

The background of the slide is a highly detailed, golden-brown engraving. It features a central panel with a coat of arms containing three bees, flanked by two seated female figures. Above them are two winged cherubs. The entire scene is framed by elaborate scrollwork and surrounded by numerous smaller cherubs and musical instruments like trumpets and horns.

Matemáticas
y
Clima
J.I. Díaz

ICAI, 8 de noviembre de 2000

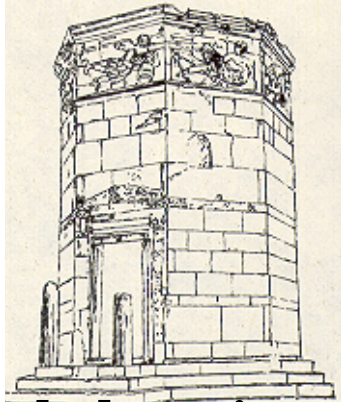
0. ¿Matemáticas (Ciencias Exactas) y Clima (“el rompecabezas climático”)?

0.1 Actitudes del hombre ante el Clima y los fenómenos naturales

naturales



Bóreas o viento del norte



**Torre de los Vientos
Atenas (siglo I aC.): Los 8
vientos de Aristóteles**



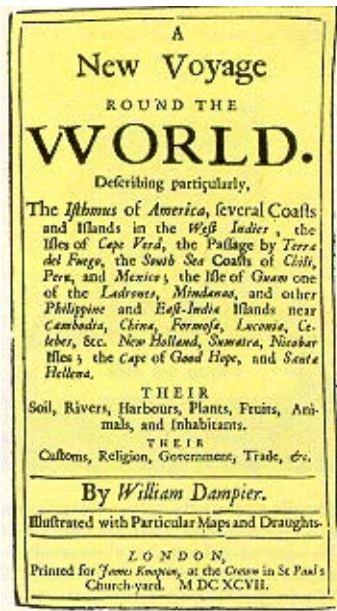
**Miniatura griega Siglo V
(deidades griegas luchando sobre
la flota troyana: La Eneida de
Virgilio)**



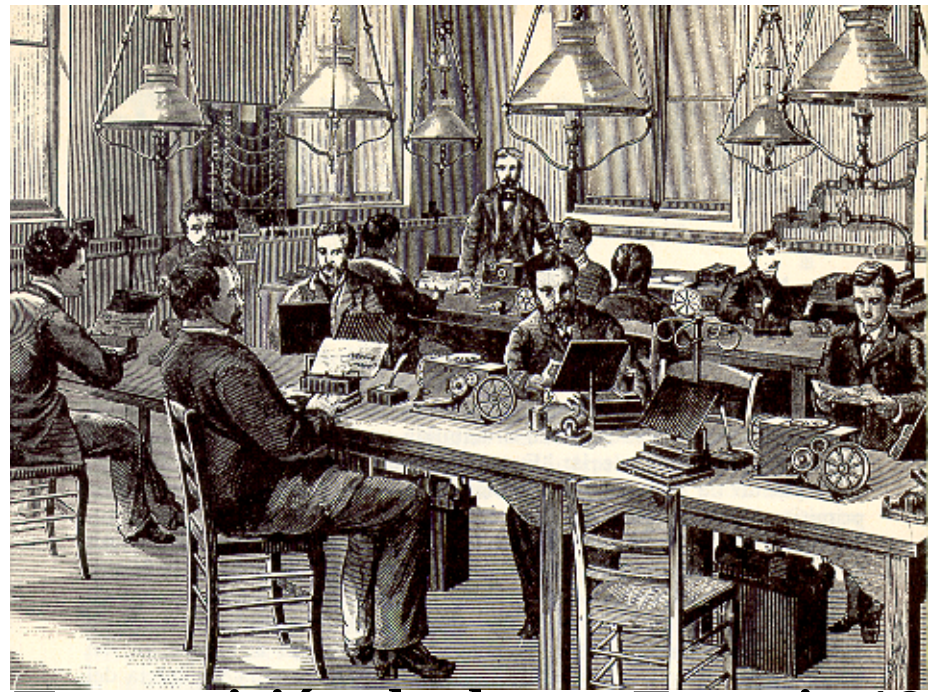
La protección de los cielos (1860)



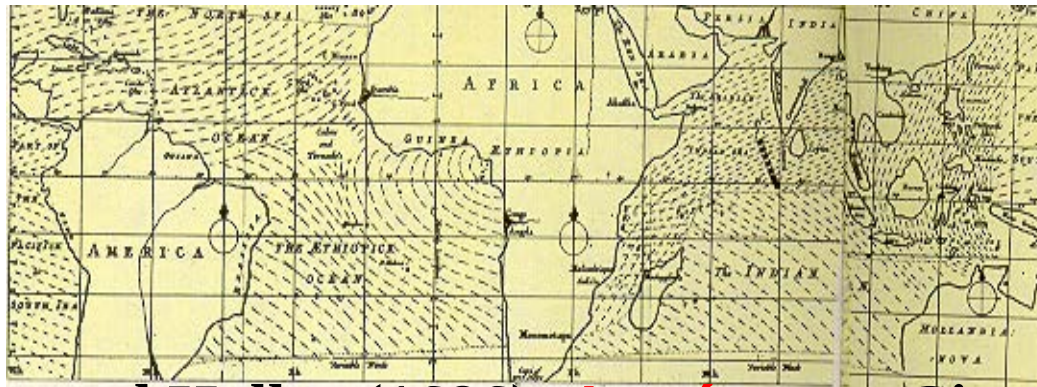
**Nuevo método para
precipitar la lluvia
D. Ruggles 1880
(Scientific American)**



Datos pioneros: 1697
Capitán W. Dampier,



Transmisión de datos: Francia 1863



**Edmund Halley (1686): Astrónomo, Circulación
general de la atmósfera y convección térmica**

0.2.“Matemáticos” pioneros en el estudio del clima

Convocatoria, en 1738, del Premio de Matemáticas de la Academia Francesa de Ciencias sobre “la causa del flujo y reflujo del mar”. Premiados: ***Daniel Bernoulli, Euler y MacLaurin***



Daniel Bernoulli
(1700-1782)



Leonhard Euler (1707-1783)

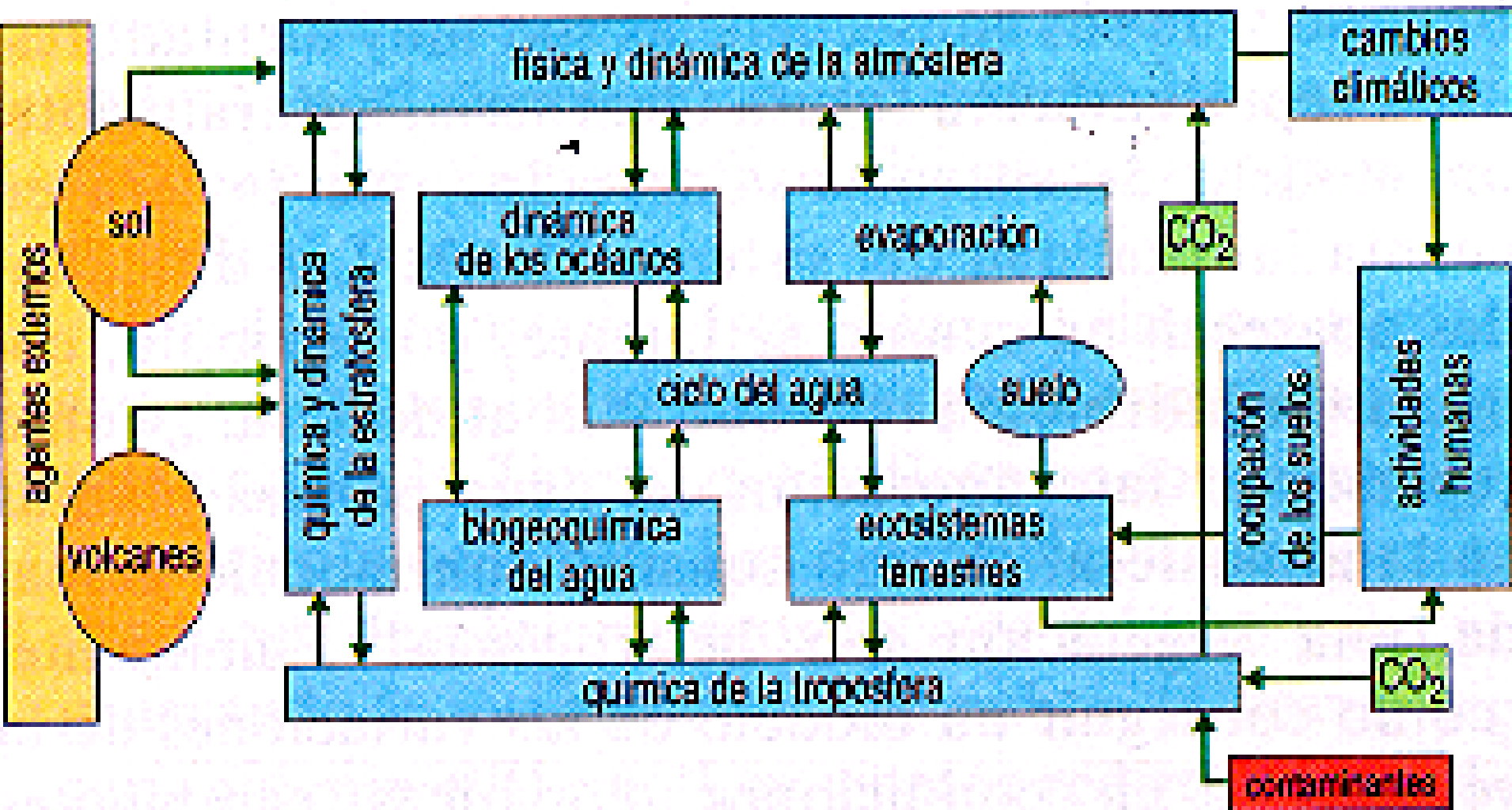


(1768-1830)

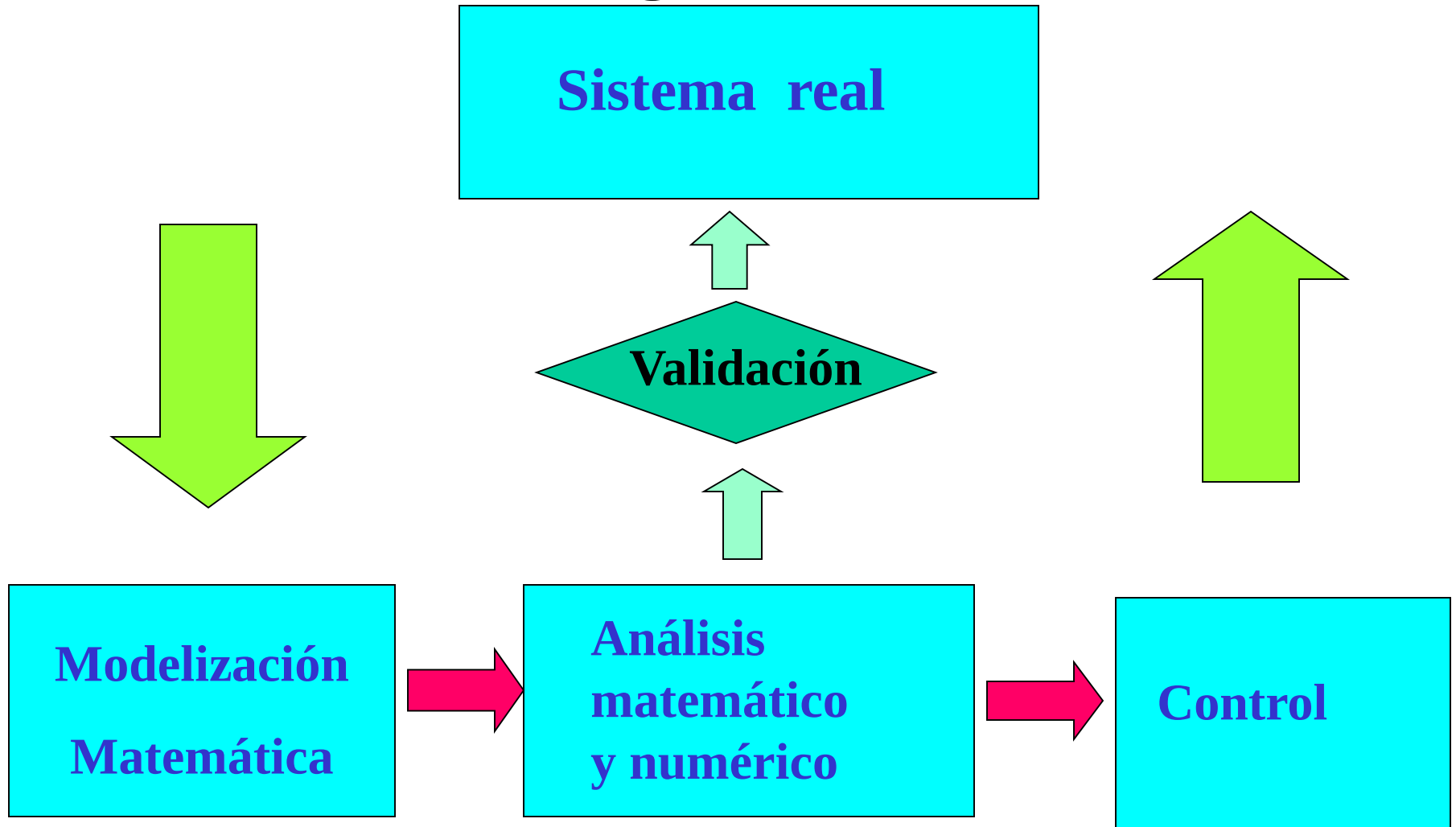
Joseph Fourier (1824):

El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de **las fuerzas naturales**, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos **son capaces de hacer variar el calor medio a lo largo de varios siglos ...**

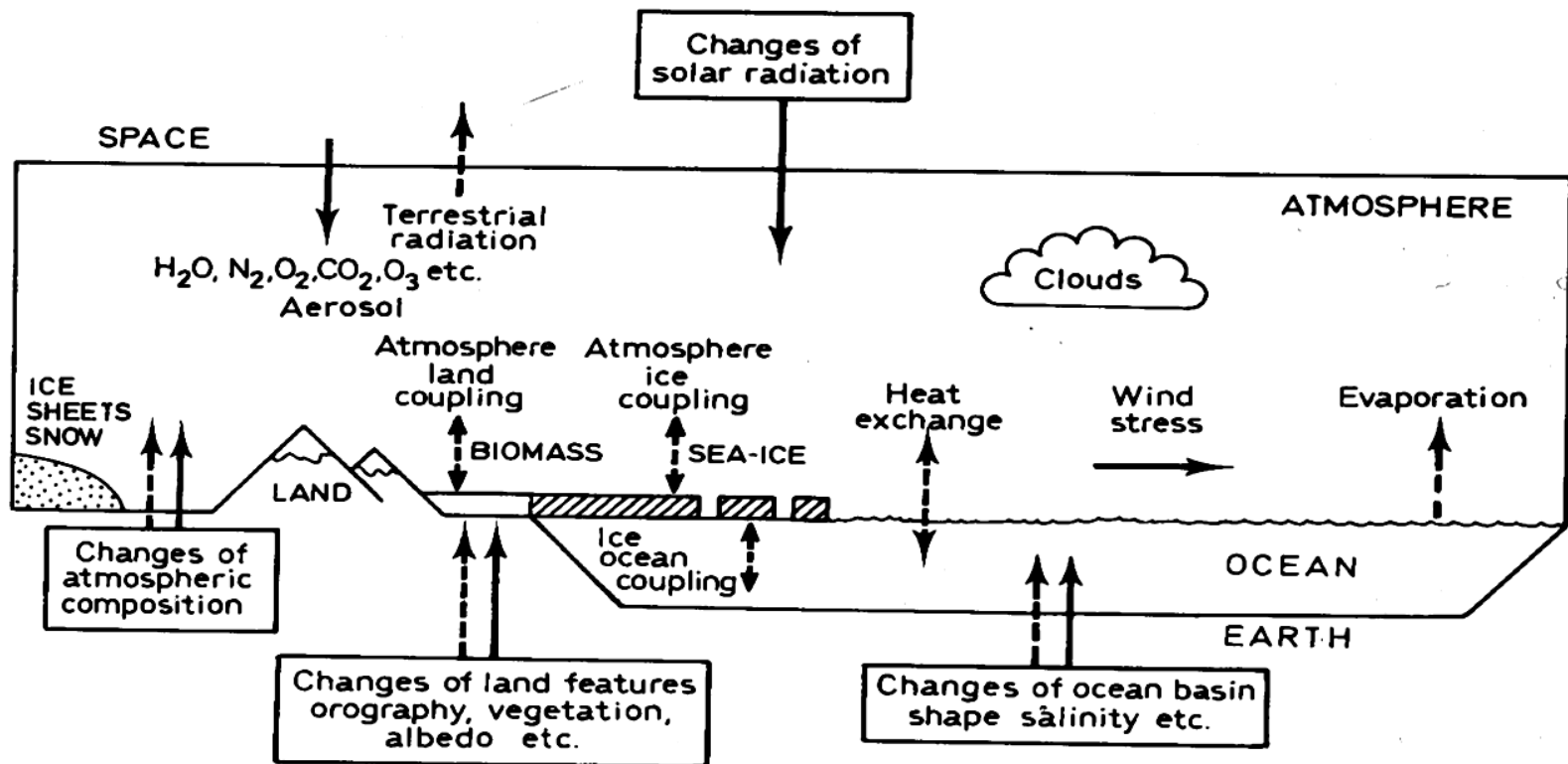
0.3. Sobre la complejidad del sistema climático



0.4. Estudio matemático: La “Trilogía Universal”



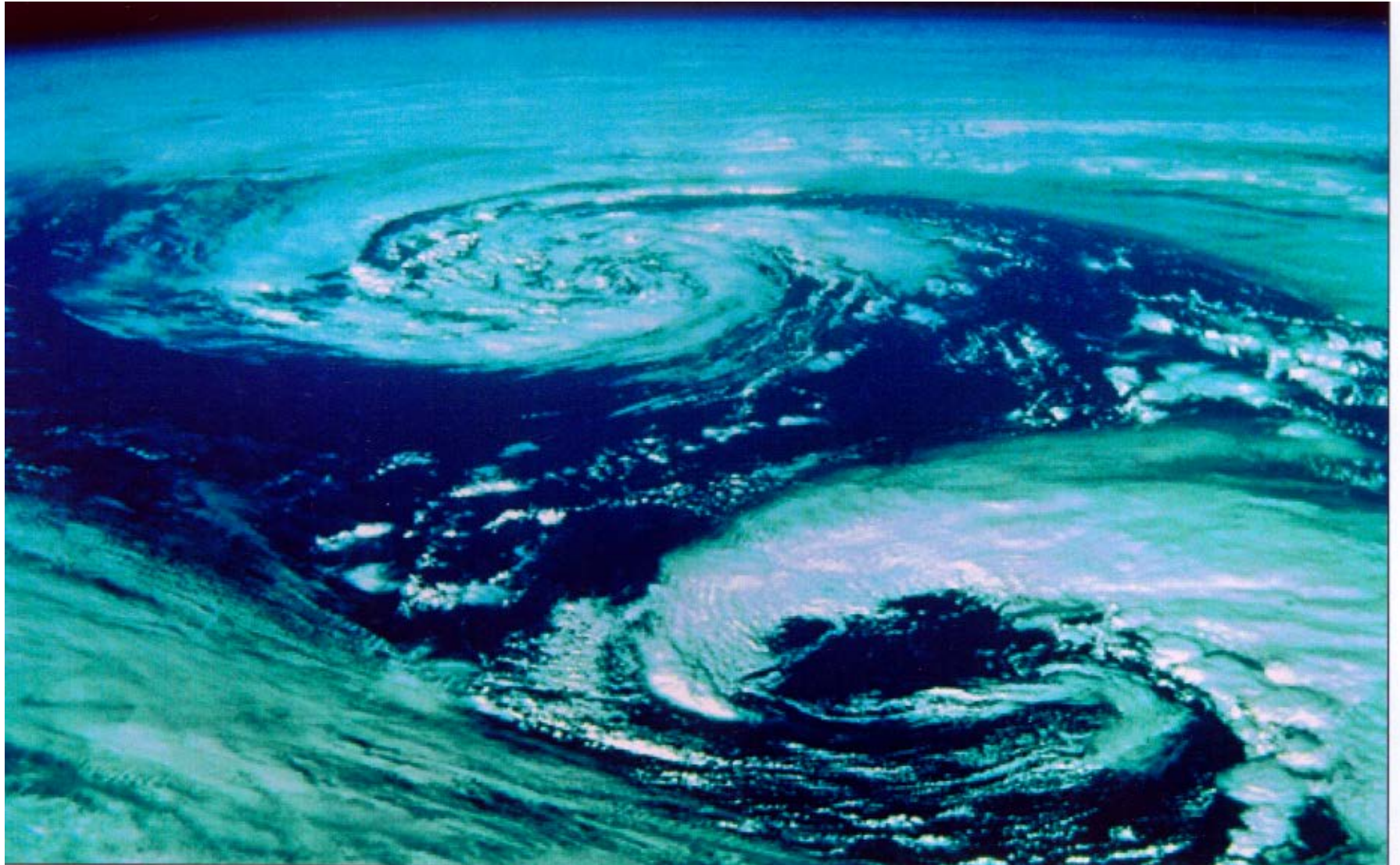
1. El problema real: componentes externos e internos del sistema climático



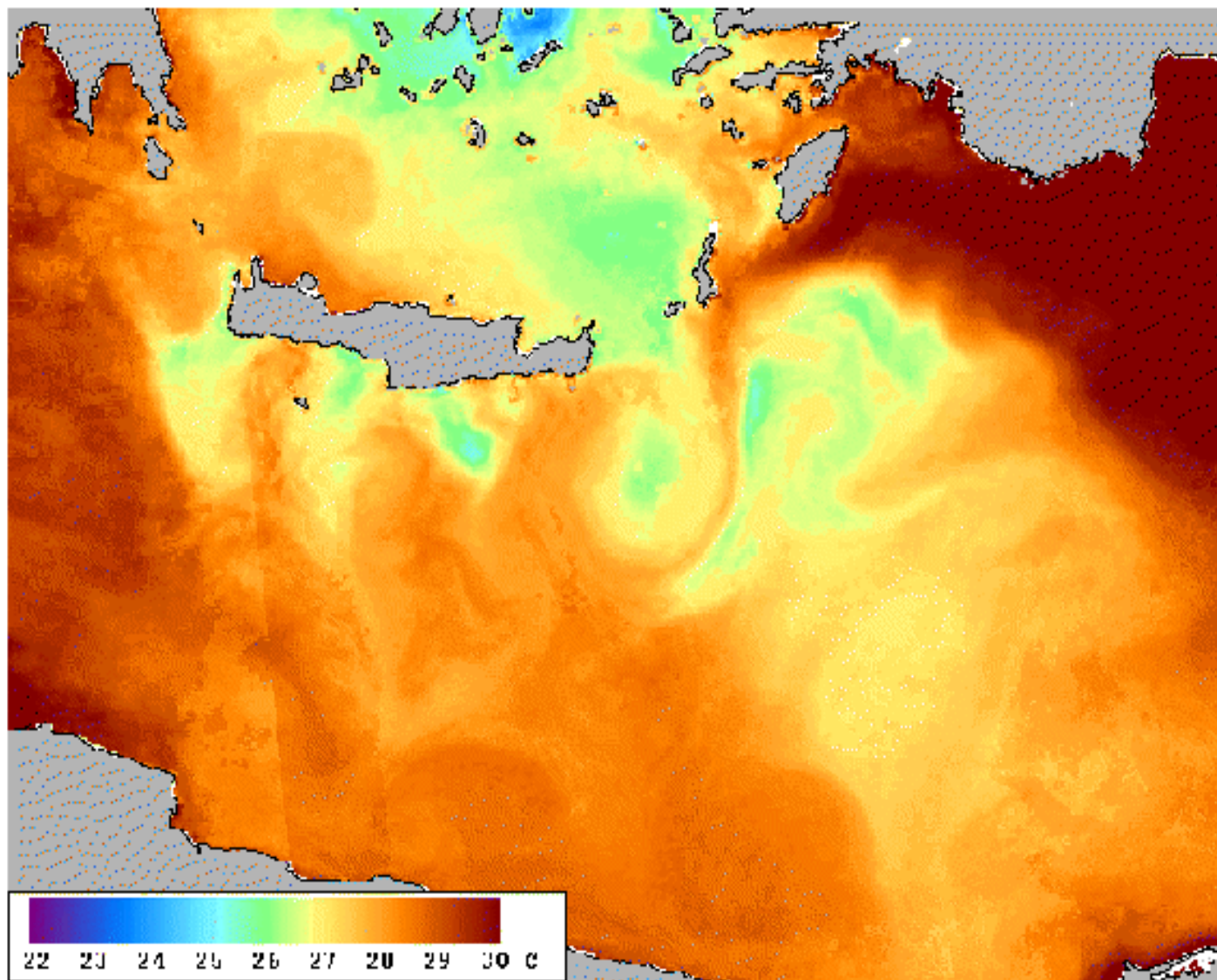
La Tierra



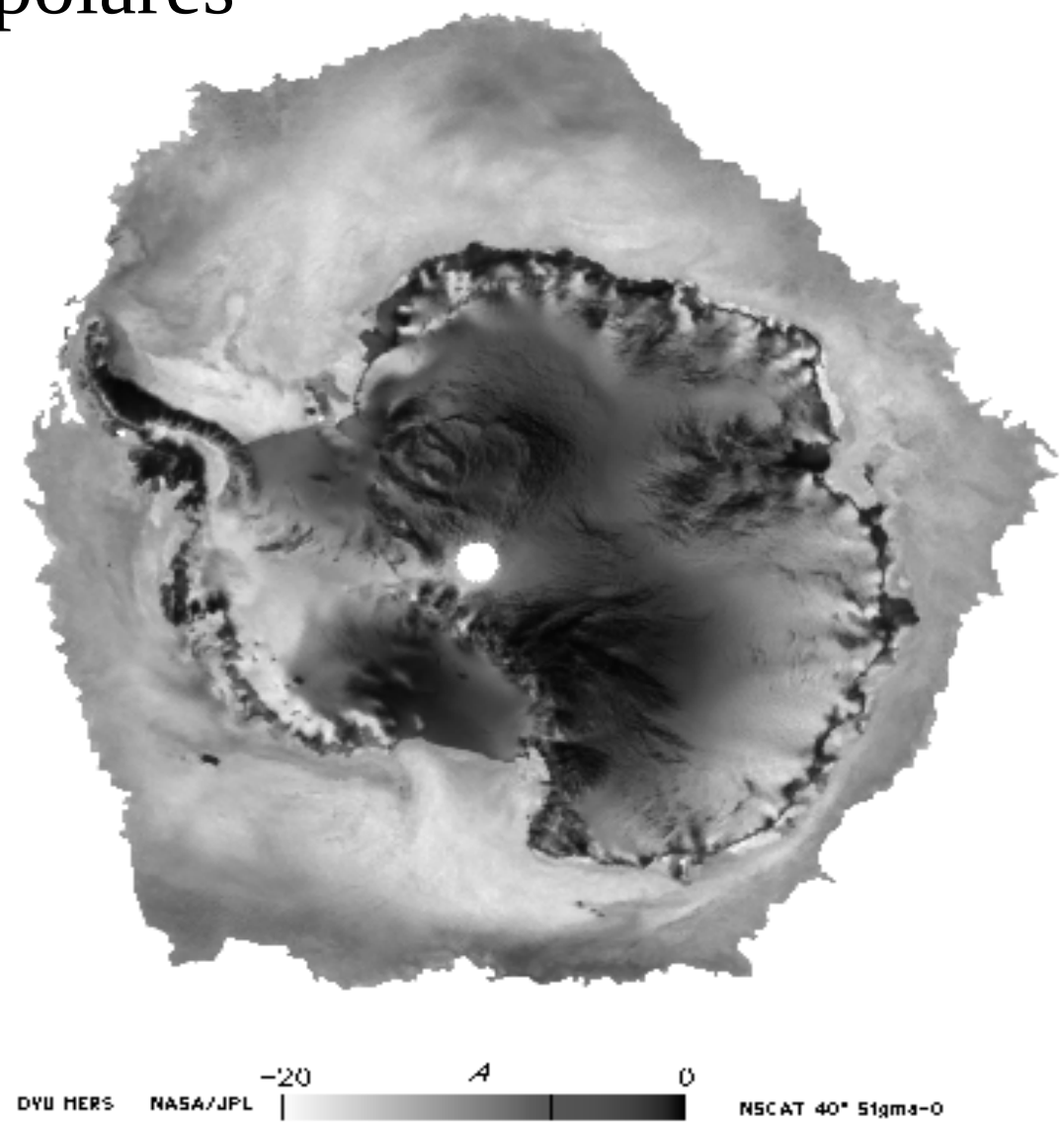
La atmósfera



El océano

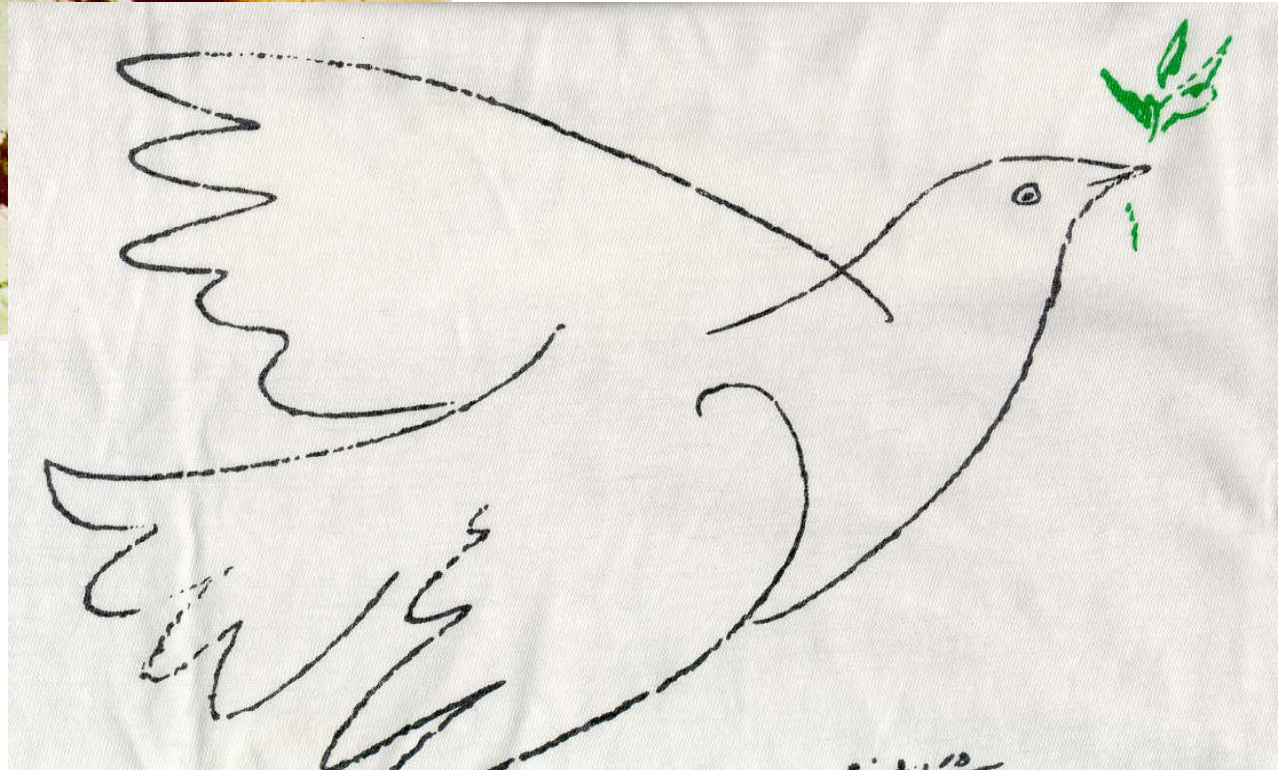


Los casquetes polares



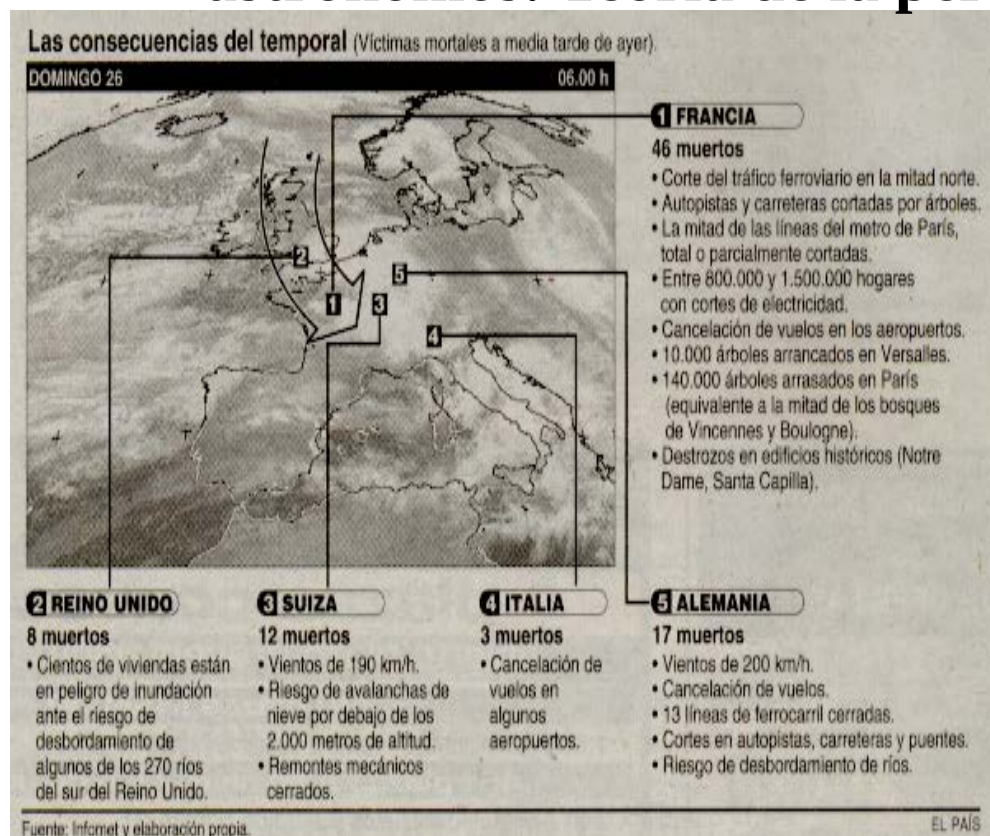
2. Modelización.

2.1. Proceso similar en el Arte



2.2. Componentes subjetivas de la modelización matemática

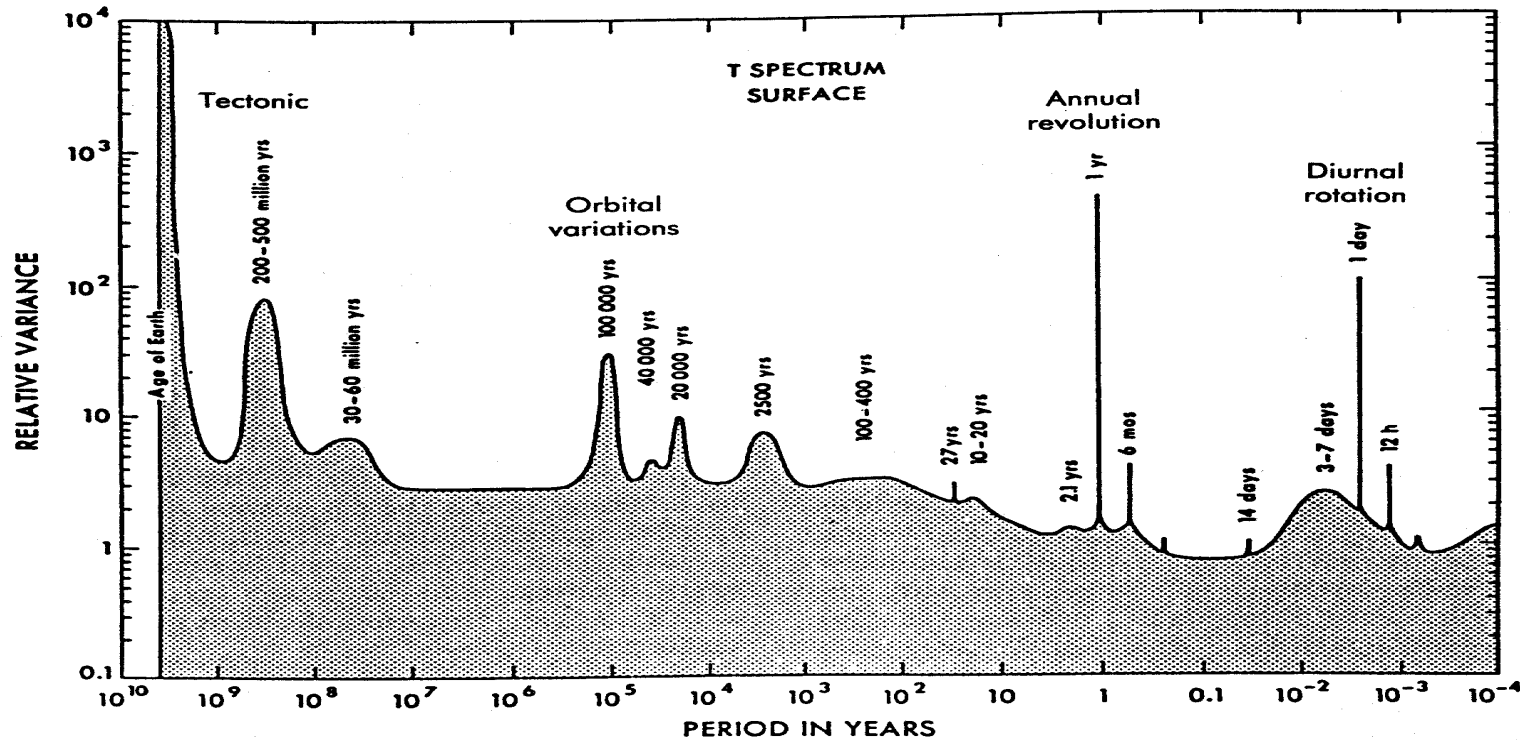
- “Ecuaciones personales” de F. Bessel (1784-1846)
- [Tiempos de transito de los astrónomos: Teoría de la percepción]



***Tormentas en Francia, 24, 25 y 26 de diciembre de 1999: recorrido pronosticado del torbellino descartado por los meteorólogos**

2.3a. Escalas temporales y espaciales: Jerarquía de Modelos

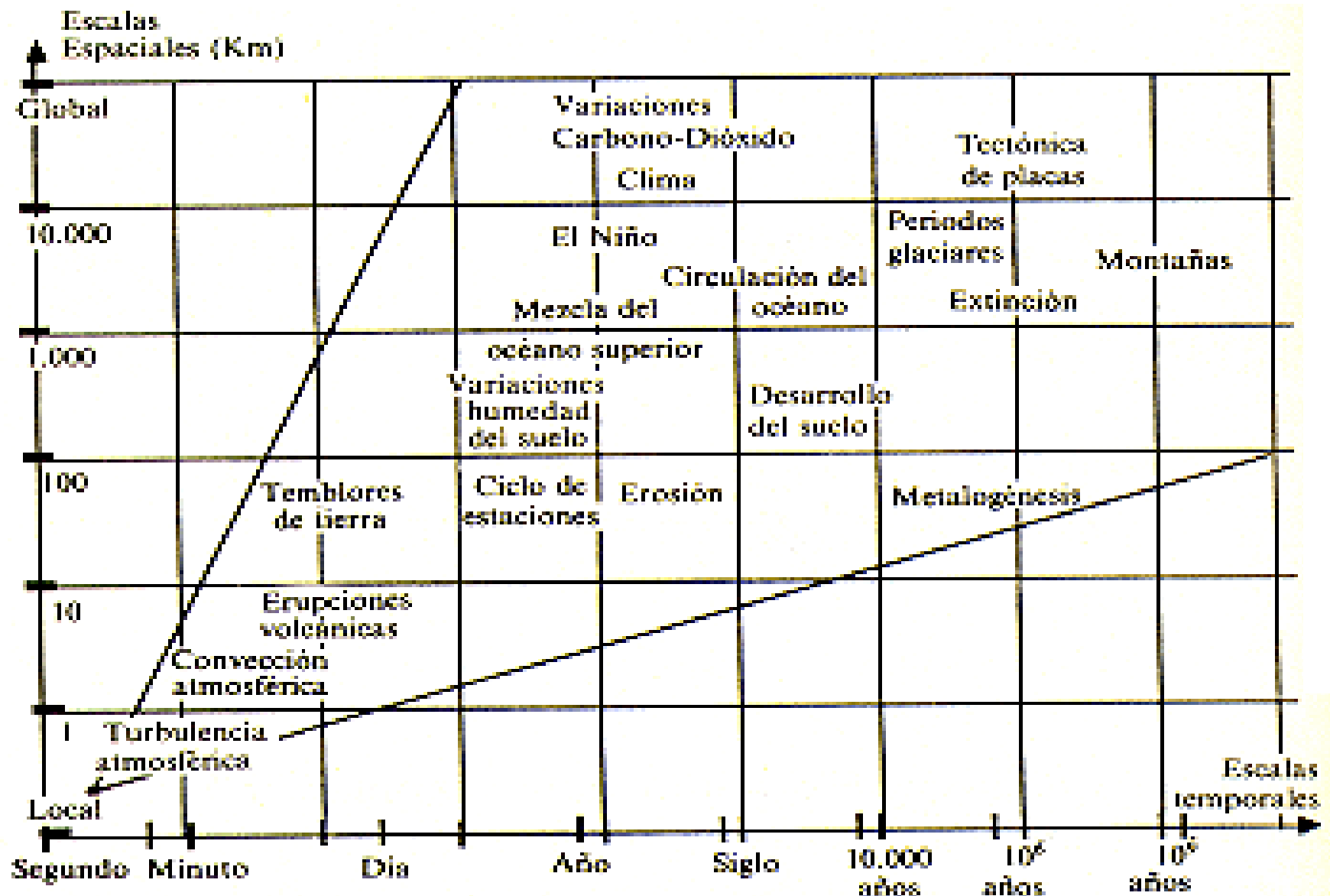
Climatología / Meteorología



E
c
c
i
t
t

Espectro de variaciones climáticas

2.3b. Escalas características



2.4. Modelos globales/locales:

2.4a. Modelos globales de Balance de Energía.

Clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider,1992)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

Predicción del tiempo
meteorológico

Modelos climáticos

Pronóstico

Modelos realistas

Métodos computacionales

Diagnóstico

Modelos simplificados

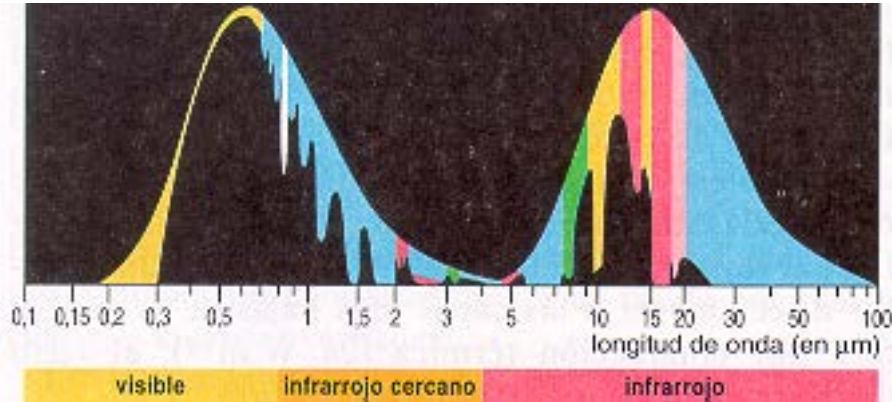
Métodos cualitativos

Balance de radiación de energía

S. Arrhenius (1896),

W.D. Sellers(1969),

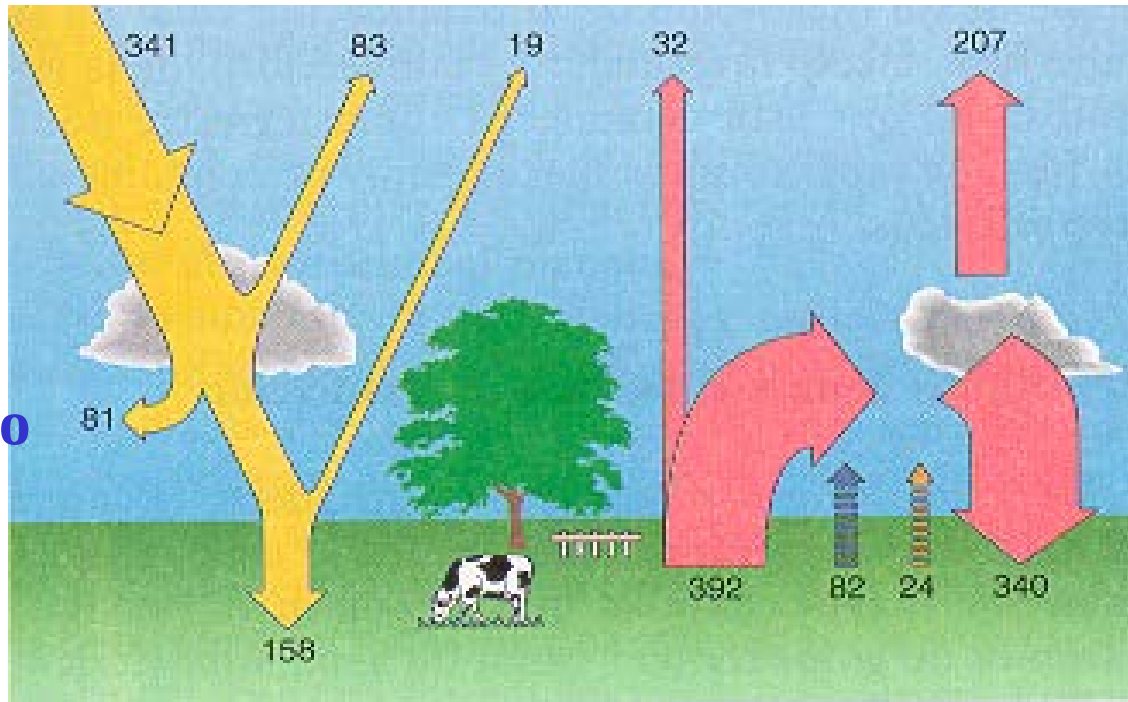
M.I. Budyko (1969),....



$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + D$$

R_a

Albedo



R_e

Efecto
invernadero

D

Leyes de estado

$$R_a = QS(x)\beta(u)$$

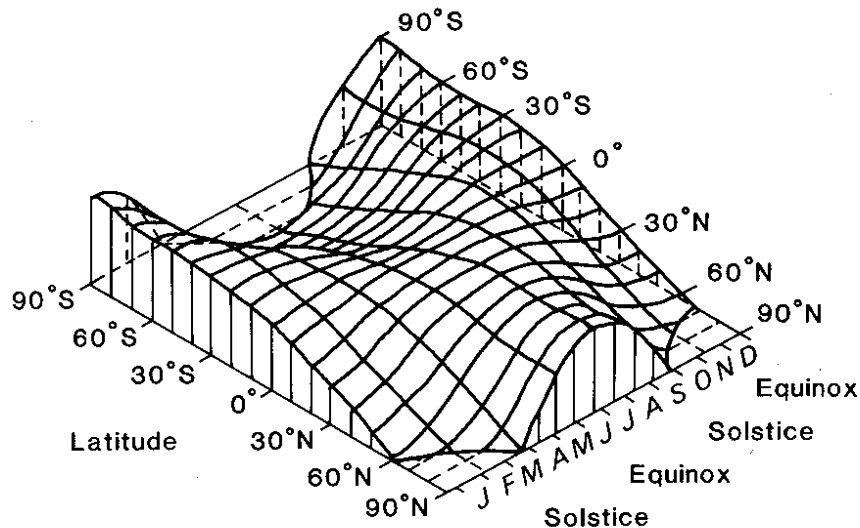
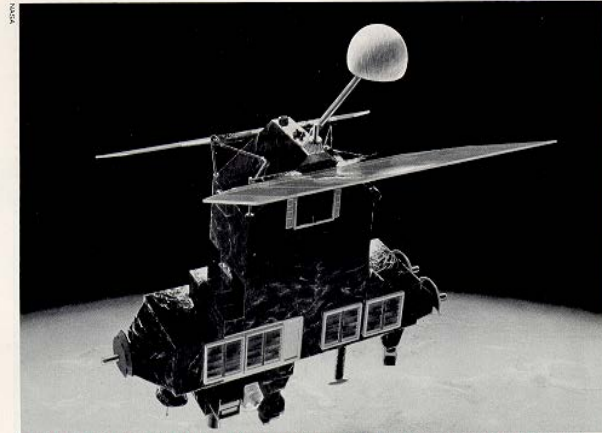


Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of

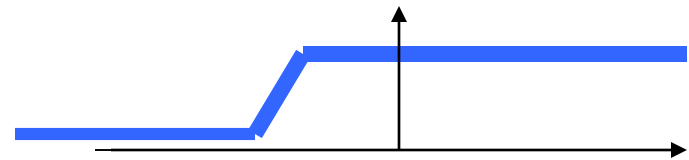
$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ coalbedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 & \text{si } u \ll -10 \\ 0.71 & \text{si } u \gg -10 \end{cases}$$

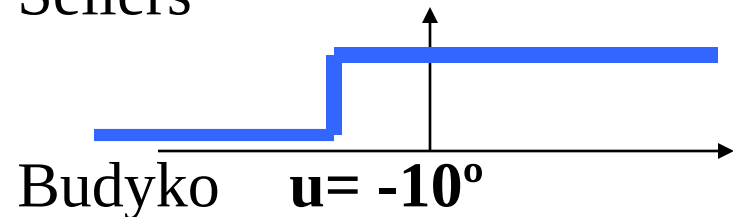


Eye in the sky. The Earth Radiation Budget Satellite, a space age effort to measure the radiation balance between the earth and the sun.

Earth Radiation Budget Satellite



Sellers



$R_e = \sigma u^4$ Ley de Stefan-Boltzman **Sellers**

$R_e = A + Bu$ Ley de enfriamiento de Newton **Budyko**

Relación empírica, Depende de gases de invernadero, cambios antropogénicos,... (variables internas)

Sobre el operador de difusión D Jerarquía

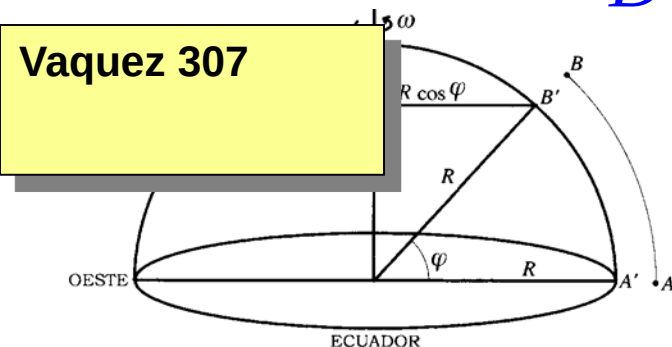
Modelo 0-dimensional $D=0$

$$c \frac{du}{dt} = Q\beta(u) - R_e(u)$$

Modelo 1-dimensional

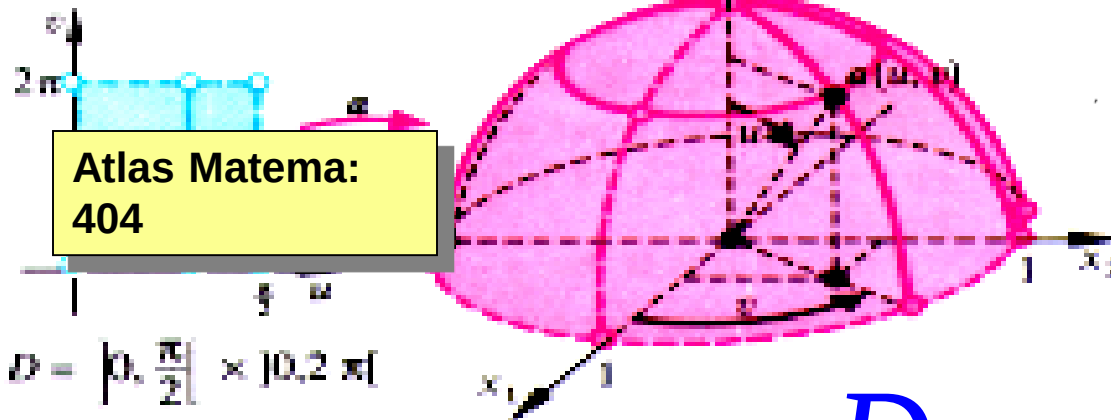
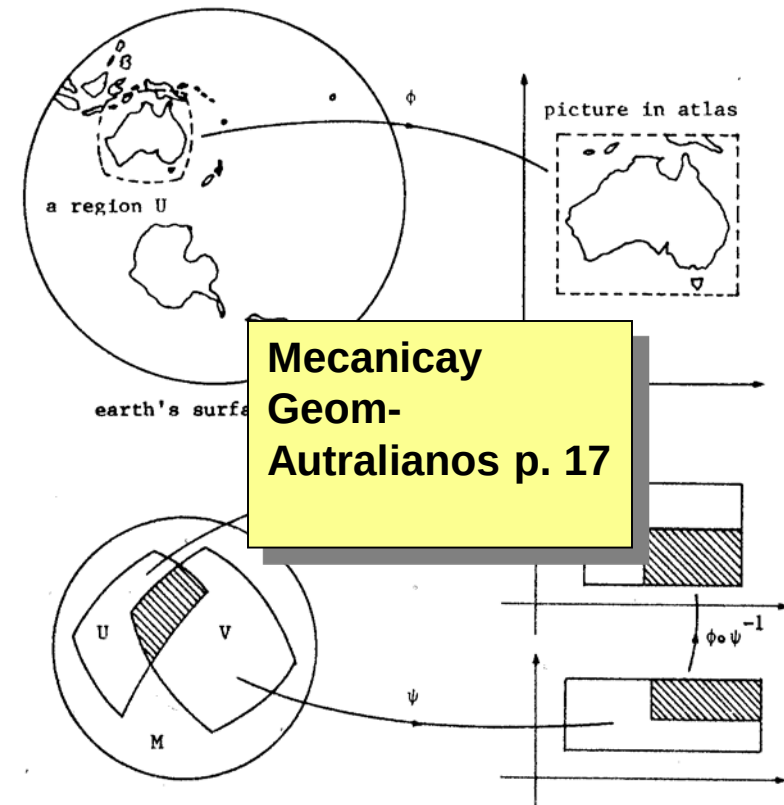
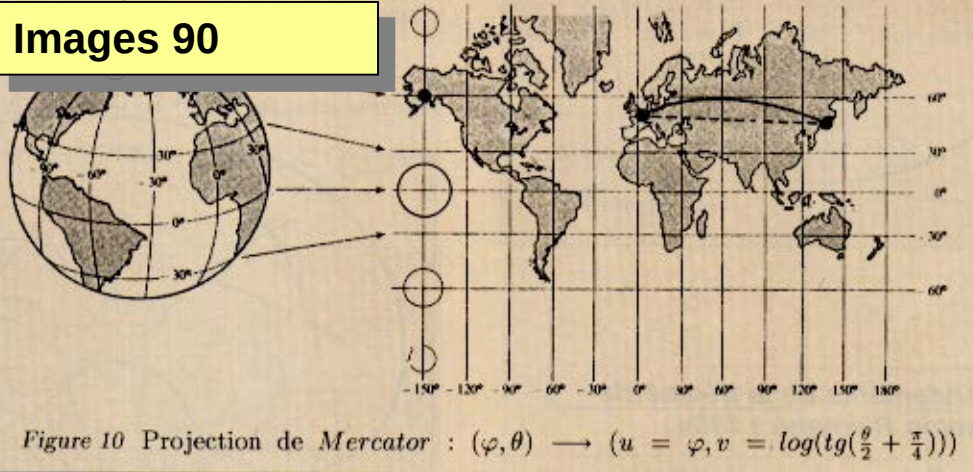
$$D = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$x = \cos \varphi$$



Difusión bidimensional

Images 90



$\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ déf. par $(u, v) \mapsto \alpha$

$$\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$D = \text{div}(k(x) \nabla u)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) + R_e(x, u) + \text{div}(k(x)\nabla u)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

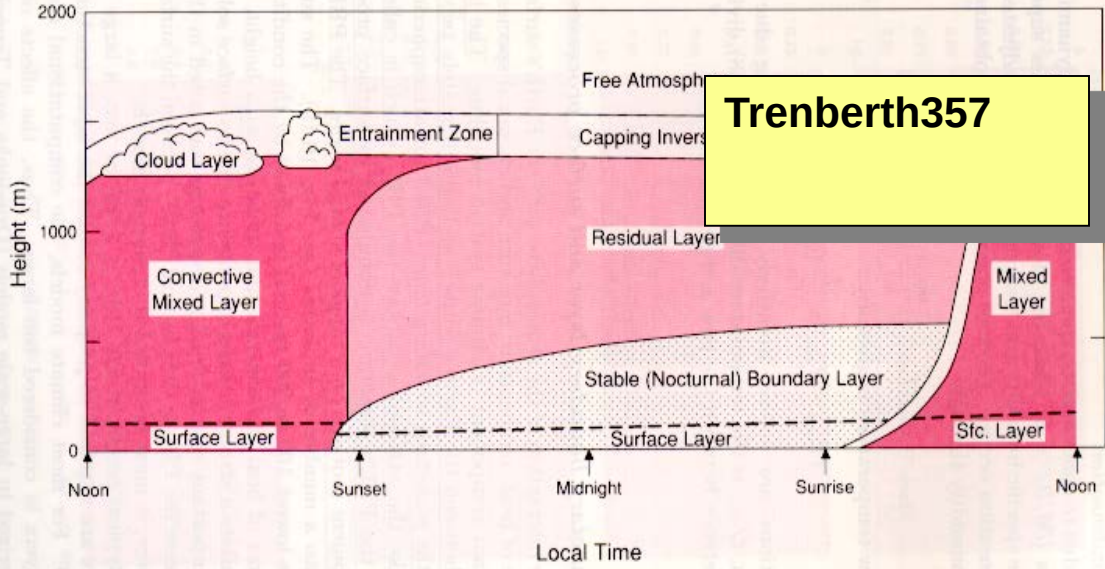
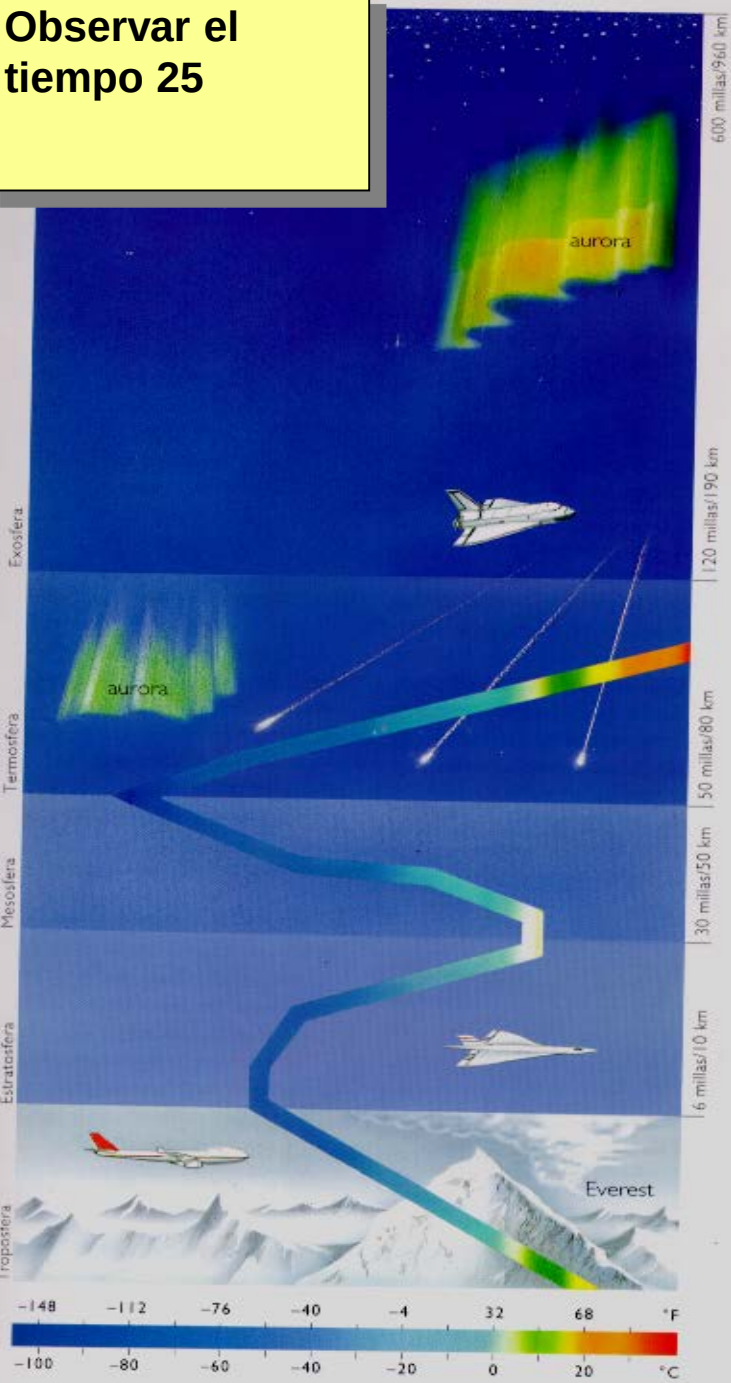
Otro modelo EBM bidimensional :
(latitud y altura): Watts-Hayder(1984),...

2.4b. Modelos estocásticos : Volcanes



Observar el tiempo 25

2.4.b. Modelos radiativos-convectivos



$$\frac{\partial F^{\uparrow}}{\partial z} = -k \rho (F^{\uparrow} - \pi \sigma T^4)$$

$$\frac{\partial F^{\downarrow}}{\partial z} = -k \rho (F^{\downarrow} - \pi \sigma T^4)$$

1-dimens Cont Mech (150)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} (F^{\uparrow} - F^{\downarrow})$$

Mecánica de fluidos en rotación: Ecs. de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2w\Omega \cos \varphi - 2v\Omega \sin \varphi =$$

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} \quad \Omega W \quad \Omega U$$

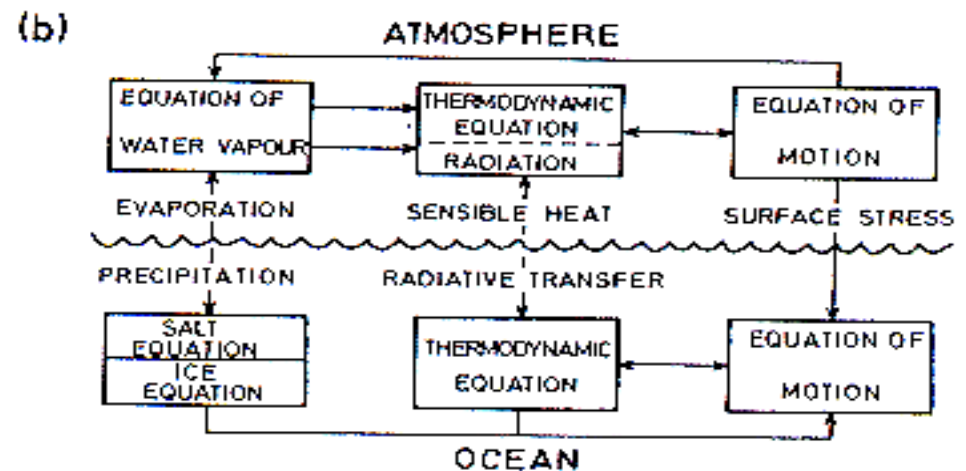
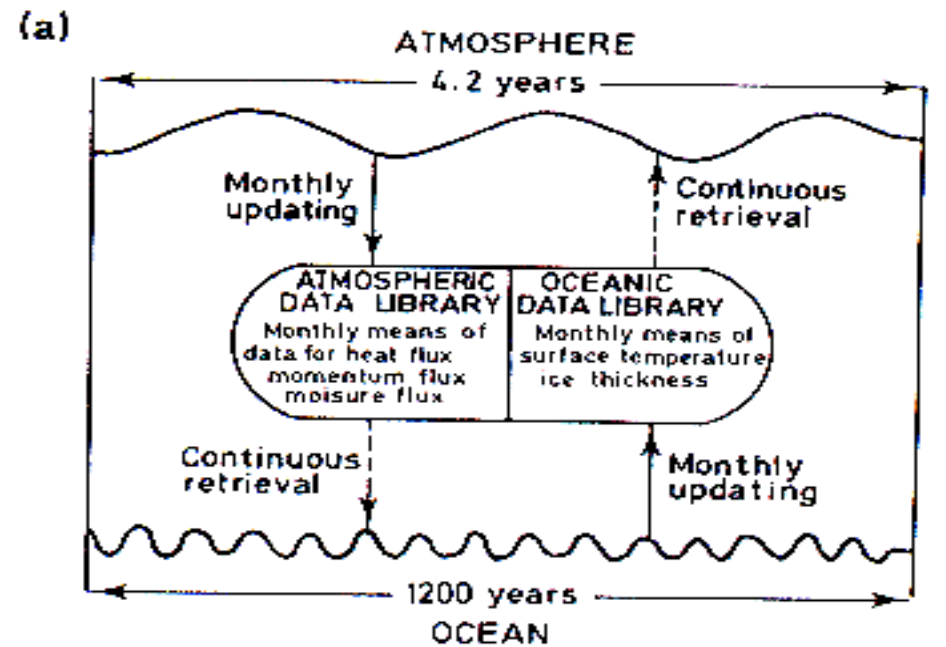
$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{P}{\rho_0 L} \quad \frac{\nu U}{L^2} \quad \frac{\nu U}{L^2} \quad \frac{\nu U}{H^2}$$

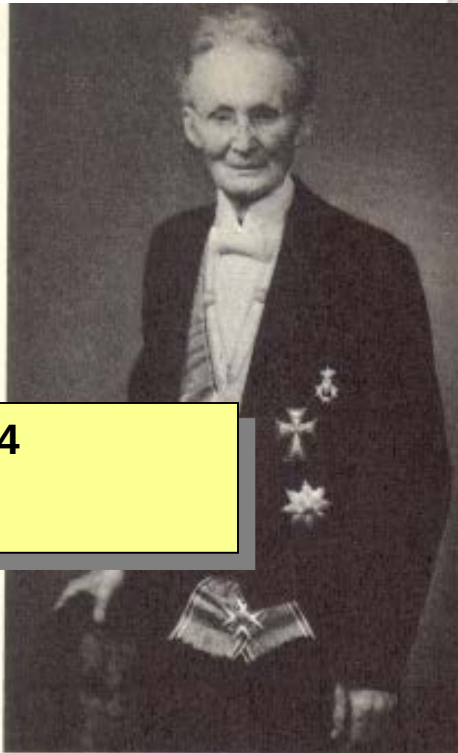
$$\frac{\nu U}{H^2} \ll \Omega U$$

$$\frac{\nu W}{H^2} \ll \Omega W \ll \Omega U$$

Acoplamiento



Pioneros



Life134

V. Bjerknes
(1862-1951)



Vagn Walfrid Ekman

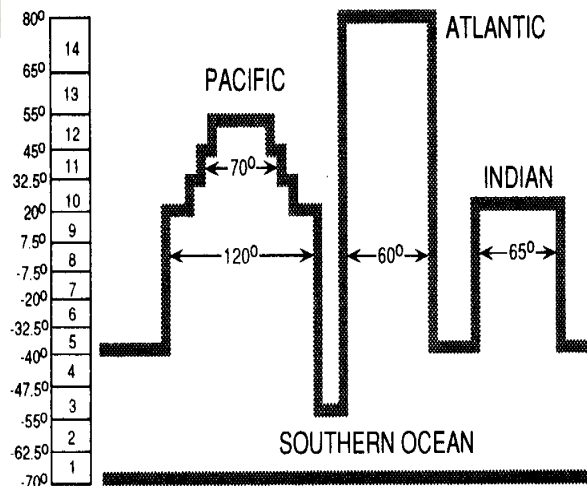
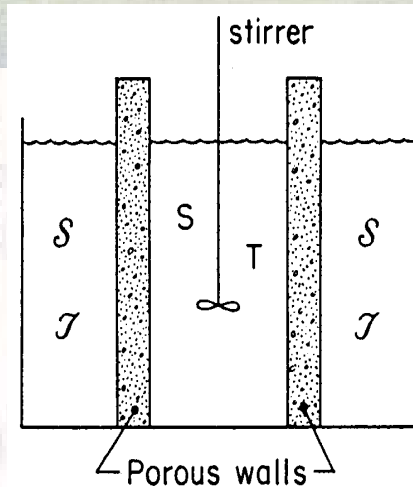
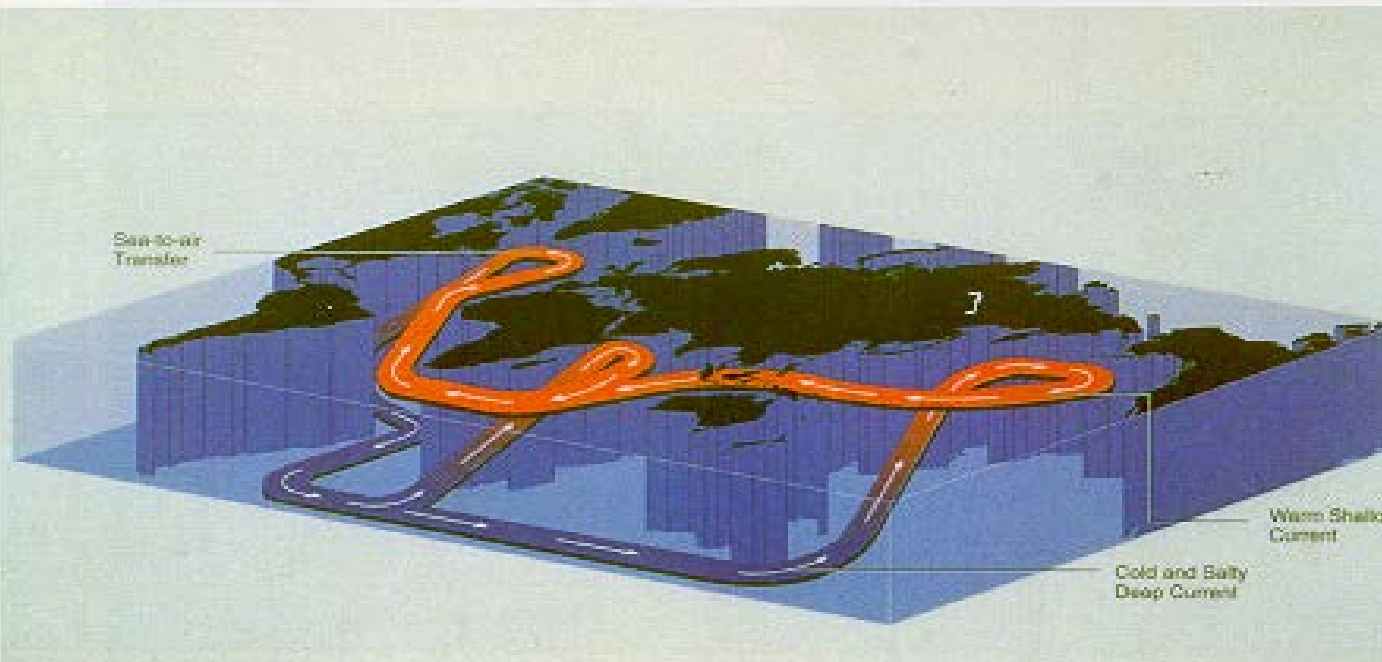
.....
1874 – 1954



Carl-Gustaf Arvid Rossby

.....
1898 – 1957

I Ib. Modelos de salinidad oceánica



Broecker-Denton(1989)

Stommel (1961)

Rahmstorf (1995)

$$\frac{dT}{dt} = c(T - T)$$

$$\frac{dS}{dt} = d(S - S)$$

III. Crisofera: Modelos escalares de casquetes polares

Hutter (1983), Fowler (1992),
Díaz-Schiavi (1995),

Calvo-Durany-Vazquez (2000)

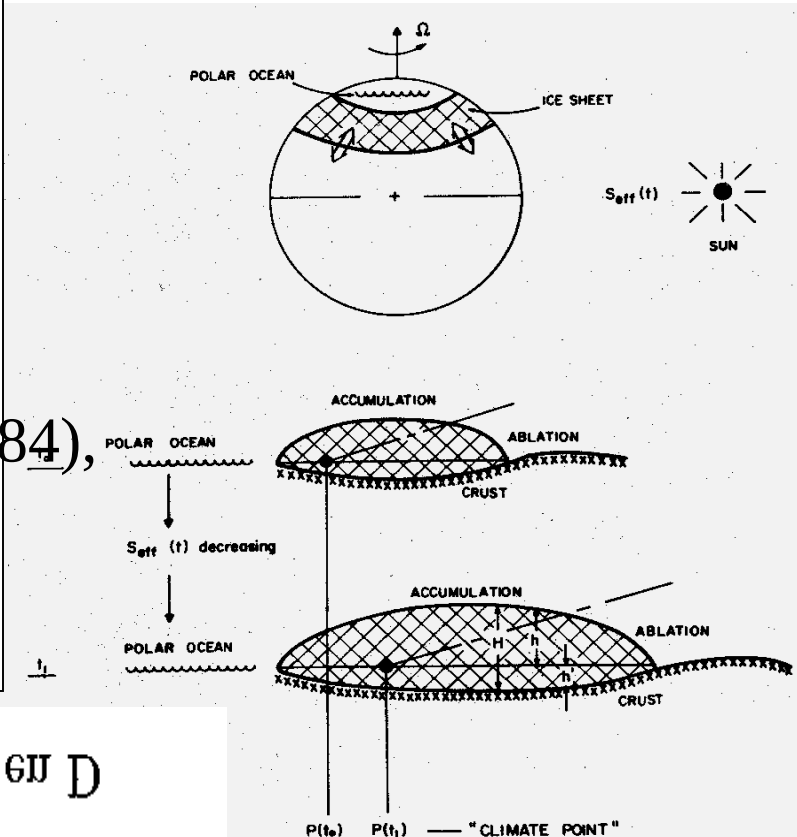
Con ciclos de Insolación Solar

Imbrie-Imbrie (1980), Pollard (1982),

Peltier-Hyde(1984), Watts-Hayder (1984),

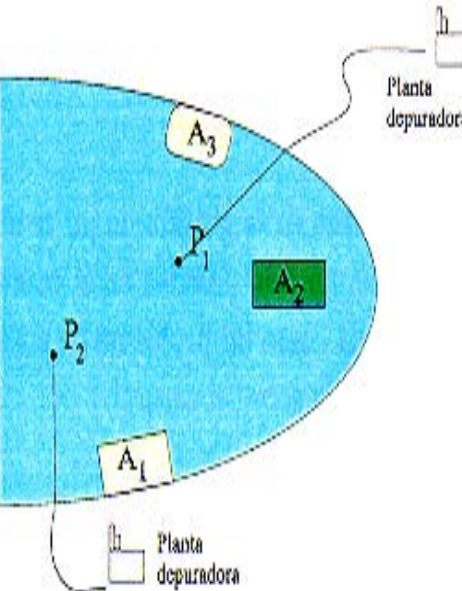
Oerlemans (1980), Denton (1988),

Birchfield-Weertman (1978),...



$$\left\{ \begin{array}{l} p(0^+x) = p^0(x) \\ p = 0 \quad \text{on } \{x^-(t)\} \cap \{x^+(t)\} \\ p^t = \left(p_{x+\delta} | p^x |_{x-\delta} p^x \right)^x + \alpha(t^+x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{on } D \\ t \in (0, L) \\ \text{on } \mathcal{O} \end{array}$$

IV. Componentes bio-químicos



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho_1 - \beta_1 \Delta \rho_1 &= -\kappa_1 \rho_1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{N_E} m_j \delta(x - P_j) && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \vec{n}} &= 0 && \text{en } \Gamma \times (0, T) \\ \rho_1(x, 0) &= 0 && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho_2 - \beta_2 \Delta \rho_2 &= -\kappa_1 \rho_1 + \frac{1}{h} \kappa_2 (d_s - \rho_2) && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \vec{n}} &= 0 && \text{en } \Gamma \times (0, T) \\ \rho_2(x, 0) &= \rho_{20}(x) && \text{en } \Omega \end{aligned} \right\}$$

(A. Bermúdez de Castro, C. Rodriguez,
A. Martínez, C.E. Vázquez,..)

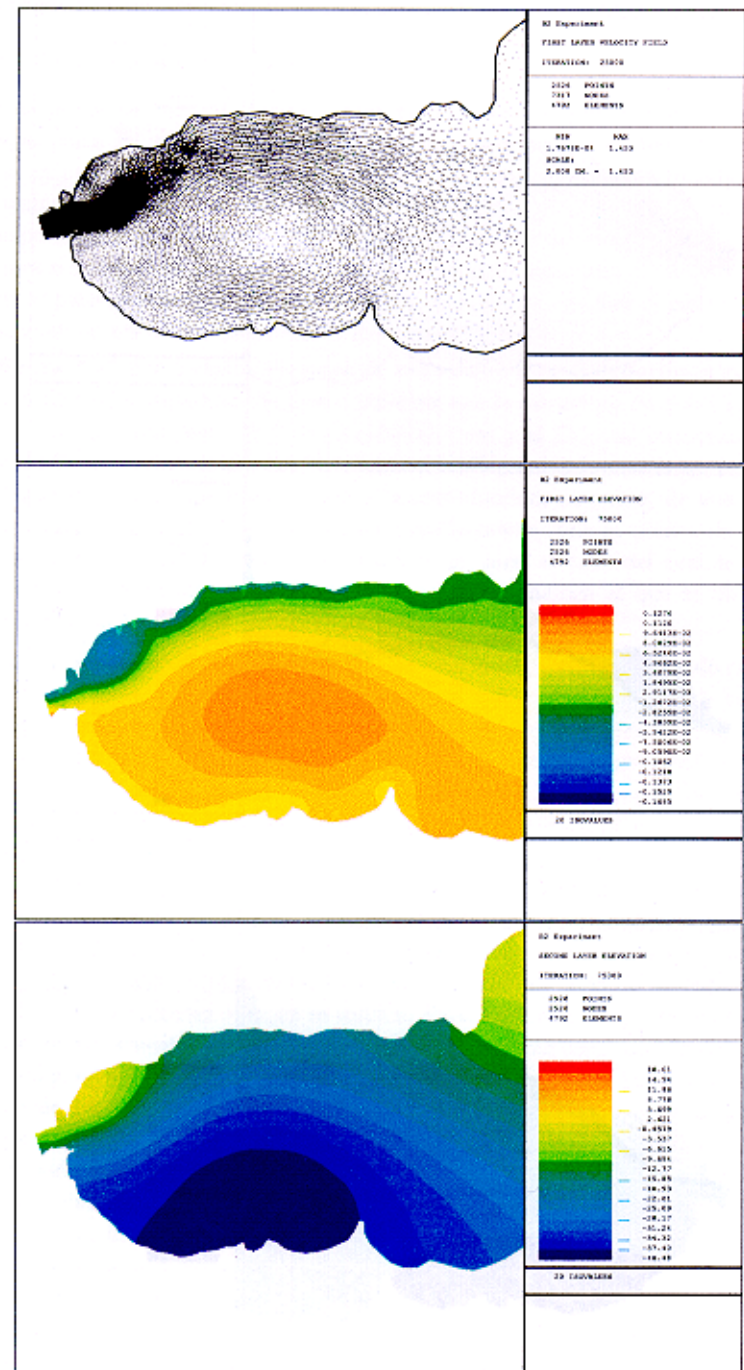
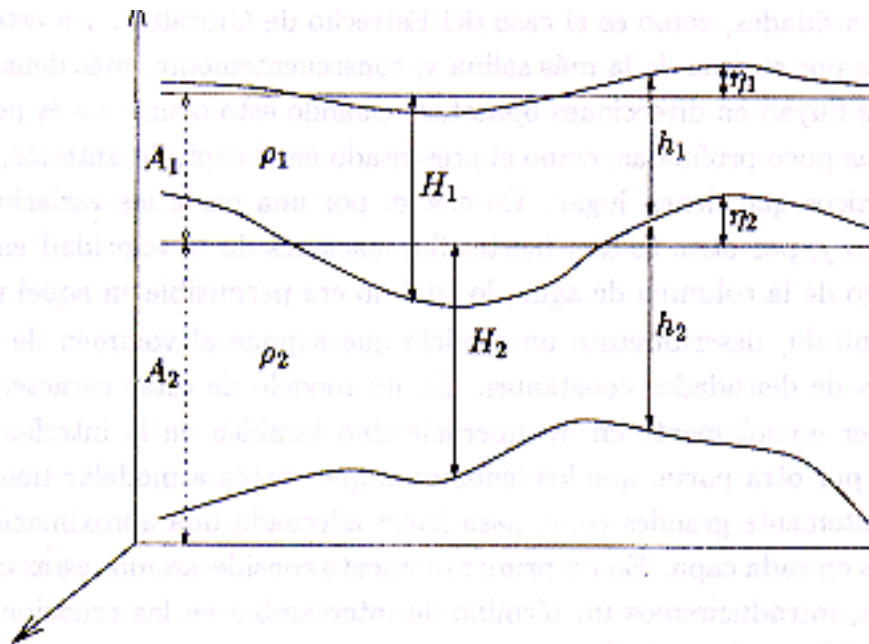
2.5b. Problemas locales

Mar de Alborán
(Challenger, 1984)

**Libro Cambio
Global 157**



Modelización en dos capas “poco profundas”, (A. Valle, C. Pares, J. Macias,..)



ira 4.27: Campo de velocidades medias en la primera capa y elevaciones en la prime

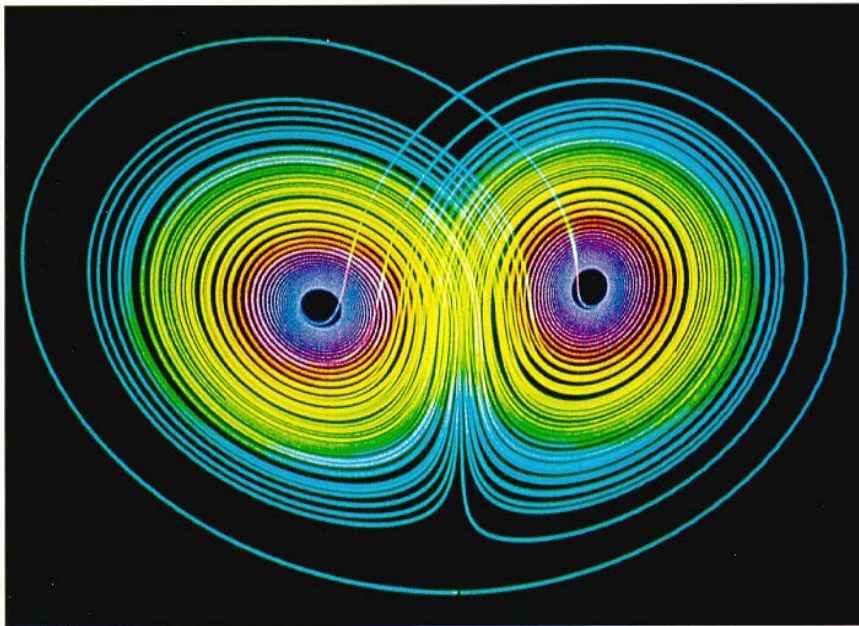
3. Análisis del Modelo

3.1. El atractor de Lorenz

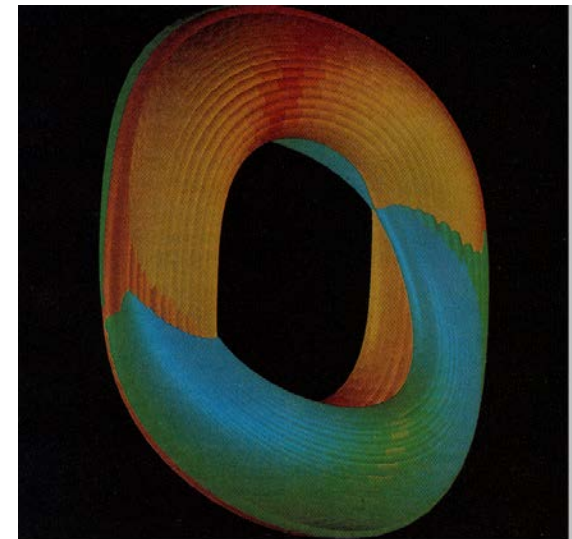
$$\frac{dx}{dt} + \sigma(x - y) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + y - rx + xz = 0$$

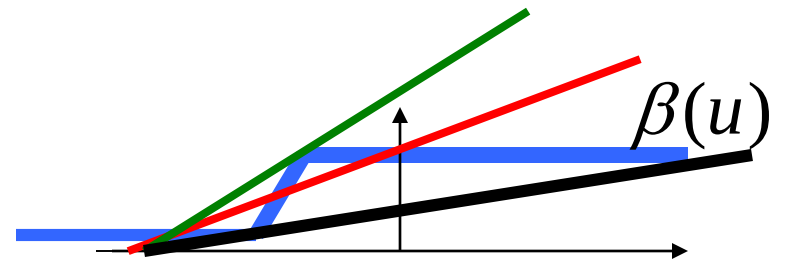
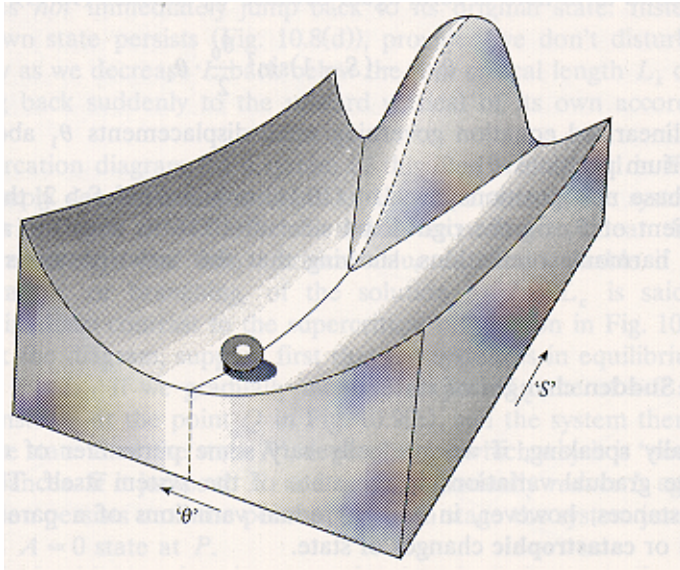
$$\frac{dz}{dt} + bz - xy = 0$$



El atractor de Lorenz. Ilustración de Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Edit. Springer-Verlag.

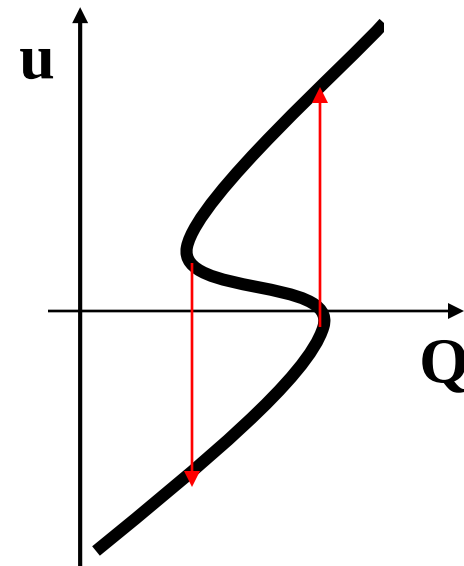


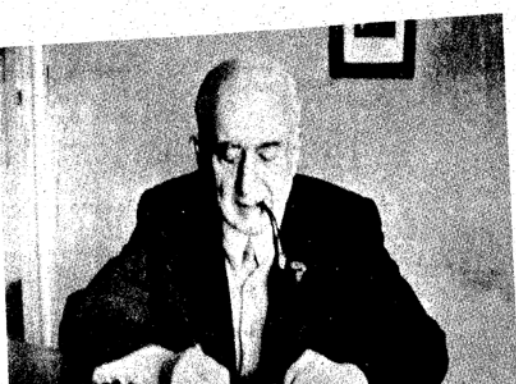
3.2. Bifurcación e Histéresis



Equilibrios del Modelo 0-dimensional

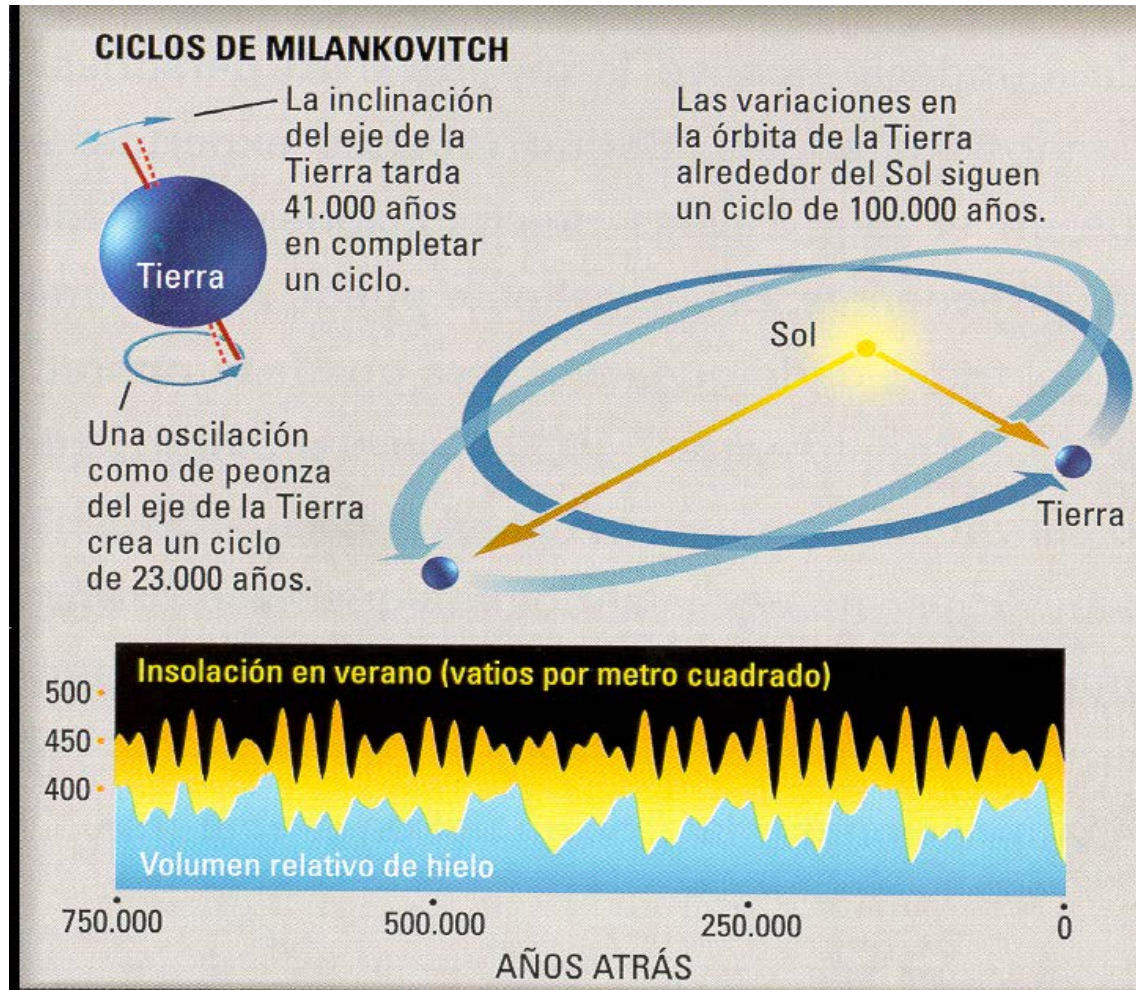
$$A + Bu = Q\beta(u)$$



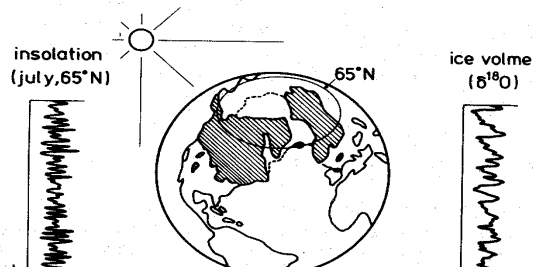
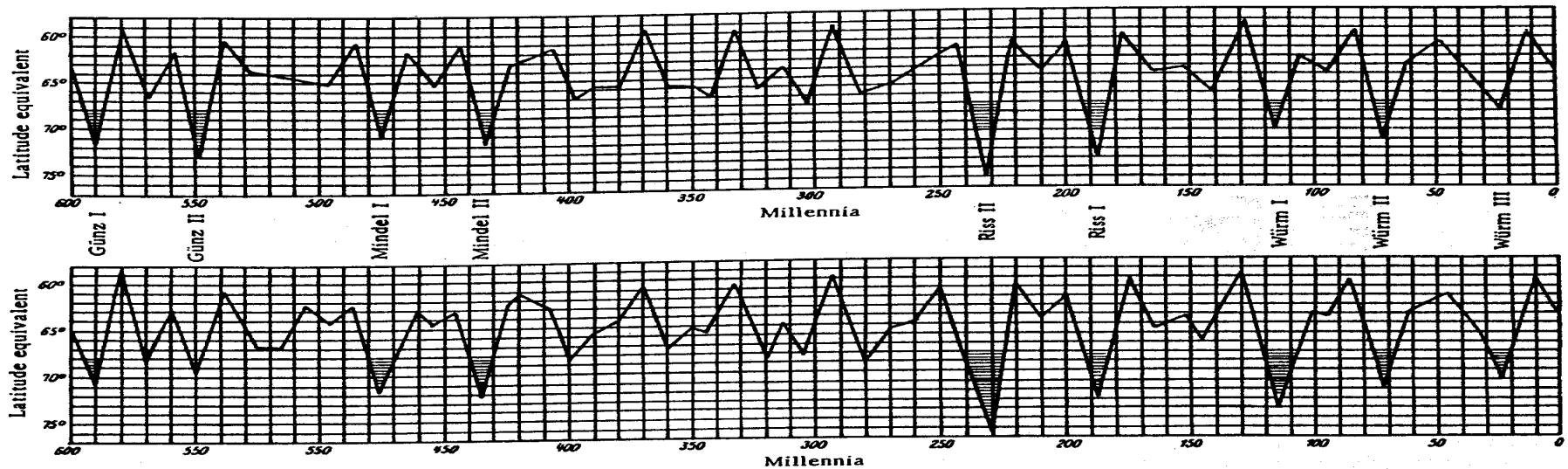


3.3a. La teoría de las Glaciaciones de Milankovitch (1879-1958)

- *irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,
- *cálculo de tablas de gran precisión.
- * estimaciones globales sobre la evolución de lo que él llamó *el clima matemático*



Curvas de radiación de Milankovitz



Condiciones para Glaciación

Veranos, Hem.Norte

¿Hemisferio Sur?

¿Glaciares de montaña hacia el Sur?

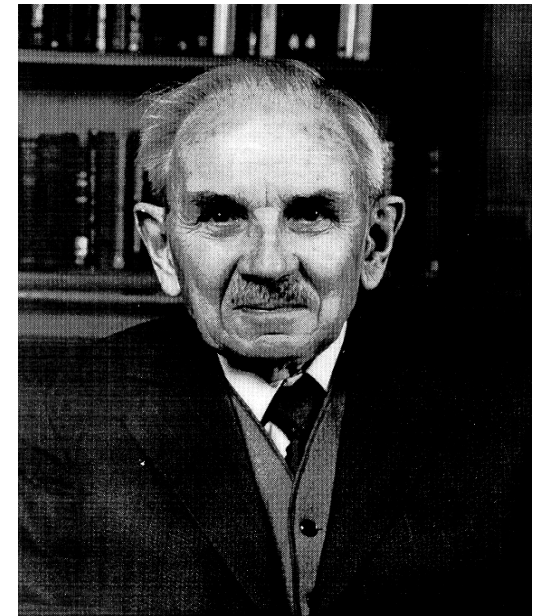
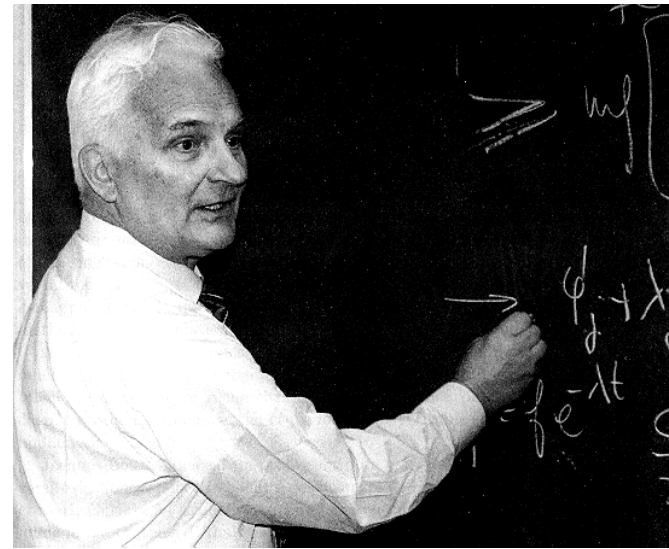
Resultados matemáticos para las ecuaciones primitivas Atmósfera/Océano

J.L. Lions, R. Temam y S. Wang (1992,...)

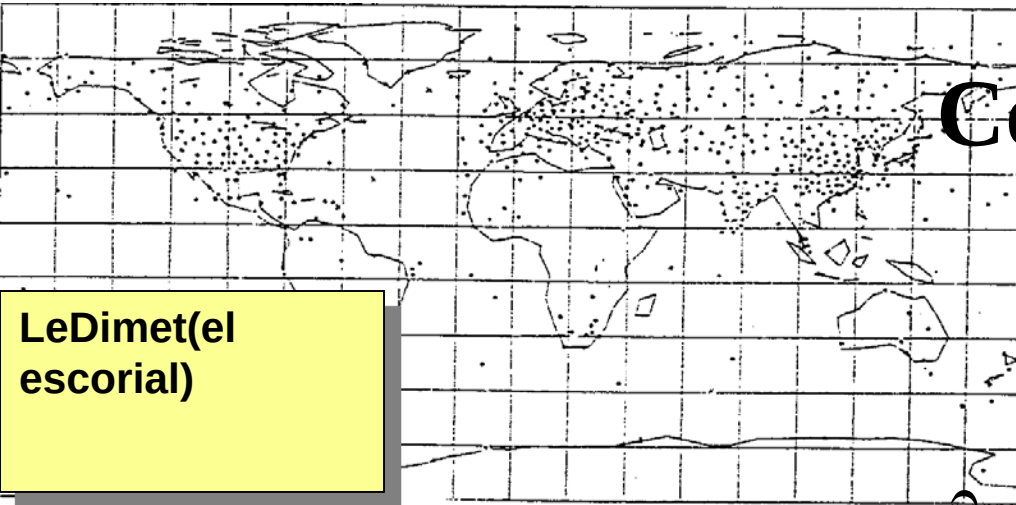
***Existencia de soluciones por “estimaciones a priori” y técnicas de Análisis Funcional (Jean Leray 1931, Navier-Stokes)**

***La cuestión de la unicidad de soluciones permanece abierta en el 2000**

Jean Leray
(1906-1998)



3.4. Datos Incompletos: Teoría matemática. Centinelas, Asimilación



Radio-sondas: perfiles
verticales de temperatura,
viento y humedad

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f_1 + g_1$$

$$Bu = f_2 + g_2$$

$$u(t_0) = u_0 + g_0$$

f_1 , f_2 y $u_0 \equiv$ datos disponibles

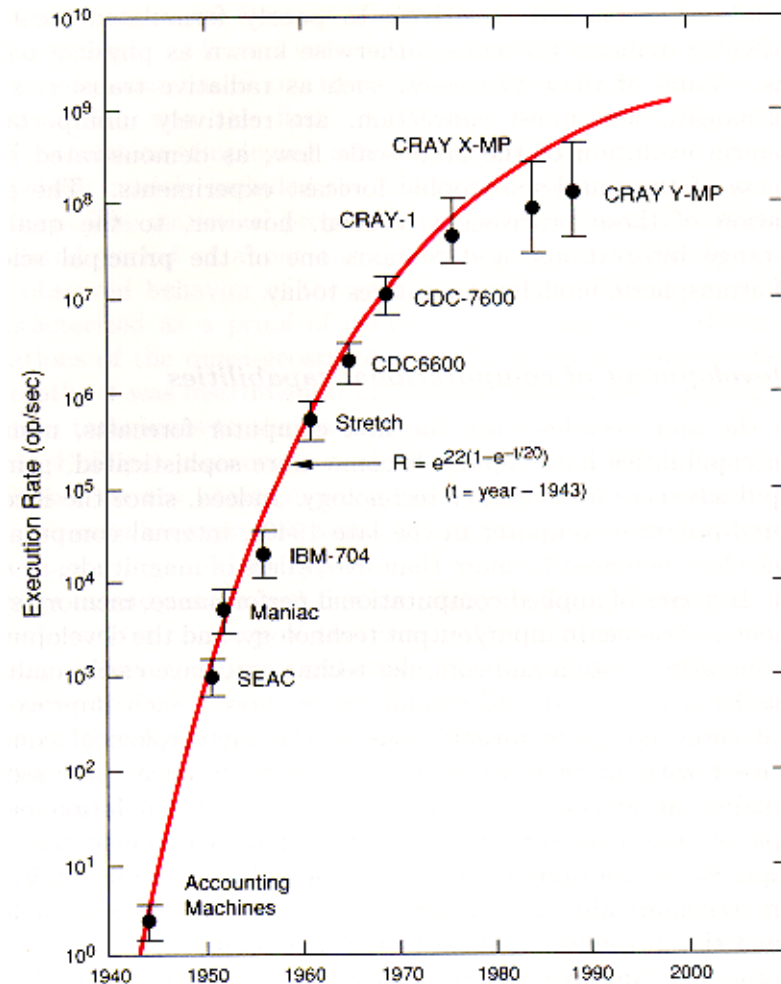
g_1 , g_2 y $g_0 \equiv$ datos desconocidos

rdson. Super-odenadores: Cálculo

Las 64.000 máquinas de
Richardson

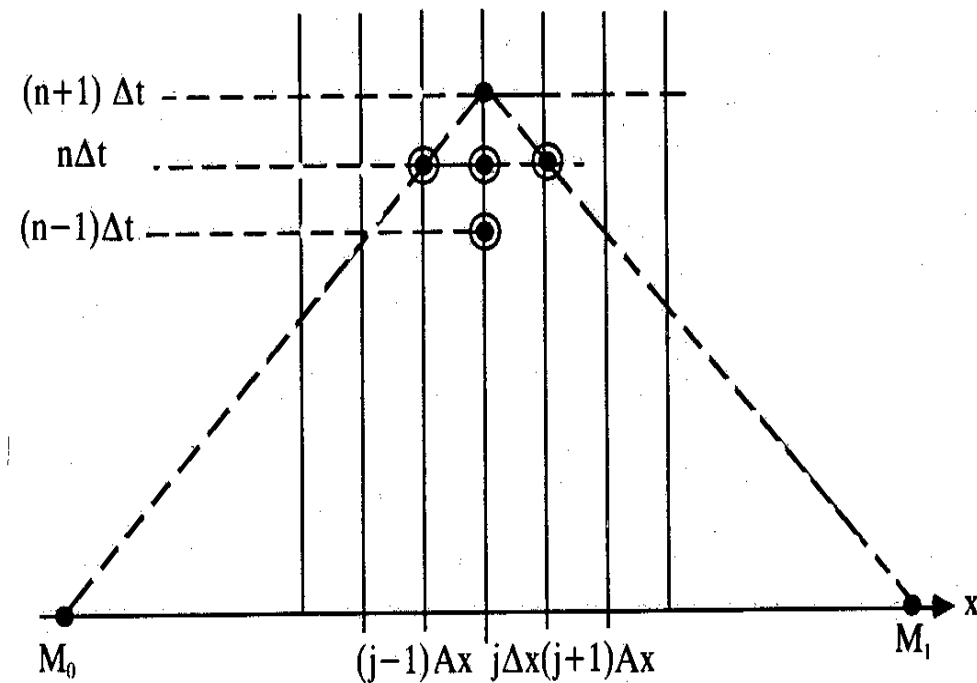
Lewis Fry Richardson

1881 – 1953



Ley de G.E. Moore (1965) : “La potencia de computación se duplica cada año”

Algoritmos teóricos



$$u_t = \Delta u$$

$$\frac{1}{2\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - 2u_j^n)$$

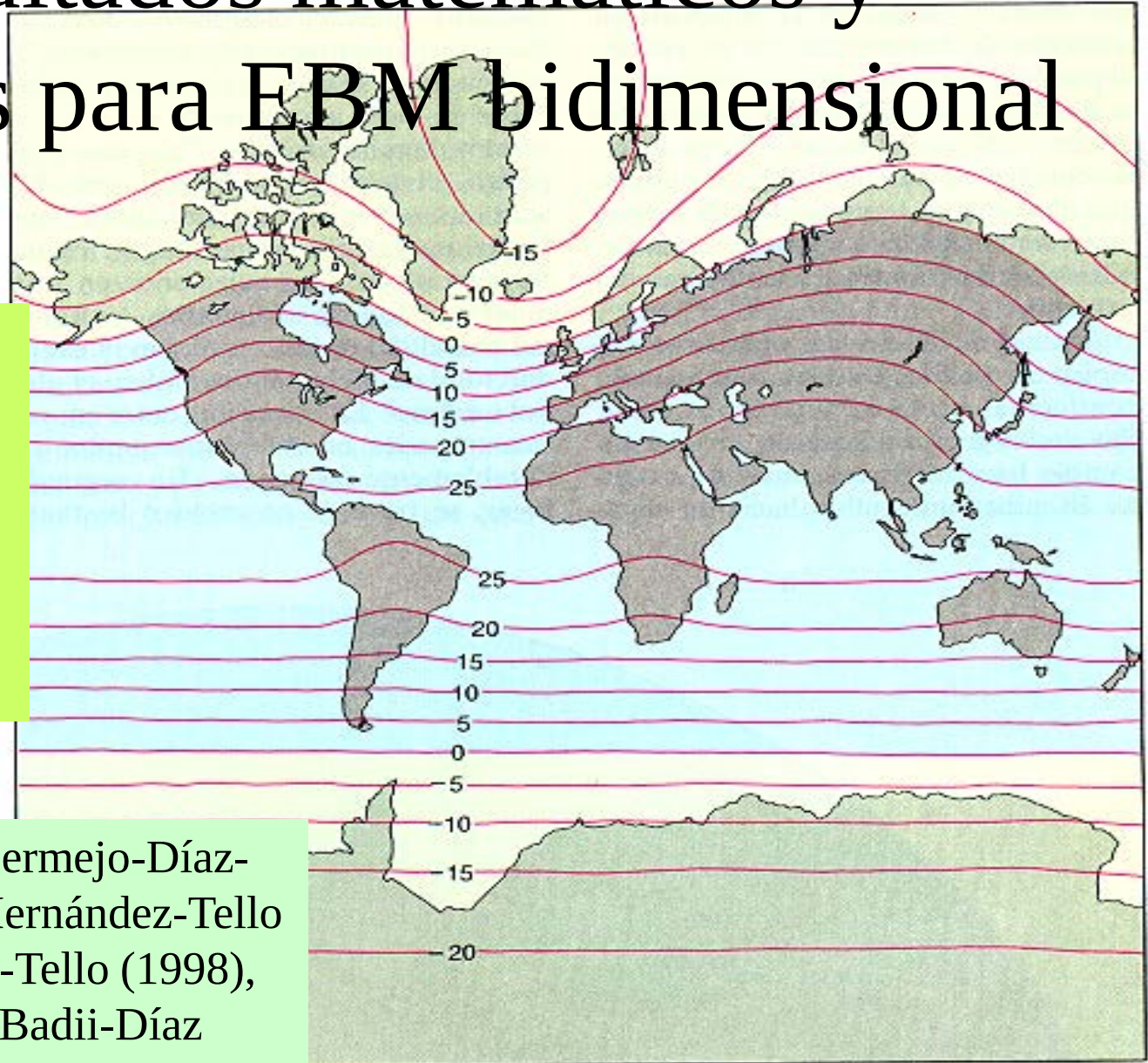
3.5b. Resultados matemáticos y numéricos para EBM bidimensional

North-Coakley
(1979),

Suarez-Held (1979),

North-Short-
Mengel(1983)

Díaz-Tello (1995), Bermejo-Díaz-
Tello (1998), Díaz-Hernández-Tello
(1997), Arcoya-Díaz-Tello (1998),
Hetzer-Díaz (1997), Badii-Díaz
(1997),.....



4. Ejemplos de acciones sobre el Clima

4.1. Acciones locales. Siembra de nubes

Observar el tiempo139

tradicionales sigue siendo objeto de controversia.

LOS EXPERIMENTOS DE SIEMBRA

nubes con hielo seco fueron realizadas por Vincent Schaefer (izquierda, delante). Normalmente, los generadores acoplados a aviones ligeros (abajo) arrojan cristales de yoduro de plata.



EL PAÍS, jueves 13 de mayo de 1999

DEPORTES

El Parma se corona sin rival

El **Marsella** se rinde al primer contratiempo y acaba goleado en la final de la **Copa de la UEFA**

MARSELLA	0
PARMA	3

Olimpico de Marsella: Porato; Blondeau, Issa, Blanc, Domoraud, Da Silva (Camara, m. 46); Brandao, Bravo, Gourvenec, Pires; y Maurice.

Parma: Buffon; Thuram, Sensi, Cannavaro; Fuser, Dino Baggio, Boghossian, Vanoli; Verón (Fiore, m. 76); Chiesa (Balbo, m. 72) y Crespo.

Goles: 0-1. M. 26. Blanc cabecea pillado hacia su portero, Hernán Crespo adivina la cesión, se anticipa y bate a Porato por arriba.

0-2. M. 36. Vanoli ajusta un cabezazo al palo izquierdo tras un centro preciso de Fuser.

0-3. M. 55. Verón centra desde la derecha, Crespo deja pasar el balón y Chiesa fusila a la escuadra.

Árbitro: Dallas (Escocia). Mostró tarjeta amarilla a Blondeau.

65.000 espectadores en el estadio Luzhnikí de Moscú. Final de la Copa de la UEFA. Campeón, el Parma.

JOSÉ MIGUÉLEZ
No es el Parma un equipo voraz, de esos que siempre quieren más y más. Por eso la final de Moscú concluyó en 3-0. Simplemente en 3-0. La superioridad italiana fue mucho más grande que el resultado. Pero se sintió tan seguro, tan dueño de



Los jugadores del Parma celebran el triunfo con la Copa de la UEFA. / REUTERS

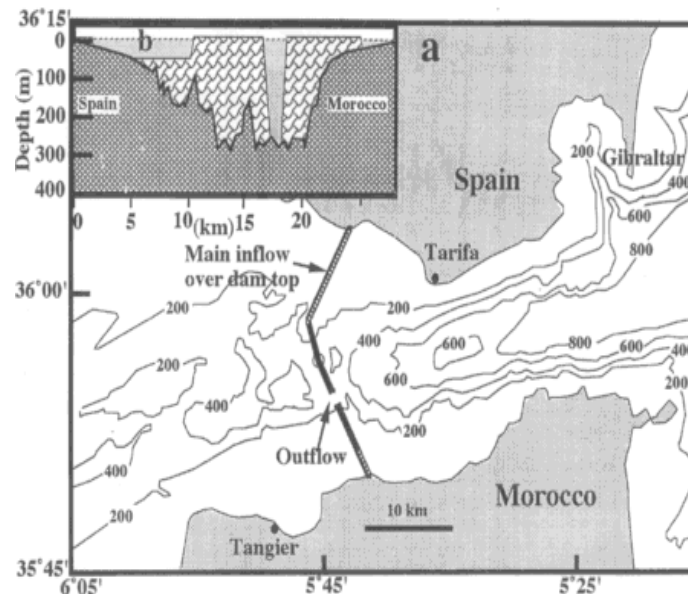
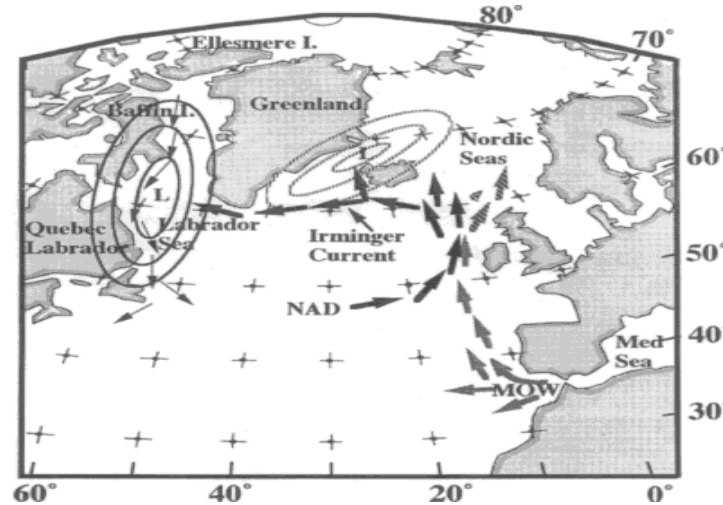
El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes

4.2. Acciones globales

a) Diques en Gibraltar

R.G. Thomson

American
Geophysical
Union, 1997



Milankovitch insolation
at 25°N decreases

African monsoons
weaken, Nile discharge
diminishes

Mediterranean hydrologic
deficit increases

Mediterranean salinity
rises, Outflow at
Gibraltar increases

Outflow water upwelling
off Scotland increases

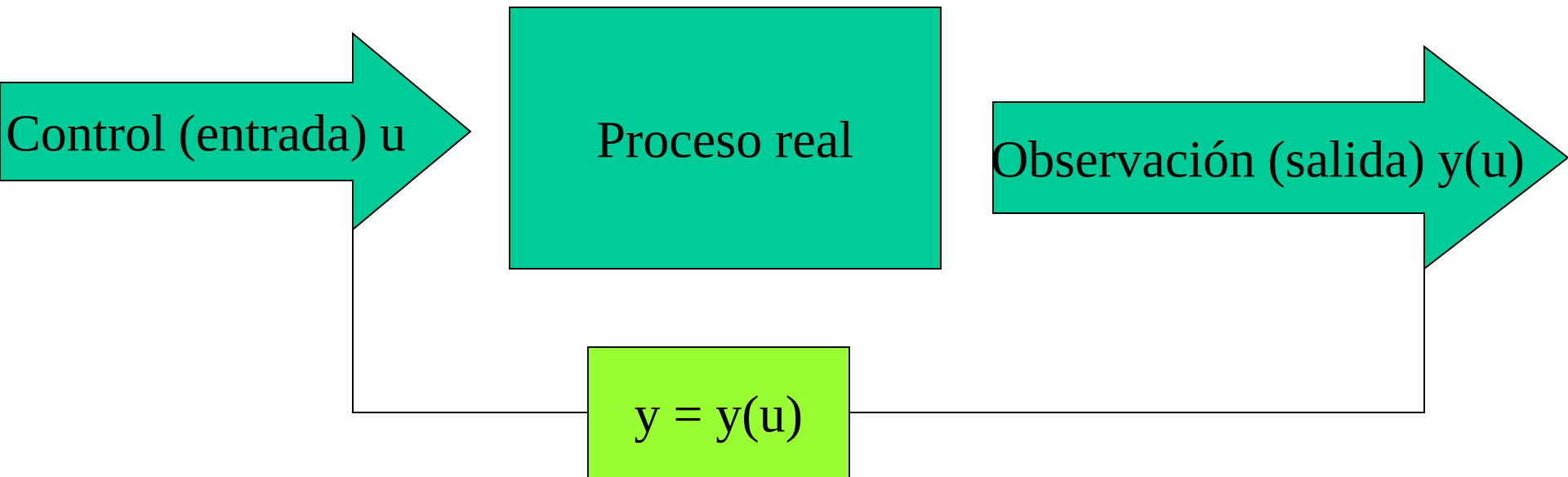
Warm surface water
diverted to Labrador
Sea, cold upwelling
water enters Nordic Seas

Warmer Labrador Sea,
greater advection of
moisture into Canada

Canadian ice-sheet growth
begins as Nordic Seas
and Europe cool

b) J. von Neumann (1955): Modificación artificial del albedo

c) Teoría de Control: planteamiento general



Objetivo: Encontrar el control u para que la observación $y(u)$ sea lo “mejor posible”

Óptimos en espacios de dimensión infinita

**d) La componente económica. Cumbres Mundiales.
Teoría de juegos. Teoría de la decisión bajo incertidumbre**

e) Resultados matemáticos sobre control en EBM

$$y_t - y_{xx} + y^3 = \arctg y + u(t)\delta_{1/2} \text{ en } (0,1) \times (0,T),$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0 \quad t \in (0,T),$$

$$y(x,0) = y^0(x) \quad x \in (0,1),$$

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{k}{2} \|y(T, \cdot; u) - y_d\|_{L^2(0,1)}^2$$

$$k = 10^{12}$$

Experiencia numérica

