Historia del
Cálculo de Variaciones
y de la
Teoría de Control.

J.I. Díaz
Matemática Aplicada, UCM

Seminario de Historia de la Matemática
"Historia de la Matemática y de la Física Teórica del siglo XX (II)"
Fac. Matemáticas, UCM
28 de mayo 2001

0.1 Clasificación AMS

49-XX	**Calculus of variations and optimal control; optimization [See also 34HO5, 6SKxx, 9OCxx, 93-XX]**
49Jxx	**Existence theory for optimal solutions**
49J05	Free problems in one independent variable
49J10	Free problems in two or more independent variables
49J15	Optimal control problems involving ordinary differential equations
49J20	Optimal control problems involving paxtial differential equations
49J22	Optimal control problems involving integral equations
49J24	Optimal control problems involving differential inclusions
49J25	Optimal control problems involving equations with retarded arguments [See also 34K35]
49J27	Problems in abstract spaces [See also 9OC481
49J30	Optimal solutions belonging to restricted classes (Lipschitz controls, bang-bang controls, etc.
49J35	Minimax problems
49340	Variational methods including variational inequalities
49J45	Problems involving semicontinuity and convergente
49J50	Fréchet and Gáteaux differentiability [See also 46GOS, 49RO5, 58C20]
49J52	Nonsmooth analysis (other weak concepts of optimality) [See also 58C20, 9OCxx]
49J55	Problems involving randomness [See also 93E20]
49J99	None of the above, but in this section

49Kxx	**Necessary conditions and sufficient conditions for optimality**
49K05	Free problems in one independent variable
49K10	Free problems in two or more independent variables
49K15	Problems involving ordinary differential, equations
49K20	Problems involving partial differential equations
49K22	Problems involving integral equations
49K24	Problems involving differential inclusions
49K25	Problems involving equations with retarded arguments
49K27	Problems in abstract spaces
49K30	Optimal solutions belonging to restricted classes
49K35	Minimax problems
49K40	Sensitivity of optimal solutions in the presence of perturbations
49K45	Problems involving randomness [See also 93E20]

49Lxx	**Carathéodory, Hamilton-Jacobi theories, including dynamic programming**
49L05	Free problems and problems involving ordinary differential equations
49L10	Free problems and problems involvin- partial differential equations
49L15	Problems in abstract spaces or problerris involving functional relations other than differential equations
49L20	Dynamic programming method
49L25	Viscosity solutions
49L99	None of the above, but in this section

49Mxx Methods of successive approximations [For discreta problems, see 9OCxx; see also 65Kxx]

49M05 Methods based on necessary conditions
49M07 Gradient methods
49M10 Methods of steepest descent type
49M15 Methods of Newton-Raphson, Galerkin and Ritz types
49M20 Methods of relaxation type
49M25 Finite difference methods
49M27 Decomposition methods
49M29 Multiplier methods

49Nxx Miscellaneous topics

49NO5 Linear optimal control problems
49NlO Linear-quadratic problems
49Nl5 Duality theory
49N20 Periodic optimization
49N25 Impulsive optimal control problems [See also 93C57]
49N30 Problems with incompleto information [See also 93C41]
49N35 Closed-loop controls
49N40 Open-loop controls
49N45 Inverse problems in calculus of variations
49N50 Inverse problems in optimal control theory
49N55 Noneconomic applications of optimal control theory and differential games [See also gOD25]
49N60 Regularity of solutions in the calculus of variations
49N65 Applications of measurable selections to control theory (See also 28B20, 26E25]
49N99 None of the above, but in this section

49Qxx Manifolds [See 58Fxx]

49QO5 Minimal surfaces [See also 53AIO, 58E12]

49Q1O Optimization of the shape other than minimal surfaces

49Q12 Sensitivity analysis

49Q15 Geometric measure and integration theory, integral and normal currents

49Q20 Variational problems in geometric measuretheoretic setting

49Q25 Surface area

49Q99 None of the above, but in this section

49R-xx Variational methods [For eigenvalues of operators, see 47A70]

49RO5 Variational approach to eigenvalues

49RIO Rayleigh-Ritz methods

49R15 Weinstein and Aronszajn methods, intermediate problems

49R20 Linear operators in Hilbert spaces

49R99 None of the above, but in this section

49S05 Variational principles of physies

0.2 Bibliografía sobre la historia del C. de V. y Tª. de C

Goldstine, H.H.: *A history of the Calculus of Variations from the 17th trough the 19th century,* Springer-Verlag, Nueva York, 1980.

Giaquinta, M. e Hildebrandt, S.: *Calculus of Variations*, (dos volúmenes) Springer-Verlag, Berlín, 1996.

Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and Applications*. Volúmenes I-V. Springer-Verlag, Berlín, 1988.

Bennet, S.: *A history of Control engineering 1800-1930* (Peter Peregrinus, Londres, 1979); *A history of Control engineering* 1930-1955 (Peter Peregrinus, Londres, 1993),

Levine, W.S. (ed.): *The Control handbook,* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.

Plan

1. **Lista de problemas en el siglo XX**
2. **Los inicios del Cálculo de Variaciones: EDOs y Mecánica Clásica**
3. **EDPs, Variedades diferenciales y Análisis Numérico**
4. **Problemas límites**
5. **Otros principios variacionales en la Física-Matemática**
6. **Control para EDOs: *principio del máximo* de Pontriaguin y de la *programación dinámica* de Bellman**
7. **Control para EDPs**
8. **Notas históricas sobre el desarrollo en nuestro país.**

2. Lista de problemas en el siglo XX

- David Hilbert (1862-1943)

1900

MATHEMATICAL PROBLEMS.*†

LECTURE DELIVERED BEFORE THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS AT PARIS IN 1900.

BY PROFESSOR DAVID HILBERT.

WHO of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries? What particular goals will there be toward which the leading mathematical spirits of coming generations will strive? What new methods and new facts in the wide and rich field of mathematical thought will the new centuries disclose?

Problemas de Hilbert relacionados con el Cálculo de Variaciones

- P6: Tratamiento matemático de los axiomas de la Física.
- P19: ¿Son siempre analíticas las soluciones de los problemas regulares del Cálculo de Variaciones?
- P20: El problema de contorno general.
- P23: Desarrollo ulterior de los métodos del Cálculo de Variaciones.

pero también,...

- P4: Problema de la línea recta como la mínima distancia entre dos puntos

Henri Poincaré (1854-1941) profusamente citado en el listado

- **había lanzado previamente un listado de problemas.**
- **El congreso (8 de Agosto de 1900) se celebraba en Paris.**

Comentarios a los Problemas de Hilbert en:
Mathematical developments arising from Hilbert problems, F. Browder (ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XXVIII, AMS, Providence, 1976.

A.S. Wighthman (P6), - J. Serrin (P19),
E. Bombieri (P20), - G. Stampacchia (P23),
H. Busemann (P4), - L. Bers (P22).

* Listas de problemas al finalizar el siglo XX.

– *Mathematics: frontiers and perspectives,* V. Arnold, M. Atiyah, P.Lax and B. Mazur (eds.), AMS, Providence, 2000 (artículos de P.L. Lions, A.J. Majda, R. Penrose, D. Ruelle, P. Sarnak, S. Smale, C. Vafa, S.T. Yau, V.I. Arnold, P. Lax).

- *Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, B*. Engquist and W. Schmid (eds.), Springer, Heidelberg, 2000 (S. Antman, I. Babusca, J.T. Oden, D.H. Bailey, R.W. Brockett, P. Constantin,C. Jones, S. Lang, J. Marsden, D. Serre, M. Viana, ...).

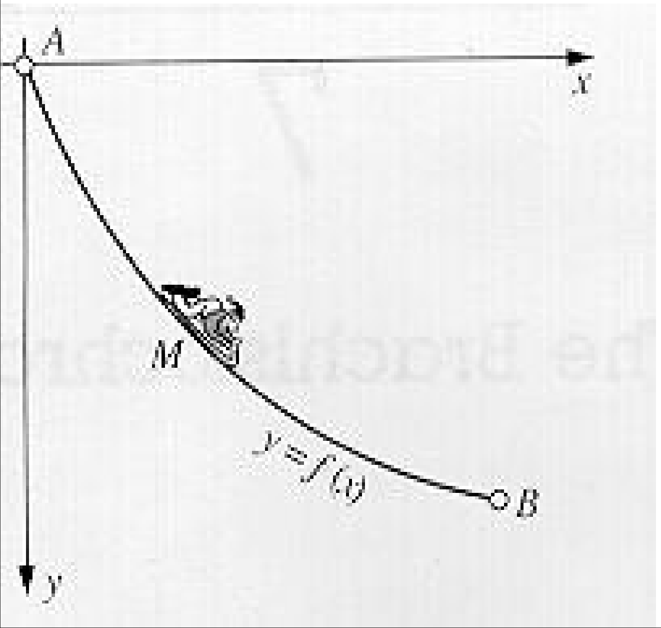
– **Landon Clay**: 7 problemas. 1 millón $$ por problema (> Premio Nobel), sólo uno de la lista de Hilbert, Yang-Mills, Navier-Stokes.

2. Los inicios

La braquistócrona (más-corto-tiempo):

1696, Jean Bernoulli (1667-1748): *dados dos puntos A y B en un plano vertical, hallar la curva que los enlaza por la que un cuerpo que caiga desde A hasta B, por la gravedad, lo haga en el menor tiempo.*

(Galileo (1561-1642), 1638: un arco de círculo).



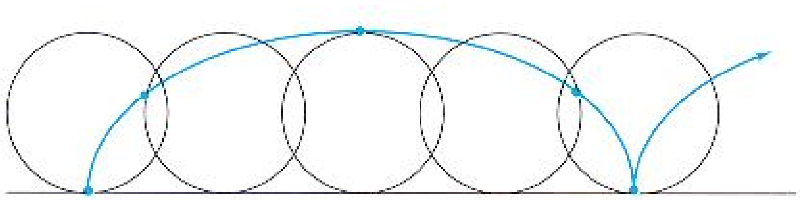
Resuelto en 1697 por: Jean y Jacques Bernoulli (1654-1705),

I. Newton (1642-1727),

G. Leibnitz (1646-1716),

G.F.A. l'Hôpital (1661-1704).

la cicloide



Galileo Galilei (1562-1642),

Blaise Pascal (1623-1662),..

Resultados pioneros sobre óptimos:

- **Pierre de Fermat (1601-1665): “la luz se propaga de la manera más rápida posible”**
- **I. Newton (1687): Cuerpo de revolución de menor resistencia al aire**

El principio de mínima acción

P.L.M. de Maupertuis (1698-1759)

- **Búsqueda de un esquema filosófico del mundo**

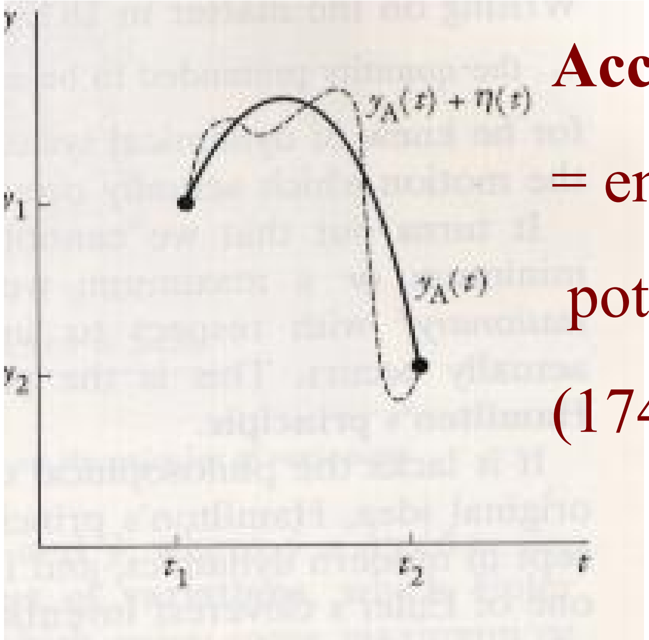
1746: ***Las leyes del movimiento y el equilibrio deducidas de un principio metafísico*****:"Si ocurre algún cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio ha de ser lo más pequeña posible"**

J.S. Köning 1751 (carta de 1707 de Leibnitz a Hermann)

Leibnitz 1710: ***Ensayo sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal:*** **"El mejor de los mundos"**

Nacimiento del Cálculo de Variaciones

Leonhard Euler (1707-1783)



Acción en un intervalo (t_1, t_2)

= energía cinética – energía potencial

(1743<1746, Maupertuis)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Carta del 12 de agosto de 1755 (19años)

Variación de un funcional, Derivada Gateaux
Ecuación de Euler-Lagrange,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x`)dt \rightarrow Inf \qquad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

$$\delta J(x,h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\bigg|_{x(t)} h(t)\, dt, \qquad h(t_0) = h(t_1) = 0$$

Variación de J

$$\delta J = 0$$

$$x_0(t) + \alpha h(t)$$

Variación de x(t)

Ecuación de Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = 0.$$

- R. Gateaux **1913**: "Sur les fontionnelles continues et les fonctionnelles analytiques",C.R. Acad.Sci. Paris Sér.I Math. **157,** 325-327.
- **1916**, Muere en la Segunda Guerra Mundial
- **1919**, P. Lévy manda a publicar "Fonctions d'une infinités des variables indépendantes", Bull. Soc. Math. France **47,** 70-96 (apareció en 1922 a la vez que el libro de Lévy: Analyse Fonctionelle; primera vez que se utiliza este término).

$$\delta f(x_0, h) = \frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

T.M. Flett: *Differential Analysis*, Cambr. Univ. Press, 1980,

[pag. 309] Precedentes: Volterra (1887), Frechet (1911)

2. EDOs. Principios variacionales de la Mecánica Clásica: Galileo 1665, J. Bernoulli 1717, Euler 1744, Lagrange 1762: W.R. Hamilton (1805-1865): la acción es sólo un punto estacionario y a veces, incluso, un máximo.

$$\sum_{\nu} R_\nu \cdot \delta r_\nu = 0. \qquad F_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U(t, r_1, \dots, r_N), \qquad U(t, r_\nu) \in C^2,$$

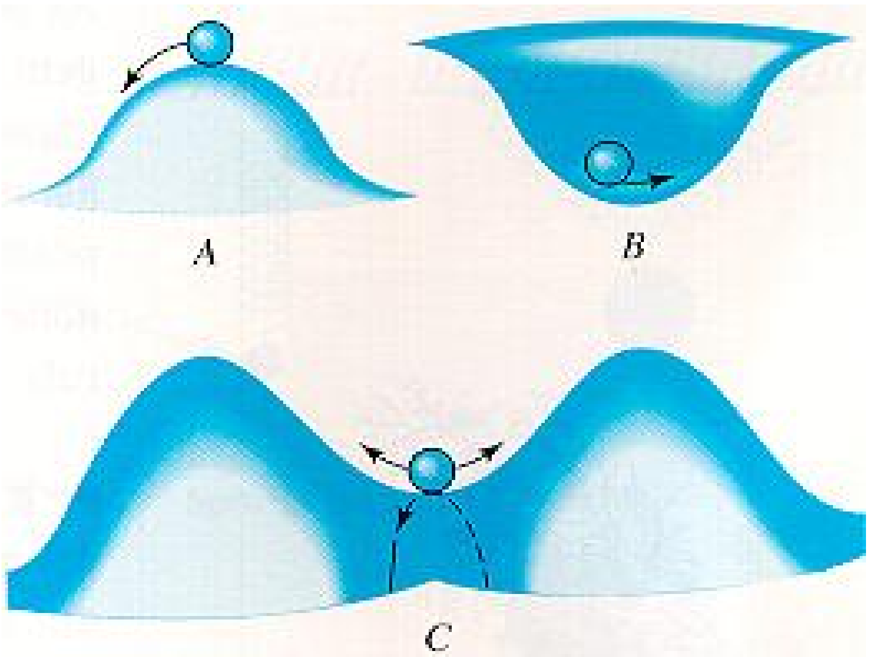
$$r_\nu = r_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \qquad n = 3N - k,$$

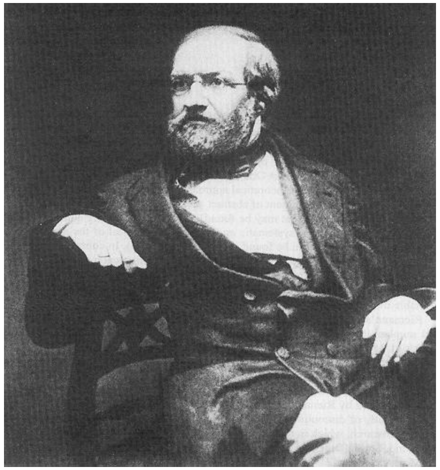
$$L(t, q_i, \dot{q}_i) = T + U \qquad S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt.$$

Acción (Hamilton)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

Aplicación a la estabilidad de sistemas conservativos $(t \to +\infty)$





- P. G. L. Dirichlet (1805-1859),
- H. Poincaré (1854-1912),
- A.M. Lyapunov (1857-1918),...

Condiciones necesarias

- **Distinción entre pp. estacionarios (soluciones de las ec.s de Euler-Lagrange).**

•**Condiciones suficientes de mínimos: A. Legendre (1752-1833),**

$$\left(\partial^2 L/\partial \dot{x}^2\right)\Big|_{x(t)} > 0$$

•**C. Jacobi (1804-1851).**

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\bigg|_{x(t)}\frac{d}{dt}h(t)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial \dot{x}}\right)\bigg|_{x(t)} h(t)=0 \qquad h(t_0)=0,\ \dot{h}(t_0)\neq 0,$$

Karl Weierstrass (1815-1897):

$$\mathcal{E}(t,x(t),\dot{x}(t),\xi) \geq 0 \qquad \text{for all } t \in [t_0,t_1], \xi \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},\xi) = L(t,x,\xi) - L(t,x,\dot{x}) - ((\xi - \dot{x})L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}))$$

Consolidación: rigor matemático:

Problemas sin solución,...

David Hilbert (1862-1943): Paris, 1900,

Problema 20: ¿ admiten solución los problemas de contorno del Cálculo de Variaciones, una vez definida de manera adecuada la noción de solución?

Gateaux, Lebesgue, Caratheodory, Frechet, Hadamard, Tonelli, Sobolev, Morrey, Bliss,

Teoría Hamiltoniana

$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i,$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt,$$

$$H(t, q_i, p_i)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$v(t, q_i, q_{i0}) = \int_{t_0}^{t} L\, dt.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = 0,$$

3. EDPs, Variedades diferenciales, Análisis Numérico, Mecánica de medios continuos

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x,u,\nabla u)dx$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}(x,u,\nabla u)\right) + \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\nabla u) = 0$$

Casos relevantes:

a. Ecuación de ondas

$$J(u) = \int_0^T \left(\int_{\Omega} F(x,t,u,u_t,\nabla u)dx \right) dt$$

J. Hadamard (1925): clasificación de las EDPs,

$$F(x,t,u,u_t,\nabla u) = \frac{1}{2}(u_t^{\,2} - |\nabla u|^2) - f(x,t)u$$

$$u_{tt} - \Delta u = f(x,t)$$

b. Ecuaciones elípticas

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i p_j}(x,u,\nabla u)\xi_i\xi_j \geq 0 \ \forall \vec{\xi} \in {}^N$$

b1. Superficies de área mínima y de curvatura media prescrita

$$F(x,u,\nabla u) = \sqrt{(1+|\nabla u|^2)} + h(x,u)$$

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = H(x,u),\ H = h`$$

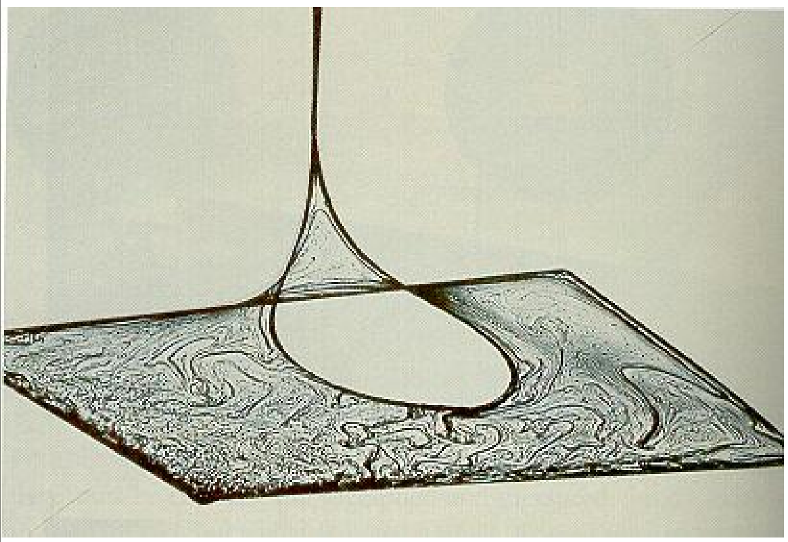
H=curvatura media,

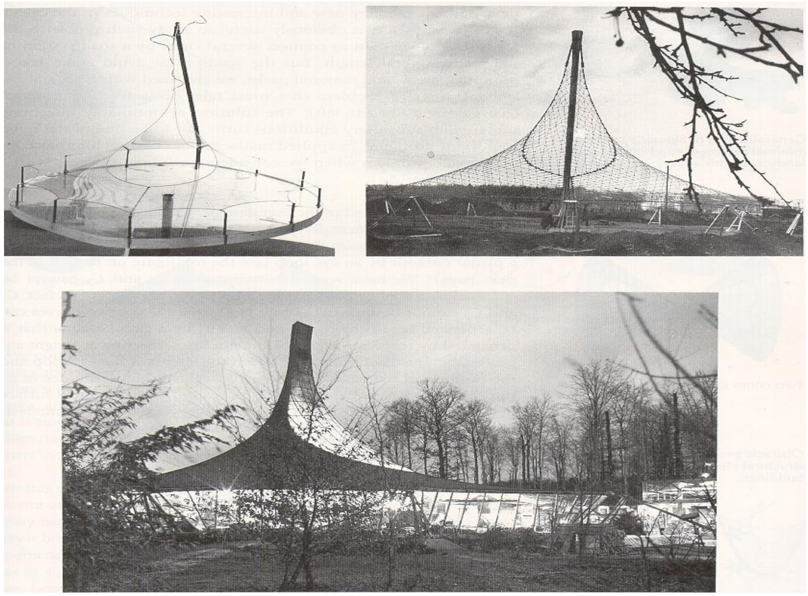
H=0 área mínima

$$J(u) = \int_\Omega \sqrt{(1+|\nabla u|^2)}dx$$

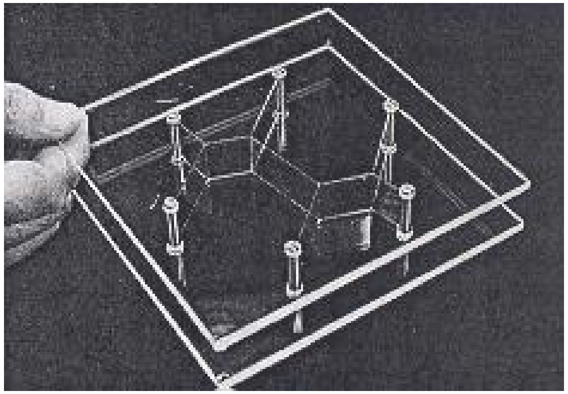
Área de la superficie no paramétrica

Aparece en Elasticidad y Fluidoestática:





Problema de J.A.F. Plateau (1801-1883)

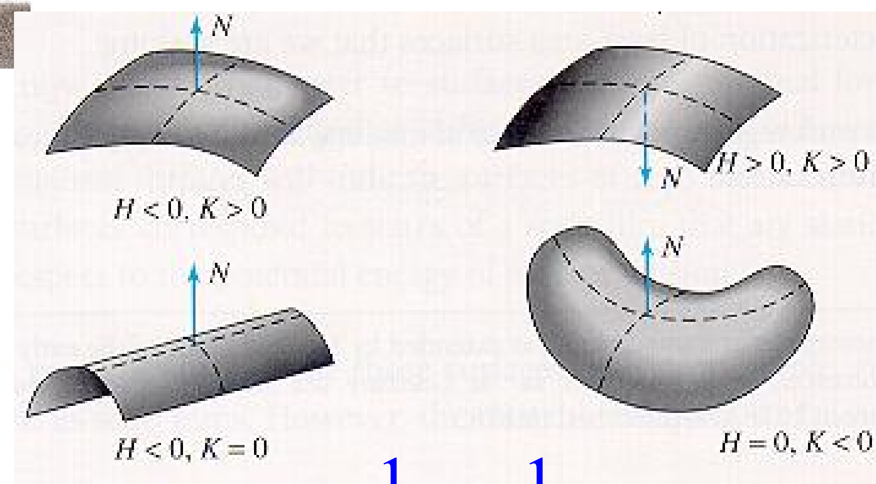


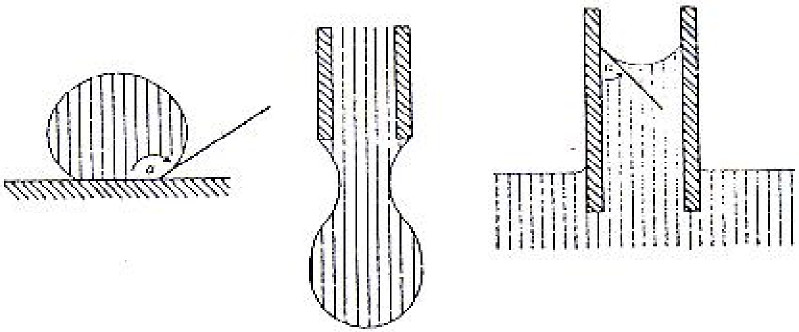
Jacob Steiner (1796-1863).

Teoría de grafos,..

Superficies jabonosas= minimales ,La tensión superficial en aguas jabonosas es casi nula (Hildebrand 88), Minimales porque puede haber más de una con energía mínima(p92)

con curvartura media no nula





$$p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\sigma 2H$$

Superficies en forma paramétrica

P. S. de Laplace (1749-1827),

Th.Young (1773-1829),

C.F. Gauss (1777-1855),

c.La ecuación de Laplace

Principio de Dirichlet

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\int_\Omega fu\,dx \qquad \begin{cases}-\Delta u=f(x) & \text{en } \Omega\\ u=0 & \text{en } \partial\Omega\end{cases}$$

1906 B. Levi (sucesión minimizante de Cauchy con la norma de $L^2(\Omega)$:comienzo de espacios funcionales en el Cálculo de Variaciones, L.Tonelli, N=2,

Solución débil: Espacio de energía

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx<\infty,\ \int_\Omega u^2dx<\infty,\int_\Omega f^2dx<\infty$$

C. Morrey (1930), L. Sobolev (1930)

$$D(\Omega)\subset \mathrm{H}^1_0(\Omega)\subset \mathrm{L}^2(\Omega)=(\mathrm{L}^2(\Omega))`\subset \mathrm{H}^{-1}(\Omega)\subset D`(\Omega)$$

Teoría de las distribuciones de L. Schwartz (1950).

$$\int_\Omega fu\,dx=(u,f),\ \langle u,f\rangle_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)\times\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}$$

Ecuación (débil) de Euler-Lagrange

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \langle u, f \rangle = 0 \ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

Formulación variacional general

Lema: [P.Lax-A.N. Milgram (1954)]:

V espacio de Banach reflexivo y separable, $a : V \times V \rightarrow \quad ,$

Bilinear, contínua y "coercitiva" $\qquad a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 .$

Entonces $\qquad f \in V` \ \exists! \ u \in V$ solucion de $a(u,v) = \langle v, f \rangle \ \forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$

Si a es simétrica, entonces u es un mínimo de $\quad J(u) = \dfrac{1}{2} a(u,u) - \langle u, f \rangle$

Aplicación al análisis numérico:

Método de W. Ritz (1909)

Hallar $u_n \in V_n,$ minimizando J en V_n :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \Rightarrow J(u_n) \coloneqq J(\alpha_{1,}...,\alpha_n)$$

$$\frac{\partial J(\alpha_{1,}...,\alpha_n)}{\partial \alpha_i} = 0, \text{ i=1,...,n.}$$

Método de B. Galerkin (1915)

Hallar $u_n \in V_n,\ : a(u_n, \phi_i) = \langle \phi_i, f \rangle\ \forall$i=1,...,n.

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a(\phi_i, \phi_j) = \langle \phi_j, f \rangle \text{ , j=1,...,n}$$

sistema de n-ecuaciones algebraicas en α_i.

Cambio de filosofía:

i) existencia de soluciones débiles (Pb. 20)

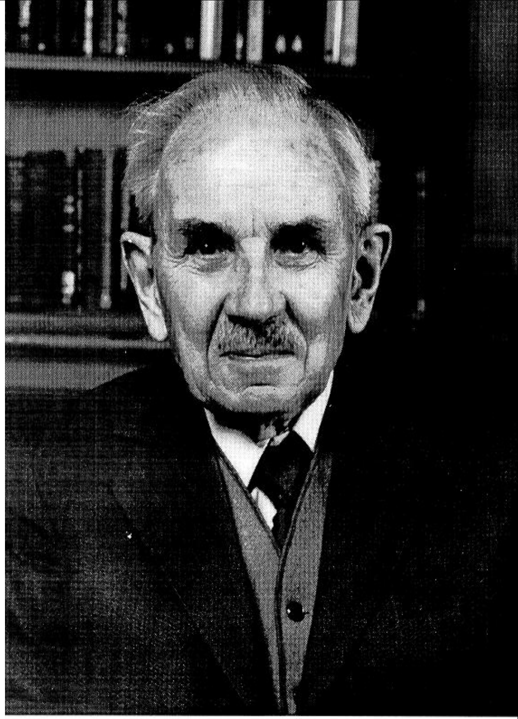
Espacio funcional adaptado a la ecuación....

* **Espacios** $W^{1,p}(\Omega)$**,Orlicz-Sobolev, BV(**Ω**)...**
* *Ecuaciones de Navier-Stokes*: J. Leray (1931)
* *Superficies mínimas* J. Douglas (1931)

[transformación de no lineal a lineal]

ii) teoremas de regularidad (Pb.19)

Bernstein, Giraud, Schauder,
Gilbarg, Agmon, Douglis, Nirenberg, De Giorgi,
Stampacchia, Moser, Nash, Ladyzenskaya,
Uralt'seva, Trudinger, Friedman, Caffarelli,....



Jean Leray
(1906-1998)

Extensión a la teoría de operadores en espacios de Banach y de Hilbert

J(u) débilmente s.c.i si J convexa $A: V \to V'$ (A=J')

*Operadores monótonos $\langle \text{Au-Av,u-v} \rangle \geq 0$

Minty (1962), Vishik (63), Browder (63)

*Operadores del Cálculo de Variaciones, Leray-Lions (65)

*Operadores pseudomonótonos Brezis (68)

*Problema de Cauchy, Teoría de semigrupos Hille, Yosida (56), Browder (68), Kato, Crandall, Pazy, Brezis, Benilan

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad u(t) = S(t)u_0 = e^{-tA}u_0$$

4. Problemas límites

Idea de Hilbert (pb. 20)

a. Soluciones fuera del espacio de energía

a1. $-\Delta u = f(x), \ f \in L^1(\Omega) \neq H^{-1}(\Omega)$

Stampacchia (66), Brezis-Strauss (71), Benilan (72),.....

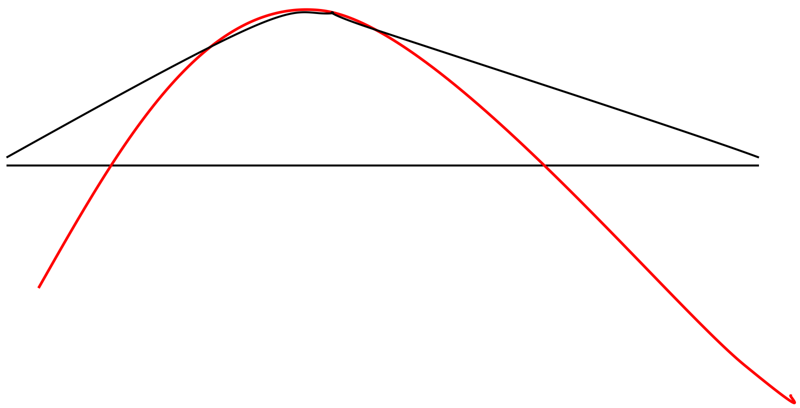
a.2. Soluciones renormalizadas Boccardo, D., Giachetti, Murat (89) [Diperna-P.L.Lions (88)],.....

a.3. Soluciones entrópicas Carrillo (95) [Kruzhkov (71)],...

a.4. Soluciones de viscosidad Crandall, P.L.Lions, Evans (85) [Kruzhkov (70)],...

b. Inecuaciones Variacionales (ligaduras unilaterales)

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx-\int_\Omega fudx \quad Min_K J(u),\ K=\left\{v\in H_0^1(\Omega), v\geq\psi\right\}$$



K convexo y cerrado

Problema de obstáculo

Problema de torsión

$$K=\left\{v\in H^1(\Omega), |\nabla u|\leq 1\right\}$$

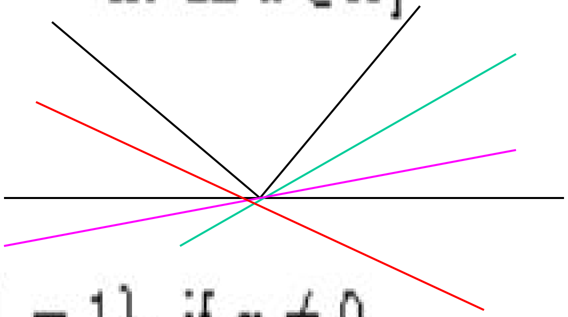
Signorini (1959), Fichera (63), Stampacchia (63), J.L. Lions-Stampacchia (65), Brezis (71), Kinderlehrer-Stampacchia (80), Caffarelli-Friedman (78),.....

Inecuaciones cuasi-variacionales: Bensoussan- J.L. Lions (80),..

Subdiferencial de una función convexa

$f : X \to \quad$, X`=Y

$$\partial f(x_0) = \{y \in Y : f(x) - f(x_0) \geq \langle y, x - x_0 \rangle \quad \text{for all } x \in X\}$$



Si, por ejemplo, $f(x) = \|x\|$

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1\} & \text{if } x \neq 0, \\ \{x^* : \|x^*\| = 1\} & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Generalización de la derivada Gateaux

Operadores multívocos $\quad \partial f : D(\partial f) \subset X \to 2^Y$

Operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert: Brezis, Crandall, Pazy (73),..........

5. Otros principios variacionales en la Física-Matemática

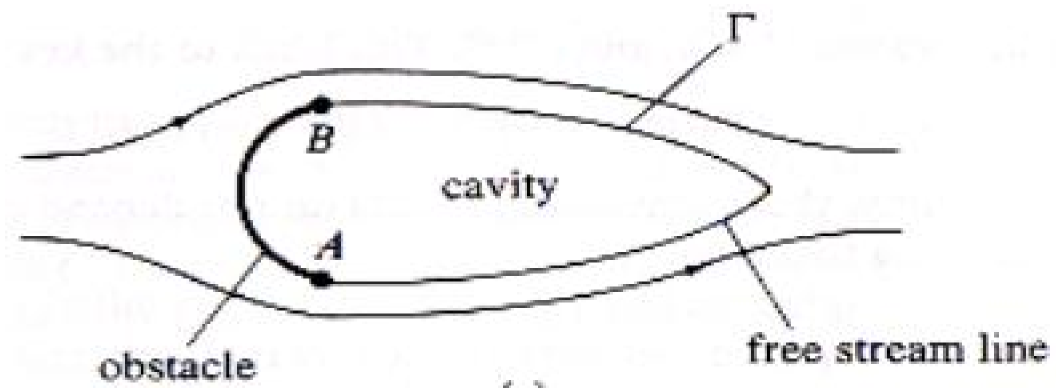
5.a. Elasticidad

- Sistema de ecuaciones (matematización:.... Trusdell(60))
- Principio de mínima energía elastostática de Green 1839, (desigualdad de Korn 1907, generalización de convexidad, policonvexidad, s.c.i débil, compacidad compensada Tartar, Murat (79), Diperna,....
- Dualidad de Friedrich (1929) [transformada de Legendre]
- Von Karman (1910) [placas y “cáscaras”], Ciarlet (89), Sánchez-Palencia (90),...
- Fichera, Duvaut-J.L. Lions, Ciarlet, Gurtin, Marsden-Hughes........Elasticidad no lineal, Plasticidad,..........

5.b Mecánica de fluidos

-Fluidoestática: Finn(60), Serrin (68),....

-Flujos estacionarios irrotacionales ante obstáculos (Bernoulli,...., Birkhof-Zarantonello (57), Alt-Caffarelli (81), Friedman(87)



-Principio de Hamilton (Lichtenstein 1929, Herivel-Lin (55)

-Principio de energía mínima de Lord Kelvin (W. Thompson (1848)),.....

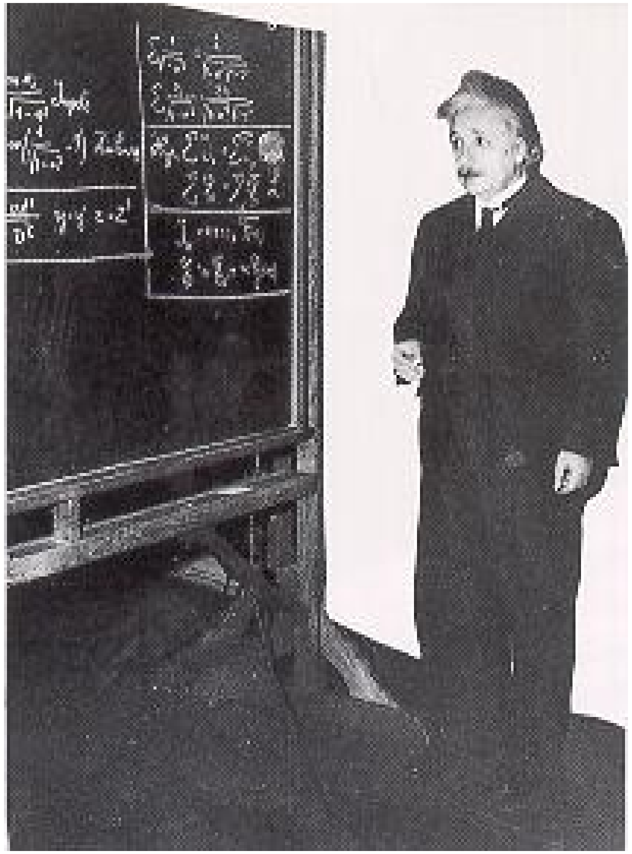
-Principio de Bateman (55) (fluido en rotación)

-Hadamard: ondas (1903),......

5.c Otros campos:

Termodinámica (Ley de Gibbs),

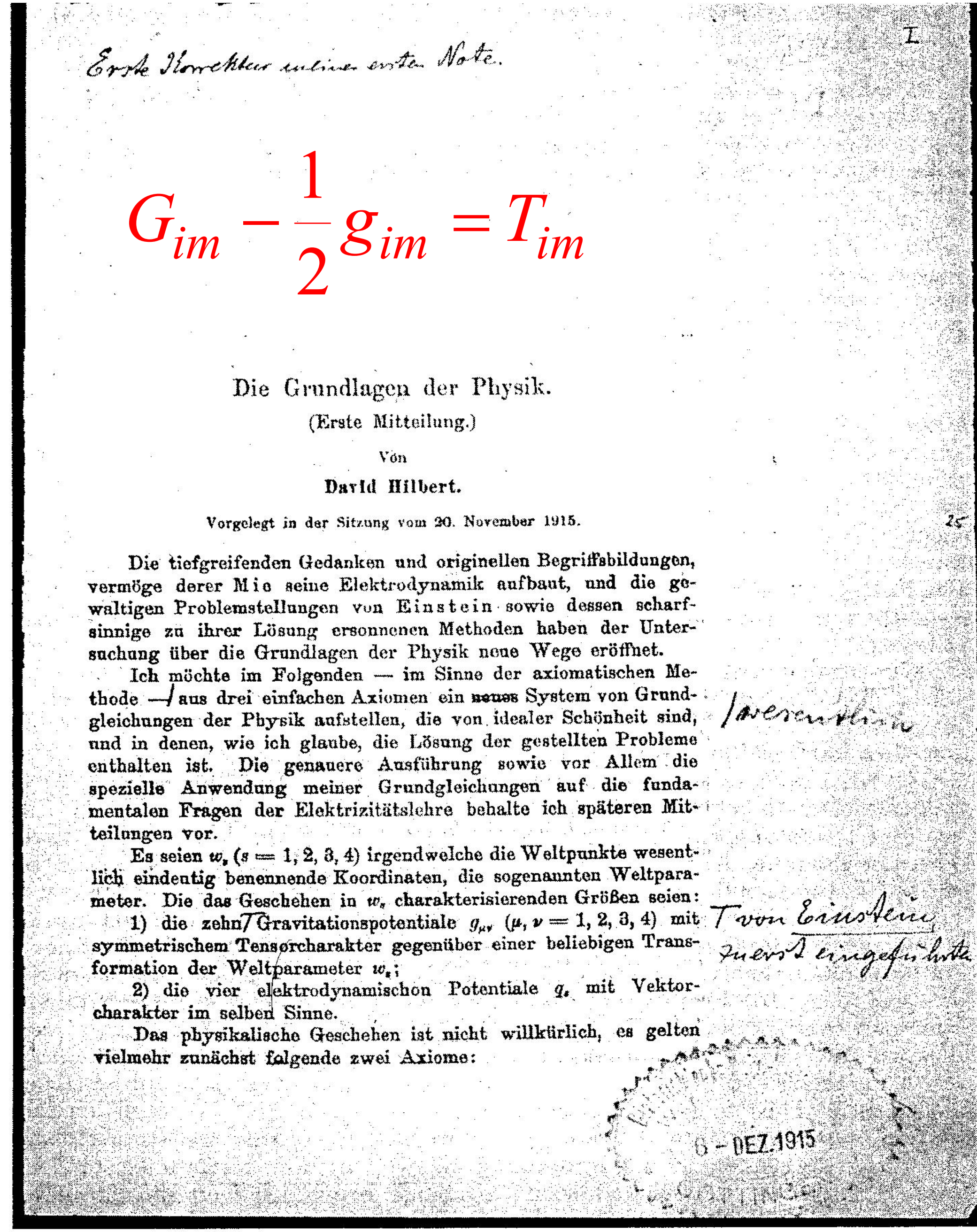
Mecánica Cuántica (Principio de Feynman, 1948),



Teoría de la Relatividad General (1915)

Albert Einstein (1879-1955)

- **D. Hilbert,** “Die Grundlagen der Physik”, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenchaften zu Göttingen* (1915), 395-407.
- **A. Einstein**, “Zur allgemeinen Relativitätstheory (Nachtrag), *Sitzungsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* **46,** (1915), 799-801.
- L. Corry, J. Renn,J. Stachel, “Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute”, Science, 278, 1270-1273, **1997**



$$G_{im} - \frac{1}{2} g_{im} = T_{im}$$

Erste Korrektur meiner ersten Note. I

Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915. 25

Die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie seine Elektrodynamik aufbaut, und die gewaltigen Problemstellungen von Einstein sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — aus drei einfachen Axiomen ein ~~neues~~ System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der gestellten Probleme enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor. wesentlichen

Es seien w_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter. Die das Geschehen in w_s charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s; von Einstein zuerst eingeführten

2) die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne.

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr zunächst folgende zwei Axiome:

Fig. 1. The first page of a set of proofs of Hilbert's first communication, with Hilbert's handwritten corrections and a printer's stamp, dated 6 December 1915. [Reproduced with permission by the

6. Control

- Estructura general:

  y=estado(s), u=control(es)

  - Ley de estado: $F(y_t, Ay, Bu)=0$ (A y B operadores)
  - Funcional de observabilidad: $J(u)=g(u,y(u))$

Problema: optimizar J(u) sobre un conjunto K de posibles controles

  - Tª Control: u escalar (un único control)
  - Tª de Juegos: u con múltiples componentes

    ¡Posible conflicto de intereses!

•**Control óptimo**: Min{$J(u)$: u en K},

Usualmente $J(u)=J_1(u)+c|y(u)-y_d|$, $c\geq 0$,

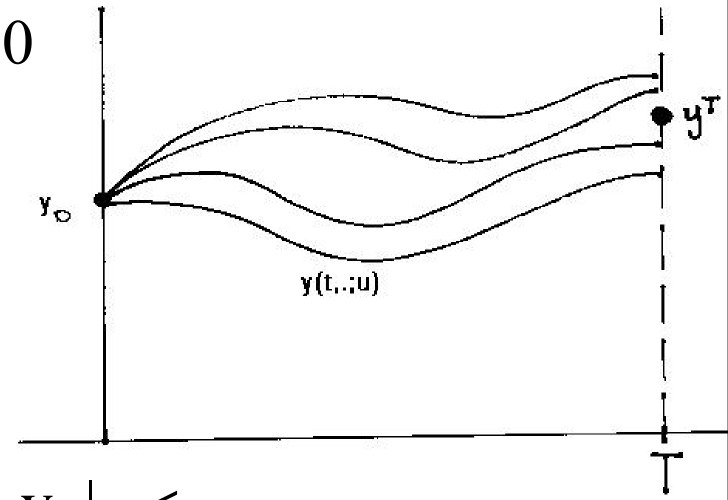
* F determinista (EDO o EDP) o estocástica:

* F en régimen estático o dinámico

* F lineal ($J_1(u)$ convexa y K convexo u otros casos)

* F no lineal

* **Controlabilidad**: Min{$|y(u)-y_d|$: u en K}= 0



*controlabilidad exacta: $y(u)=y_d$

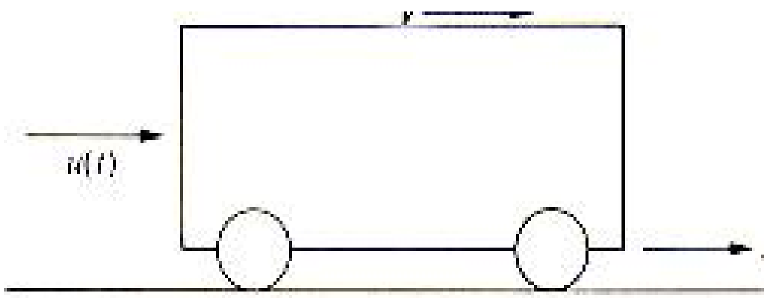
ODE,

EDPS de tipo hiperbólico

*controlabilidad aproximada:u, $|y(u)-y_d| \leq \varepsilon$

EDPs de tipo parabólico o elíptico

Controles bang-bang

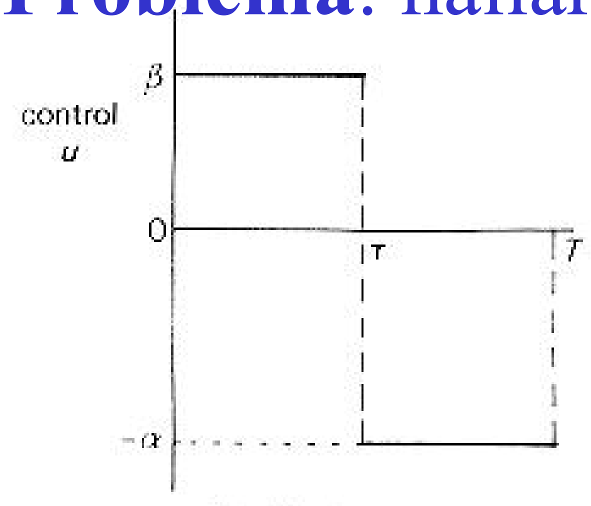


V(0)=0

V(T)=0

Aceleración u(t), $-\alpha \leq u(t) \leq \beta$ $\qquad v`(t) = u(t)$

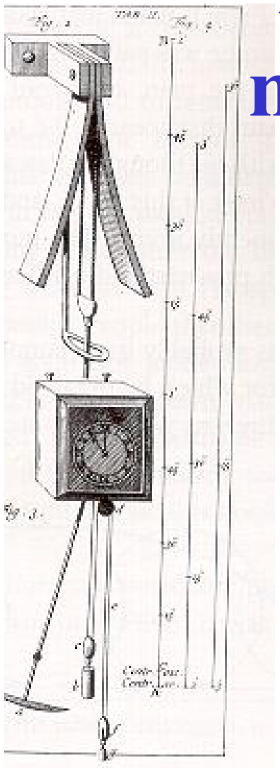
Problema: hallar u(t) para que T sea mínimo



EDO con coeficientes discontínuos

C. Caratheodory (1873-1950),.......

Antecedentes: Control por realimentación (feedback): El péndulo cicloide de Christian Huygens (1629-1695), 1673.



- **Métodos precisos para medir el tiempo.**

“Gobernador” para el control de velocidad de rotación

Th. Mead 1787: Molino de viento

J. Watt (1736-1819): Máquinas de vapor

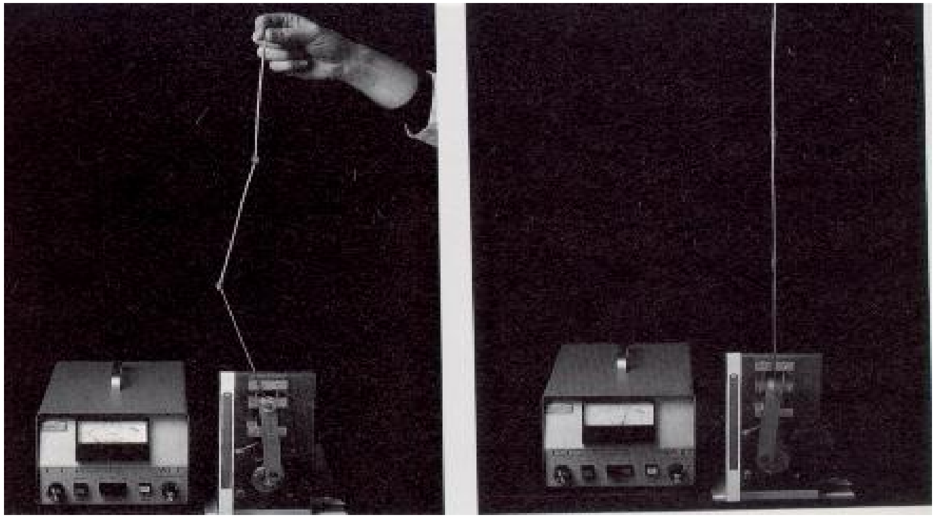
G. B. Airy (1801-1892): Telescopios astronómicos.

Enfoque mate´matizados:

J. B. L. Foucault (1819-1868),

J.C. Maxwell (1831-1879): Rotor magnético

El péndulo invertido: lograr "lo imposible" (bucle cerrado)



Posición inestable..

Control del caos,..

El principio del máximo de L.S. Pontriaguin (1960),...

V.G. Boltyanskii, ...

$$\dot{x} = f(t, x, u) \qquad (x(t_0), x(t_1)) \in E. \quad x = (x^1, \ldots, x^n)$$

$$u = (u^1, \ldots, u^m)$$

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\, dt \qquad F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R},$$

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n, \ E \subset \mathbf{R}^{2n}.$$

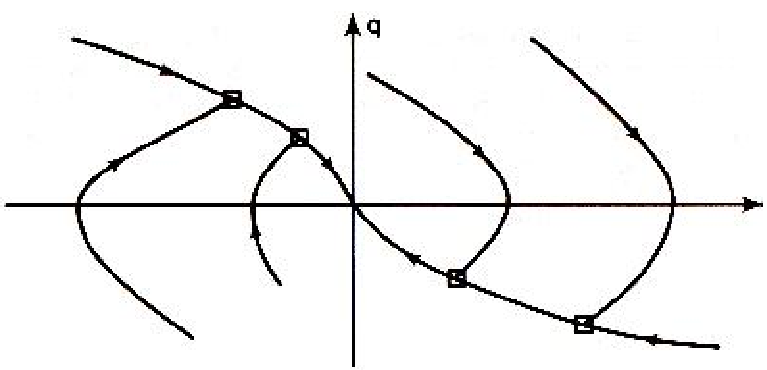
$$u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m$$

$\exists$ una funcion vectorial ψ y un escalar λ_0 tales que

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \qquad\qquad -\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \max\limits_{u \in U} H(t, x(t), \psi(t), u, \lambda_0) = \\ \quad = H(t, x(t), \psi(t), u(t), \lambda_0) \end{array}\right\}$$

siendo

$$H(t, x, \psi, u, \lambda_0) = (\psi, f) - \lambda_0 F.$$



Curva de cambios (switch)

Principio de la programación dinámica de R. Bellman (1967)

$$S(t,x) = \int_{t_0}^{t} F(s,x(s),u(s))ds$$

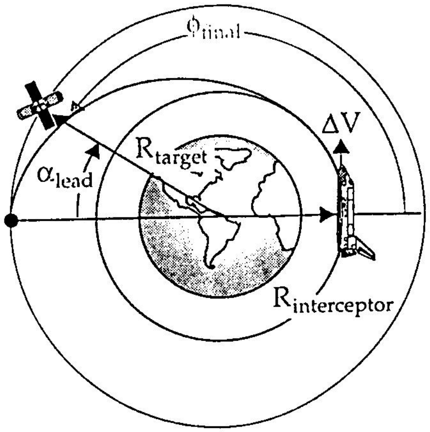
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)' , (f(t,x(t),u(t)) - F(t,x(t),u(t))) \right) = 0,$$

Ecuación de tipo Hamilton-Jacobi (EDP de primer orden)

[EDP de segunfo orden, completamente no lineal, si el estado verifica una EDO estocástica]. Soluciones de viscosidad Crandall-P.L. Lions

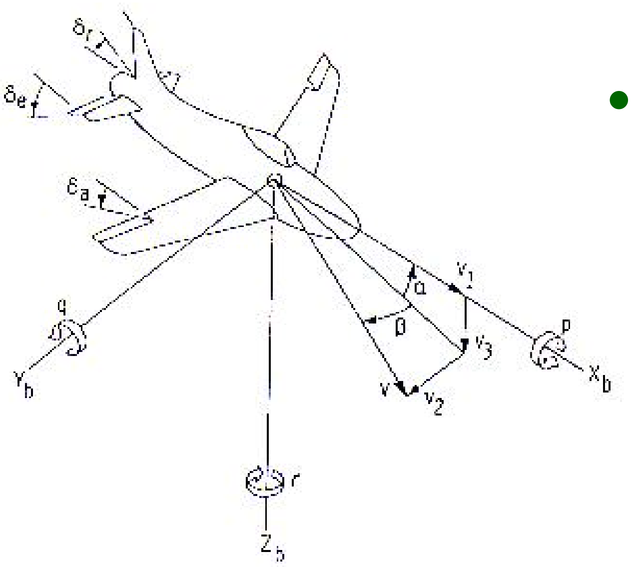
Otros resultados sobre control de EDOs: L.C.Young, E.J. McShane, N. Wiener,J.P. LaSalle, R. E. Kalman, A. Blanquiere,....

Control óptimo en navegación espacial



- Cálculo y optimización de trayectorias (Mecánica Celeste) [aceleración indirecta] muy anterior a la construcción de las lanzadoras y astronaves.
- Optimización (economía) de combustible,..
- Multiplicadores de Lagrange:

  D.F. Lawden 1955, A. Miele 1958, G. Leitmann 1959, A.I. Lurie 1963,....



Teoría de juegos diferenciales.

E. Borel 1912 teoría sistemática de juegos finitos.

J. Von Neumann 1928,.., libro con O. Morgenstern “Theory of games and economic behavior” 1947.

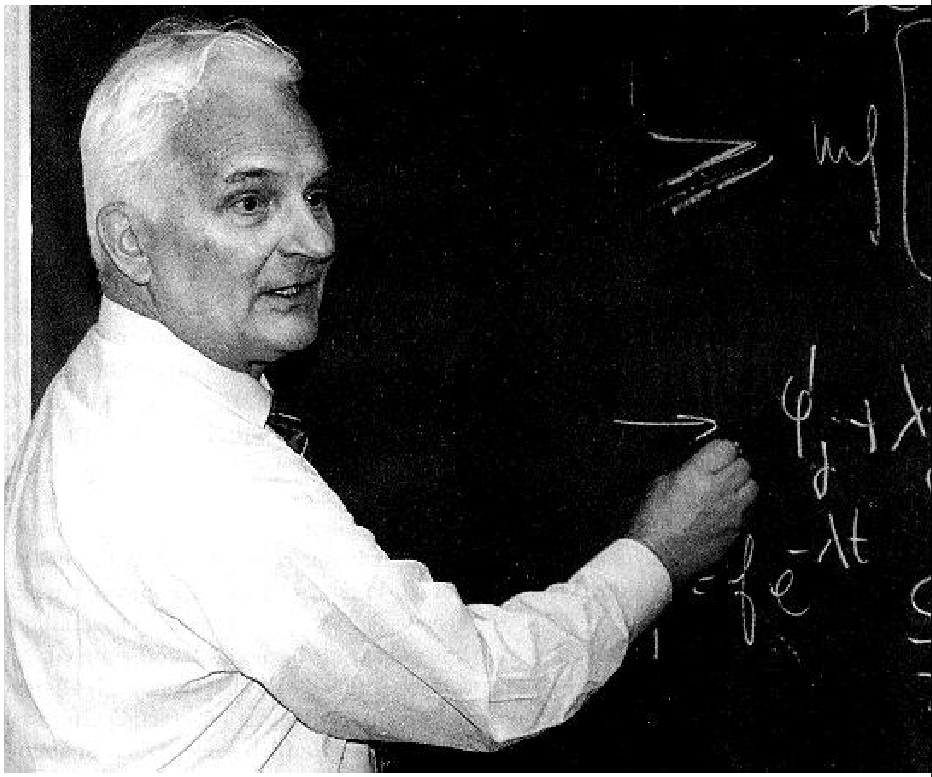
R. Isaacs 1954, introduce la teoría de juegos diferenciales,... L.S. Pontryagin ,..A. Friedman,.

Tipos de solución:

- A.A. Cournot, Recherches sur la les principes mathematiques de la theorie des richesses, 1838.
- V. Pareto “Manuel d’economie politique” 1909.
- H. Von Stackelberg “The Theory of the Market Econ.” 1934.
- J. Nash 1954 en Non-cooperative games, *Annals of Maths*.

7. Control de EDPs

- M.G. Krein 1955, Butkovskii (65),
- Yu. Egorov, D. Russel, H.Fattorini, W. Littman,..
- J.L. Lions (1928-2001),...
  - Hahn-Banach theorem,
  - Métodos de dualidad
  - Ecuaciones no lineales
  - Aproximación numérica
  - Juegos en EDPs,...



Un ejemplo: control puntual

$$y_t - y_{xx} + y^3 = arctgy + u(t)\delta_{1/2} \qquad \text{en } (0,1)\times(0,T),$$

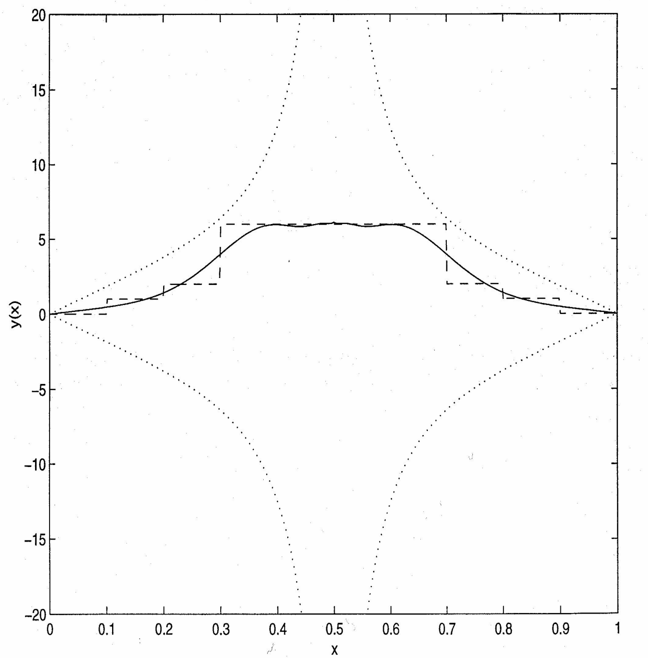
$$y(0,t) = y(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T),$$

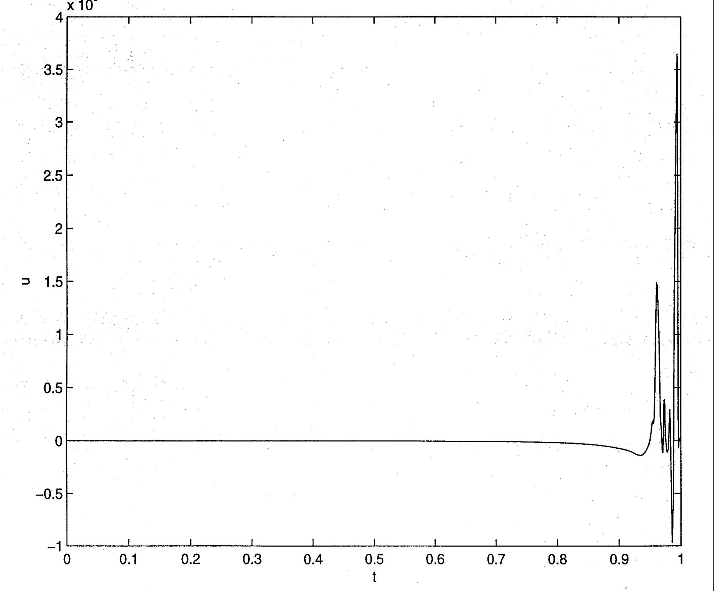
$$y(x,0) = y^0(x) \qquad x \in (0,1),$$

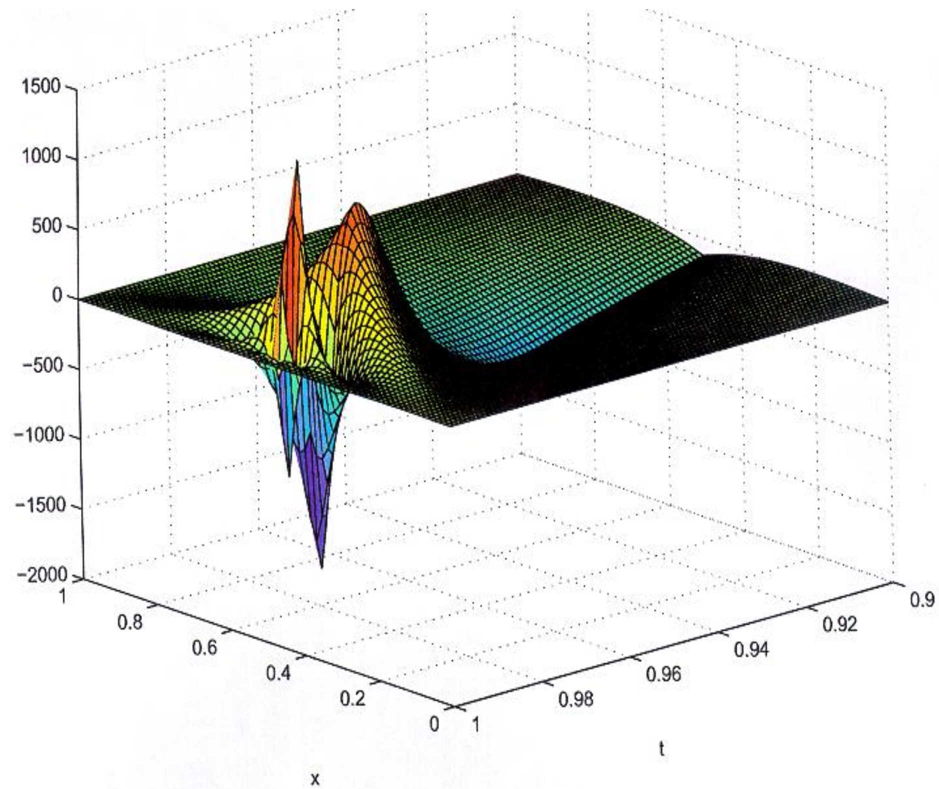
$$J_k(u) = \frac{1}{2}\quad u_{\; L^2(0,T)} + \frac{k}{2}\quad y(T,.:u) - y_d{}_{\; L^2(0,1)}$$

$$k = 10^{12}$$

Experiencia numérica







8. Notas históricas sobre el desarrollo en España

- Benito Bails (1730-1797), 1772, (inquisición)

- José Echegaray Eizaguirre (1833-1915), 1858. [Gumersindo Vicuña (1883), Simón Arcilla (1888)]

Correspondencia con matemáticos extranjeros

XLIX

CORRESPONSALES ESTRANGEROS.

RESIDENCIA.	NOMBRES.
Berlin.	Sr. D. J. H. Alejandro Humbold.
Londres.	Sr. D. Miguel Faraday.
Viena.	Sr. D. N. Estinghausem.
París.	Sr. D. Arturo Julio Morin.
Nápoles.	Sr. D. Macedonio Melloni.
Berlin.	Baron D. Leopoldo de Buch.
Londres.	Sr. D. Roberto Brown.
Londres.	Sr. D. Ricardo Owen.
Freiberg.	Sr. D. Augusto Breithaupt.
Lisboa.	Ilmo. Sr. D. Joaquin José da Costa de Macedo.
Poulkowa.	Excmo. Sr. D. Federico Jorge Guillermo Struve.
S. Petersburgo. .	Excmo. Sr. D. Pablo Enrique Fuss.
Berlin.	Sr. D. Juan Francisco Encke.
Gottinga.	Sr. D. Carlos Federico Gauss.
Turin.	Sr. D. N. Plana.
Copenhague.	Sr. D. A. E. Oersted.
Neufchatel.	Sr. D. Luis Agassiz.
París.	Sr. D. María-Juan Pedro Flourens.
Berlin.	Sr. D. Carlos Gustavo Jacobo Jacobi.
Giessen.	Sr. D. Justo Liebig.
París.	Sr. D. Pedro Mateo Orfila.
Leon de Francia.	Sr. D. Leon Dufour.
París.	Sr. D. Domingo Francisco Juan Arago.
Bruselas.	Sr. D. A. Quetelet.
Londres.	Sr. D. Juan Herschel.
París.	Sr. D. Enrique Victor Regnault.
París.	Excmo. Sr. D. Juan Bautista Dumas
París.	Sr. D. M. J. E. Guerin-Meneville.
Ginebra.	Sr. D. Edmundo Boissier.

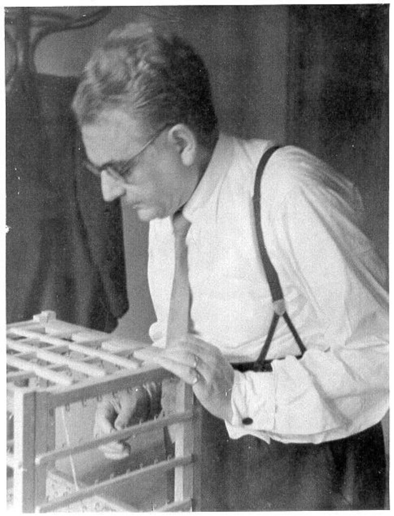
1847: fundación de la Real Academia de Ciencias.

Gaus, Jacobi, ...

- **E. Terradas (1883-1950): "Sur le mouvement d'un fil"*(Cambridge Univ. Press, 2, 250-255, 1912)*.**
- **Julio Rey Pastor (1888-1962): Los problemas lineales de la Física (1955).**

Caso de la Teoría de control:

H. Bateman, "The control of an elastic fluid", *Bulletin of the AMS*, Vol. 51, 1929, 601-646, cita J.J. Corral: "Nueva solución del problema de Lord Kelvin sobre ecuaciones de coeficientes reales, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, Tomo XXII, 25-31, 1928
(firmado en la Habana, marzo de 1925).



Pedro Puig Adam (1952, N. Wiener)

Antonio Valle (1965, J.L. Lions), ...