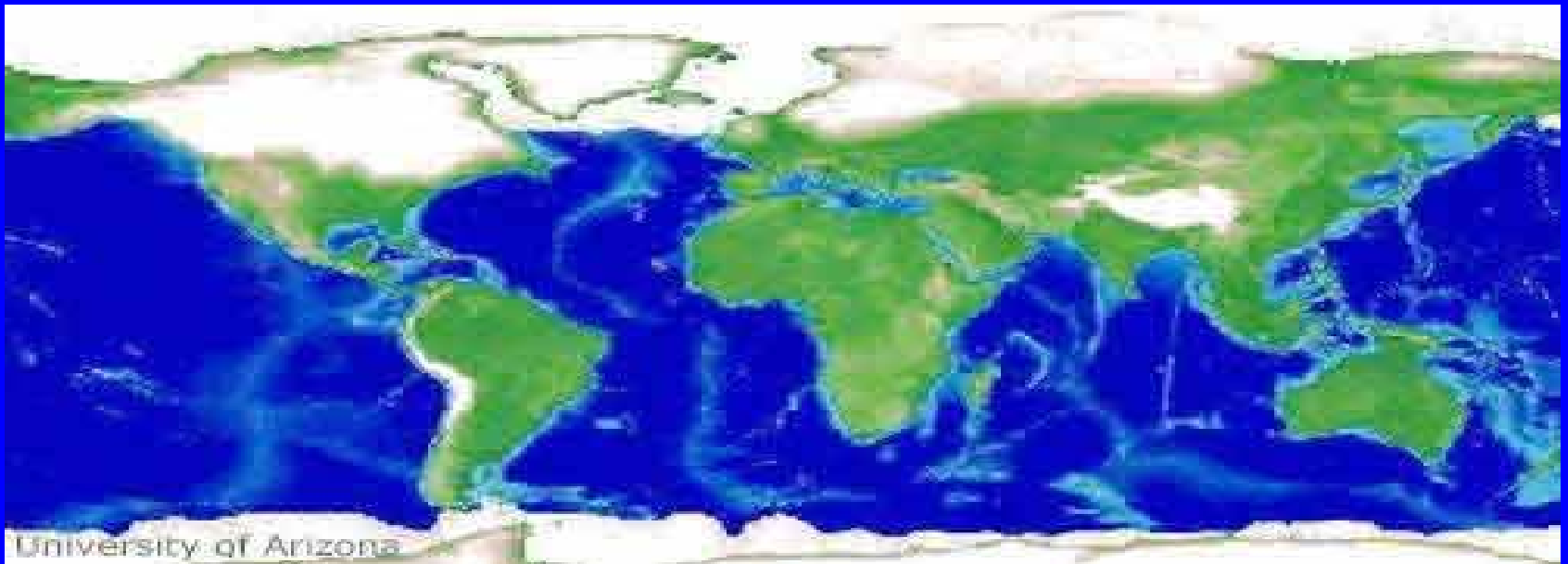
Clima	Denominación	Antigüedad	Época
Postglacial	Actual	10.000	Holoceno
Glacial	Glaciación de Würm o Weichselian	80.000	Pleistoceno
Interglacial	Riss-Würm	140.000	
Glacial	Glaciación de Riss o Illinois	200.000	
Interglacial	Mindel-Riss	390.000	
Glacial	Glaciación de Mindel o Karer	580.000	
Interglacial	Glaz-Mindel	750.000	
Glacial	Glaciación de Glaz o Nebraska	1,1 m.a.	
Interglacial	Densu-Glaz	1,4 m.a.	
Glacial	Densu	1,8 m.a.	
Interglacial	Biber-Densu	2 m.a.	
Glacial	Biber	2,5 m.a.	
Glacial	Oligoceno	37 m.a.	
Interglacial	Eoceno superior	40 m.a.	
Glacial	Paleógeno	80 m.a.	Mesozoico
Interglacial	Cretácico	144 m.a.	
Glacial	Permocarbónico	295 m.a.	Paleozoico
Glacial	Carbonífero inferior	350 m.a.	
Glacial	Ordovícico	440 m.a.	
Glacial	Pre cámbrico	700 m.a.	Precámbrico
Glacial	Primera glaciación	2.000 m.a.	



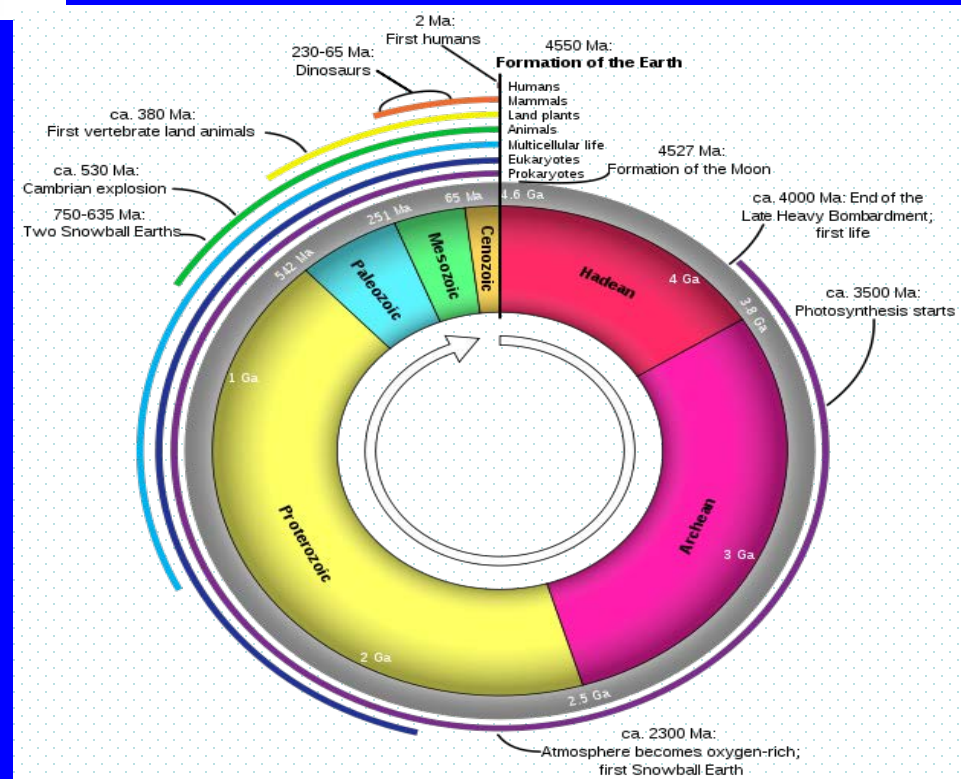
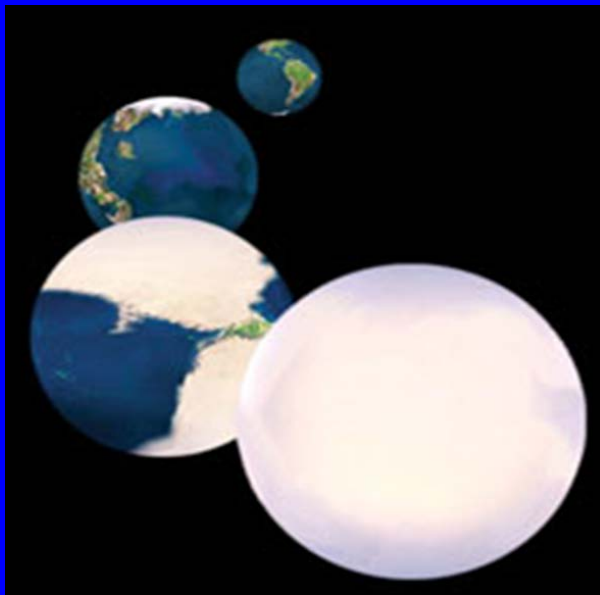
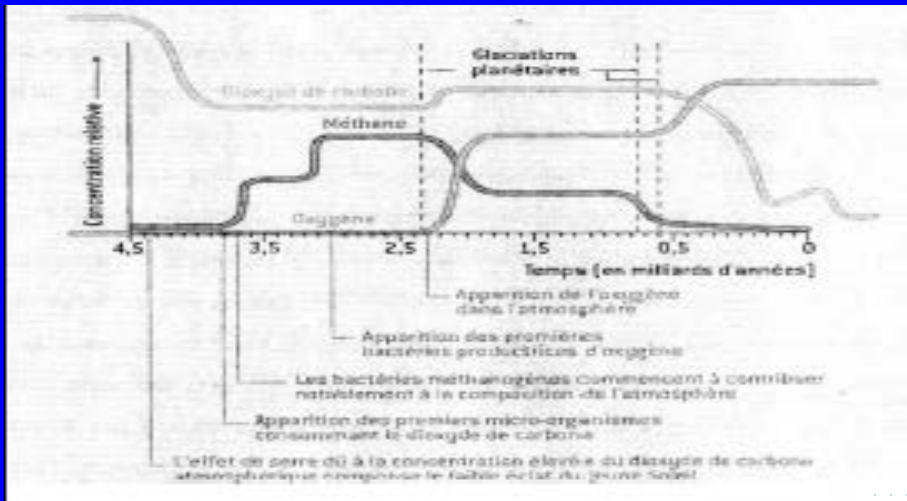
Mapa de la edad de hielo del norte de Europa central. En rojo: límites máximo de la glaciación Weichseliana; en amarillo: máximo de la glaciación de Saale; en azul: glaciación máxima de la edad de hielo de Elster.

Durante la última glaciación Canadá, la mayor parte del norte de Asia y Europa y, algunas regiones de E.E.U.U., se encontraban cubiertas por glaciares.

El nivel del mar se encontraba alrededor de 122 metros más bajo del nivel actual y los glaciares cubrían casi un tercio de la superficie terrestre.



Los periodos glaciares no empezaron hasta poco menos de la mitad de la vida del planeta (unos 2.500 millones de años)



4. Forzamiento por datos orbitales de la Mecánica Celeste.

1842: El matemático francés Joseph Alphonse Adhemar sugiere (*Revolutions of the Sea*) que las “glaciaciones de Agassiz” podrían estar causadas por las variaciones en la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol

Función insolación actual

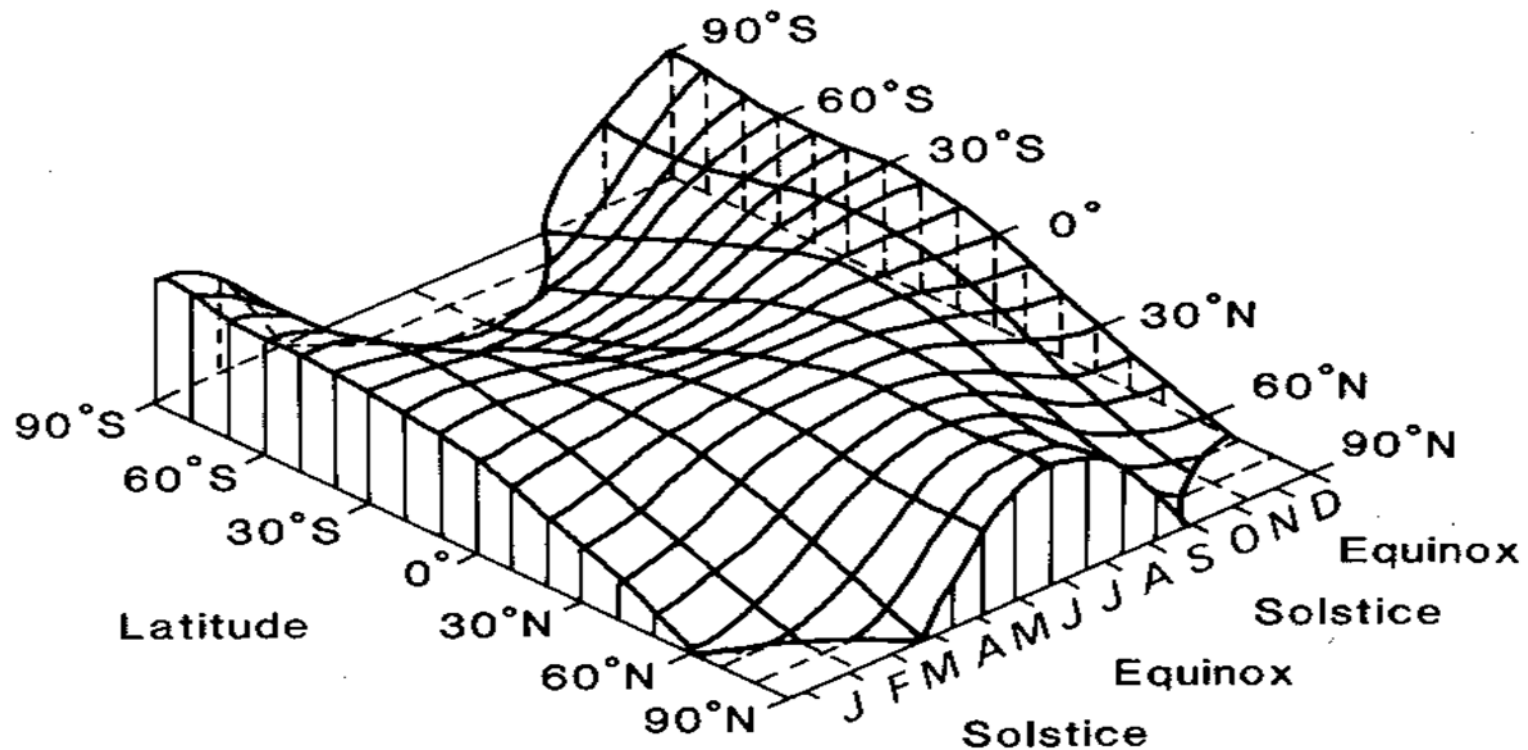


Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of

Earth Radiation Budget Satellite

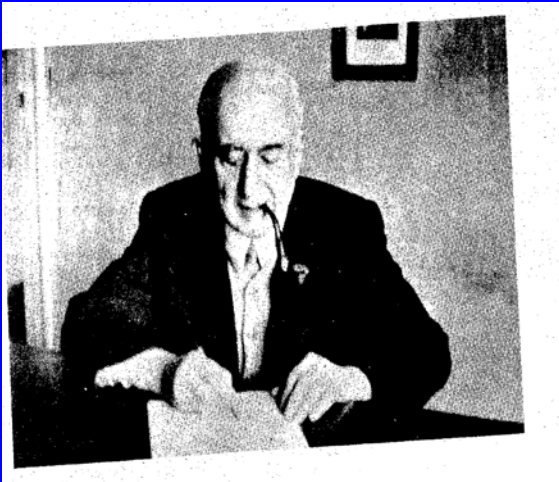


Pero no siempre fue así

James Croll propone , en 1864, que la función de insolación (y las estaciones) son función de la excentricidad de la elipse

Cálculos previos de Jean d'Alembert (1717-1783), F. Bessel (1784-1846) y Urbain Leverrier (1811-1877) y F. Bessel (1784-1846)

Milutin Milankovitch (1879-1958)



- estudios en 1920 sobre:
- irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,
- cálculo de tablas de gran precisión.
- parte reflejada de la energía solar (a partir del albedo planetario y de la ley de Stefan)
- estimaciones globales sobre la evolución de lo que él llamó *el clima matemático*

Curvas de radiación de Milankovitch

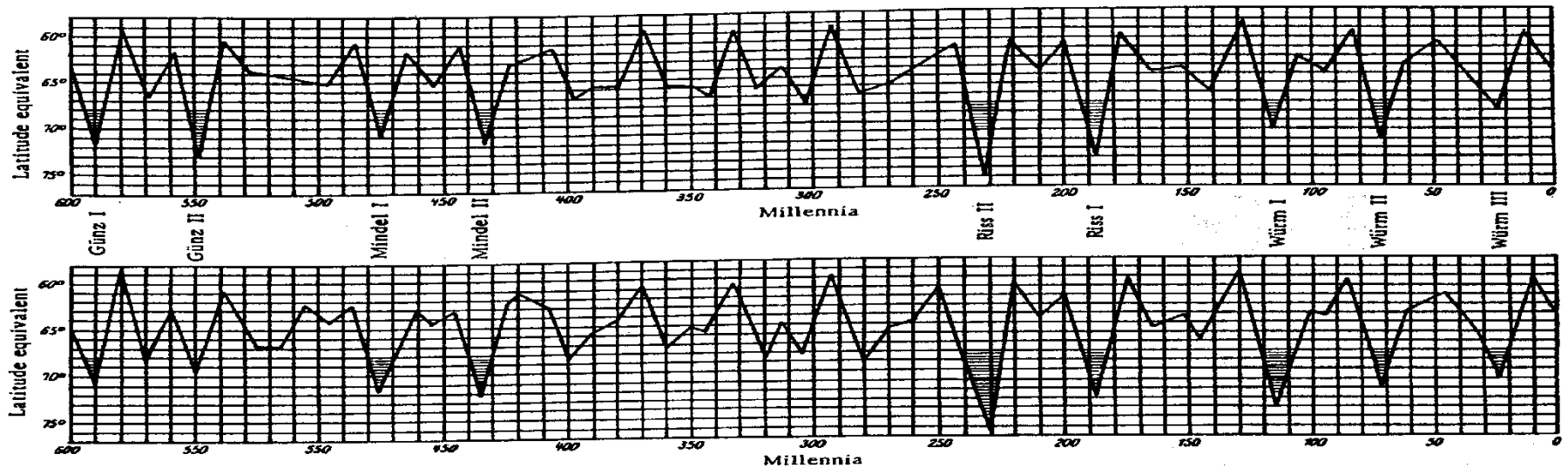
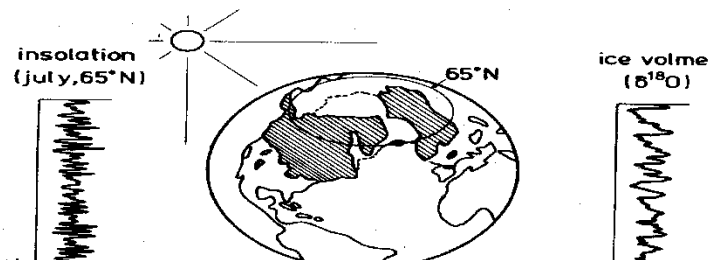
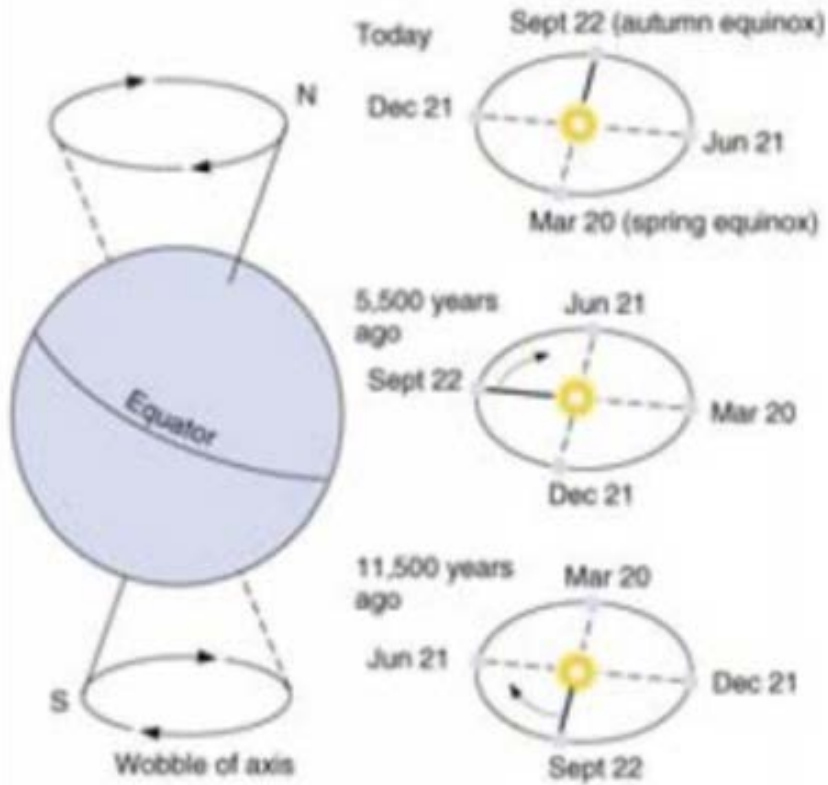


Fig. 7. The Milankovitch radiation curves for latitude 65°N over the past 600,000 years. Milankovitch identified certain low points on the curve with four European ice ages [Milankovitch, 1941]. The top figure is from Milankovitch's 1920 computation according to Stockwell and Pilgrim, and the bottom figure is from his 1941 computation according to Le Verrier and Miskovitch (see Table 1). Vertical axis gives the 65°N Milankovitch equivalent latitudes; time along the horizontal axis is in thousands of years before present.



A Precession of the equinoxes (period = 23,000 years)



B Tilt of the axis (period = 41,000 years)

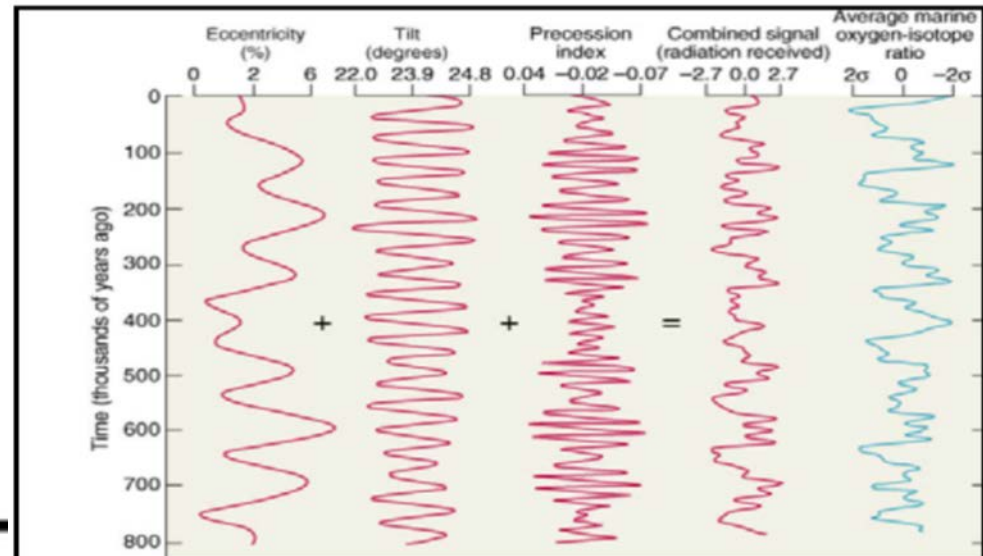
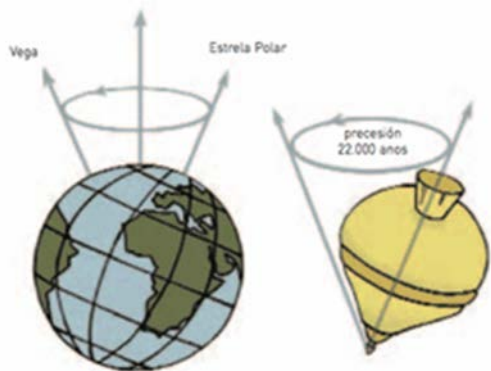
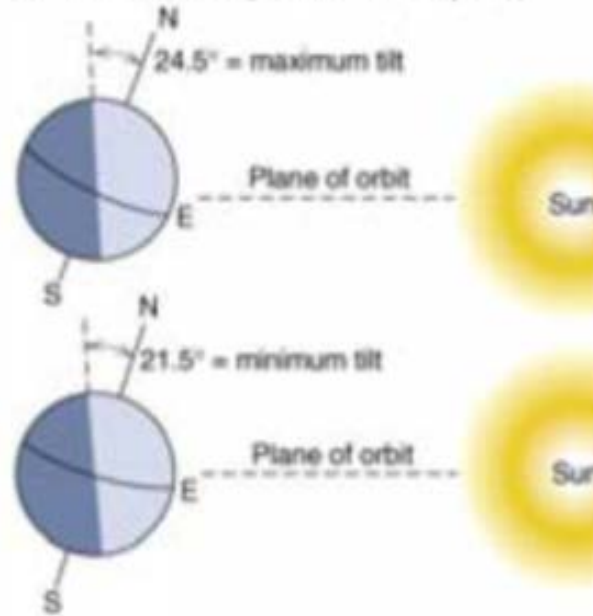


Figure 16B03

Inclinación del eje

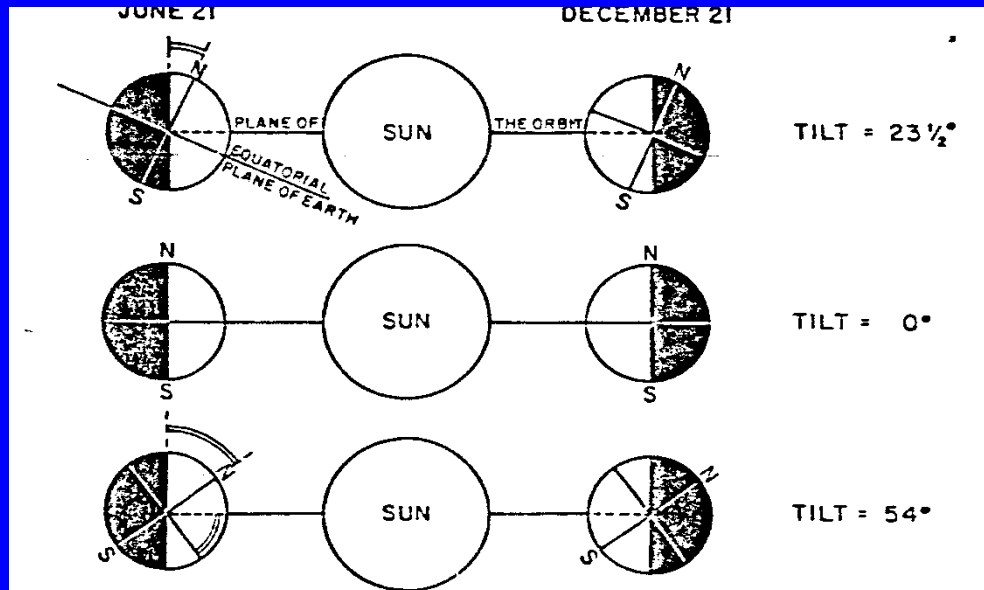


Figure 25. The effect of axial tilt on the distribution of sunlight. When the tilt is decreased from its present value of $23\frac{1}{2}^\circ$, the polar regions receive less sunlight than they do today. When the tilt is increased, polar regions receive more sunlight. The possible limits of these effects (never actually achieved) would be a tilt of 0° , when the poles would receive no sunlight; and 54° , when all points on the earth would receive the same amount of sunlight annually.

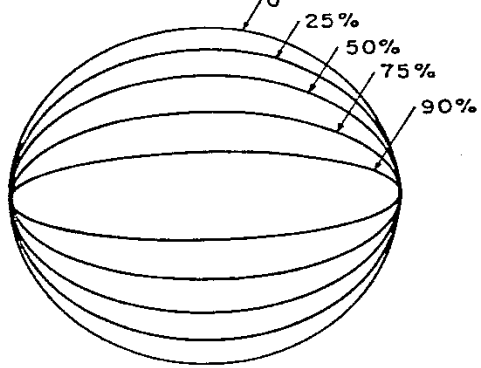
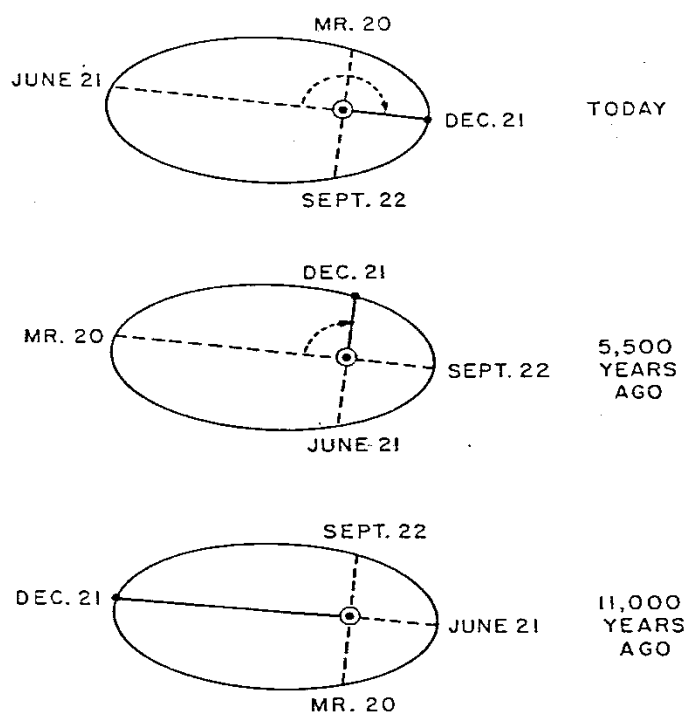


Figure 17. Ellipses with different eccentricities.



• EARTH ON DEC. 21

☉ SUN

Figure 16. Precession of the equinoxes. Owing to axial precession and to other astronomical movements, the positions of equinox (March 20 and September 22) and solstice (June 21 and December 21) shift slowly around the earth's elliptical orbit, and complete one full cycle about every 22,000 years. Eleven thousand years ago, the winter solstice occurred near one end of the orbit. Today, the winter solstice occurs near the opposite end of the orbit. As a result, the earth-sun distance, measured on December 21, changes.

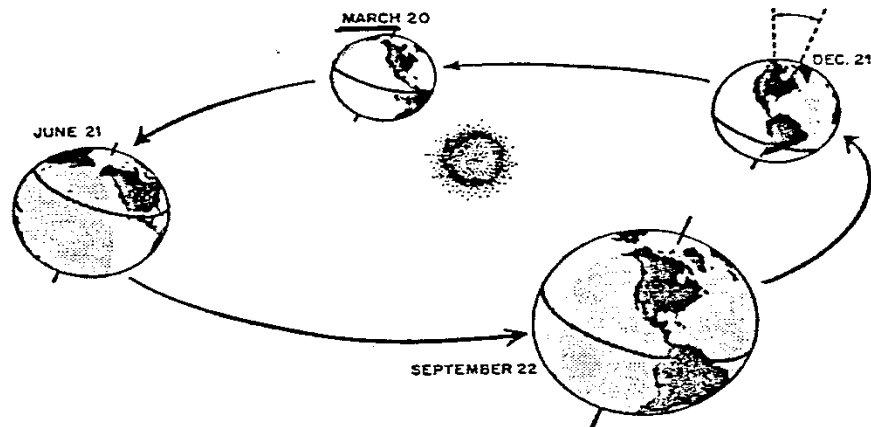


Figure 13. March of the seasons. As the tilted earth revolves around the sun, changes in the distribution of sunlight cause the succession of seasons. (Courtesy of G.J. Kukla.)

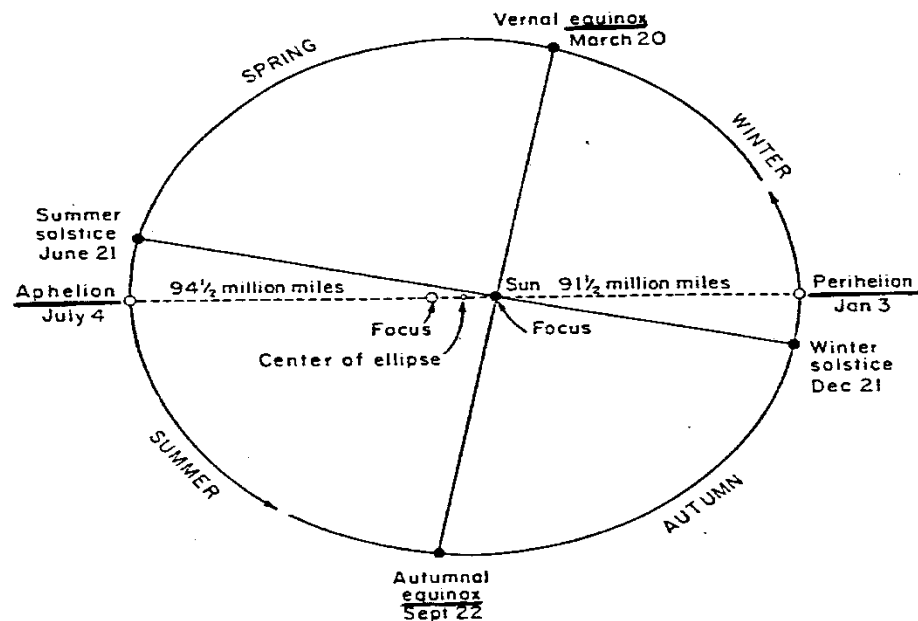


Figure 14. Dates of equinox and solstice. At the equinoxes, the earth's axis is pointed at right angles to the sun, and the day and night are of equal length all over the globe. At the summer solstice, the North Pole is tipped in the direction of the sun and the northern hemisphere has the longest day of the year. At the winter solstice, the North Pole is tipped away from the sun, and the northern hemisphere has the shortest day of the year.

Registros geológicos

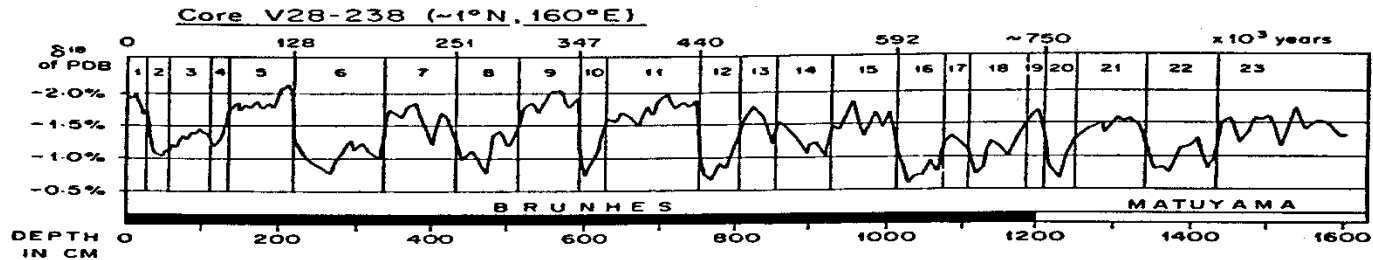
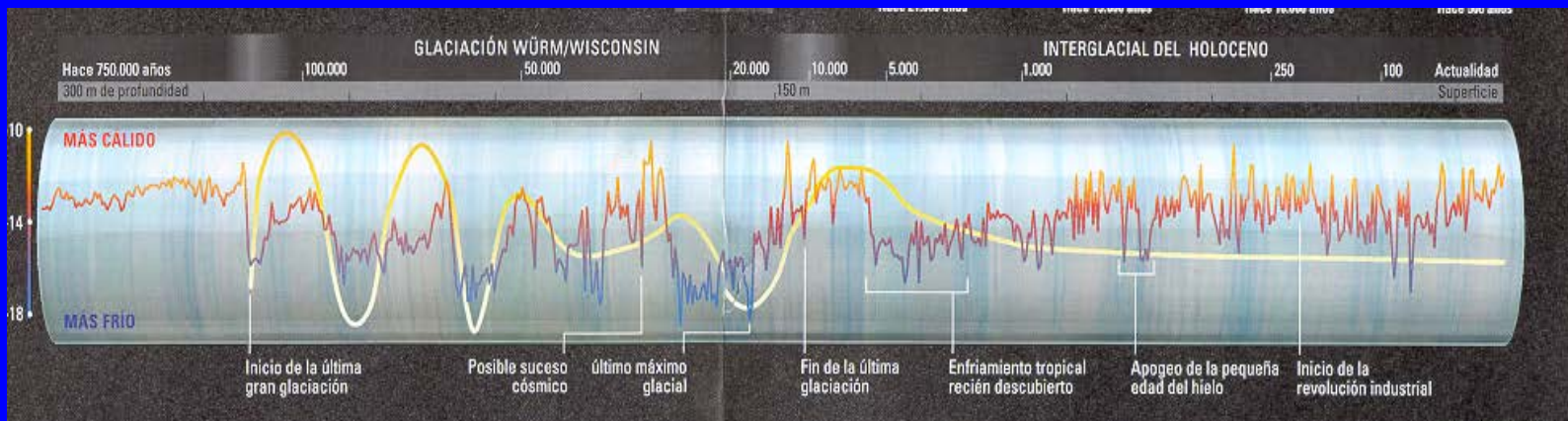


Fig. 5. Oxygen isotope and paleomagnetic record of the last 1.6 Myr in core V28-238 from the equatorial Pacific (~1°N, 160°E). Isotope stages are shown in the upper part of the diagram. Isotopic values are from measurements on *Globigerinoides sacculifer* (after Shackleton and Opdyke [1976, p. 453] with permission from the authors and the Geological Society of America).



Justificación favorable de oscilaciones periódicas de ciclos pequeños (~40.000 años) de manera directa por la “teoría de Milankovitz” : efectos lineales de las oscilaciones de la insolación sobre las “pequeñas oscilaciones glaciales”.

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{1}{t_r} (S(t) - V(t))$$

$V(t)$

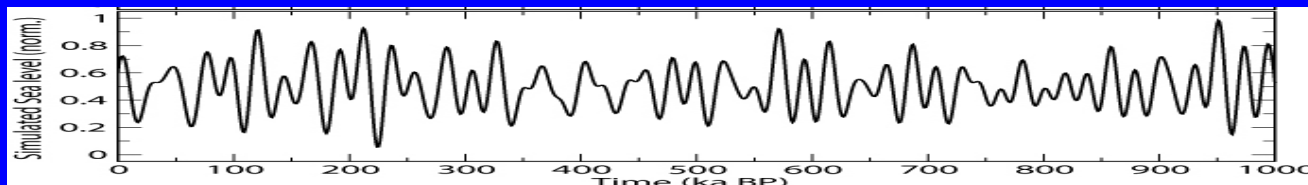
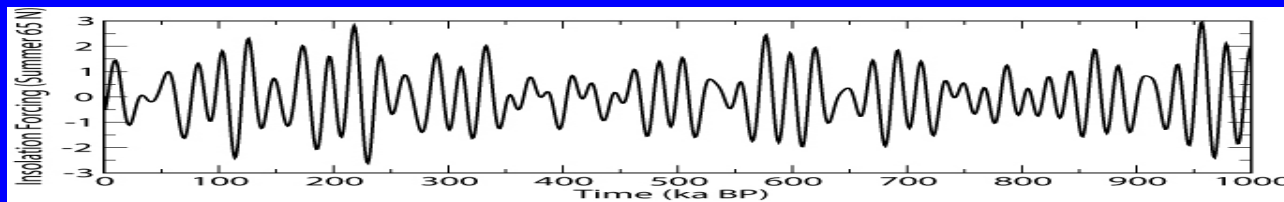
Volumen de hielo

$S(t)$

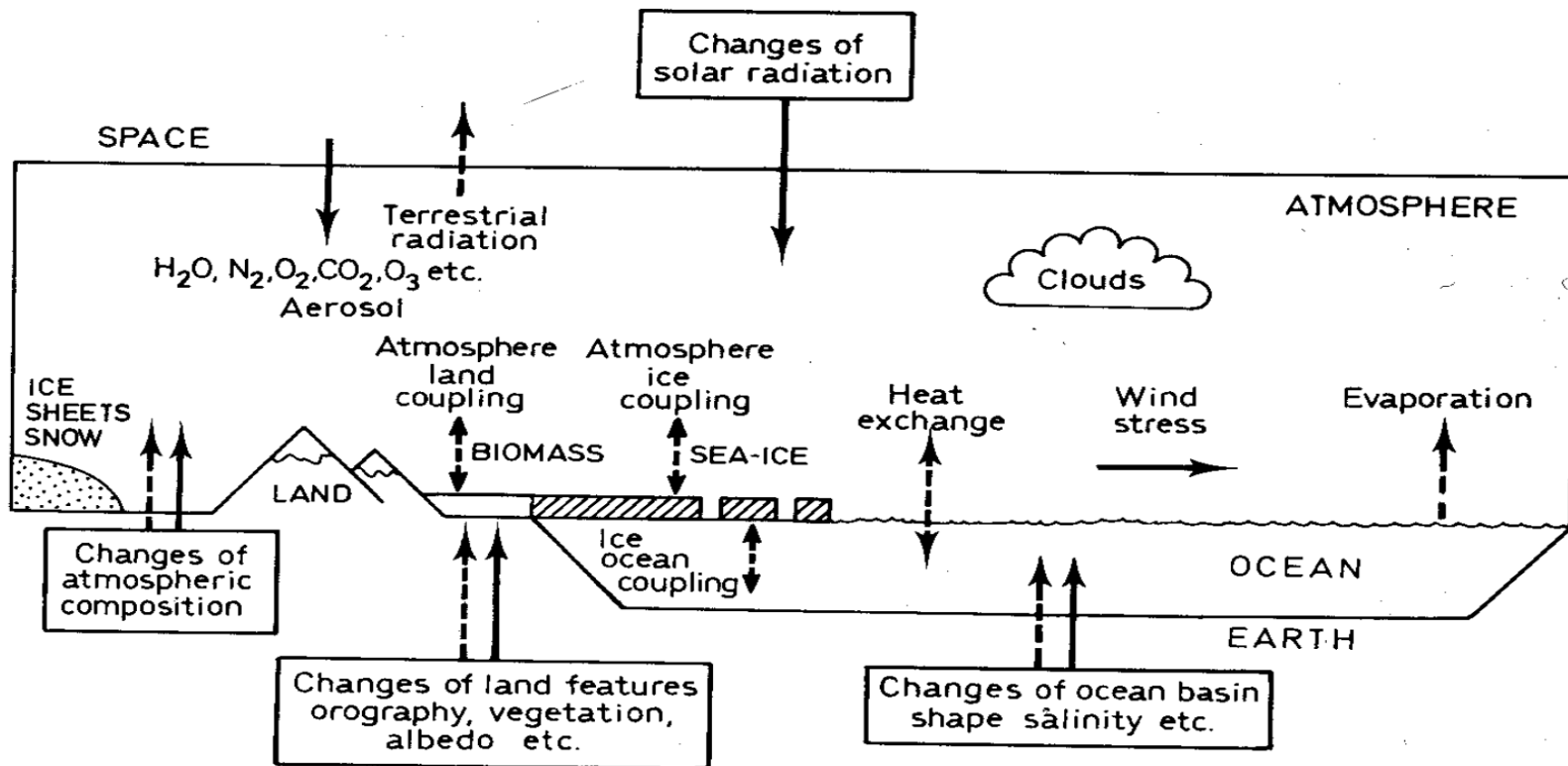
Cambio de
insolación
en verano

t_r

Tiempo de
respuesta de la
capa de hielo
(*ice sheet*)



Componentes externos e internos del sistema climático



Espectro de variaciones climáticas

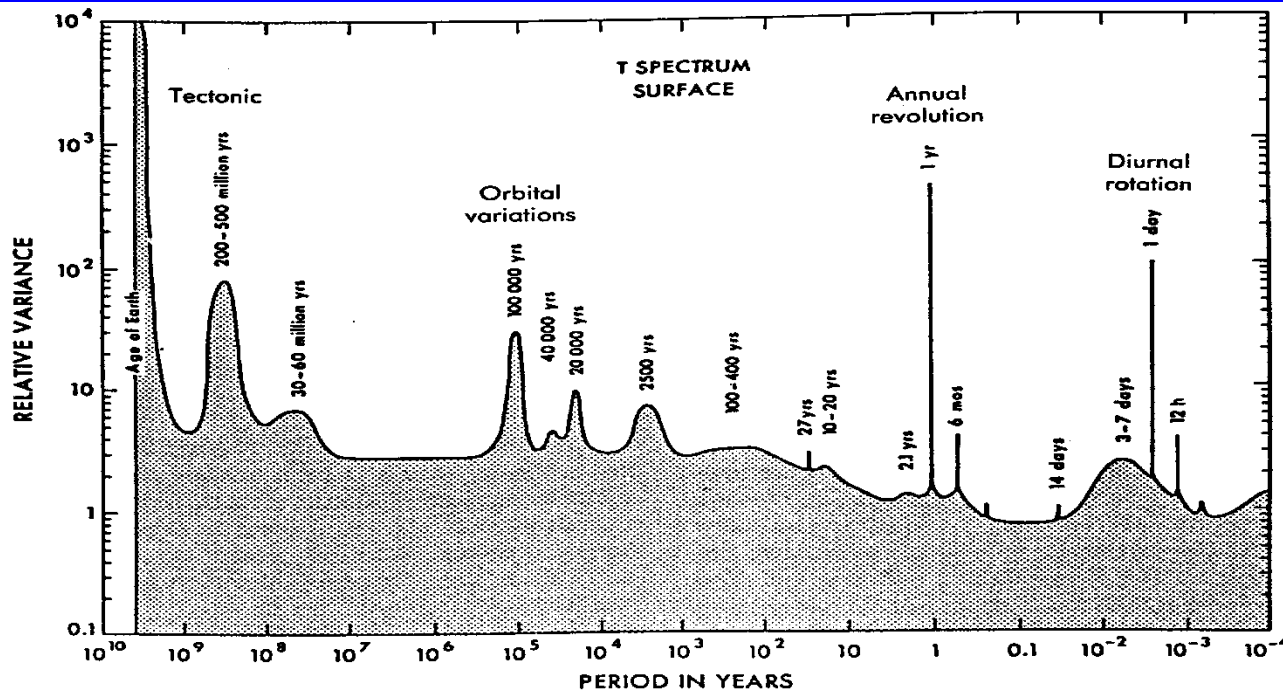
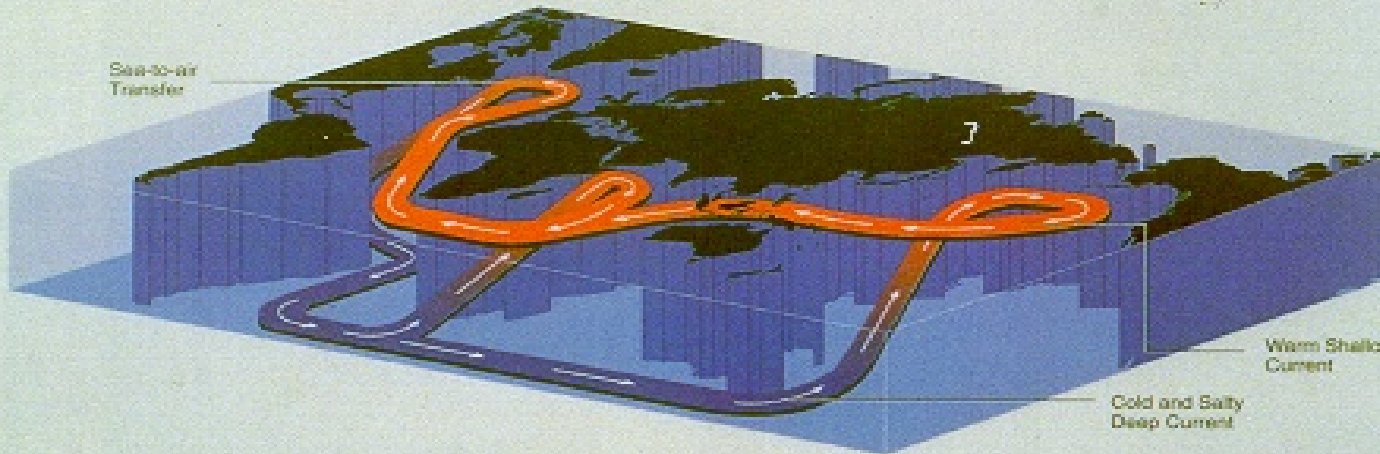


Fig. 2. Tentative spectrum of climatic variations. Estimate of relative variance of climate over all periods of variation. A background level of variability, deriving from internal stochastic mechanisms and corresponding to a low degree of predictability, appears to increase in amplitude toward the longer time scales and to be overlaid by band-limited variability, due to external forcing processes and corresponding to a high degree of predictability (adapted from Mitchell [1976]).

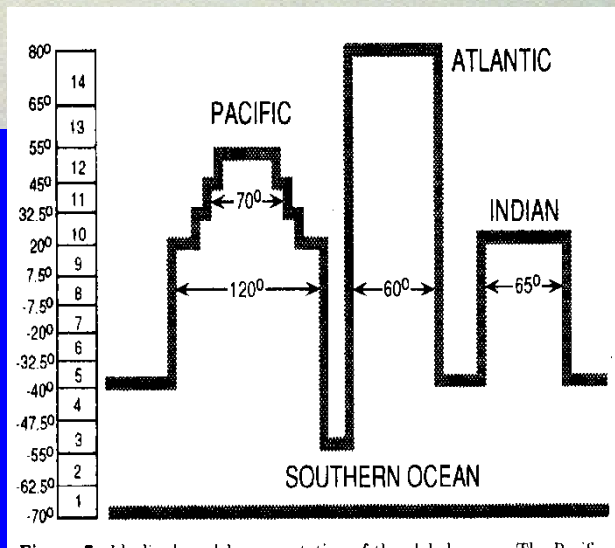
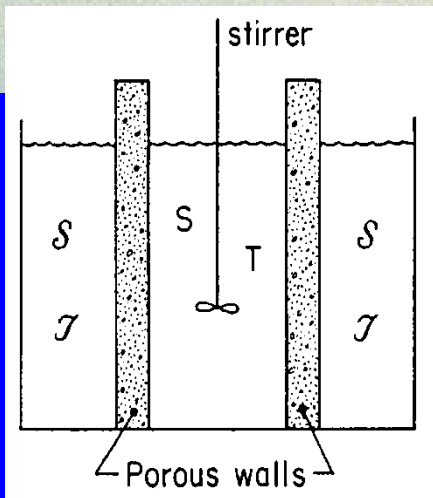
Modelos de salinidad oceánica



Cond. Glaciación
Veranos,
Hem. Norte

¿Hemisferio Sur?

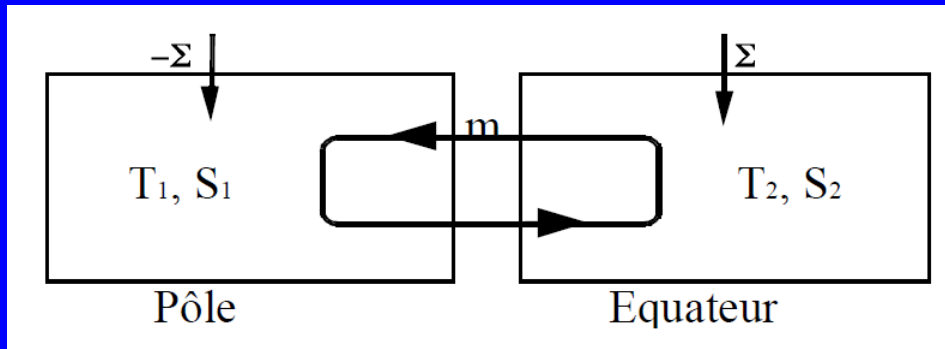
¿Glaciares de
montaña hacia el
Sur?



Broecker-
Denton(1989)

Stommel (1961)

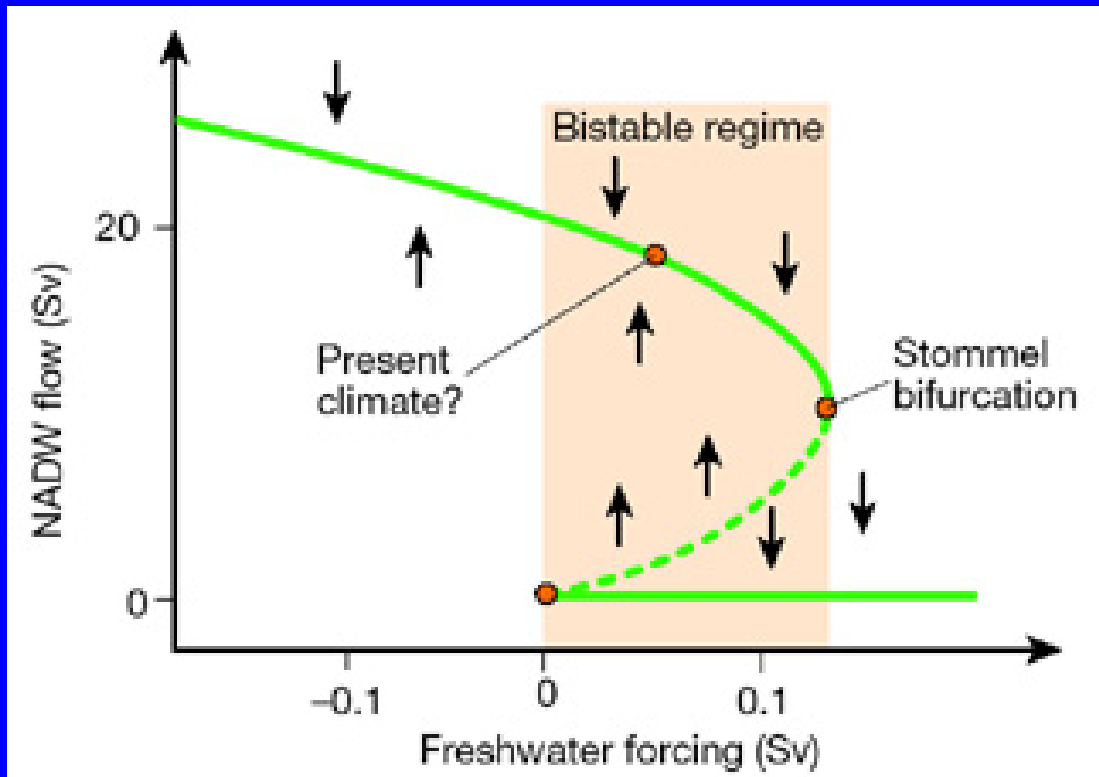
Rahmstorf
(1995)



Stommel, 1961

$$\frac{dT}{dt} = c(\mathcal{T} - T)$$

$$\frac{dS}{dt} = d(S - S)$$



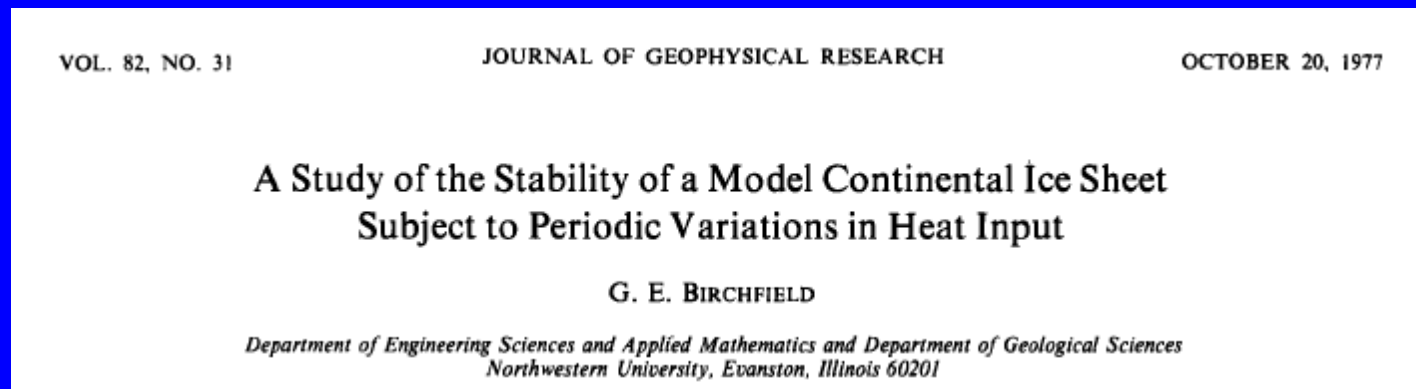
Equilibrios múltiples

5. Periodos interglaciales de 100.000 años y dinámica no lineal

Ciclos periódicos “largos” [~ 100.000 años: isótopo O^{18} Emiliani (1955)] sin aparente justificación razonable (los cambios de excentricidad de la elipse no son suficientes).

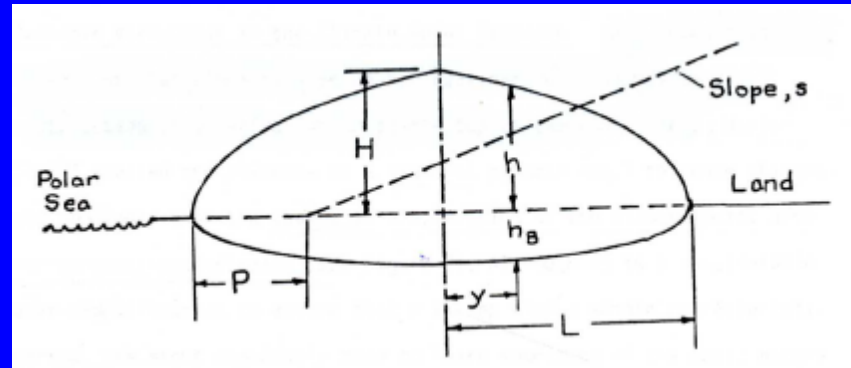
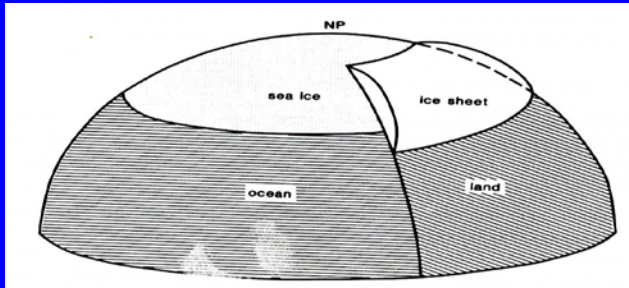
¿Otros mecanismos ocultos en la periodicidad de las glaciaciones?

Artículo pionero:



Teoría ya recogida en libros de
texto universitarios:

W. F. Ruddiman **Earth's Climate Past and Future**, (2001).



Weertman (1964) Material plástico

$$h = \sqrt{\lambda(L - y)}$$

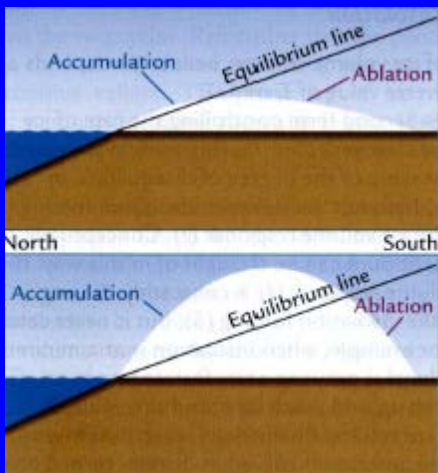
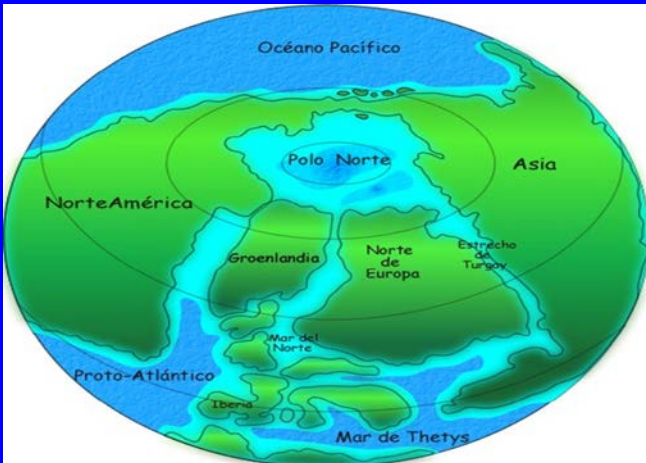
En el centro

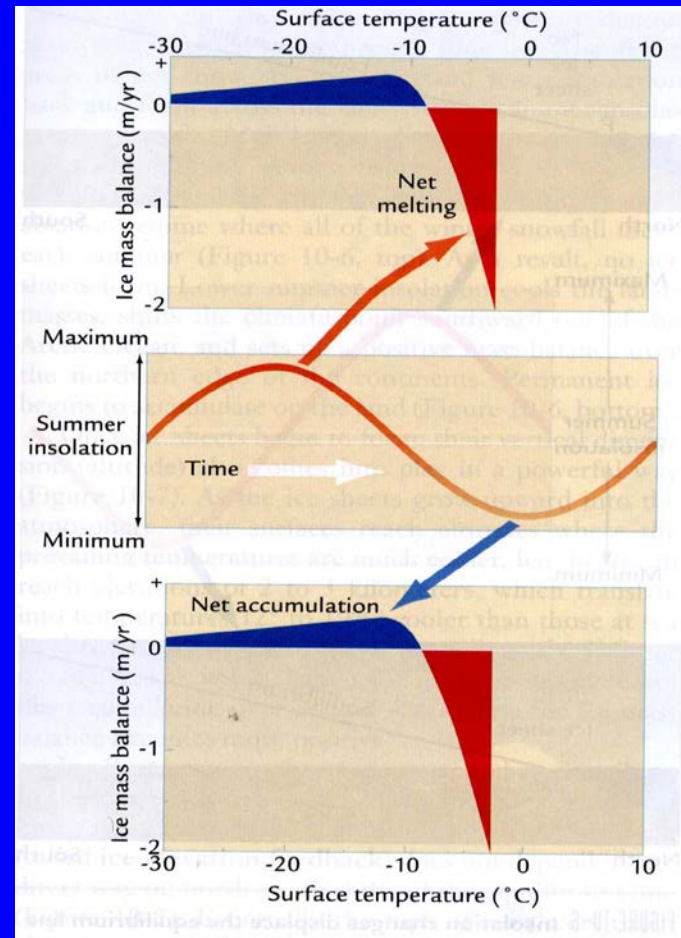
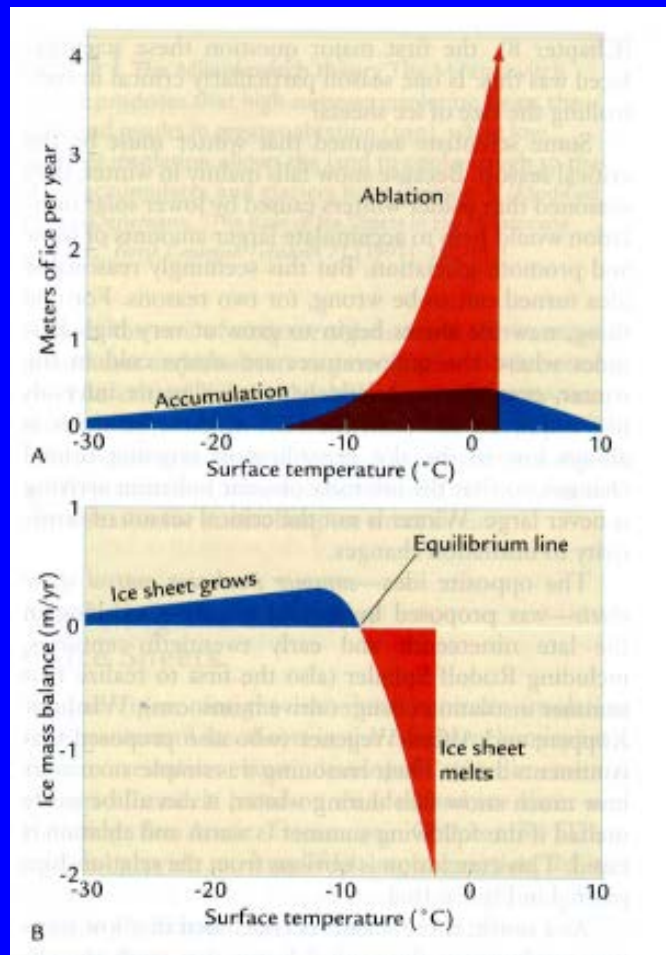
$$H = \sqrt{\lambda L}$$

$\lambda \sim 7-14\text{m}$

P = posición de la línea de nieve al nivel del mar apuntando al polo norte (recta de pendiente s)

Crucial: razón de acumulación de nieve (hacia el ecuador)

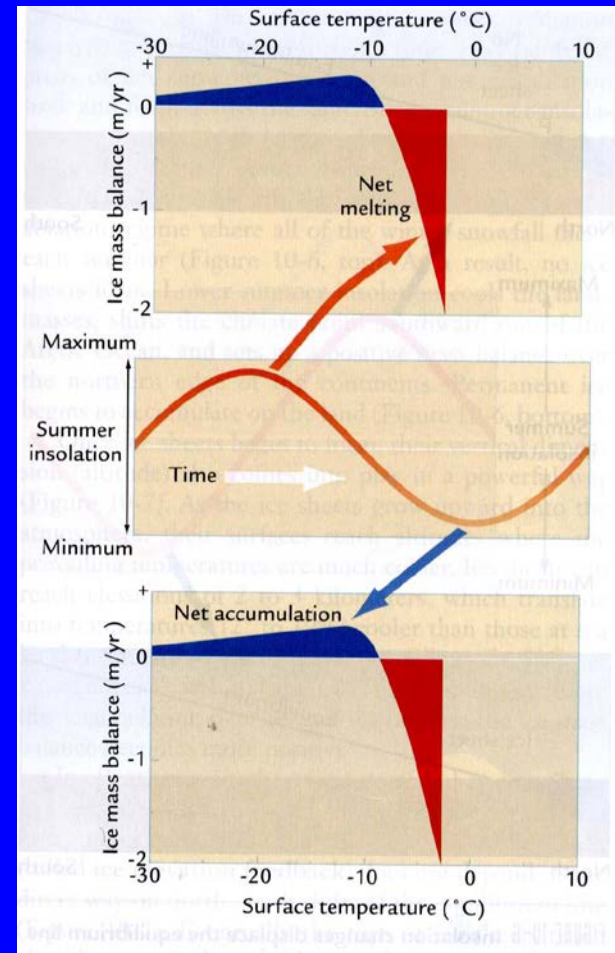
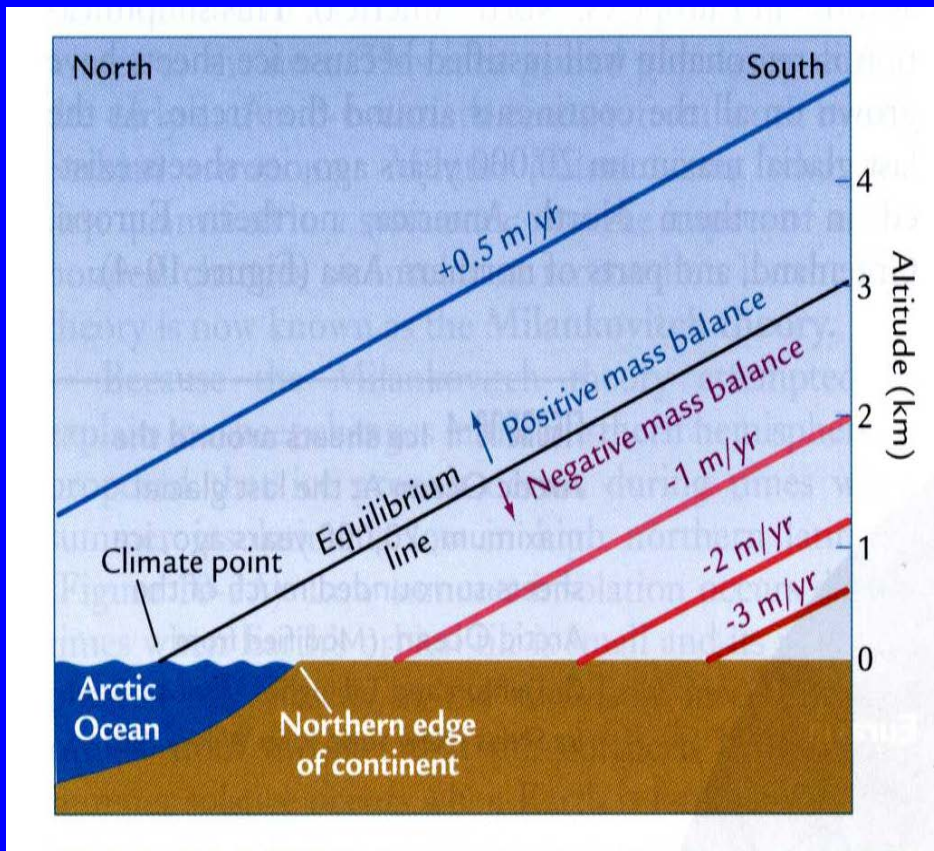




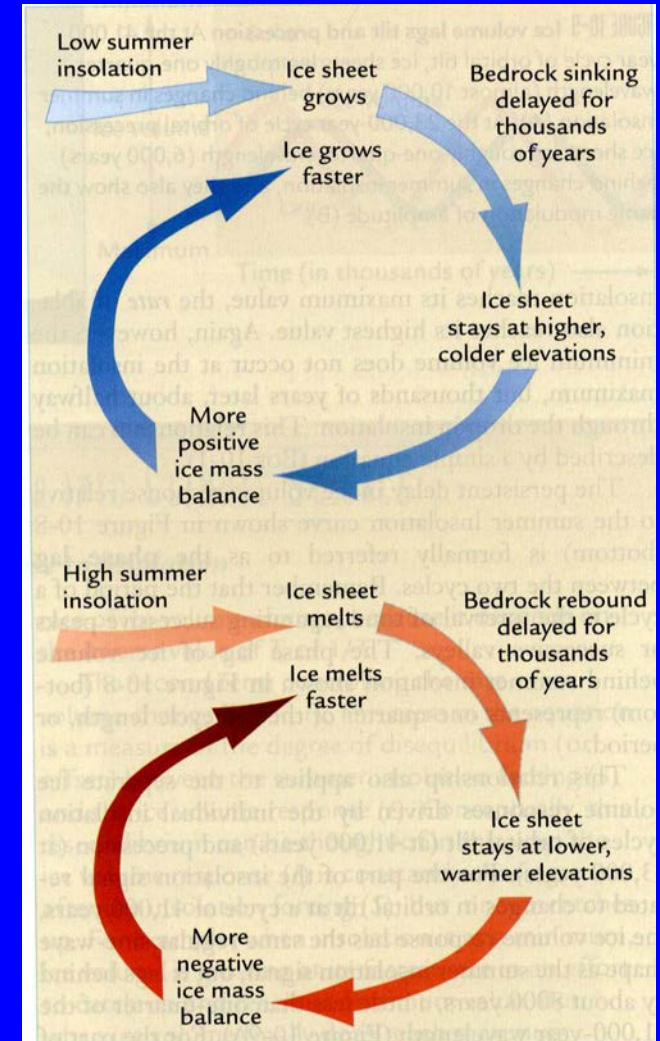
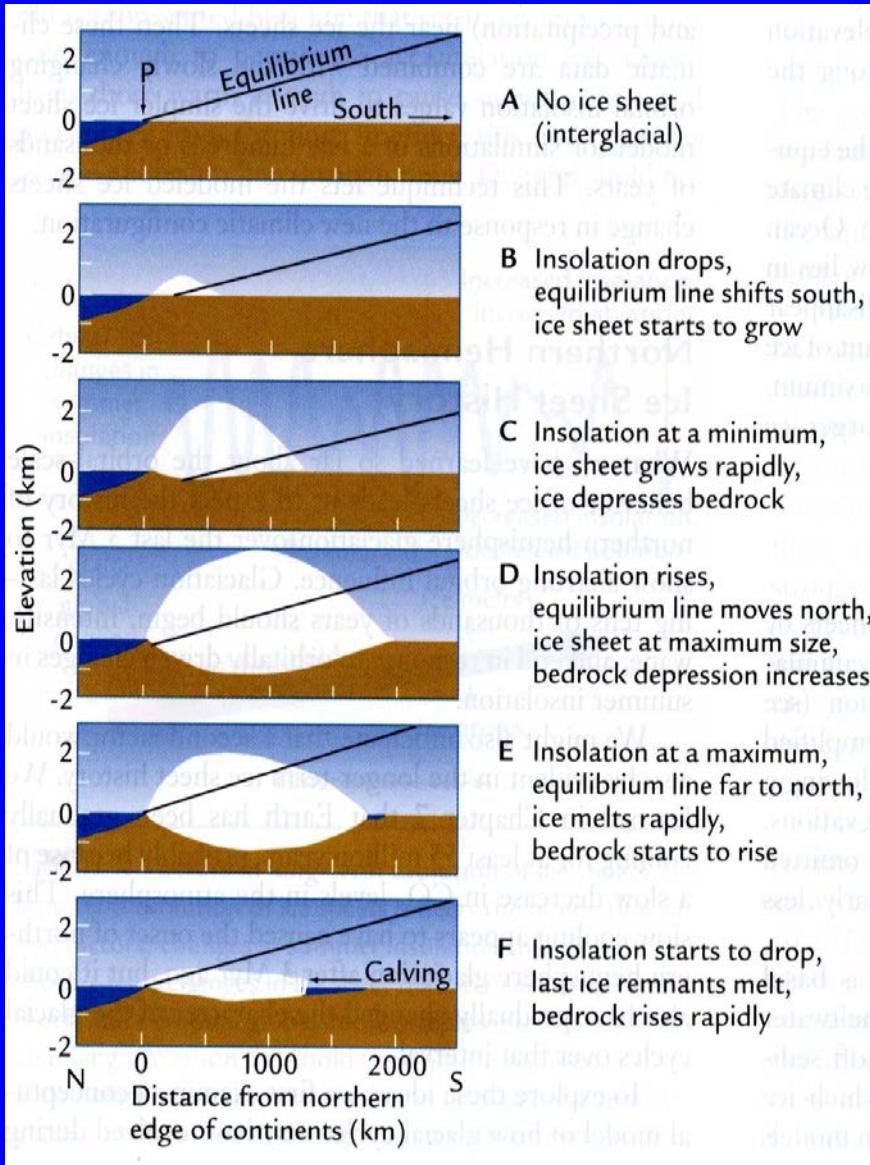
$$A(t) = A_{acum}(t) - A_{ablac}(t)$$

$$A(t) = A(L(t), P(t), s(t))$$

$$A = \begin{cases} a([H - s(2L - P)]L - b[H - s(2L - P)]L^2 & \text{si } H - s(2L - P) < \frac{a}{2b}, \\ \frac{a^2 L}{4b} & \text{si } H - s(2L - P) > \frac{a}{2b}. \end{cases}$$



Dependencia (retro-alimentación) respecto de la insolación



A decrece con L (para L grande) en una proporción que crece con L

h_B profundidad de la base rocosa

$$\frac{dh_B}{dt} = \alpha \left(\frac{h}{3} - h_B \right)$$

Variación de volumen por unidad de grosor de la mitad del casquete polar que apunta al ecuador

$$\eta(t) := \frac{h_B(t)}{h(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (h + h_B) dy = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3} \frac{d}{dt} ((1 + \eta)L^{3/2})$$

Magnitudes adimensionales

$$R^2 := \frac{4s^2}{\lambda} L \quad p := \frac{2s^2}{\lambda} P \quad \tau := \frac{a}{2} t$$

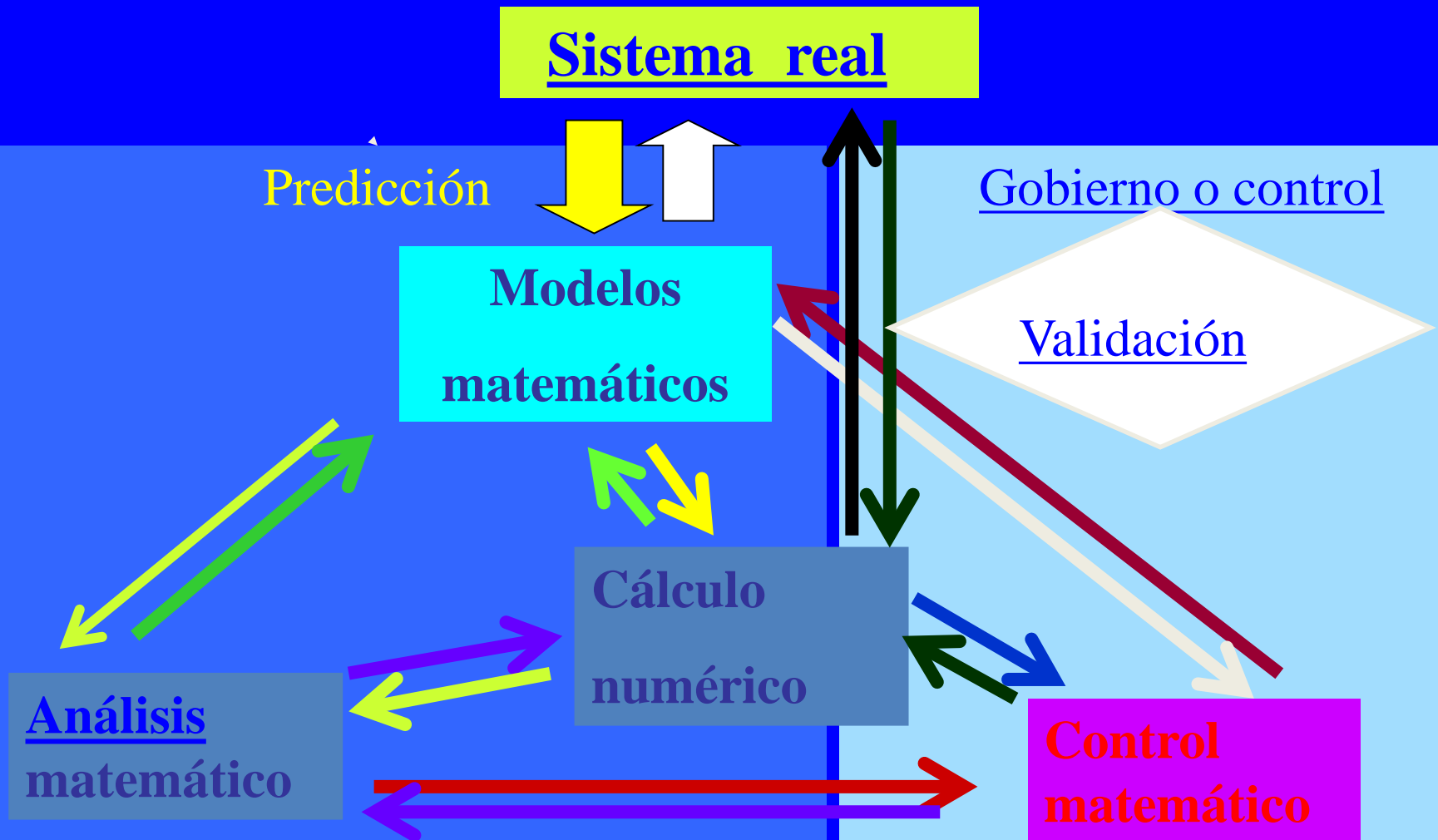
$$\kappa := \frac{b\lambda}{2a} s \quad \mu := \frac{2\alpha}{a} \quad \Gamma := \eta R$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3R^2} \frac{d}{d\tau} \left(\left(1 + \frac{\Gamma}{R}\right) R^3 \right) = (R - R^2 + p(\tau)) [1 - \kappa(R - R^2 + p(\tau))] & \text{si } (R - R^2 + p) < \frac{1}{2\kappa}, \\ \frac{1}{3R^2} \frac{d}{d\tau} \left(\left(1 + \frac{\Gamma}{R}\right) R^3 \right) = \frac{1}{4\kappa} & \text{si } (R - R^2 + p) > \frac{1}{2\kappa}, \end{array} \right.$$

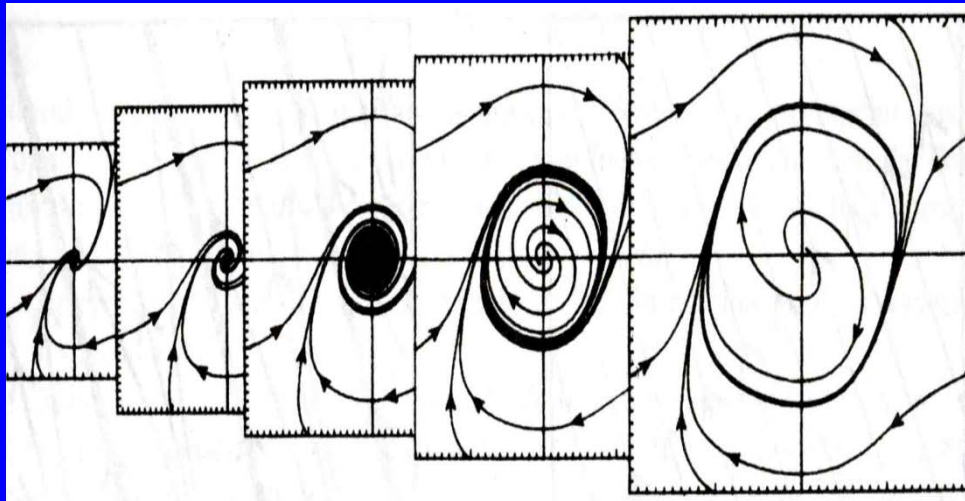
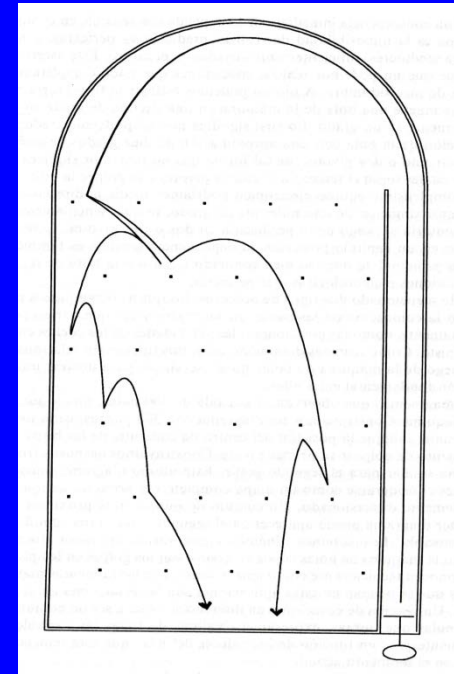
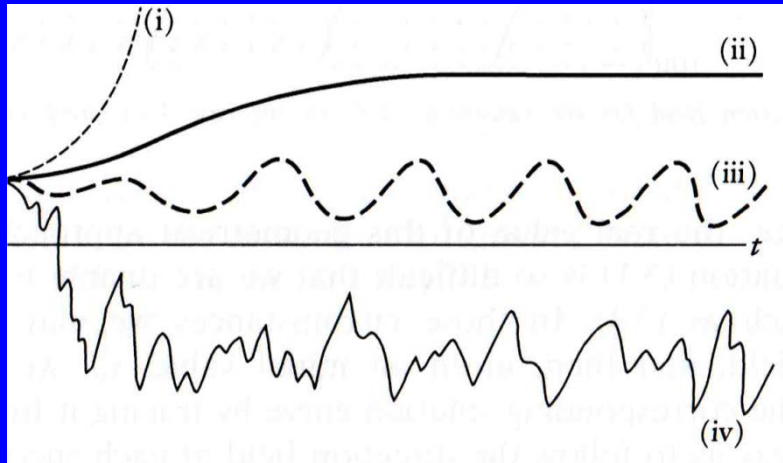
$$\frac{1}{2\mu} \frac{d\Gamma}{d\tau} = \frac{R}{3} - \Gamma,$$

Sistema no lineal

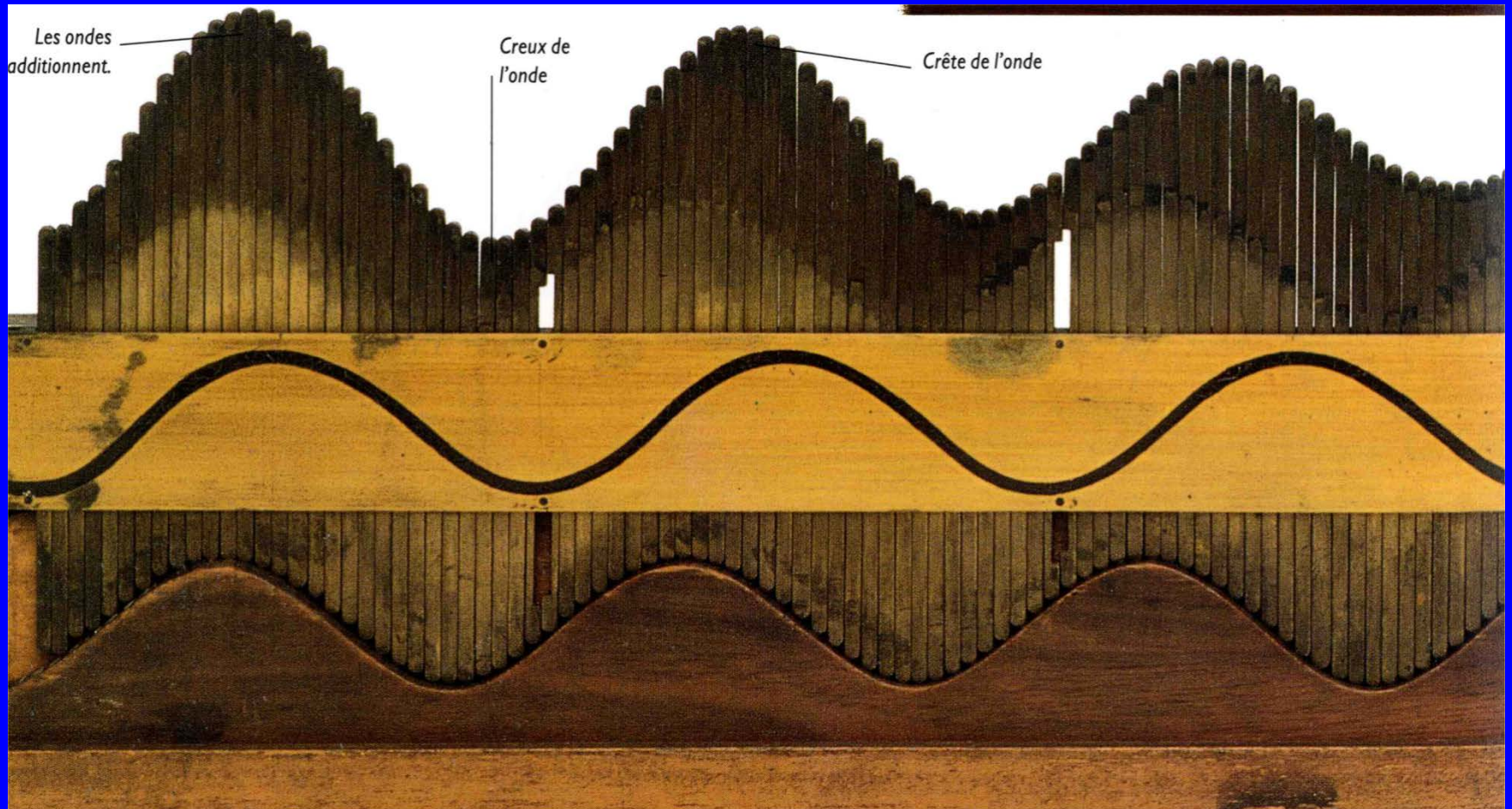
La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

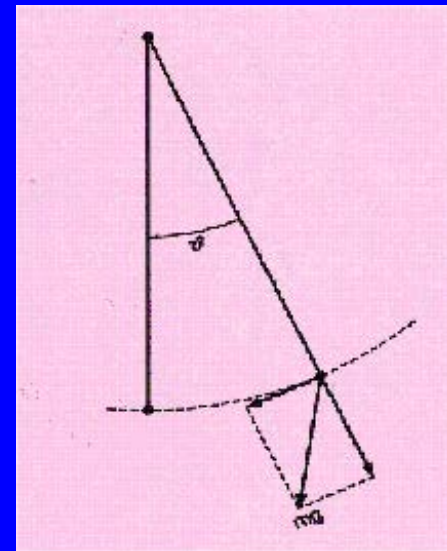
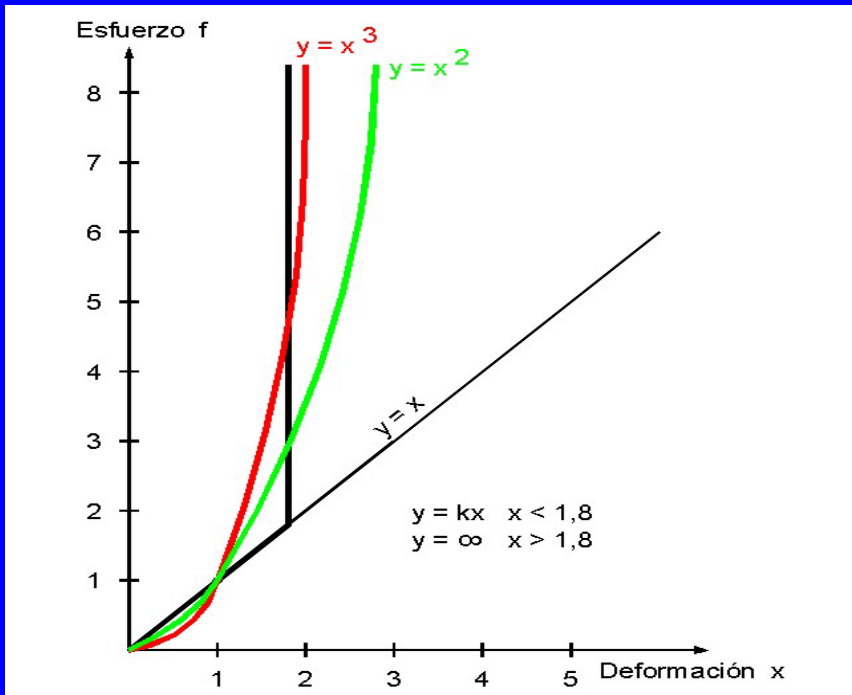
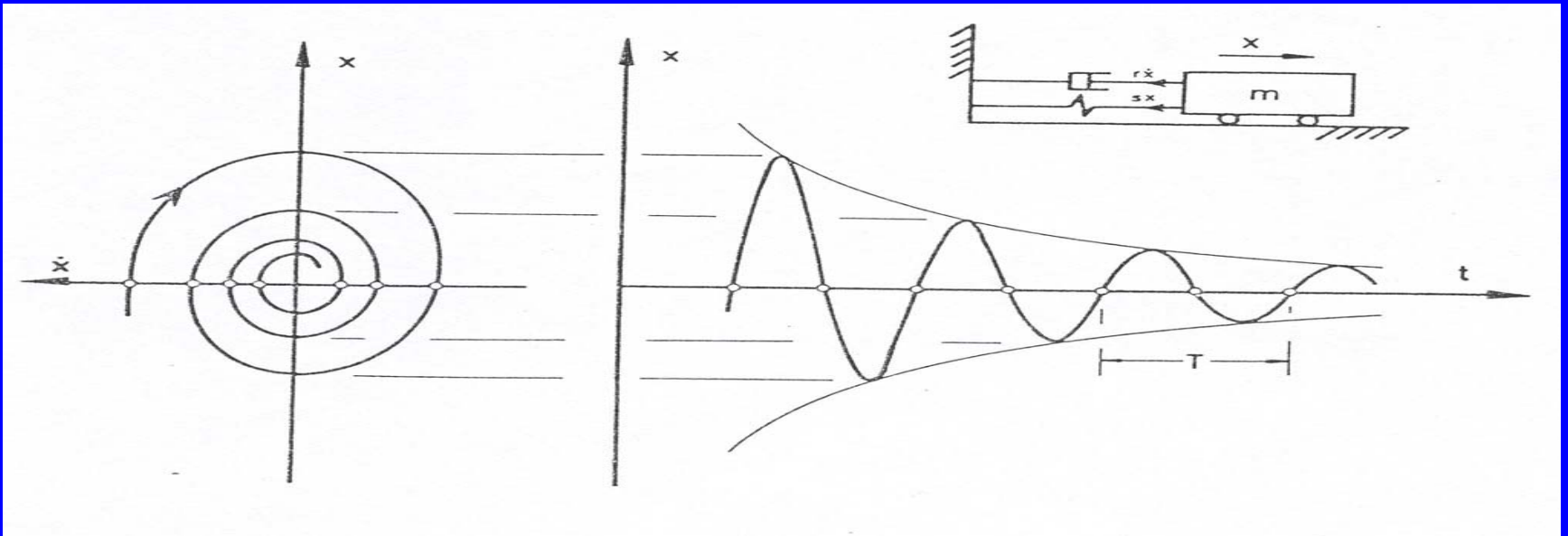


Análisis matemático



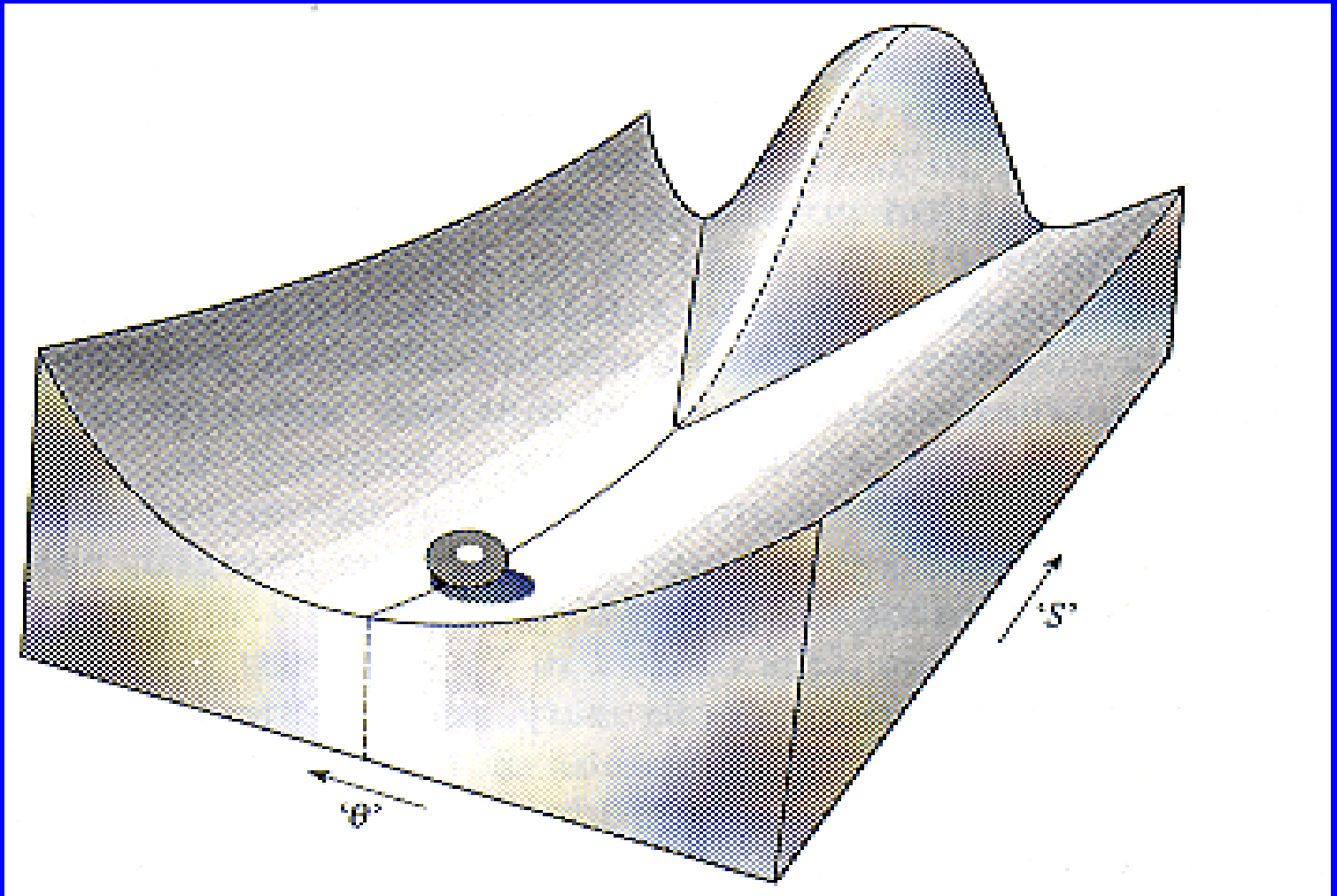
Modelos Lineales / no lineales





Comportamientos no lineales

bifurcación de soluciones (estacionarias o periódicas)
respecto de parámetros



Reflexiones sobre el modelo y lo que implica la ausencia de dependencia continua respecto de los parámetros

Sistemas dinámicos no lineales

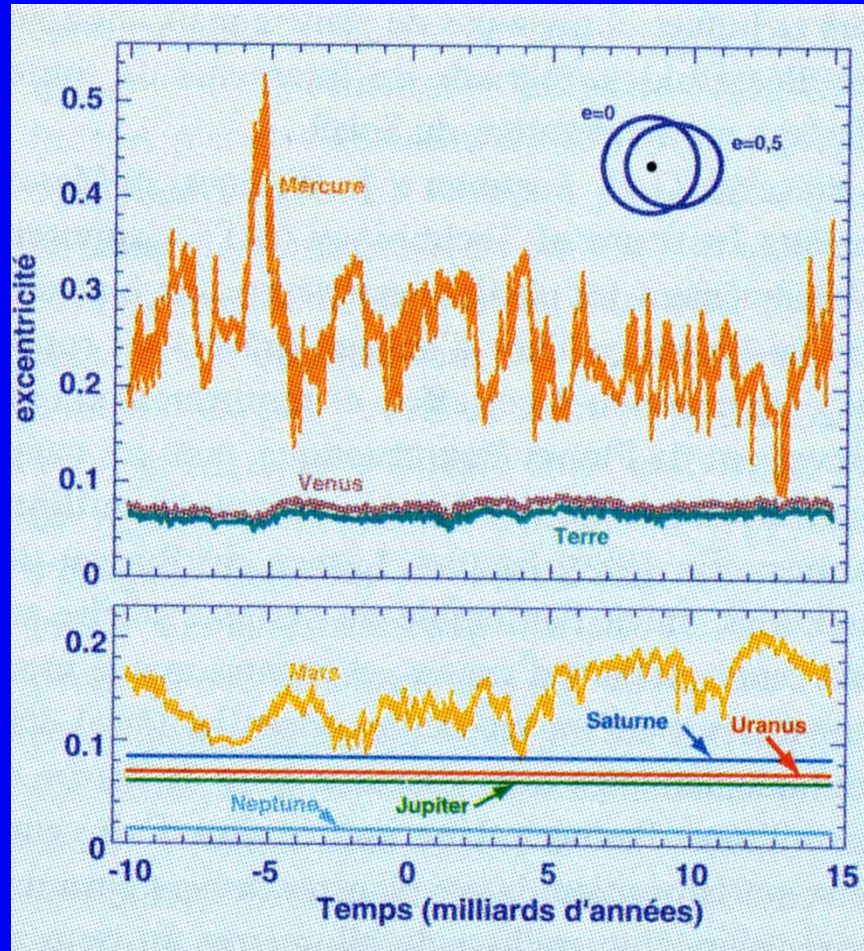
Problema de los 3 cuerpos, ...

Henri Poincaré (1854-1941)

En 1908, H. Poincaré (1854-1912),

“puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan otras muy grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras producirá otro enorme en las últimas. La predicción resulta imposible”





Ecuaciones de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

- Estudio *local* en **puntos singulares**:

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

Representación paramétrica:

$$(1) \quad \frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = dt \Rightarrow (2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

- Soluciones de (2):

$$x = x(t, x_0, y_0), \quad y = y(t, x_0, y_0)$$

formas *parametrizadas* de las soluciones de (1).

- Son *curvas*, llamadas *órbitas* o *trayectorias*.

Ecuaciones de primer orden y primer grado: clasificación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}, \quad A = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

- (0,0) punto singular **irregular (Fuchs)**
- **Sólo busca soluciones reales** y propiedades “reales” (acotación, periodicidad real...)
- Encuentra **4 tipos básicos**:

Nodos, sillas, focos, centros

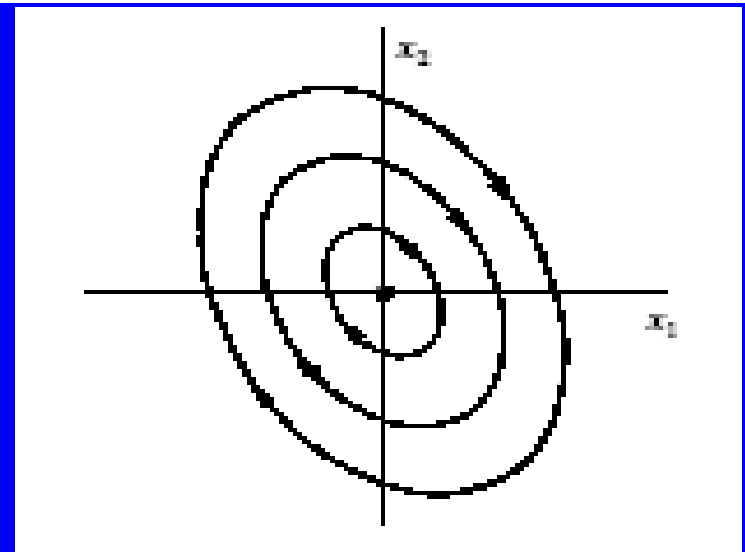
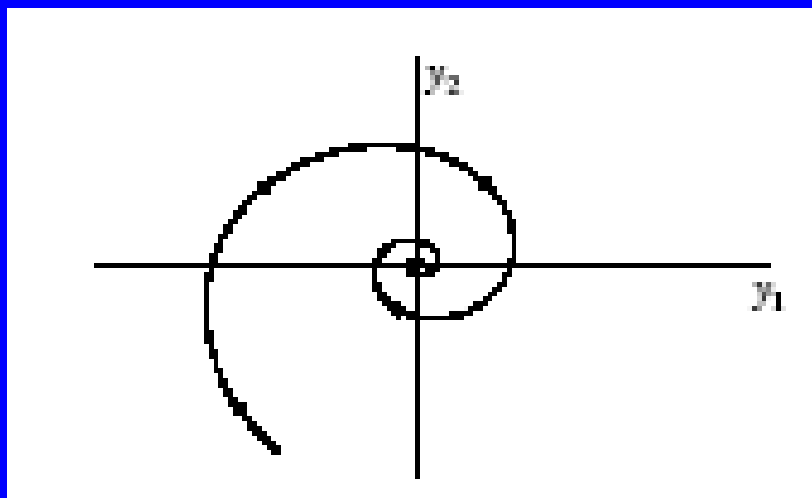
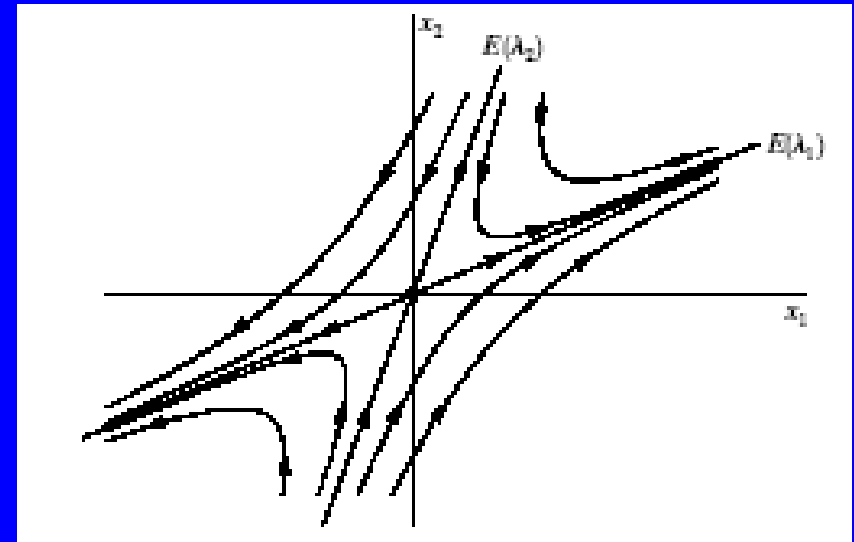
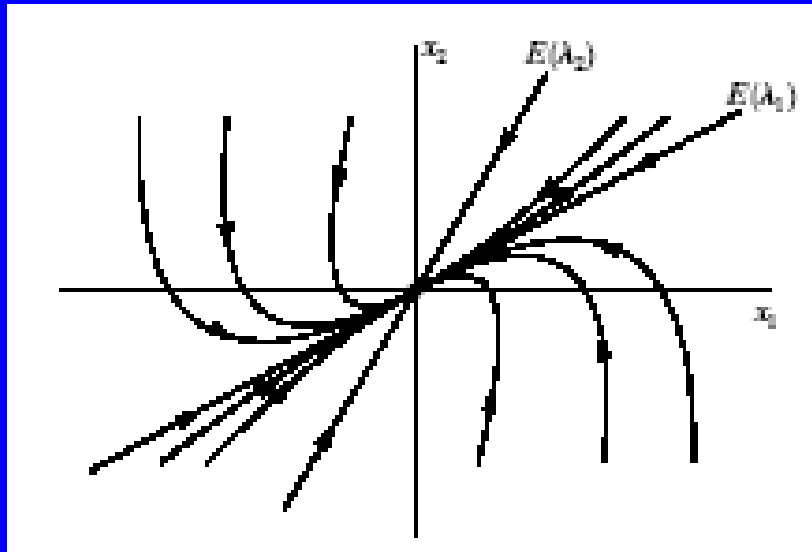
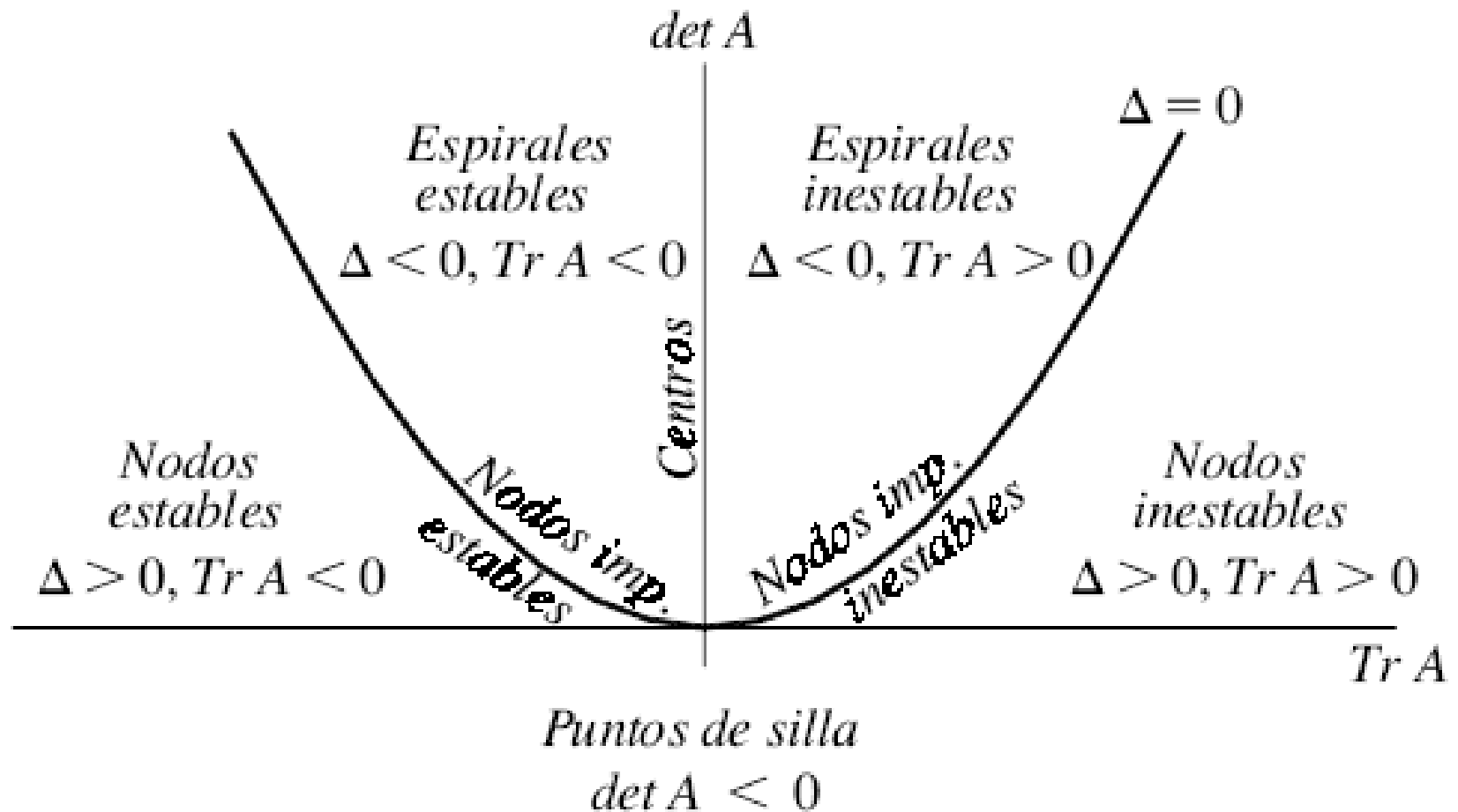


Diagrama traza-determinante

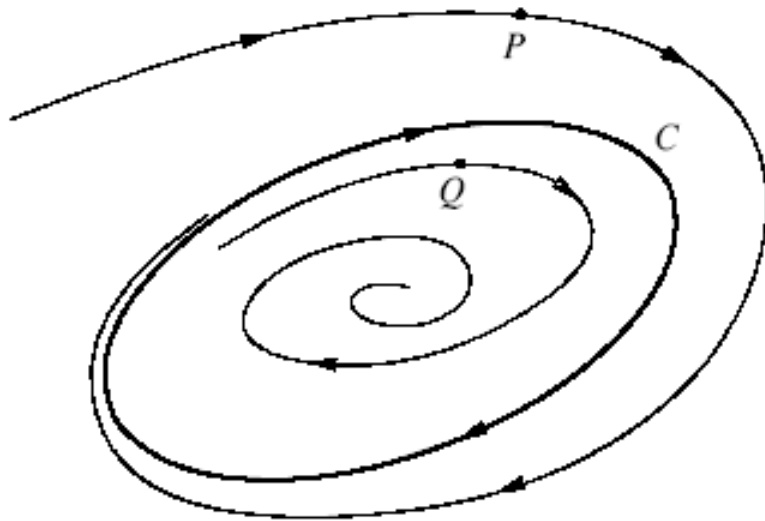


Ciclos límite

- **Trayectorias cerradas.** Representan *movimientos periódicos (órbitas periódicas)*.
- **Teorema (Poincaré-Bendixson):** Si una órbita acotada para $t \rightarrow \pm\infty$ no tiende a un punto singular, **tiende en espiral a un ciclo límite.**

Ciclo límite y ciclos sin contacto

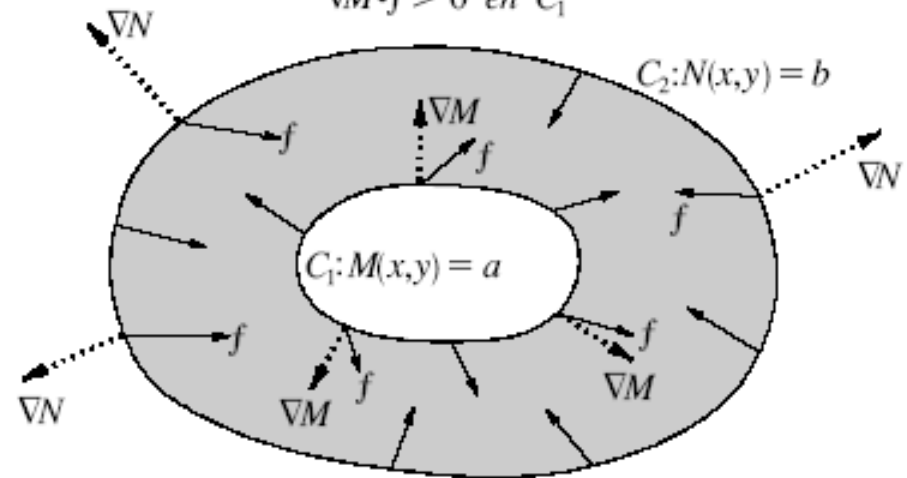
$$C = \omega(P) = \alpha(Q)$$



Ciclo límite

$$\nabla N \cdot f < 0 \text{ en } C_2$$

$$\nabla M \cdot f > 0 \text{ en } C_1$$



Dos ciclos sin contacto

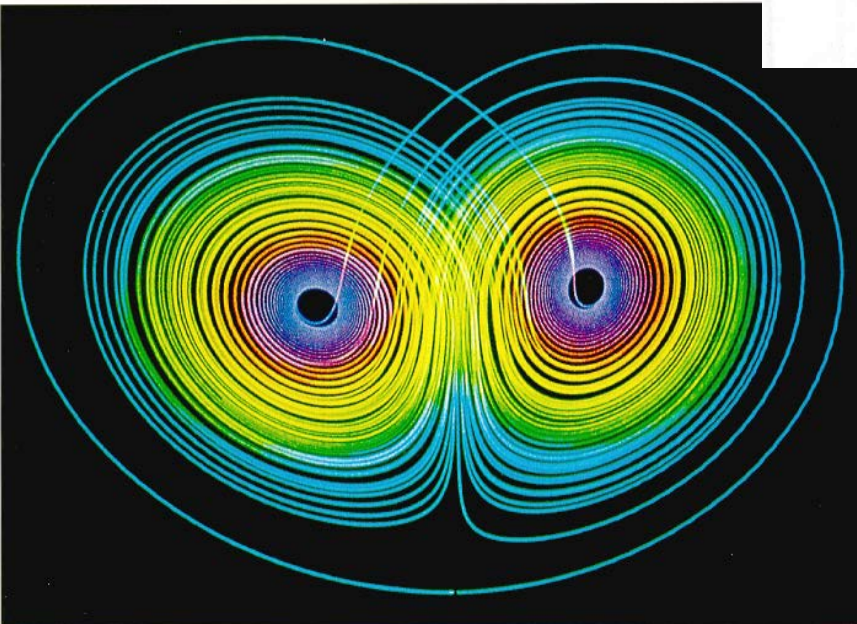
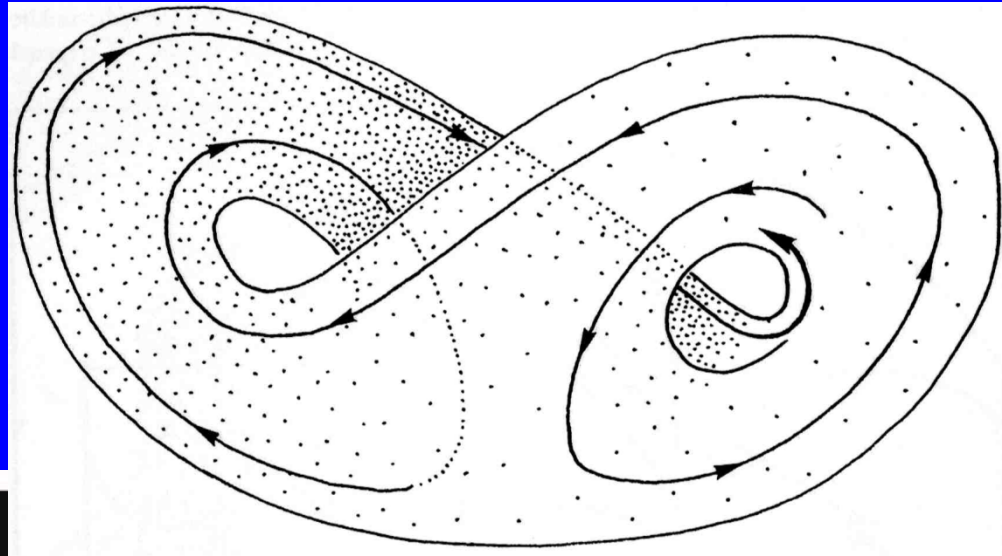
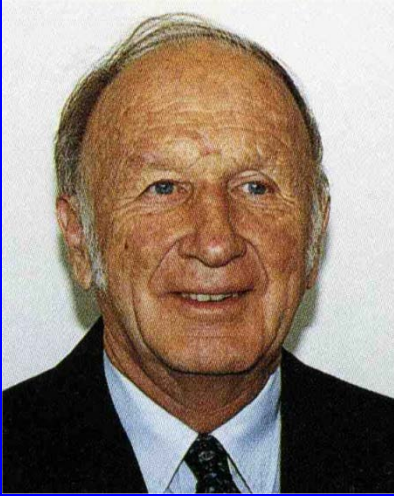
Estabilidad de movimientos

- Lagrange: Movimiento **acotado** ($t > 0$, $t < 0$ o ambos)
- Poisson: “recurrente”: $x(t)$ “vuelve a su entorno infinitas veces”: $x(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t_0)$
- Poincaré: Como Poisson, poco claro. **La inestabilidad es la regla, la estabilidad la excepción (centro).**
- Liapunov: Definición precisa (diferente).

Investigación sobre órbitas periódicas

- **Método geométrico:** “Aplicación de Poincaré”.
- **Métodos analíticos:**
 - Desarrollos en **serie** (potencias y trigonométricas).
 - Cambios de variable *formales* (**formas normales**).
 - **Métodos perturbativos:** Teorema de la función implícita y análogos. Algún “punto fijo”.

1917-2010



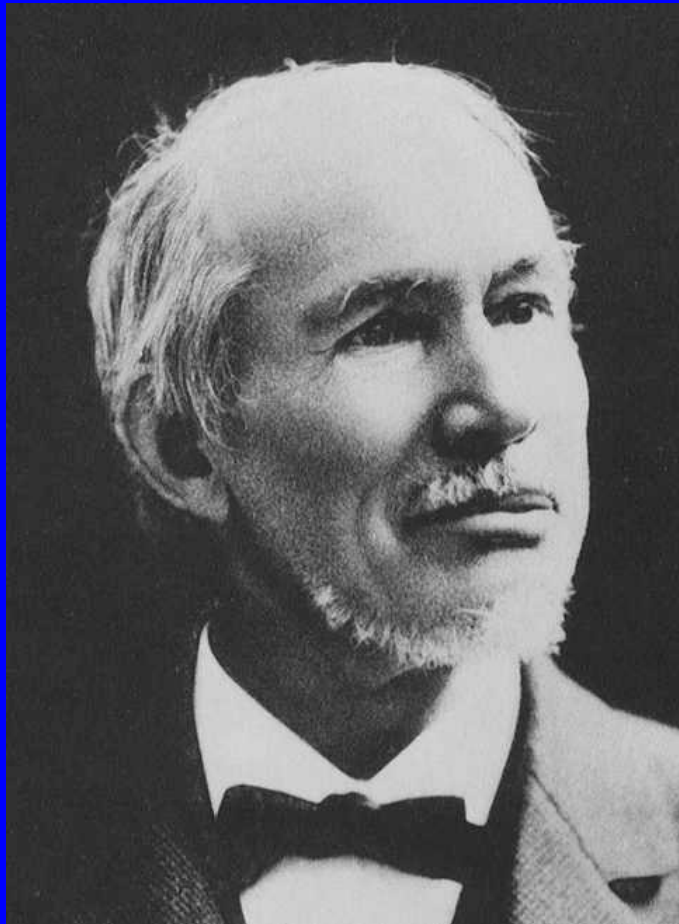
El atractor de Lorenz. Ilustración de Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Edit. Springer-Verlag.

$$\frac{dx}{dt} + \sigma(x - y) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + y - rx + xz = 0$$

$$\frac{dz}{dt} + bz - xy = 0$$

George W. Hill (1838-1914)




- “Primer” matemático EEUU.
- Muy valorado por Poincaré.
- Problema 3 cuerpos.
- Teoría lunar.
- **“Ecuación de Hill”:**

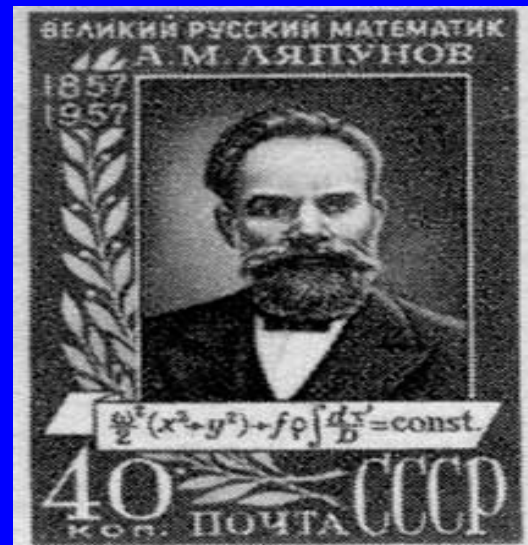
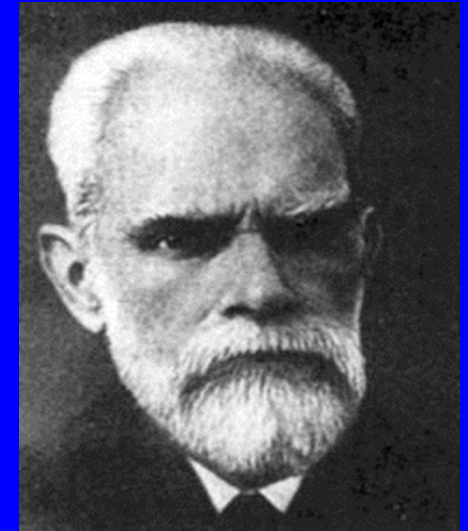
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p(t)x, \quad p(t+2\pi) = p(t)$$

- Lineal, **coeficientes periódicos**

Soluciones periódicas “perturbadas”

- **Perturbaciones de la solución:** Comportamiento de *soluciones próximas*. **Soluciones *asintóticas*:**
 - Se acercan al ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$ ó $-\infty$.
 - *doblemente* asintóticas: cuando $t \rightarrow \infty$ **y** $t \rightarrow -\infty$. 
- **Perturbaciones del sistema (parámetros):** Si para $\mu = \mu_0$ (problema no perturbado) el sistema tiene *solución periódica* buscar una solución **próxima** a ella para $\mu \cong \mu_0$: “problema perturbado”.

Aleksandr Mijáilovich Liapunov (1857-1918)



Definiciones de estabilidad

- $x' = f(x)$. Solución (“movimiento”) $x^*(t)$

estable si:

"Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

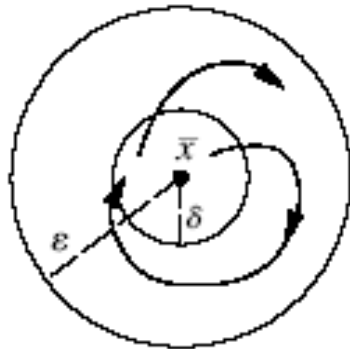
$$|x(0) - x^*(0)| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*(t)| < \varepsilon \text{ para todo } t > 0"$$

- Es **asintóticamente estable** si además:

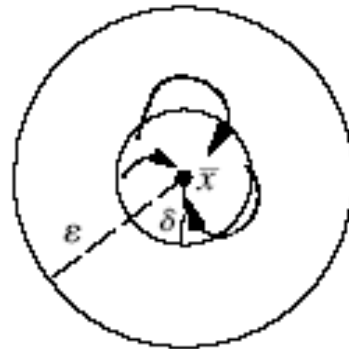
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x^*(t)) = 0 \text{ para } |x(0) - x^*(0)| < b$$

- Más rigurosas que Poincaré, más difíciles de tratar.
- Soluciones periódicas **no pueden** ser *asintóticamente estables* – *estabilidad orbital...*)

Estabilidad e inestabilidad



Estabilidad



Estabilidad asintótica



Inestabilidad

Linealización (equilibrio)

- $x' = f(x)$, x^* equilibrio $\Leftrightarrow f(x^*) = 0$
- **Desviación del equilibrio** (“variación”):
$$y = x - x^* \Rightarrow y' = x' = f(x^* + y)$$
- Taylor: $f(x^* + y) = 0 + Df(x^*)y + \dots$
- **Linealización:**

$$y' = Df(x^*)y$$

“ecuación *variacional lineal*”. Coeficientes constantes.

Estabilidad por linealización

- **Maxwell** (*On Governors*, 1868): Sistema $y' = Ay$.
- $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow$ **Autovalores de A tienen parte real negativa.**
- **Conjetura:** Lo mismo en el no lineal (local):
 $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ si $y(0)$ “próximo” a 0 ,
o sea
 $x(t) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$ si $x(0)$ “próximo” a x^* .
- Si $\text{Re } \lambda \leq 0$ pero algún $\text{Re } \lambda = 0$: **caso crítico.**

Linealización (soluciones periódicas)

- $x' = f(x)$, $x^*(t)$ solución T -periódica
- **Desviación del equilibrio** (“variación”):

$$y = x - x^*(t)$$

⇒ **Linealización:**

$$y' = Df(x^*(t))y$$

“ecuación *variacional lineal*”. Coeficientes periódicos.

Exponentes de Liapunov $< 0 \Rightarrow$ **estable.**

método

directo

Estabilidad de órbitas periódicas

- **Linealización -> Exponentes de Liapunov.**
- Todos < 0 : soluciones del lineal $\rightarrow 0$
- Demuestra: **también las del no lineal.**
- Si **algún $\mu_k > 0$: inestabilidad.** Variedad de soluciones que se alejan.
- Caso crítico.

Ausencia de dependencia continua para tiempos grandes y ecuaciones no lineales.

1.3.3 Forzamiento periódico: caso no lineal. Pérdida de la dependencia continua respecto de datos iniciales.

P. Blanchard, R.L. Devaney, G.R.Hall, Ecuaciones Diferenciales, Thomson, 1998.

El péndulo forzado periódicamente

Como un segundo ejemplo de un sistema no lineal forzado periódicamente, volvemos al sistema que modela el movimiento de un péndulo. Podemos imaginar un péndulo sobre una mesa al que se estimula cada cierto periodo. Resulta que gran parte del comportamiento observado antes también ocurre para este sistema.

Las ecuaciones

Las ecuaciones del péndulo forzado periódicamente con masa 1 y longitud de brazo 1 son

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen} \theta + \epsilon \operatorname{sen} t,$$

donde g es la constante gravitatoria. El término de forzamiento $\epsilon \operatorname{sen} t$ modela una fuerza externa que empuja periódicamente al péndulo en sentidos horario y antihorario con amplitud ϵ y periodo 2π . Por conveniencia suponemos que se han escogido las unidades de tiempo y distancia y que $g = 1$; nuestro sistema es entonces

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{sen} \theta + \epsilon \operatorname{sen} t.$$

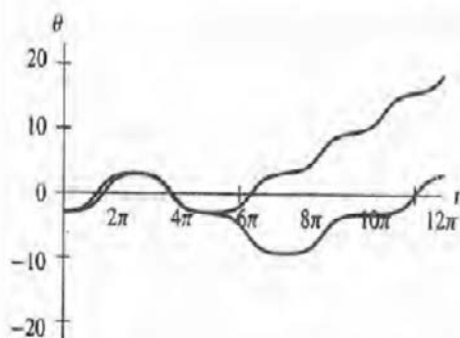
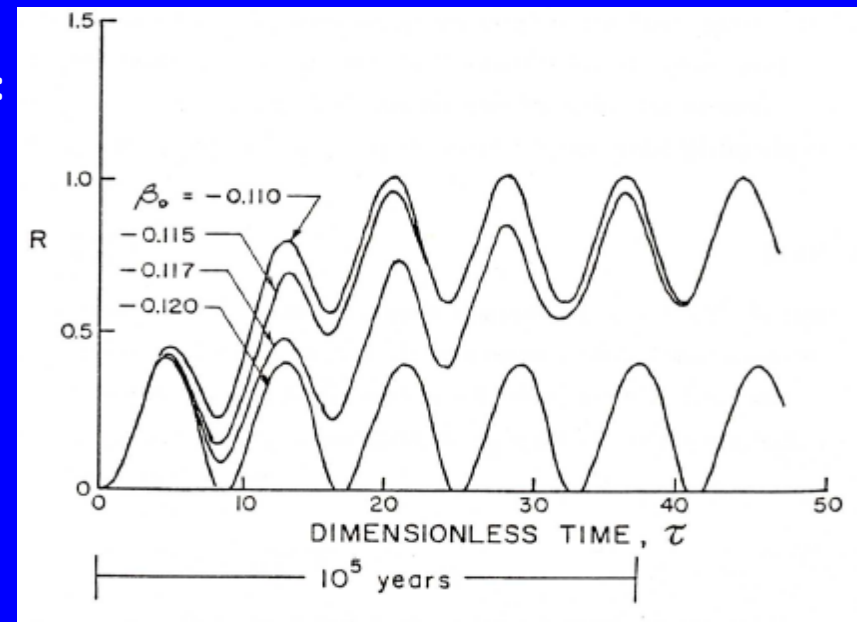


Figura 5.64

Las gráficas $\theta(t)$ para dos soluciones de la ecuación del péndulo periódicamente forzado con condiciones iniciales casi iguales.

Un ejemplo en el estudio de Glaciaciones:



R.G. Watts: The Mathematics in Climate Change, En el libro Mathematics Applied to Science (J. Goldstein, S. Rosencrans and G. Sod), Academic Press, Boston, 1988, 263-309.

$$\begin{cases} \frac{1}{3R^2} \frac{d}{d\tau} \left(\left(1 + \frac{\Gamma}{R}\right) R^3 \right) = (R - R^2 + p(\tau)) [1 - \kappa(R - R^2 + p(\tau))] & \text{si } (R - R^2 + p) < \frac{1}{2\kappa}, \\ \frac{1}{3R^2} \frac{d}{d\tau} \left(\left(1 + \frac{\Gamma}{R}\right) R^3 \right) = \frac{1}{4\kappa} & \text{si } (R - R^2 + p) > \frac{1}{2\kappa}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\mu} \frac{d\Gamma}{d\tau} = \frac{R}{3} - \Gamma,$$

Hipótesis de transmisión desde una insulación oscilante conceptual

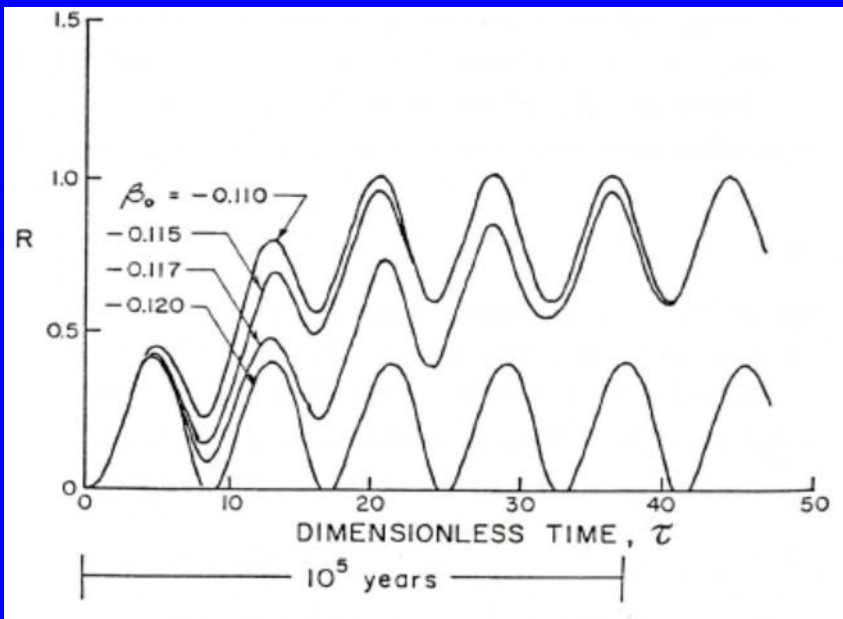
$$p(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \text{sen}(\omega\tau)$$

Justificación de la periodicidad de p

$$p(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \text{sen}(\omega\tau)$$

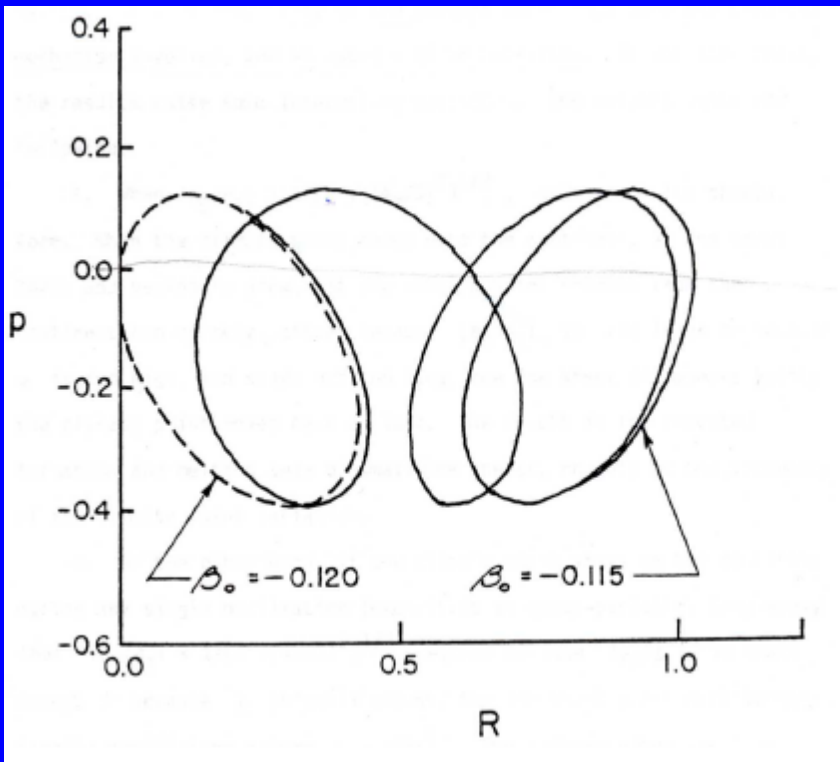
$$\beta_0 = 2s^2 P_0 / \lambda \quad \beta_1 = 2s^2 \Delta P / \lambda \quad \omega = 4\pi / aT \quad (4.9)$$

The various parameters have the following orders of magnitude (see, e.g., Oerlemans [1980]): $s = 1.25 \times 10^{-3}$, $\lambda = 6\text{m}$, $P_0 = -200\text{km}$, $\Delta P = 500\text{km}$, $a = 0.73 \times 10^{-3} \text{ yr}^{-1}$, $b = 0.27 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1} \text{ yr}^{-1}$, $T = 22,000 \text{ years}$, $\alpha^{-1} = 5,000 \text{ years}$. When these values are used in (4.9), we find the $\beta_0 = -0.1$, $\beta_1 = 0.26$, $\kappa = 0.89$, $\omega = 0.78$, and $\mu = 0.55$.



Cambios muy pequeños de los parámetros conducen a curvas de soluciones radicalmente diferentes

Plano de fases (artificial en p)



Dos ciclos límites distintos:

En uno de ellos R desaparece y renace con el tiempo (extensiones L “moderadas”)

El otro corresponde a una gran glaciación (valores grandes de R, e.d. de L)

Proceso de linealización en torno a los ciclos límites:

$$R \ll 1$$

$$\frac{4}{3} \frac{dR}{d\tau} = R + p$$

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4\omega/3)^2}}$$

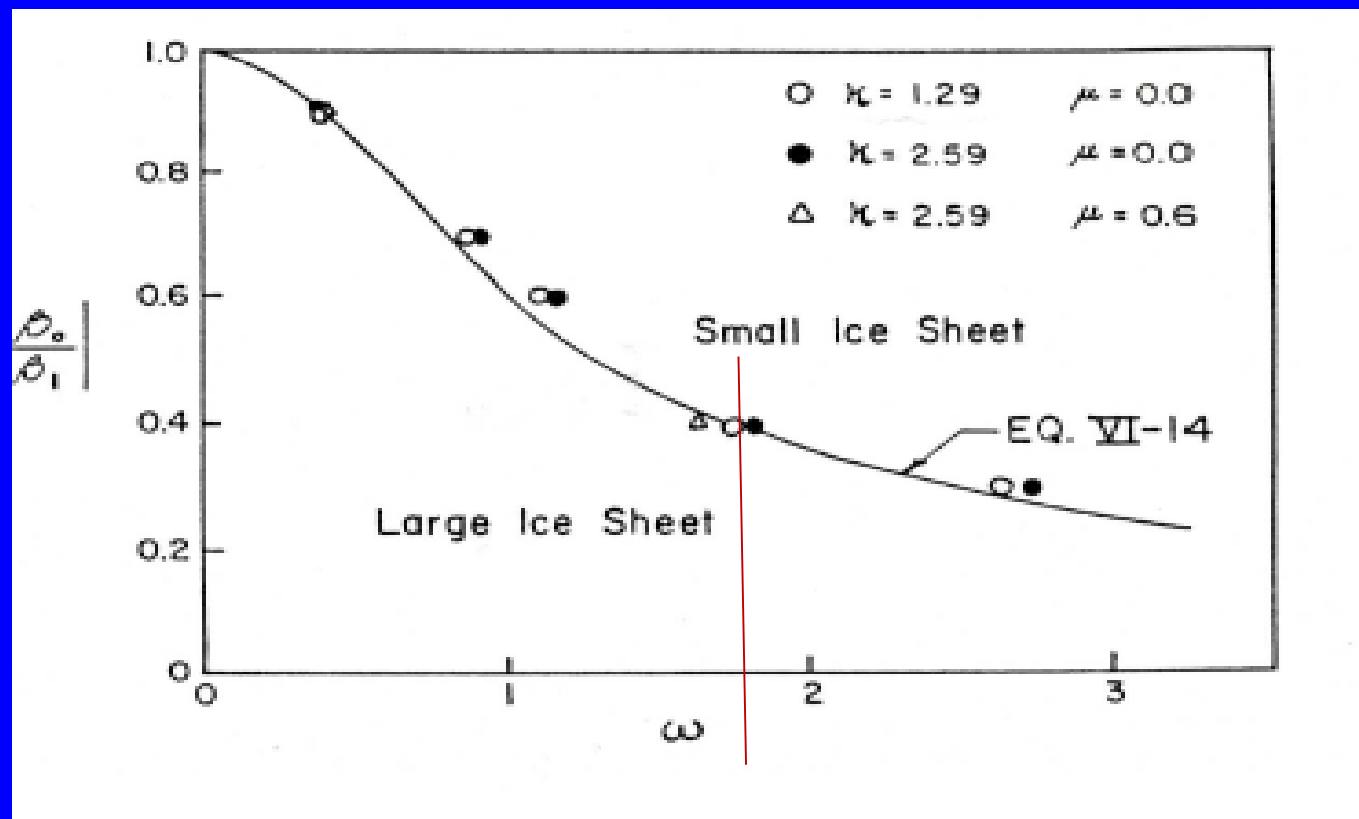
$$R = 1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1$$

$$\frac{4}{3} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = p - \varepsilon$$

$$\varepsilon(\tau) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{\sqrt{1 + (4\omega/3)^2}} \text{sen}(\omega\tau - \arctan(4\omega/3))$$

$$R = 1 + \beta_0 \approx 1 \Rightarrow L \approx \frac{\lambda}{4s^2}$$

Diagrama de bifurcaciones: pequeñas variaciones de las betas llevan a grandes diferencias en los tamaños de los mantos polares

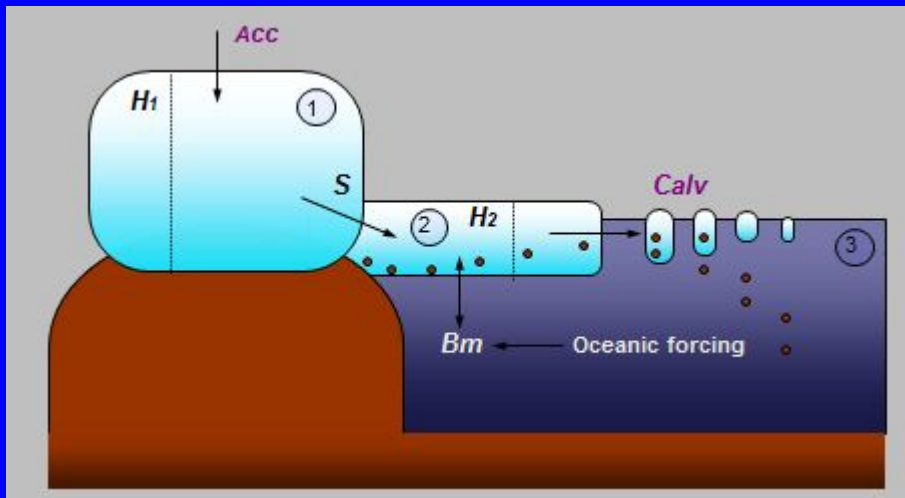


Otros modelos sobre la Periodicidad de 100.000 años

$$\begin{aligned}\dot{T} &= P(T, \ell, t; \delta), \\ \dot{\ell} &= R(T, \ell, \zeta, t; \mu, k, s, \epsilon'), \\ \dot{\zeta} &= S(\ell, \zeta; D, q).\end{aligned}$$

Le Treuet-Ghil (1983)

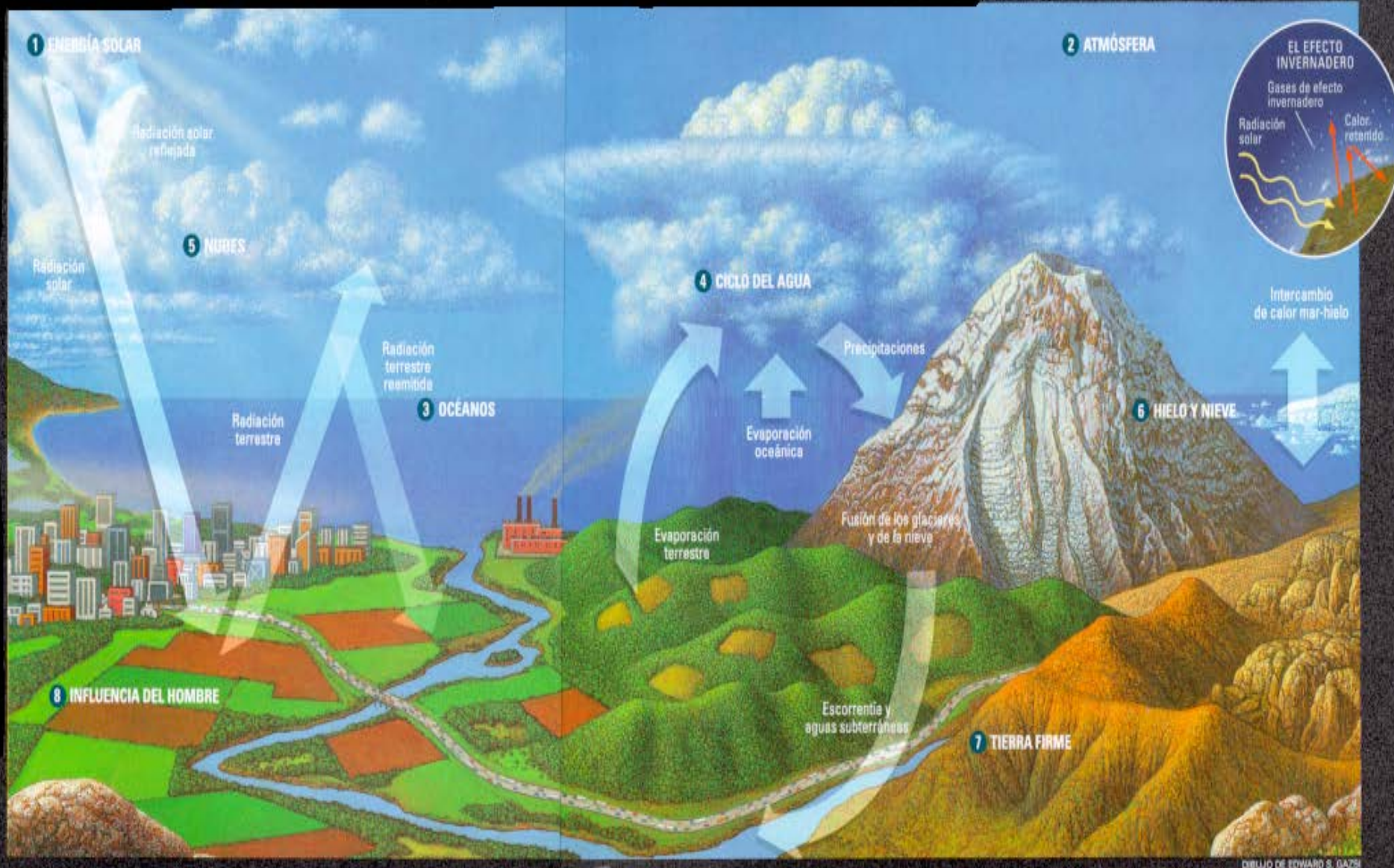
Bifurcación de Hopf



Alvarez-Solas et al. 2010 *Nature Geosci.*

$$\frac{dH_2}{dt} = S - FWF = S - Calv - Bm$$

6. Acoplamiento con modelos de clima: el sistema climático



Modelos globales de Balance de Energía.

Clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider,1992)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

Predicción del tiempo
meteorológico

Modelos climáticos

Pronóstico

Modelos realistas

Métodos computacionales

Diagnóstico

Modelos simplificados

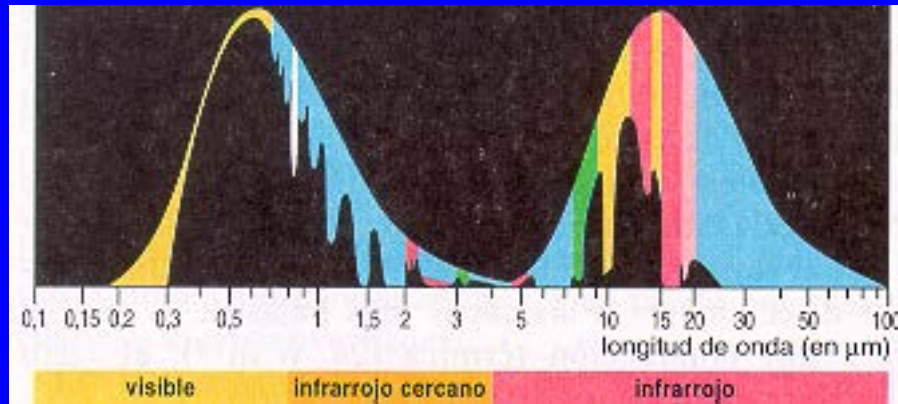
Métodos cualitativos

Balance de radiación de energía

S. Arrhenius (1896), ...

W.D. Sellers(1969),

M.I. Budyko (1969),....



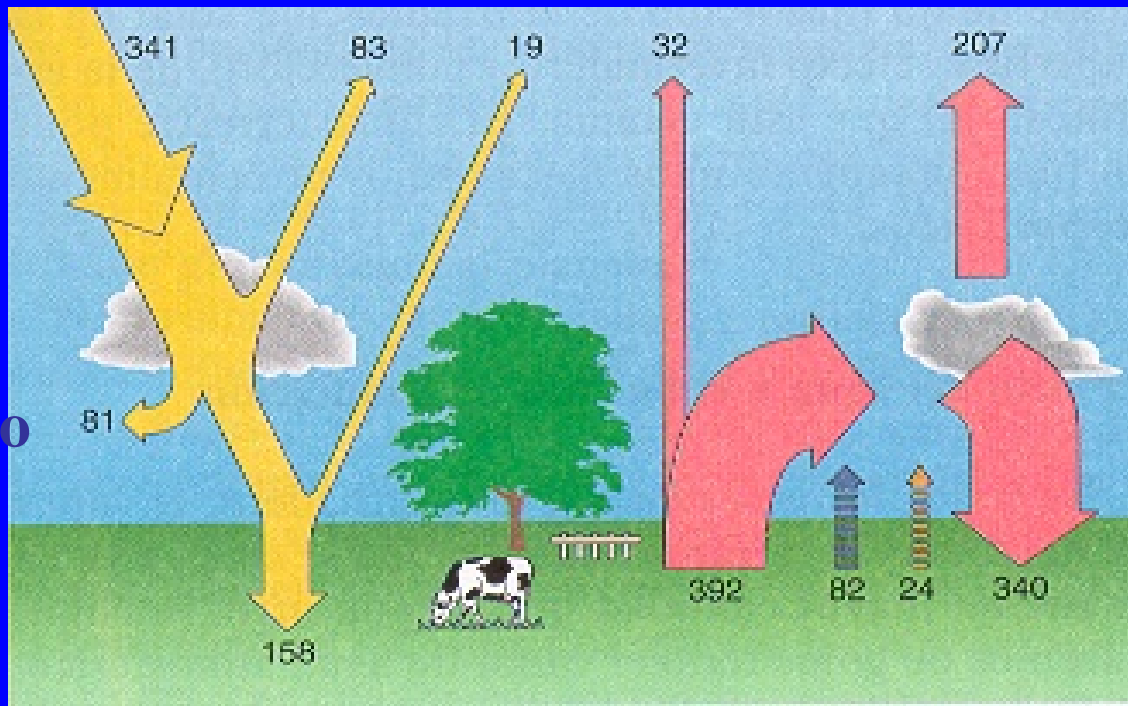
$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e +$$

R_a

R_e

Albedo

Efecto invernadero



J.I. Díaz

D
20/08/2023

Leyes de estado

$$R_a = QS(x)\beta(u)$$

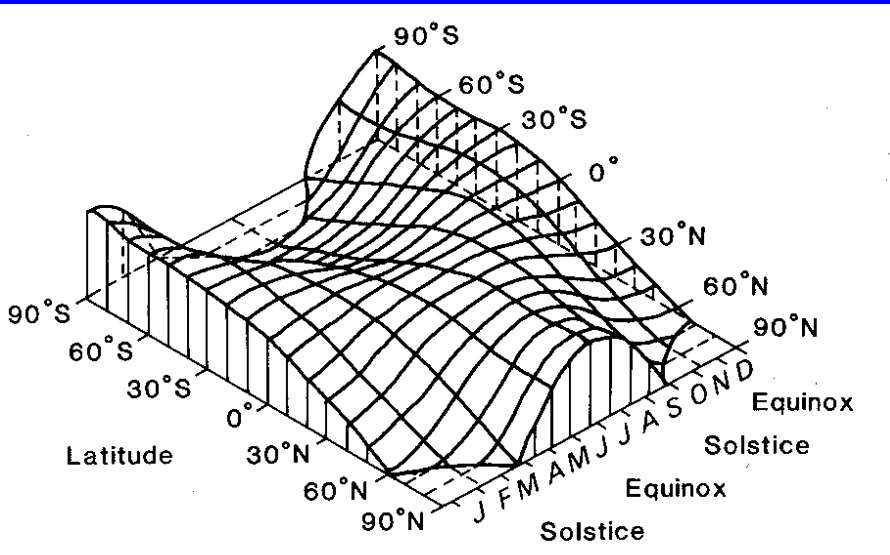
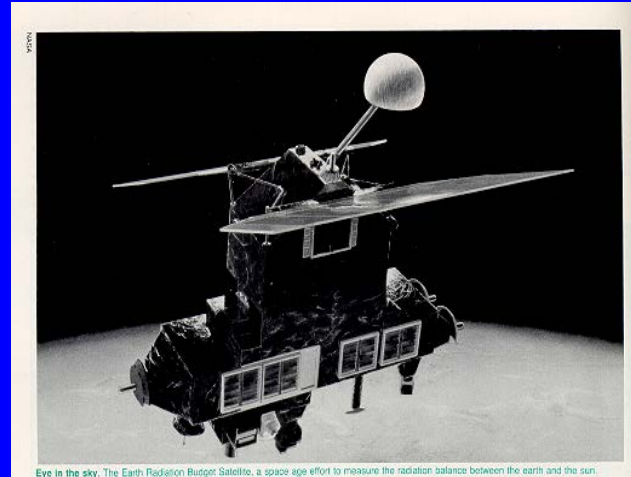


Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of

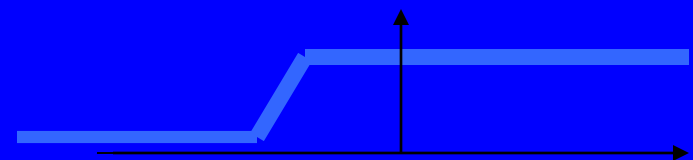
$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ coalbedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 & \text{si } u \ll -10 \\ 0.71 & \text{si } u \gg -10 \end{cases}$$

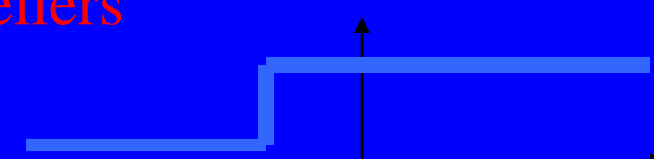
J.I. Díaz



Earth Radiation Budget Satellite



Sellers

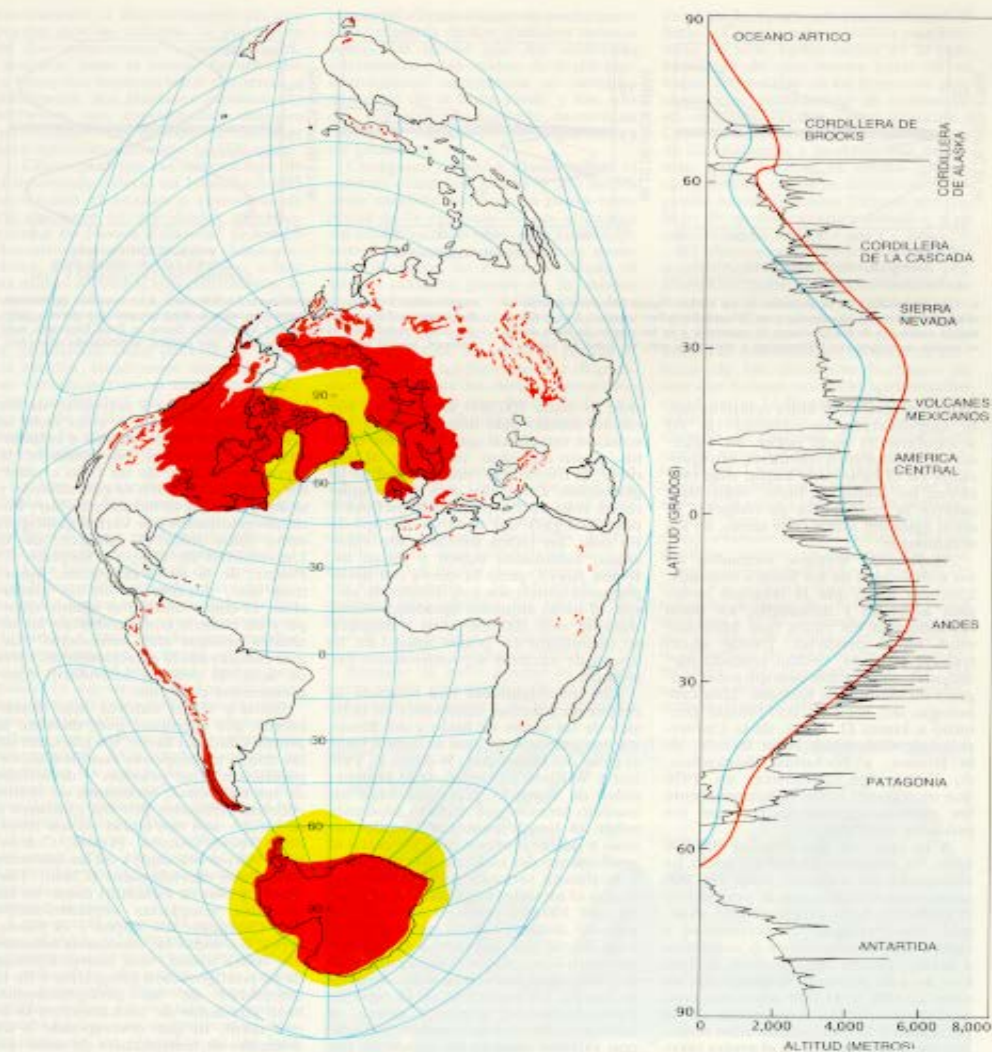


Budyko

$u = -10^\circ$

20/08/2023

Albedo: Hielos terrestres y marinos (hace 19.500 a.)



3. MASAS DE HIELO y glaciares de montaña: avanzaron en ambos hemisferios durante la última glaciación. El mapa (una proyección equidistante poco corriente) muestra la extensión de los hielos terrestres (rojo) y marinos (amarillo) en los continentes durante el máximo de la glaciación, hace 19.500 años. (Los hielos terrestres se prolongaba más allá de algunas de

las actuales costas porque el nivel del mar era más bajo.) La gráfica representa la altura media de la línea nival en las montañas de la cordillera americana, señaladas a lo largo del corte Norte-Sur indicado en el mapa. Las líneas nivales del periodo glacial (negro) estaban 1000 metros por debajo de las líneas nivales de hoy (rojo), con independencia de la latitud.

$R_e = \sigma u^4$ Ley de Stefan-Boltzman **Sellers**

$R_e = A + Bu$ Ley de enfriamiento de Newton **Budyko**

Relación empírica, Depende de gases de invernadero, cambios antropogénicos,... (variables internas)

Sobre el operador de difusión D **Jerarquía**

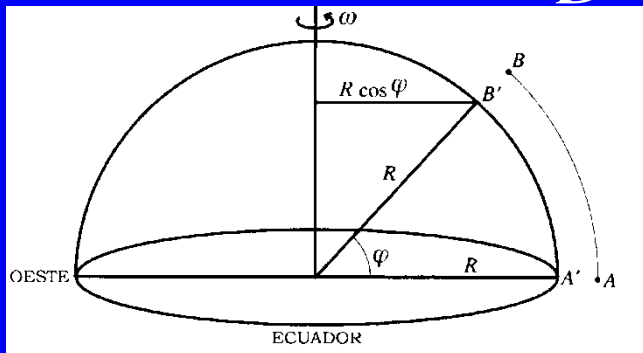
Modelo 0-dimensional $D=0$

$$c \frac{du}{dt} = Q\beta(u) - R_e(u)$$

Modelo 1-dimensional

$$D = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(1-x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$x = \cos \varphi$$



Difusión bidimensional

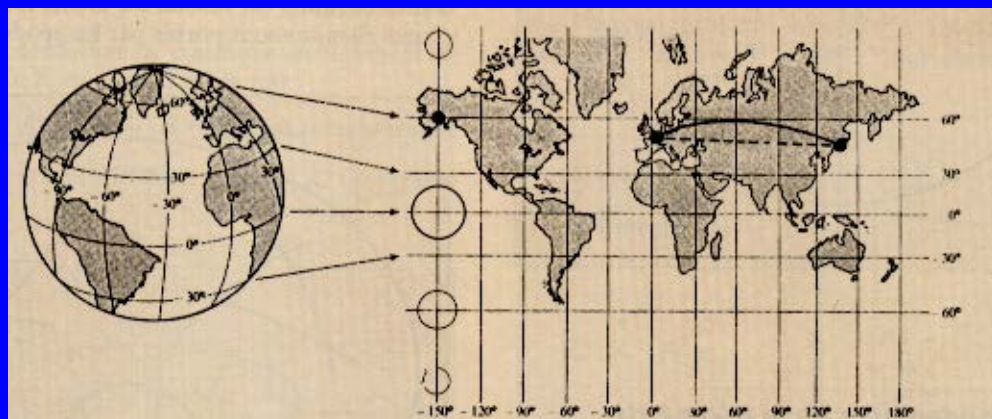
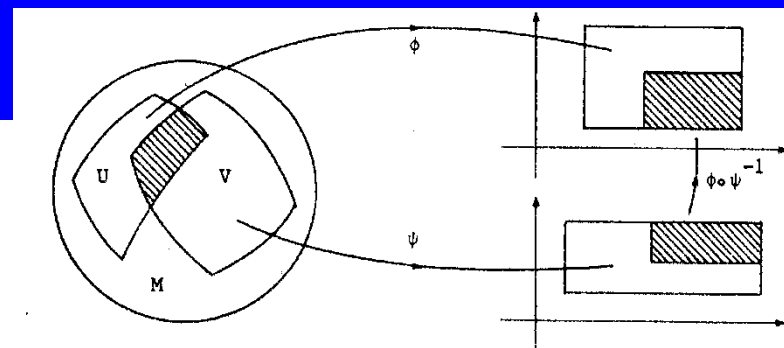
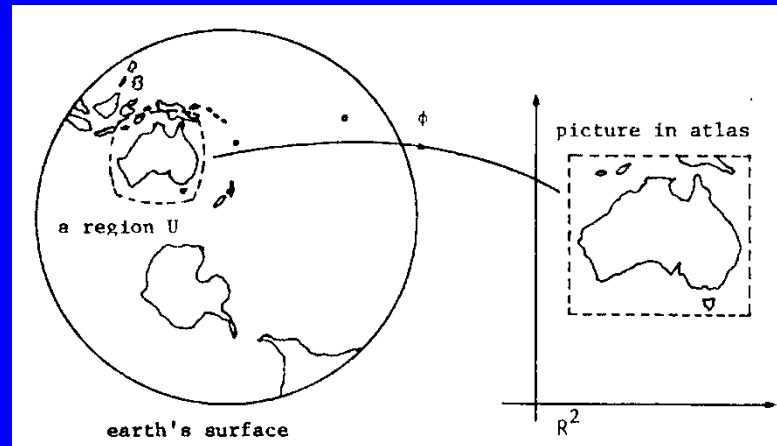
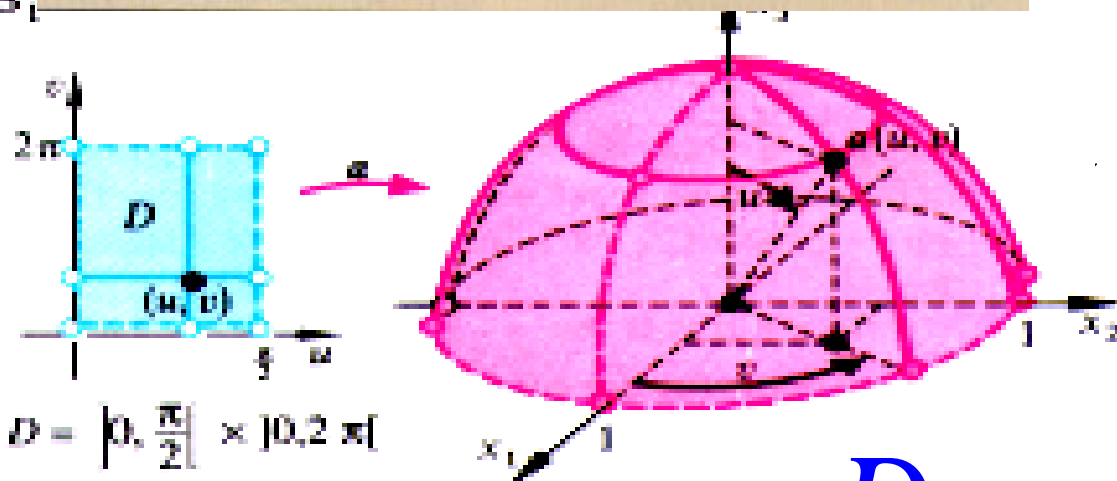


Figure 10 Projection de Mercator : $(\varphi, \theta) \rightarrow (u = \varphi, v = \log(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})))$



B₁



$$D = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] 0, 2\pi \right[$$

$\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ déf. par $(u, v) \mapsto \alpha$

$$\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

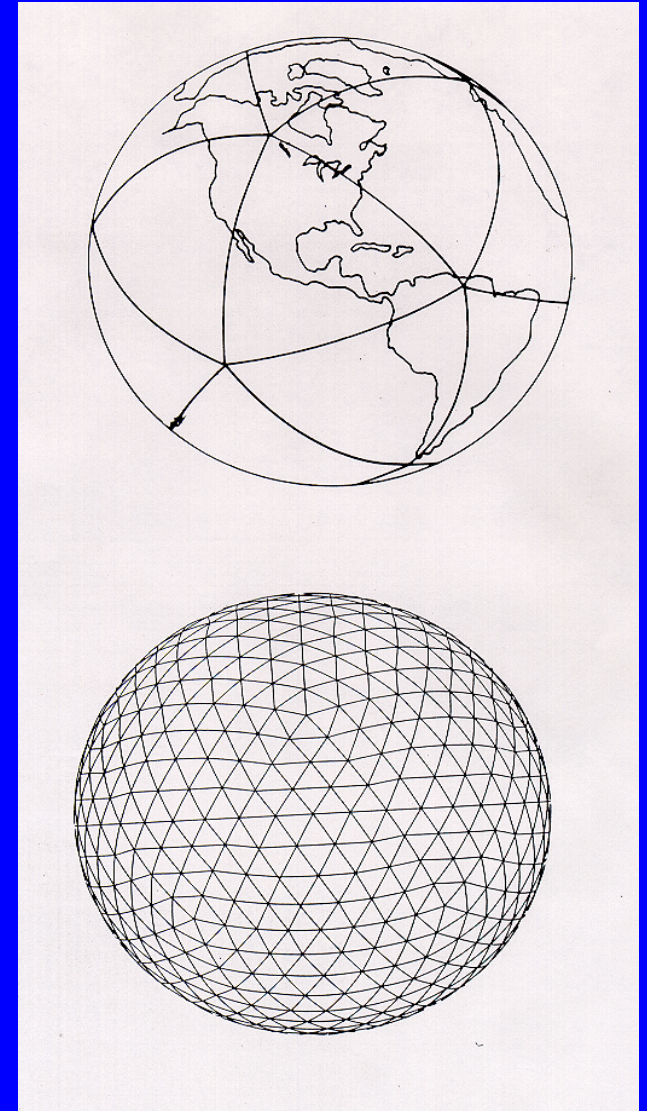
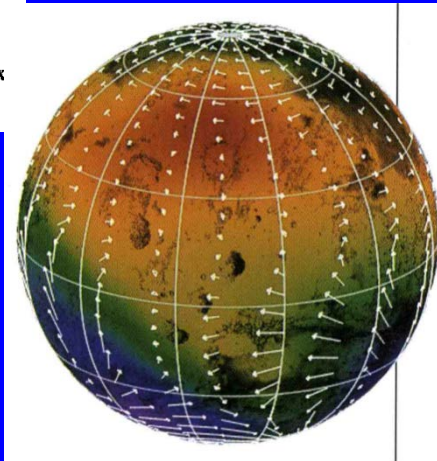
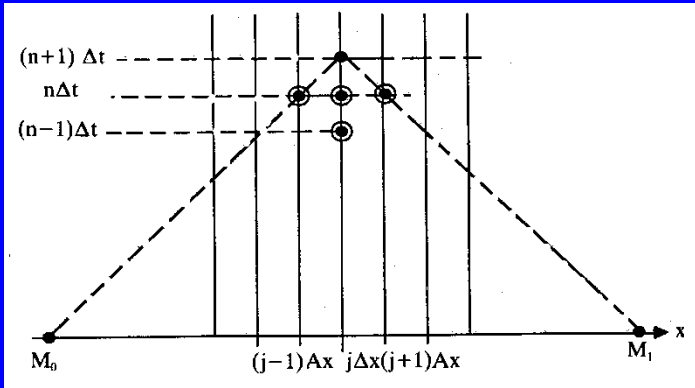
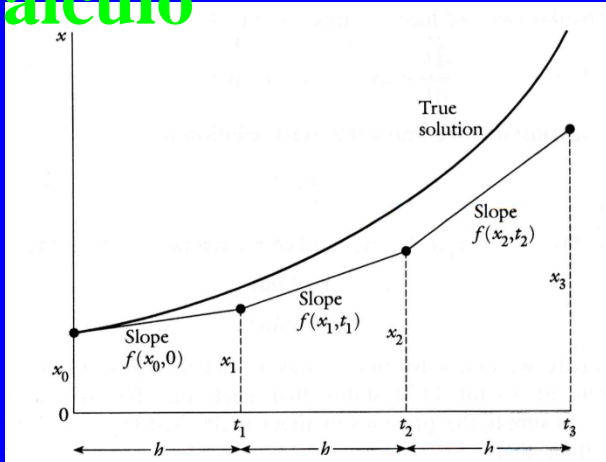
$$D = \operatorname{div}(k(x) \nabla u)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) + R_e(x, u) + \text{div}(k(x)\nabla u)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x)$$



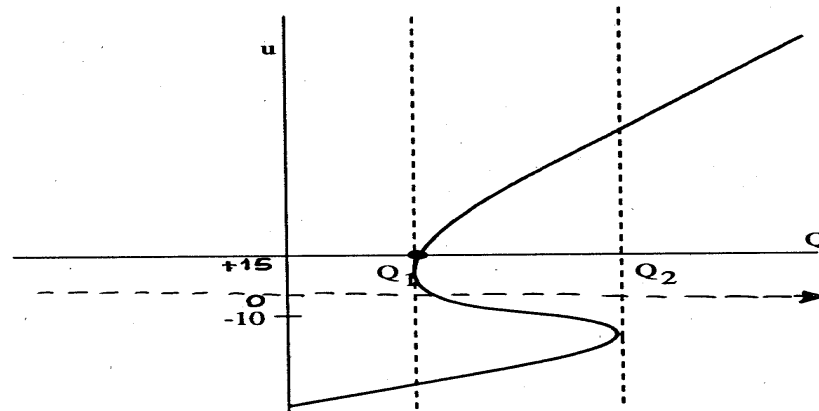
Cálculo



$$\begin{cases} C(x)\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) - D_0\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\right) + A + BT(x,t) = \\ = QS(x,t)a(x,T(x,t)) \\ T(x,0) = T_0(x) \end{cases}$$

• **Resultados previos**

- Existencia de solución.
- Unicidad.
- Estabilización de soluciones.
- Bifurcación en Q .



• **Referencias**

Xu (1991), Díaz (1991-95), Bermejo (1993), Hetzer (1992), North (1975)(1990), Held - Suarez (1974), Stone (1972), Ghil - Childress (1987), Drazin-Griffel (1977).

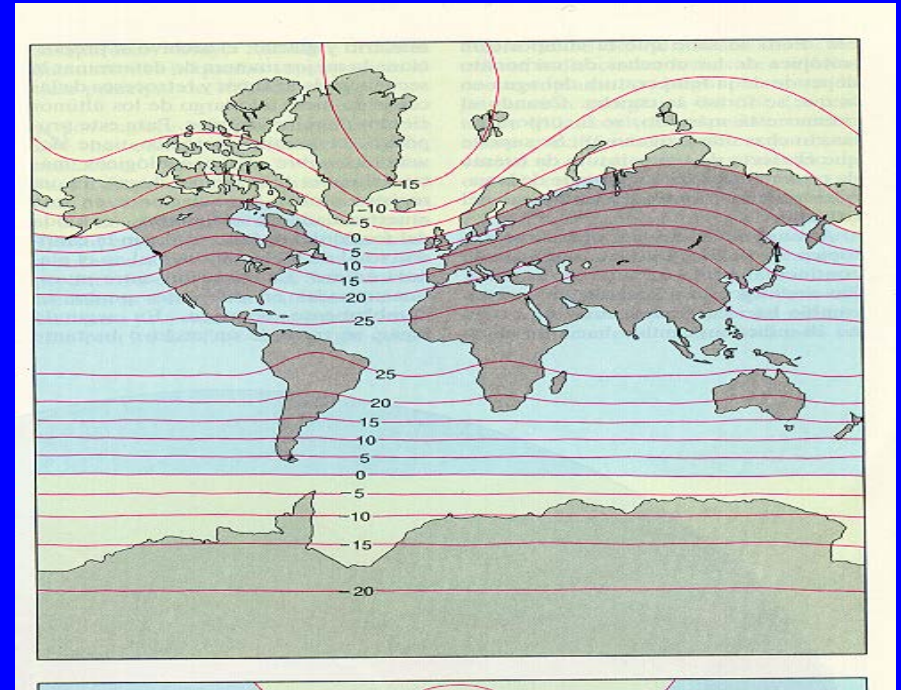
- Modelos escalares de balance de energía cero-dimensionales y estacionales

North-Coakley (1979),

Suarez-Held (1979),

North-Short-Mengel(1983)

Díaz-Tello (1995), Bermejo-Díaz-Tello (1998), Díaz-Hernández-Tello (1997), Arcoya-Díaz-Tello (1998), Hetzer-Díaz (1997), Badii-Díaz (1997),.....



Una explicación de las Glaciaciones por la Teoría de Catástrofes de R. Thom

Journal of Glaciology, Vol. 24, No. 90, 1979

A CATASTROPHE MODEL OF THE PALEOCLIMATE

By DOUGLAS REED MACAYEAL

(Institute for Quaternary Studies, Boardman Hall, University of Maine at Orono, Orono, Maine 04469, U.S.A.)

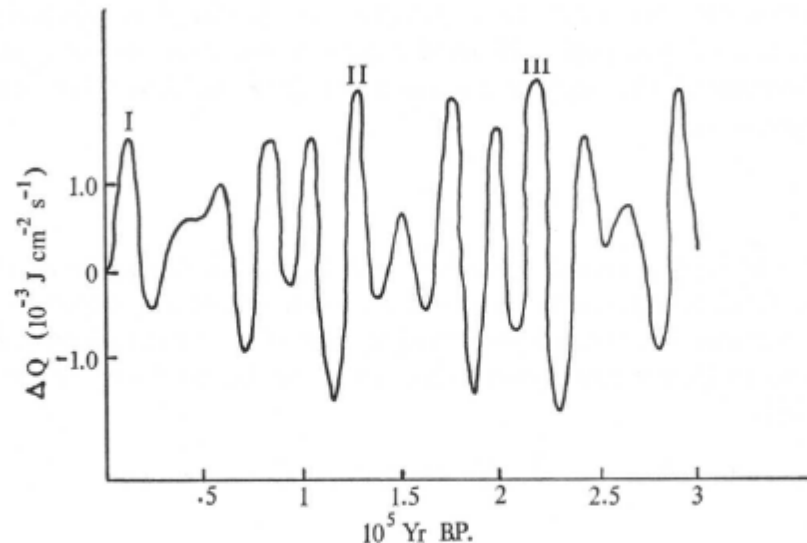


Fig. 2. Displayed are the summer insolation variations (ΔQ) for lat. $50^\circ N$. (Weertman, 1976). These insolation variations appear to have driven the global ice fluctuations during the ice age (Hays and others, 1976). The Roman numerals indicate insolation maxima coincident with the rapid transitions from glacial to interglacial conditions. The catastrophe model explains why the asymmetric "saw-toothed" climatic cycle in Figure 1 resulted from this irregular insolation curve.

THE BUDYKO MODEL

The Budyko model (1972) uses a diffusive heat-transport theory to model the latitudinal positions of surface isotherms. Using the -10°C isotherm as the criterion for the southern (equatorward) ice margin, the model predicted x_e , the sine of the latitude of the southern ice margin, to be related to Q , the insolation value, in a way intrinsically similar to the equation (North, 1975[a], [b]),

$$Q - Q_0 = \epsilon(x_0 - x_e)^2, \quad (1)$$

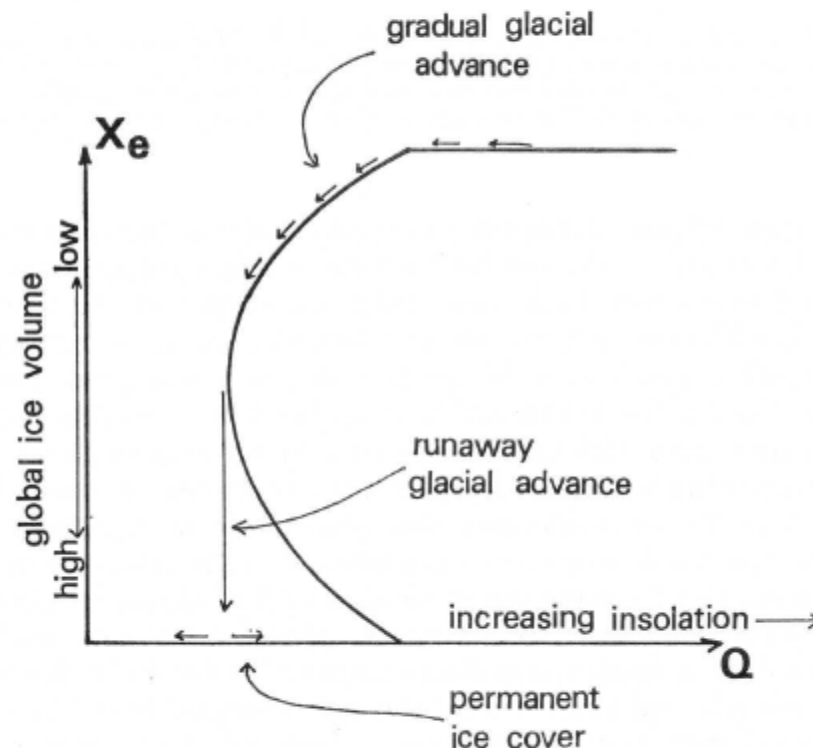


Fig. 3. The Budyko model (1972) specifies the sine of the latitude of the ice margin of an azimuthally symmetric ice sheet which covers the Earth's pole, x_e , as a function of the insolation Q . The shape of this curve is a fold with the upper branch representing the only stable and physically attainable state of global ice cover. Climatic changes are represented by a point following a path on the upper branch. When Q falls below a certain critical value the point must move off the knuckle in the curve separating the upper from the lower branch and a runaway glacial advance towards complete global ice cover will occur. According to this model, once runaway glacial advance is complete, total global ice cover will exist permanently because of increased global albedo.

Importante Variación
del argumento de
Weertman (1964):

Weertman (1964) Material plástico

$$h = \sqrt{\lambda(L - y)}$$

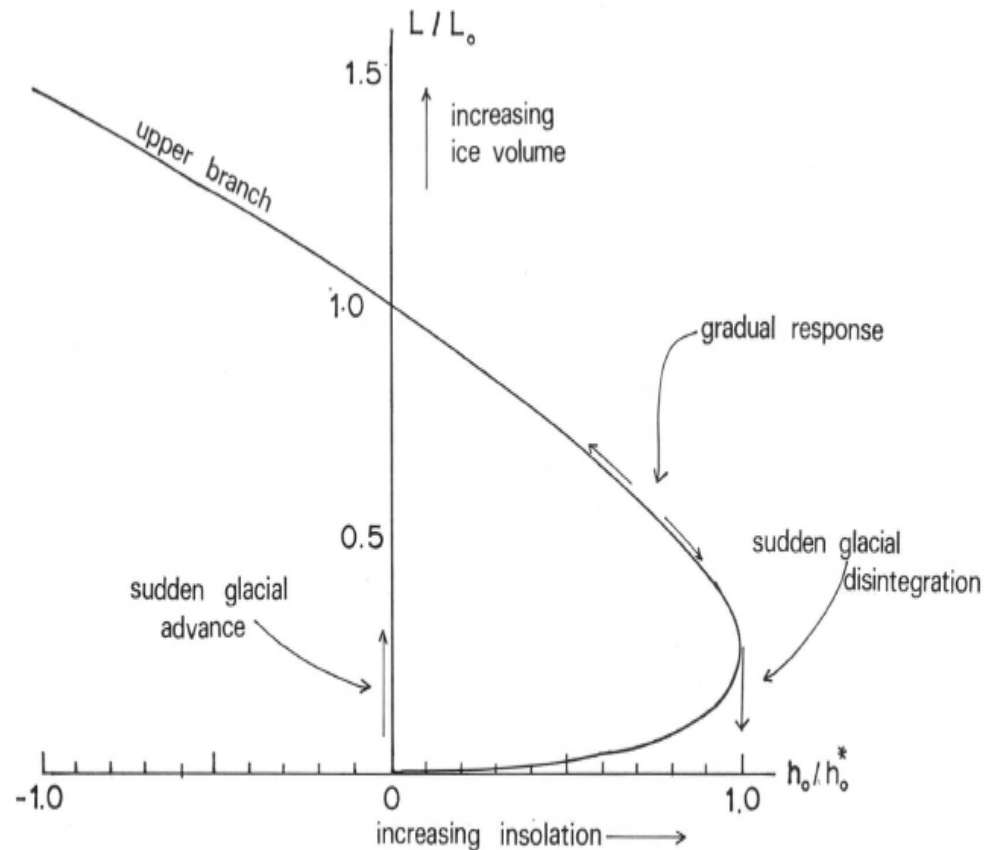


Fig. 4. The Weertman (1976) model states that an idealized ice sheet of half-width L and snow-line elevation h_0 are related through the folded curve pictured above. Changes in insolation will produce changes in h_0 , and the resulting climatic change will be represented by a point travelling along a trajectory on the upper branch of the folded curve (the lower branch is unstable and does not represent a naturally occurring ice-sheet size). If h_0 never exceeds h_0^* then the ice sheet size will appear to mimic changing insolation. However, once h_0 exceeds h_0^* a catastrophic removal of the ice sheet will result. No ice sheet will grow again until h_0 becomes less than zero.

Weertman, J, 1976, Milankovitch solar radiation variations and ice age ice sheets sizes, Nature, 261, 17-20 (6 May 1976).

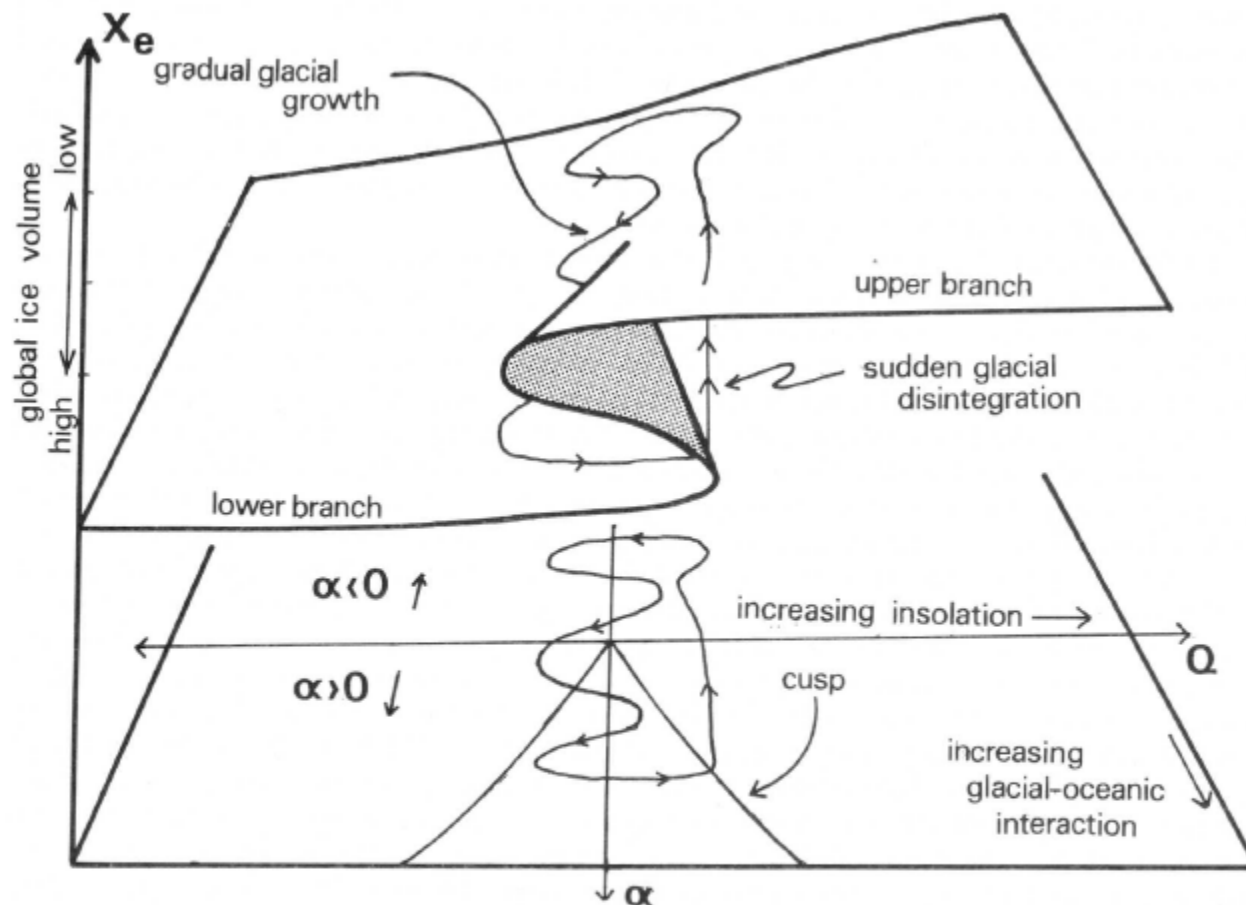
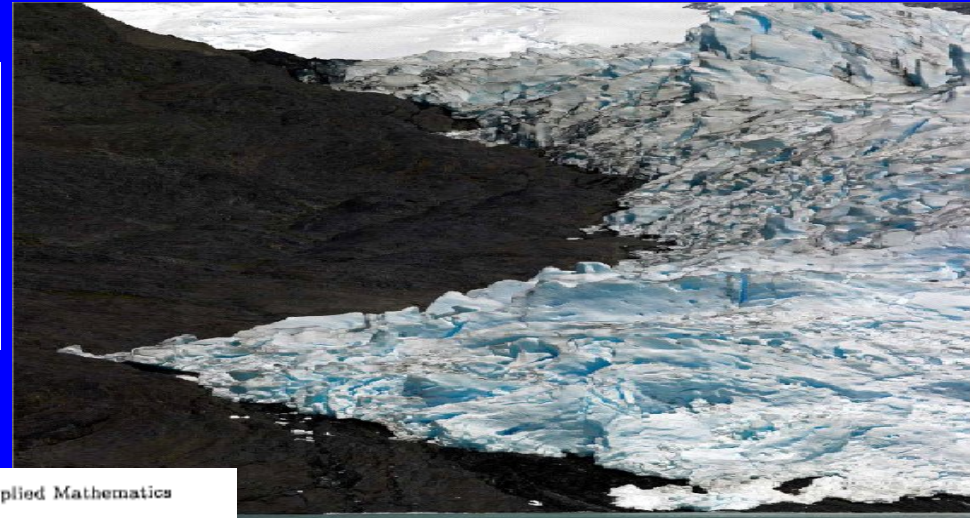


Fig. 5. The catastrophe model specifies steady-state global ice volume, x_e , to be a function of two control parameters: Q and α . Q is the insolation value; and α is conjectured to represent the potential for the glacial-oceanic interactions which change global ice volume independently of the insolation. Because of isostatic compensations within the Earth's crust and mantle beneath ice loads, changing relative sea-levels will cause α to vary throughout the climate cycle. A typical 100 ka climate cycle is represented by the trajectory drawn on the pleated surface above the (Q, α) plane. A sudden and irreversible transition to interglacial conditions occurs when x_e transits from a value on the lower branch of the pleated surface to a value on the upper branch.

Modelos más sofisticados (especialmente) de ice sheets (escalas temporales cortas)

$$\begin{cases} h_t = \left(h^{n+2} |h_x|^{n-1} h_x \right)_x + a(t, x) & \text{en } Q \\ h = 0 & \text{en } \{S_-(t)\} \cup \{S_+(t)\} \quad t \in (0, T) \\ h(0, x) = h_0(x) & \text{en } D \end{cases}$$

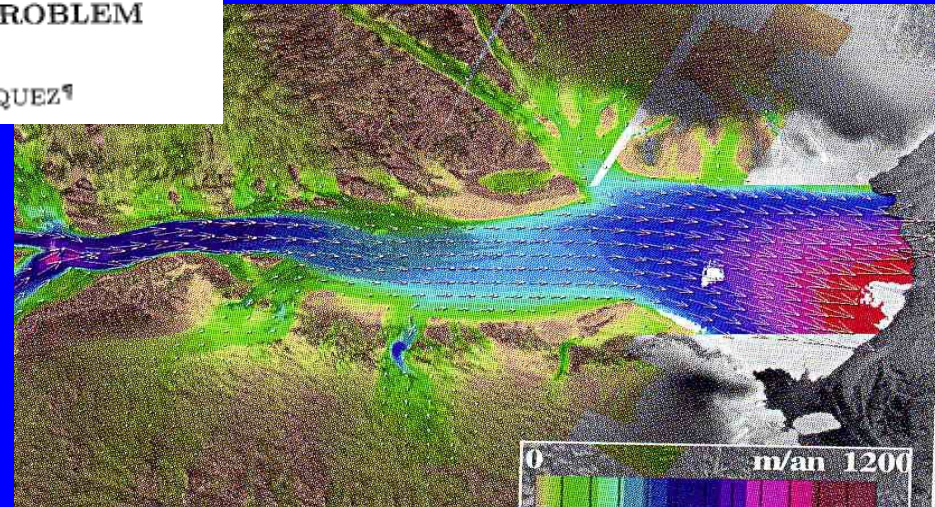


SIAM J. APPL. MATH.
Vol. 63, No. 2, pp. 683-707

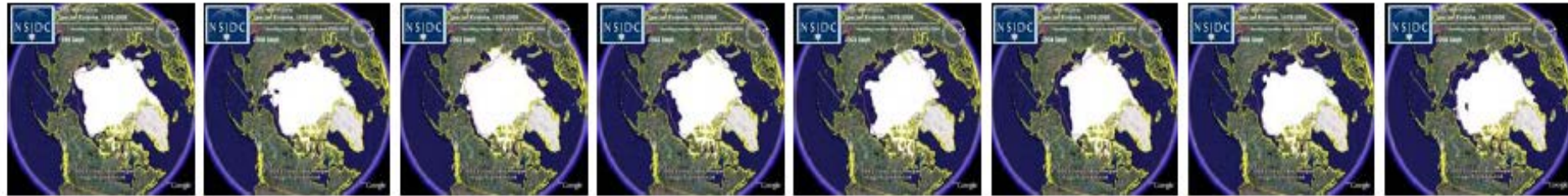
© 2002 Society for Industrial and Applied Mathematics

ON A DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC OBSTACLE PROBLEM MODELLING ICE SHEET DYNAMICS*

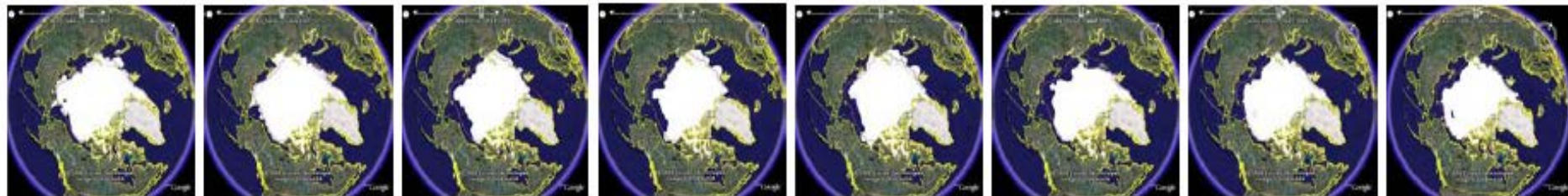
N. CALVO[†], J. I. DÍAZ[‡], J. DURANY[†], E. SCHIAVI[§], AND C. VÁZQUEZ[¶]



Frontera libre dinámica



The September Arctic sea ice minimum is shown in this flipbook style animation. Both the data image and the date overlay are changed on the server every three seconds. The KML is set to refresh Google Earth every three seconds. The 27-year time series repeats every 81 seconds. The March Arctic maximum and the full time series (all months) are also implemented as flipbooks. Giving the user control of the flipbook would require some additional work to generate a custom KML file and server side image rotator for each user, and an interface to coordinate the two.



The same sea ice time series is shown using the new timeline widget. The elimination of the image rotator on the server side means less maintenance and less chance of something going wrong. The widget gives the user control over the animation. The arrow on the right controls pause/play. The white bar controls the range of data displayed at any one time. And the little circle on the left opens a panel to control the speed and cycling of the animation. It's still beta so there's a few kinks to work out yet, but it does greatly simplify the task of animating time series data.

LANGRAGIAN APPROACH TO LEVEL SETS: APPLICATION TO A FREE BOUNDARY PROBLEM ARISING IN CLIMATOLOGY

JESUS ILDEFONSO DÍAZ AND SERGEY SHMAREV

A modo de conclusión

- **Carácter interdisciplinar de la investigación sobre Glaciaciones**

Numerosos interrogantes aún sin respuesta

Gracias por su
atención