La integral de Lebesgue: herramienta de la Matemática Aplicada

J.I. Díaz
RAC, UCM

Real Academia de Ciencias
24 de abril de 2002

Introducción

•Todo matemático con curiosidad e interés en las aplicaciones a otras ciencias naturales y sociales y a la tecnología debe llevar en su caja de herramientas los más modernos resultados del Cálculo Integral y Diferencial de su tiempo.

•Integral definida (*les grandeurs*): longitud, área, volumen (noción primitiva y evolutiva, pintura, música,...)

•Integral indefinida: operación inversa a la derivación, solución de F’=f

1902: Tesis de Henry Lebesgue (Cras 1901)

Plan:

1. Panorama de la Física-Matemática hacia 1902

2. Limitaciones de la integral de Riemann

3. La integral de Lebesgue y algunos de sus logros

A) TESIS DOCTORAL
DE H. LEBESGUE

N° D'ORDRE
1105.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI LEBESGUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

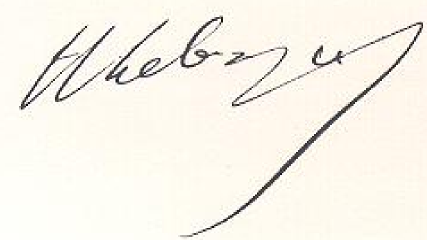
1[re] THÈSE. — INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.
2[e] THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le ______ juin 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. PICARD, *Président.*
KOENIGS, } *Examinateurs.*
GOURSAT, }

MILAN,
IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.
Rue Rovello, 14-16.

1902



Henri LEBESGUE (1875-1941)
(Photographie datant d'environ 1904)

1. Panorama de la Física- Matemática hacia 1902

Ecuación de la cuerda vibrante (ondas)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1746: Jean Le Rond D'Alembert: "Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda tensa que se hace vibrar"

Problemas elípticos:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \text{ en } \Omega \\ u = \varphi \qquad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega \subset R^N, N \geq 1$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Ecuación de Laplace (1780): f=0, potencial gravitatorio

Ecuación de Poisson (1813), Green (1828), Gaus (1839), potencial eléctrico

Ecuación de superficies mínimas y de curvatura constante:

Lagrange (1760), Gaus (1830), Plateau (1840)

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = H(x,u)$$

La ecuación del calor: Fourier "Teoría analítica del calor" (1811)

$$u_t - \Delta u = 0$$

Sistema de Navier-Stokes: Navier (1822), Poisson (1831), Stokes (1845)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f} \\ div\,\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Y además:

-Ecuaciones de Euler para gases (1755)

-Ecuaciones de la Elasticidad (Navier (1821), Cauchy (1822)

-Ecuaciones de Maxwell (1864)

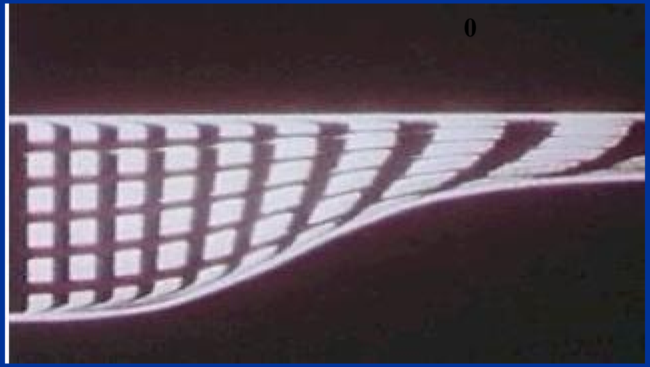
- ....

La obtención de esas ecuaciones requiere herramientas del Cálculo Integral

(i) Paso de forma integral a forma diferencial (localización)

$$\mathbf{0} = \frac{1}{med(V(t))}\int_{V(t)} (\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} - \mathbf{f})\,d\mathbf{x} \to_{med(V(t))\to 0} (\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} - \mathbf{f})\Big|_{(\mathbf{x_0},\, t)},$$

$\forall$ volumen de control V que se contrae a $\mathbf{x_0}$



$$lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds = f(t)$$

(ii) Multiplicación por un "amplio" conjunto de funciones "test"

(ii.a) Ecuaciones de Euler-Lagrange del Cálculo de Variaciones:
Principios de Maupertuis y de Hamilton

$$0=\partial J(u:v)=\frac{d}{dt}J(u+tv)\Big|_{t=0}$$

$$0=\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial F}{\partial p_i}(x,u,\nabla u)\Big)+\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\nabla u)\Big)v\,d\mathbf{x}$$

$$\forall\ \ v \text{ "desplazamiento infinitesimal"} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial F}{\partial p_i}(x,u,\nabla u)\Big)+\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\nabla u)=0$$

Principio de Dirichlet: L.Kelvin (1847), Tésis de Riemann (1854), Dirichlet (1876),

$$Min_K J,\ K=\left\{v:\overline{\Omega}\to R : v=\varphi \text{ en } \partial\Omega\right\}$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, d\mathbf{x}$$

Energía (seminorma) de Dirichlet

Superficies mínimas

$$J(u)=\int_\Omega \sqrt{(1+|\nabla u|^2)}\,d\mathbf{x}$$

Área de la superficie (no paramétrica)

(ii.b) Principio de trabajos virtuales

$$\mathbf{0} = \int_\Omega (\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} - \mathbf{f})\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x},$$

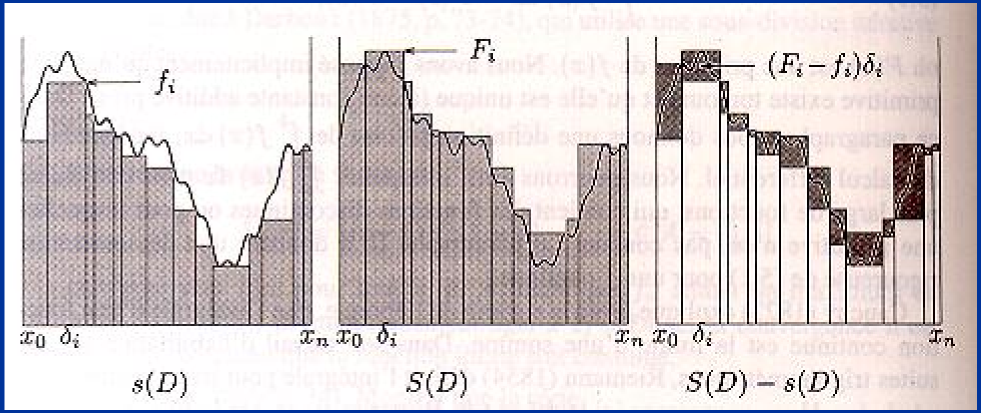
$$\forall\ \mathbf{v}\ \text{"desplazamiento infinitesimal"} \Leftrightarrow \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}\ \text{en}\ \Omega\times(0,\mathrm{T})$$

En ambos casos:

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0\ \ \forall\, \mathrm{g} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}) \Rightarrow f = 0\ \text{ en } \Omega$$

Du Bois-Reymond (1879),...

2. Limitaciones de la integral de Riemann.



* Inapropiada para funciones discontínuas

* Paso al límite de una sucesión de integrales bajo convergencia uniforme de los integrandos

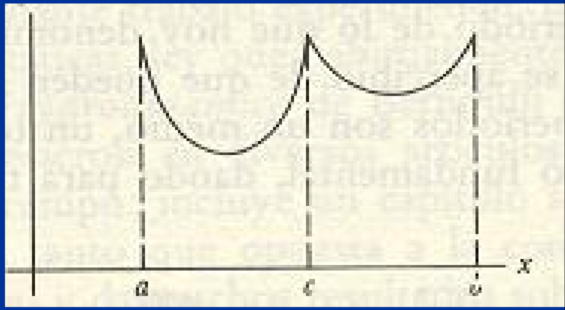
¿importancia de esas limitaciones?

(i) “Una discontinuidad, una singularidad no es una monstruosidad” (Lebesgue 1922)

Fórmula de d’Alembert: ecuación de ondas

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

f y g funciones analíticas



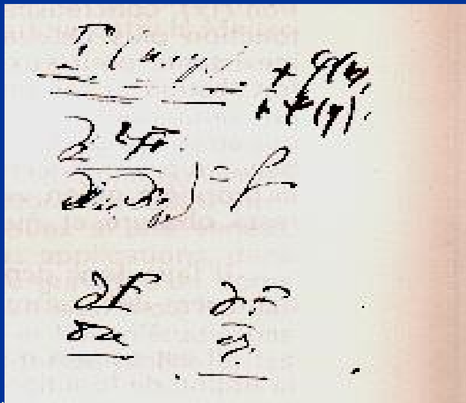
1748: Euler, f y g funciones C^1 a trozos

[llamadas por él “discontinuas”]

Primera noción de “solución débil”

1755: Euler da una nueva definición de función

Controversia: D’Alembert/Euler



Inquietud de Lebesgue desde 1º de l’Ecole Normale (tésis de Baire 1899),

Superficies no regladas aplicables sobre el plano

Dans certains livres de géométrie élémentaire, on apprend aux enfants comment il faut plier une feuille de carton pour construire les divers polyèdres réguliers. C'est à ces livres que j'ai immédiatement pensé lorsqu'on m'a démontré, pour la première fois, que les surfaces applicables sur le plan sont toutes des surfaces développables. Le désaccord apparent entre cet énoncé et l'existence même de l'art du cartonnier s'explique de suite : un polyèdre est une surface non analytique et possède des lignes singulières.

Origen físico

Le problème des surfaces applicables de la géométrie des surfaces a été évidemment suggéré par la considération des déformations matérielles ; pourtant, dans la plupart des déformations physiques, il y a modification des longueurs ; il s'agit alors d'un problème appartenant à la théorie de l'Élasticité.

Aplicación geométrica de su Nota en las CRAS, 1901: longitud de una curva con picos

La longitud de una curva $x = f(t), y = \varphi(t), z = \psi(t)$ viene dada por

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$$

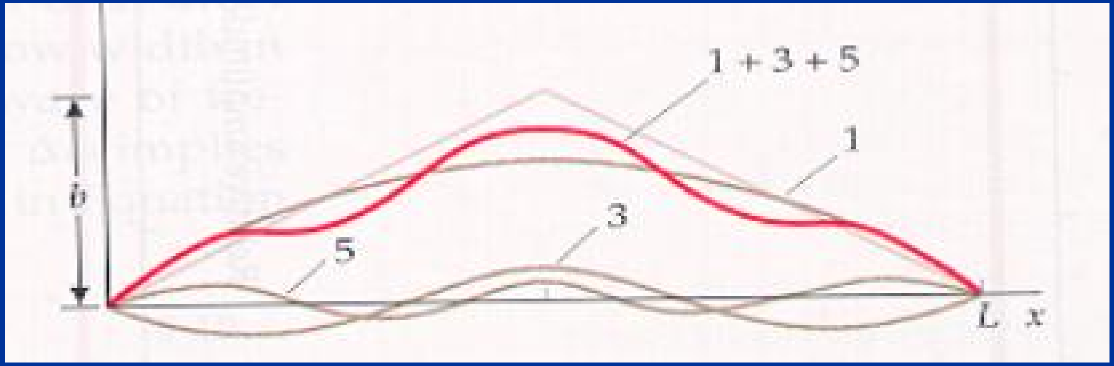
aunque $f'(t), \varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ sean solo acotadas.

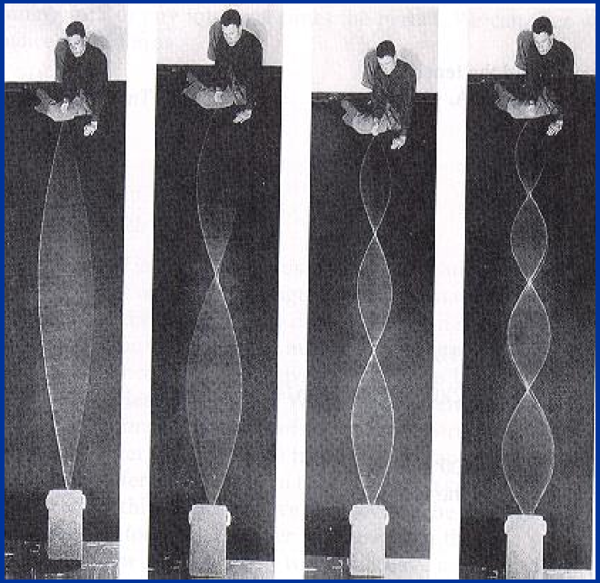
Pero además: funciones discontinuas en otros contextos

***Series de Fourier**

1751: Daniel Bernoulli, “coexistencia formal de oscilaciones pequeñas”

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} a_n sen(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi ct}{L})$$





1759: Lagrange, incorpora velocidad inicial no nula, pasa al límite $m \to \infty$

Fourier (1807) “toda *funcion* acotada” se puede expresar como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n sen\frac{n\pi x}{a}) \text{ siendo}$$

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_{-a}^{a} f(x)dx, \; a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx, \; b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)sen\frac{n\pi x}{a}dx,$$

Plan: Multiplicar por funciones trigonométricas, integrar término a término (Cauchy 1821, Riemann) e intercambiar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-a}^{a} \quad \text{con} \quad \int_{-a}^{a}\sum_{n=1}^{\infty}$$

Abel (1829)

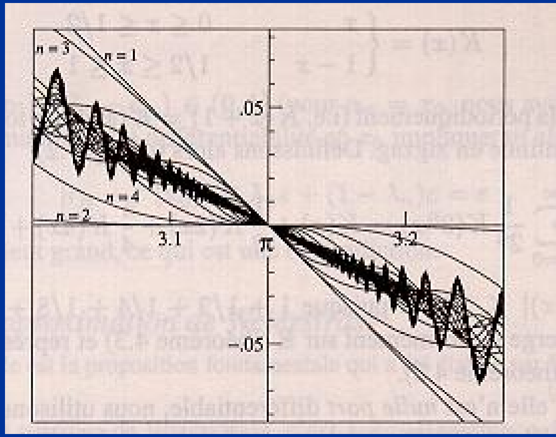
Ejemplo de función discontinua para la que falla el desarrollo de Fourier:función de Dirichlet (1829)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \text{ x } es\ racional \\ 0 & si \text{ x } es\ irracional \end{cases}$$

No es Riemann integrable

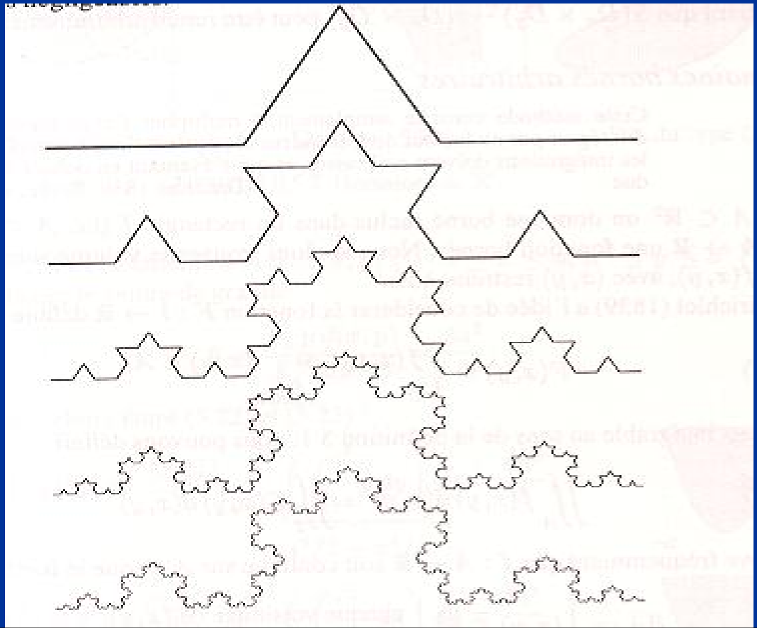
* Ampere (1806): toda función continua es derivable salvo en un "pequeño" conjunto de puntos.

*Riemann (1861): ejemplo de función continua y no derivable sobre un conjunto denso



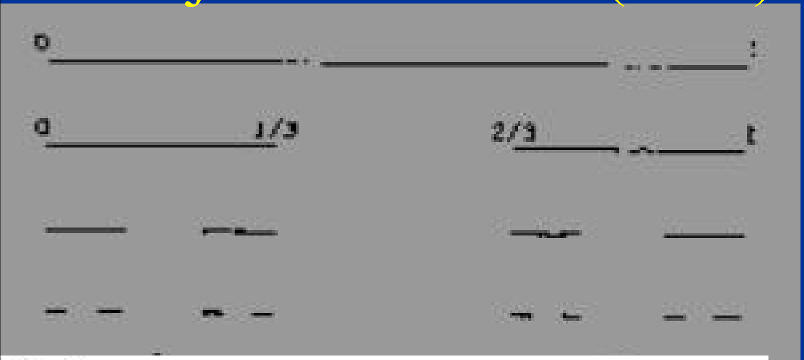
*Weierstrass (1872): existen funciones contúnuas que no son derivables en ningún punto

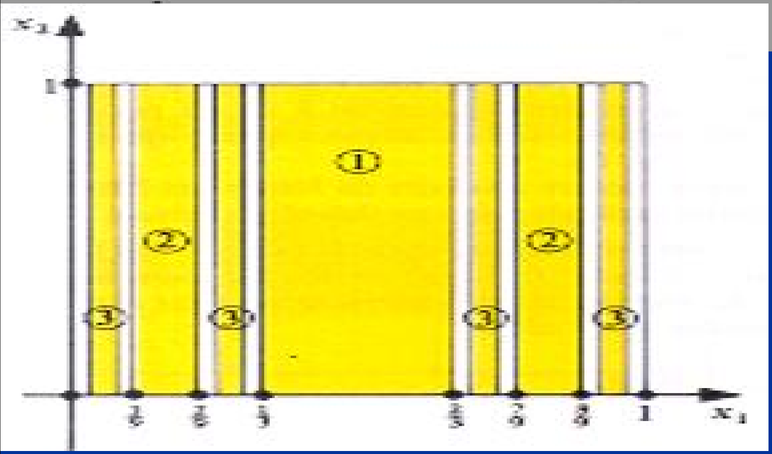
*Darboux (1875): tratado sobre funciones discontínuas



*Von Koch (1906), Takagi (1903),..

Conjunto de Cantor (1883)





Función singular de Lebesgue (1920)

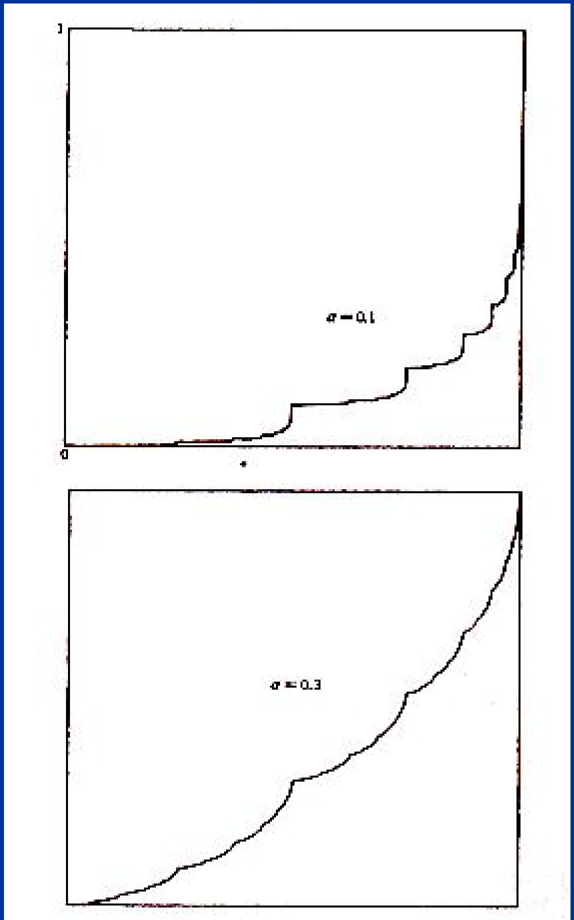
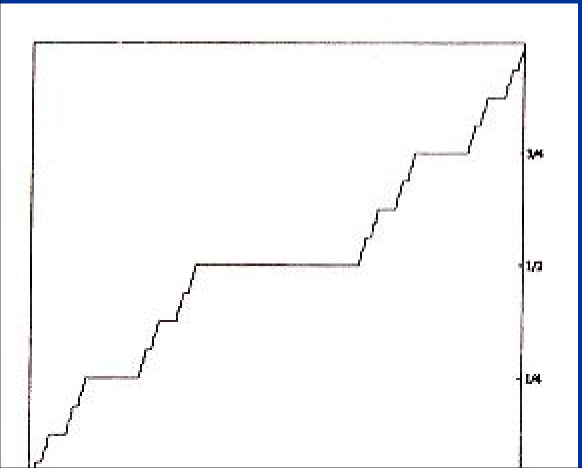


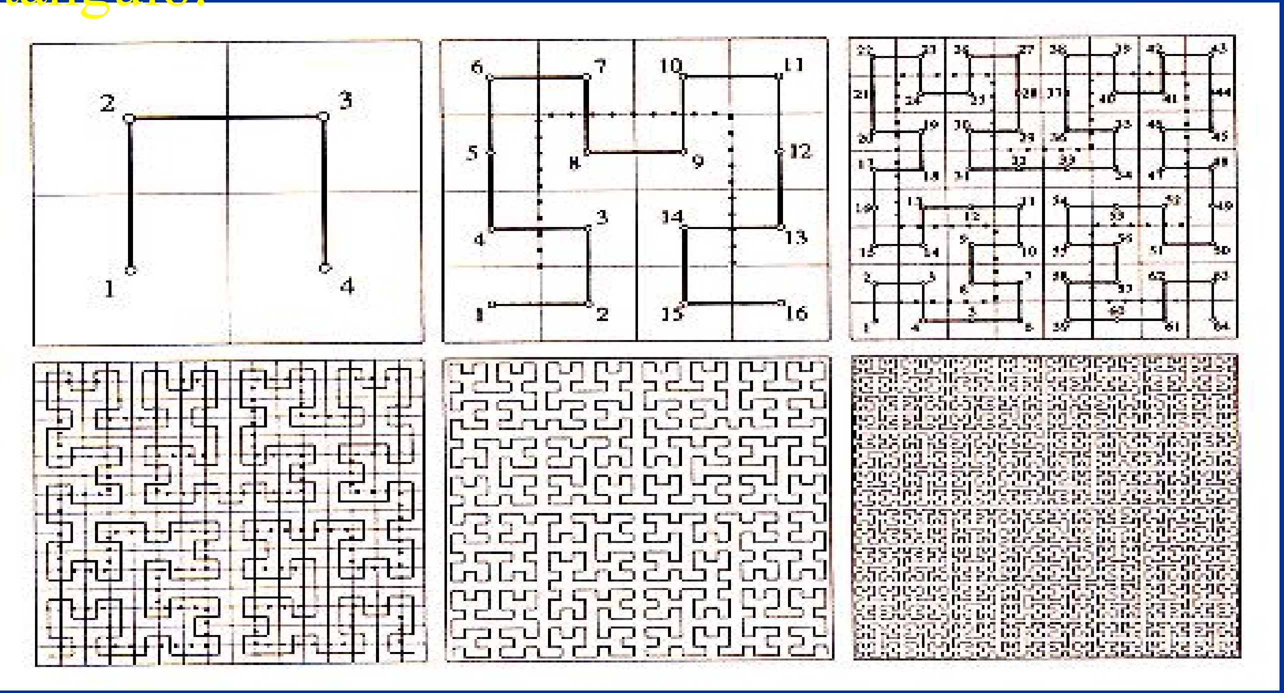
FIGURE 3.3. Lebesgue's singular function

Sistemas dinámicos discretos



Función de Cantor

Curva de Peano (1890), contínua y llenando “todo” el rectángulo.



Singularidades de origen en la Física-Matemática:

F. Prym (1871): Pb. de Dirichlet: ejemplo de función continua sobre la circunferencia que no admite ninguna extensión al círculo con energía finita (Métodos no energéticos: H.A.Schwarz (1871), C. Neumann (1877), Poincaré (1890),...)

George Green (1828): soluciones fundamentales

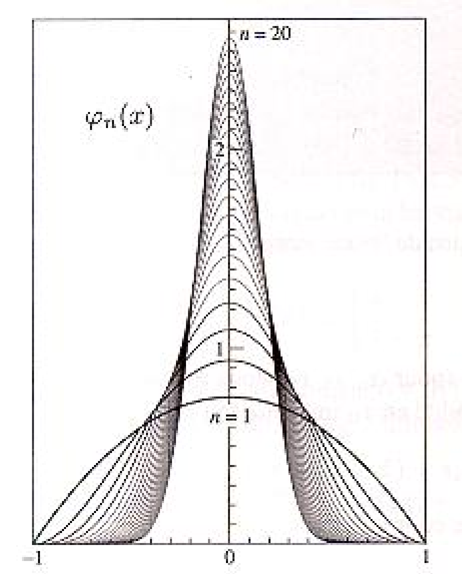
An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism

$$\Delta U = \delta$$

Dirichlet (1829): ec. del calor,

G.R. Kirchoff (1882): ec. de ondas

Maxwell (1873): dipolos

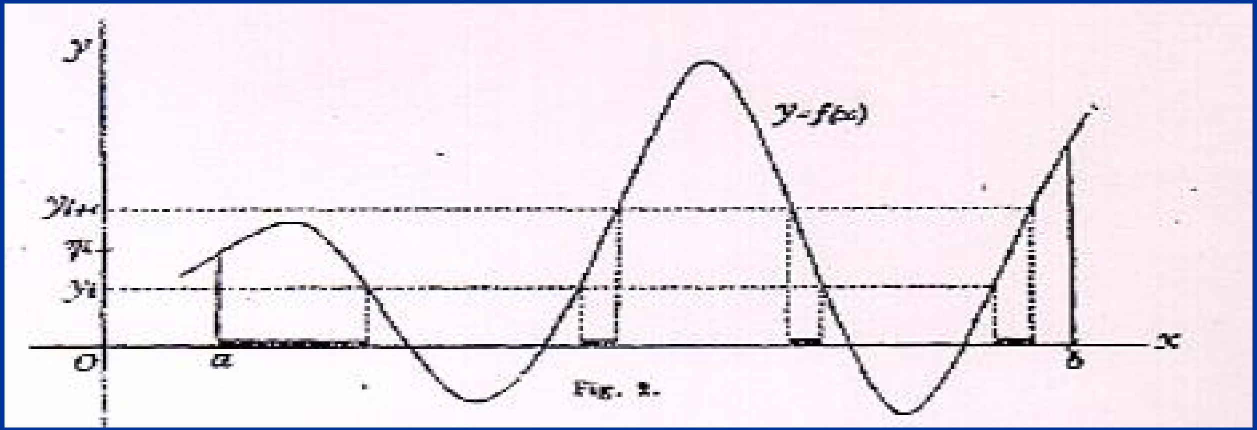


*Integrales singulares

*Ecuaciones integrales: Volterra(1896), Fredholm(1899),..

Heaviside (1893): relación entre series de Fourier y "deltas de Dirac (nacido en 1902)", cálculo operacional,..

3. La integral de Lebesgue y algunos de sus logros.

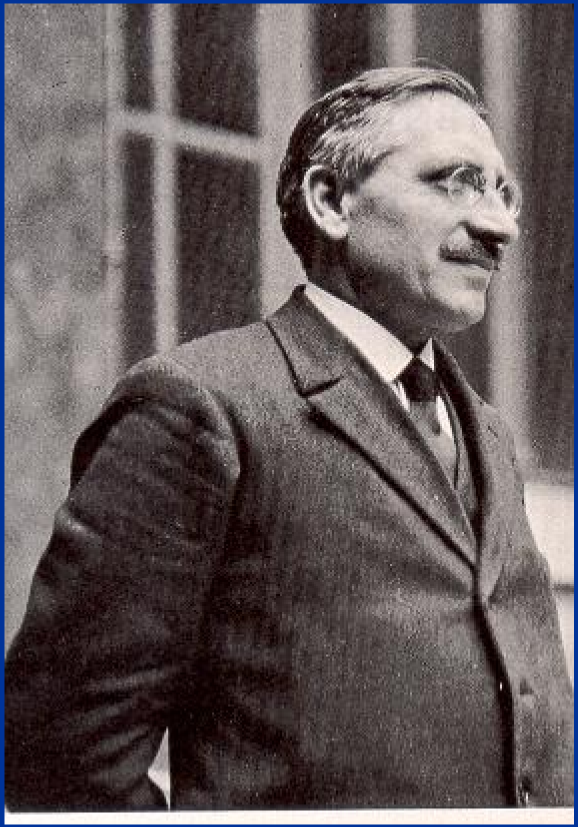


Símil del contable ordenado

Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\left.\begin{array}{l} |f_n(x)| \leq g(x),\ \lim f_n(x) = f(x) \\ \text{para todo } x \text{ salvo un conjunto de medida nula} \\ g(x) \text{ integrable} \end{array}\right\} \Rightarrow f \ \text{ integrable}$$

Listado de aplicaciones: Lebesgue 1922



- -Cálculo de primitivas y existencia de derivadas
- -Series de Fourier
- -Integrales singulares
- -Ecuaciones integrales
- -Pb. de Dirichlet y representación conforme
- -Cálculo de Variaciones
- -Operaciones funcionales
- -Integración de diferenciales totales
- -Condición de existencia de funciones analíticas
- -Estudio de f. analíticas cerca de sus singularidades

Curso del Collège de France (1921-22): Como pasar de función de punto a función de conjunto y viceversa,.....

Progresos en el Problema de Dirichlet Cálculo de Variaciones y Navier-Stokes.

***Métodos directos**: Lebesgue (1899), Hilbert (1904) (Arzela): existencia de sucesión minimizante, convergencia al mínimo (semicontinuidad inferior).

*1906 Beppo Levi, 1907 Fubini: una sucesión minimizante es de Cauchy con la norma de $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty,\ \int_\Omega u^2 dx < \infty,$

*1907 F. Riesz: completitud $(L^2(\Omega))^* = L^2(\Omega), (L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)$

*1911 C.W. Osen: existencia local en el tiempo de soluciones de Navier-Stokes con energía finita.

*Comienzo de espacios funcionales en el Cálculo de Variaciones, L.Tonelli (1926), N. Wierner (1926), Nikodym (1935),..

*1931 J. Leray primer teorema de existencia de soluciones de Navier-Stokes globales en el tiempo

C. Morrey (1930), L. Sobolev (1930) $W^{1,p}(\Omega)$,

Solución débil: Espacio de energía, funciones test
(teorema de Hahn-Banach (1927))

Teoría de las distribuciones de L. Schwartz (1950) $D`(\Omega)$

Cambio de filosofía:

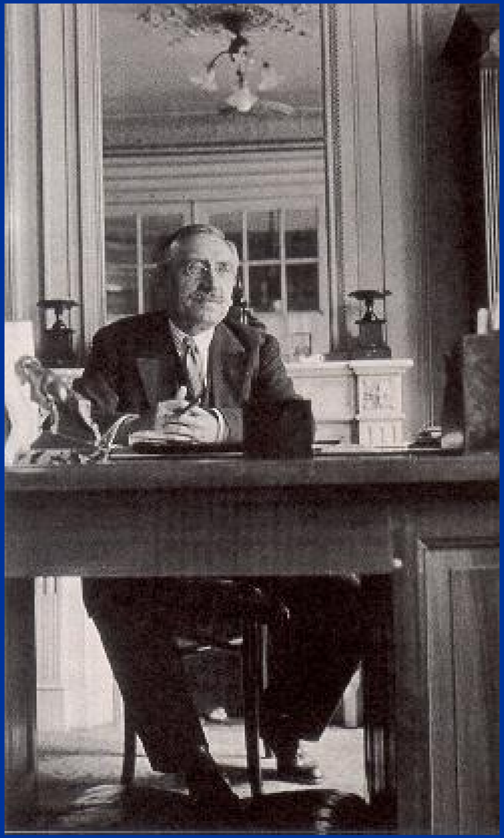
i) existencia de soluciones débiles (Pb. 20 de Hilbert)
ii) teoremas de regularidad (Pb.19 de Hilbert)

Dirac (1926), von Neumann (1927): Mecánica Cuántica, teoría espectral para operadores no acotados en $L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Problema de Cauchy, Teoría de semigrupos
Hille, Yosida (1956),

EDPs en $L^p(\Omega)$,.............



H. Lebesgue (1875-1941)

* Análisis Numérico: aproximación por polinomios, diferencias finitas, elementos finitos,..., método de convergencia de Galerkin, ...

* Máxima actualidad del estudio de singularidades: 7º problema de la Fundación Clay (2000): *estudio de las posibles singularidades de las soluciones de Navier-Stokes*

1902 fecha de referencia para la Matemática Pura y Aplicada,.... y *para el honor del espiritu humano*