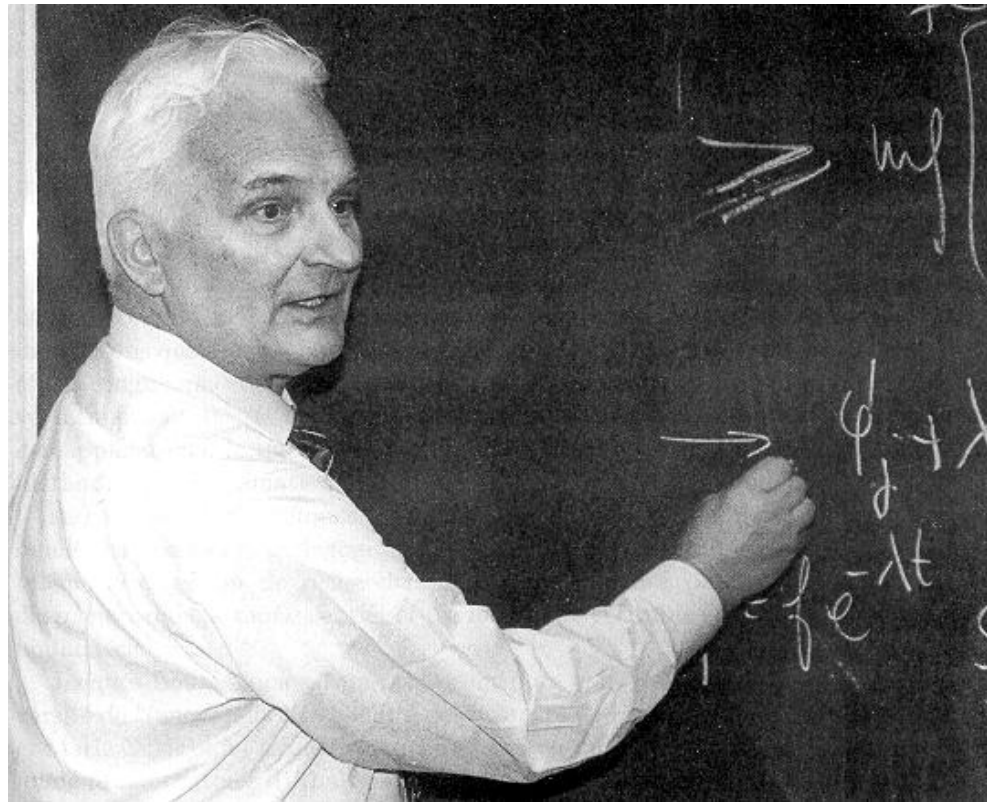


# La obra de Jacques-Louis Lions



**J.I. Díaz**

**Matemática Aplicada, UCM**

Seminario de Historia de la Matemática

Facultad de Matemáticas, UCM

13 de diciembre de 2001

# 1. Datos biográficos

Jacques-Louis Lions  
(2 mai 1928 - 16 mai 2001)

1947-50 Élève puis agrégé préparateur à l'E.N.S.

1951-54 Attaché de recherches au CNRS.

*Ses enseignements :*

54-63 : Faculté des sciences de Nancy

63-78 : Faculté des sciences de Paris

66-86 : École Polytechnique

73-98 : Collège de France

*Ses présidences :*

80-84 : INRIA

84-92 : CNES

91-94 : Union Mathématique Internationale

96-98 : Académie des Sciences

Grasse –Departamento francés de los Alpes Marítimos- Costa Azul

Padre, André, Resistencia

Estudios secundarios en Niza,

Proclamó el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas.

## 2. Campo de acción

1955, Tesis de Estado (U. París) bajo la dirección de Laurent Schwartz (medalla Fields, en 1950, por su Teoría de las Distribuciones).

En contraste con el enfoque matemático del grupo Bourbaki, Lions se interesó por el tratamiento matemático de problemas surgidos de la “vida real”, formulando su modelización, completando el análisis matemático mediante algoritmos numéricos para los más potentes ordenadores y analizando las posibilidades de control sobre el sistema en estudio.

# 3. Relación con España

Primera visita a España en 1963 (Embajada de Francia: Barcelona, Zaragoza y Madrid). Conoce a A. Dou. Notas escritas

Lions, J.-L., Ecuaciones Diferenciales y Problemas en los Límites. Notas de tres conferencias impartidas (los días 21.22 y 23 de Marzo de 1963) en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona. Publ. Seminario Matemático de Barcelona}. Abril 1963.

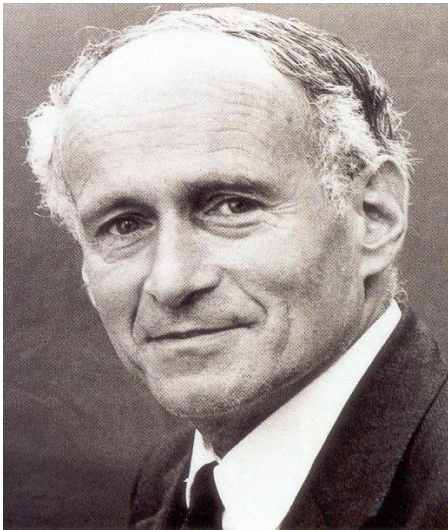
**Alumnos “directos”:** Antonio Valle Sánchez, J.A. Fernández Viña, J. L. Andrés Yebra, C. Fernández Pérez y M. Lobo Hidalgo

**Doctor Honoris Causa por:** U. Complutense (1976), U. Politécnica de Madrid (1982), U. Santiago de Compostela (1988), U. de Málaga (1994). **Real Academia:** (1999)

**Congreso de los  
Diputados:  
21 de enero de 2000**



## 4. De su tesis doctoral a su primer libro: problemas de contorno lineales



El tema de tesis de Lions (y otros alumnos de Schwartz, Bernard Malgrange y François Trèves), aplicabilidad de la teoría de las distribuciones a los problemas de contorno

Lions, J.-L., Problèmes aux limites en Théorie des Distributions, *Acta Mathematica*, **94**, 1955, 13-153,

Lions, J.-L., Schwartz, L., Problèmes aux limites sur des espaces fibrés. *Acta Mathematica*, **94**, 1955, 155-159.

Inicios de una filosofía para EDPS: aplicación de resultados abstractos del Análisis Funcional en espacios de Banach y del que el famoso Lema de Lax-Milgram (1954).

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Formulación débil

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

**Lema:** [P.Lax-A.N. Milgram (1954)]:

$V$  espacio de Banach reflexivo y separable,  $a : V \times V \rightarrow R$ ,

bilineal, continua y “coercitiva”

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 .$$

Entonces  $f \in V' \exists! u \in V$  solución de  $a(u, v) = \langle v, f \rangle \forall v \in V$

Si  $a$  es **simétrica**, entonces  $u$  es un mínimo de

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \langle u, f \rangle$$

Condiciones de contorno de tipo oblicuo (*Annals of Mathematics*, **62**, 1956, 207-239), problemas de evolución (“Teorema de Lions”: 1956),

Primer libro: *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer-Verlag, Berlin, 1961.

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$$

A operador no acotado

Lions, J.-L., *Problèmes aux limites dans les Equations aux Derivées Partielles*, Les Presses de l'Université de Montreal, 1962.



# 5. Actividad en frentes simultáneos: cuasi-reversibilidad

Interés desplegado en diferentes líneas de investigación

- Soportes para productos de composición y la transformada de Laplace (CRAS, 1951),
- espacios de Beppo Levi (junto a J. Deny: 1954),
- espacios definidos por una integral de Dirichlet (en colaboración con L. Hörmander: 1956)
- la transmutación de operadores diferenciales en el campo complejo (con J. Delsarte: 1957)
- los problemas no lineales (1958) y la interpolación de espacios y sus aplicaciones (1958)

2º libro: Lattés, R., Lions, J.-L., *Quasi-réversibilité*, Dunod, Paris, 1967.  
(J. Hadamard....., R. Bellman traductor)

# 6. Periodo de actividad mágica: problemas no homogéneos, control y problemas no lineales

3 libros en 1968, 1 en 1969 y otro en 1970.

Lions, J.-L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, Vol.1 1968, Vol.2 1968, Vol. 3, 1970.

Problemas de contorno no homogéneos: caracterizar, con la mayor precisión posible, los espacios funcionales para que tales problemas estuviesen bien planteados

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty, \int_{\Omega} u^2 dx < \infty, \int_{\Omega} f^2 dx < \infty$$

soluciones no continuas: ¿traza en el borde?

espacios de Sobolev de índices negativos y fraccionarios (interpolación: Lions estancia posdoctoral de un año en la Universidad de Kansas con Nachman Aronszajn). Foias-Lions (1961), Lions -Peetre (1963).

**Comienzos en Teoría de control** (actividad central: cátedra del Collège de France (1973-1998): *Analyse Mathématique des Systèmes et de leur Contrôle*)

Antes de Lions: *principio del máximo de Pontryaguin, el de la programación dinámica de Bellman y la teoría del filtro de R. Kalman. Aplicación a ec. dif. ordinarias.*

¿es posible “controlar” los sistemas regidos por ecuaciones en derivadas parciales?

3 Notas CRAS (1966): Lions, J.-L., *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1968.

- Estructura general:  $y = \text{estado}(s)$ ,  $u = \text{control}(es)$

- Ley de estado:  $F(y_t, Ay, Bu) = 0$  (A y B operadores)

- Funcional de observabilidad:  $J(u) = g(u, y(u))$

**Problema: optimizar  $J(u)$  sobre un conjunto  $K$  de posibles controles:**  $T^a$  Control:  $u$  escalar (un único control),  $T^a$  de Juegos:  $u$  con múltiples componentes

- **Control óptimo:**  $\text{Min} \{J(u) : u \text{ en } K\}$ ,

Usualmente  $J(u) = J_1(u) + c|y(u) - y_d|$ ,  $c \geq 0$ ,

- \* F determinista (EDO o EDP) o estocástica:

- \* F en régimen estático o dinámico

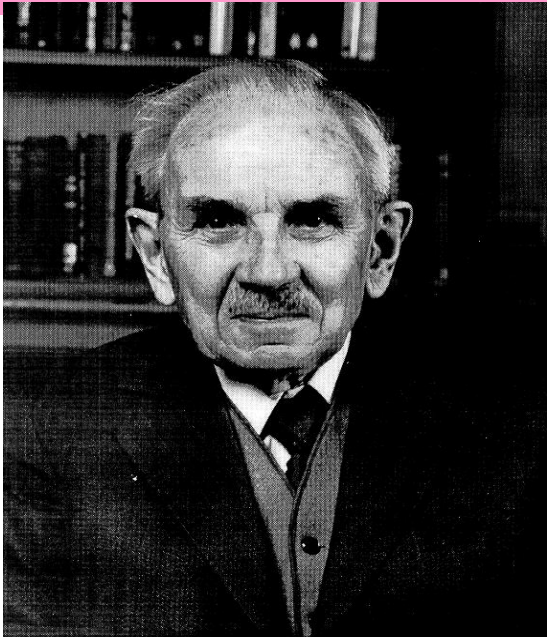
- \* F lineal ( $J_1(u)$  convexa y  $K$  convexo)

- \* F no lineal

Y más aún:

Lions, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1969.

1959: sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que modela la dinámica de los fluidos incompresibles



Jean Leray (1906-1998)

Lions-G. Prodi (1959): unicidad dimension2

Fundación Clay (2000): 1 millón de dolares.

Libro organizado por métodos: no por ecuaciones

Operadores de Leray-Lions del Cálculo de Variaciones (1966)

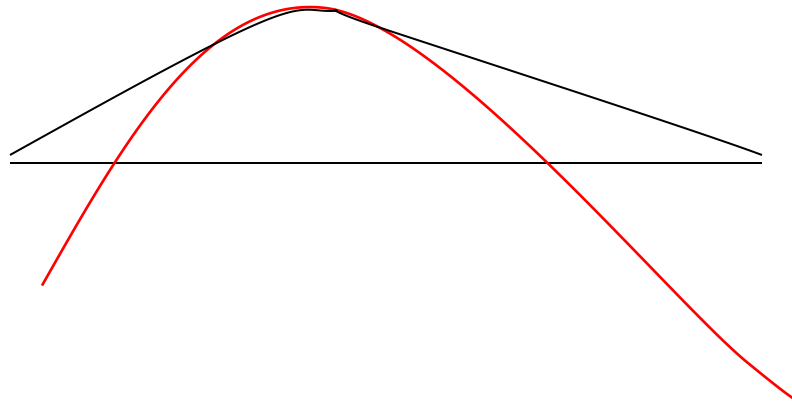
Operadores “pseudo-monótonos”. Haim Brezis

# 7. Modelos: inecuaciones variacionales

Ligaduras unilaterales.

$$\text{Min}_K J(u), K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi\}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx$$



K convexo y cerrado

Problema de obstáculo

Problema de torsión

$$K = \{v \in H^1(\Omega), |\nabla u| \leq 1\}$$

Signorini (1959), Fichera (63), Stampacchia (63), J.L. Lions-Stampacchia (65),

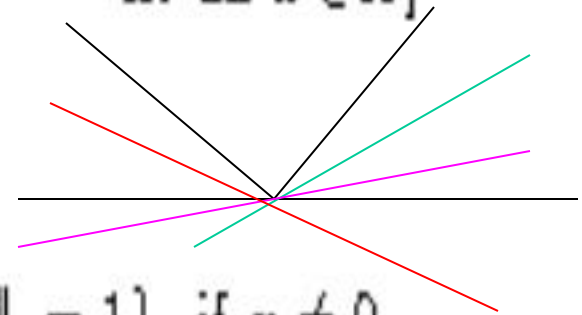
# Subdiferencial de una función convexa

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, X^* = Y$$

$$\partial f(x_0) = \{y \in Y : f(x) - f(x_0) \geq \langle y, x - x_0 \rangle$$

for all  $x \in X\}$

Si, por ejemplo,  $f(x) = \|x\|$



$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1\} & \text{if } x \neq 0, \\ \{x^* : \|x^*\| = 1\} & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

## Generalización de la derivada Gateaux

**Operadores multívocos**

$$\partial f : D(\partial f) \subset X \rightarrow 2^Y$$

**Operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert: Brezis, Crandall, Pazy,.....**

Duvaut, G., Lions, J.-L., *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1972.

contextos insospechados: climatización, flujos de fluidos no-newtonianos (como los polímeros, la lava, los glaciares, etc.), hasta problemas de antenas (ecuaciones de Maxwell)...

Bensoussan, A., Lions, J.-L., *Applications des inéquations variationnelles en Contrôle stochastique*, Dunod-Bordas, Collection M.M.I., Paris, 1978.

Bensoussan, A., Lions, J.-L., *Contrôle impulsional et inéquations variationnelles*, Dunod-Bordas, Collection M.M.I., Paris, 1982.

1972: creación por Lions del (LABORIA: Director) del IRIA (más tarde INRIA: Presidente 1980-1984).

problemas planteados en Economía (premios Nobel)



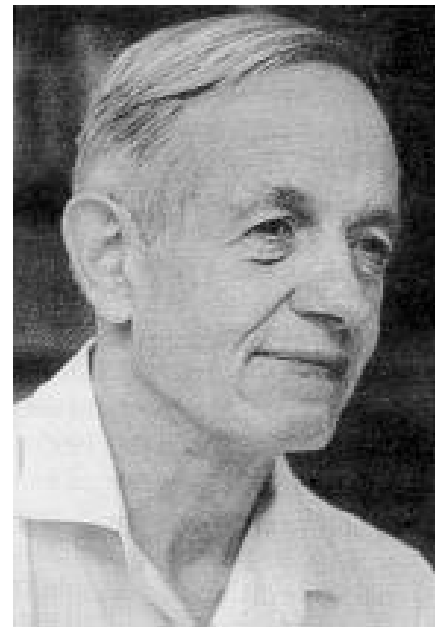
# Ecuaciones de Hamilton-Jacobi y problemas de la teoría de juegos asociados a procesos de control estocástico

**Pierre-Louis Lions: soluciones de viscosidad,.....(Medalla Fields, 1994)**

El interés de Lions por modelos de la Economía se mantendría a lo largo de su vida (equilibrios de Pareto 1986-Pareto), de Nash y de von Stakelberg (1994) y Díaz-Lions (1999).



JOHN VON NEUMANN  
1903-1957



# 8. Análisis numérico de EDPs

Lions: asociado a “tratamiento matemático de los mayores problemas tecnológicos”: INRIA, CNES, CEA, EDF, ....

Sistemas complejos: aproximación cuantitativa en términos de algoritmos

Cursos en Nancy (1954-62), Instituto del CNRS Blaise Pascal  
Lions, J.-L., Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la Physique Mathématique, Publications du CNRS, Institut Blaise Pascal, tome 1 (publ.14111) 1962, tome 2 (publ. CA.14.11.1/AI) 1962, tome 3 (publ. CA/14.11.1A/A1) 1963. “Diplodocus”

Diferencias finitas, Elementos Finitos (Tesis de Cea 1960, Ingeniería), Estabilidad de algoritmos (Raviart, 1965),

Métodos de descomposición (paralelismo; trabajos con Temam y Bensoussan), Notas del curso en la Ecole Polytechnique (1966-86),...

Métodos de aproximación para las inecuaciones variacionales: Glowinski, R., Lions, J. L., Tremolieres, R., Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, 2 volúmenes, Dunod, París, 1976

Métodos de aproximación en Control de EDPS:

Glowinski R., Lions J.-L., Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Numerica*, 1994, 269-378, 1995, 159-333.

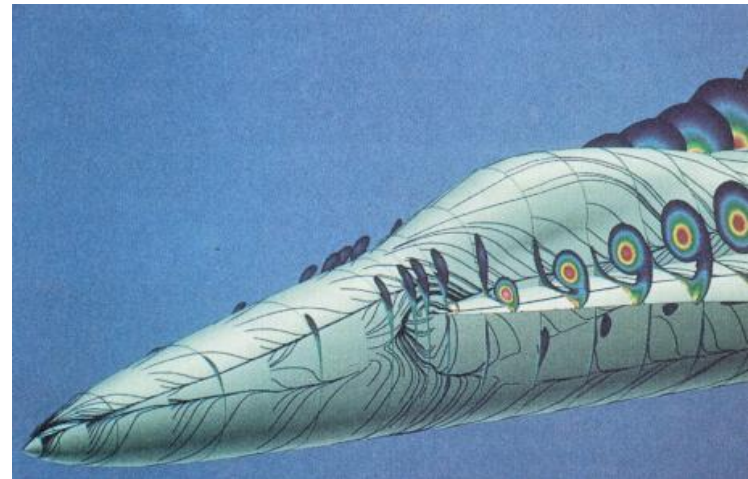
Cálculo paralelo: Serie de CRAS con O. Pironneau, R. Glowinski,...(anuncio de libro)

# 9. Perturbaciones singulares y Homogeneización

Curso 1970-71: Paso al límite (riguroso) en un pequeño parámetro, en (término independiente, datos en el contorno, operador diferencial, dominio, etc.)

Capa límite de Prandtl (1904)

Lions, J. L., *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lecture Notes in Math., 323, Springer, 1973.



Bensoussan, A., Lions, J. L., Papanicolau, G., Asymptotic Methods in Periodic Structures, North Holland, Amsterdam, 1978.

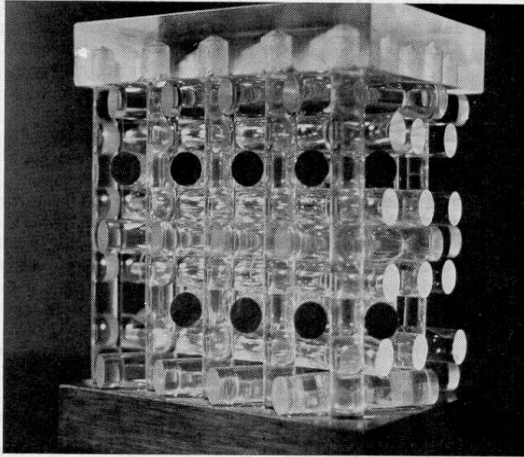
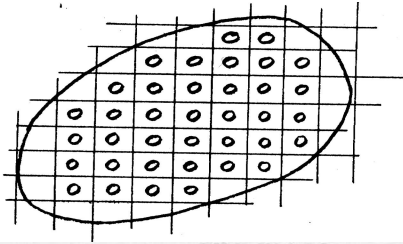
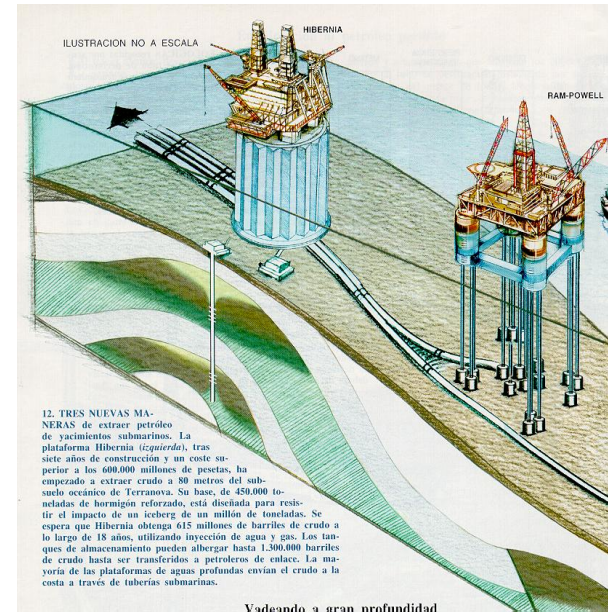


Fig. 3.2 Photograph of half-scale model of complex rod structure porous medium.



Escalas múltiples: A. Liñán, E. Sánchez-Palencia,...

# 10. Controlabilidad: el método HUM

1980 Curso en el Collège de France sobre el control de sistemas distribuidos singulares (inestabilidades, fenómenos de explosión en tiempo finito, soluciones múltiples, fenómenos de bifurcación, etc.)

Lions, J. L., *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Gauthier-Villars, París, 1983.

Filosofía: a medida que un sistema genera más inestabilidades es más fácil de controlar

Lions-Zuazua (1997), Díaz-Lions (1998,99),...

## Premio von Neumann (SIAM: 1986)

Método HUM (Hilbert Uniqueness Method) para la controlabilidad de sistemas:

\* **Controlabilidad:**  $\text{Min} \{|y(u) - y_d| : u \text{ en } K\} = 0$

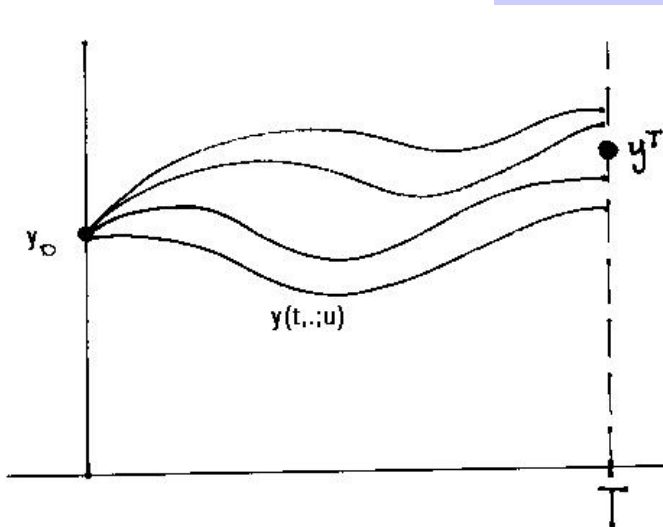
\* controlabilidad exacta:  $y(u) = y_d$

ODE,

EDPS de tipo hiperbólico

\* controlabilidad aproximada:  $u, |y(u) - y_d| \leq \varepsilon$

EDPs de tipo parabólico o elíptico



Lions, J. L., *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, tomo 1, *Contrôlabilité Exacte*, tomo 2, *Perturbations*, Masson, Paris, 1988.

Lagnese, J.E., Lions, J.-L., *Modelling. Analysis and Control of Thin Plates*, Masson, Paris, 1988.

Caso de ecuaciones parabólicas:

J.-L. Lions, Remarques sur la contrôlabilité approchée. En *Jornadas Hispano-Francesas sobre control de sistemas distribuidos*, Univ. de Málaga, 1991, 77--87.

Conjeturas sobre controlabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes:.....



# 11. Enciclopedias: Dautray y Ciarlet.

Dautray, R., Lions, J.-L., *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, En 3 volumenes, Collection du C.E.A., Série scientifique, Masson, Paris, 1984 y 1985, reedición en 9 volumes, Masson, Paris, 1988. Traducción inglesa: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, 6 volúmenes, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988-1990.

Visión actualizada del Courant y Hilbert (1953)

La llegada de los ordenadores, sus progresos inmensos e incesantes, han permitido -por primera vez en la historia- calcular con gran seguridad y rapidez, a partir de modelos, cantidades que hasta entonces no habían podido ser más que estimadas de manera muy aproximada. Esto brindó, a investigadores e ingenieros, la posibilidad fundamental de poder utilizar resultados numéricos para la modificación o adaptación de razonamientos, experiencias y realizaciones en curso.

Serie H. Brezis J.L. Lions en Pitman-Longman

*Seminario del Collège de France*, 12 volúmenes

Series: P.G. Ciarlet, J.L. Lions en Masson, Paris:

*Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*, 21 volúmenes,

*Recherches en Mathématiques Appliquées*, 42 volúmenes.

*Handbook of Numerical Analysis*, en North-Holland, 7  
volúmenes (de momento)

# 12. Medio Ambiente: Centinelas para datos incompletos y “El planeta Tierra”.

Medio Ambiente (Meteorología, Climatología, Oceanografía, Ecología, etc.): Présidence de l'Assemblée Nationale, París, marzo de 1989

Lions, J. L., *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes*, Masson, Paris, 1992.

Curso en el Instituto de España, del 15 al 19 de enero de 1990

Lions, J.-L., *El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores*. Espasa-Calpe, Madrid, 1990 (M.Artola, J.I.D.)

Colaboración con Lions: Cursos de verano de la UCM (El Escorial 1992, Almería 1993)

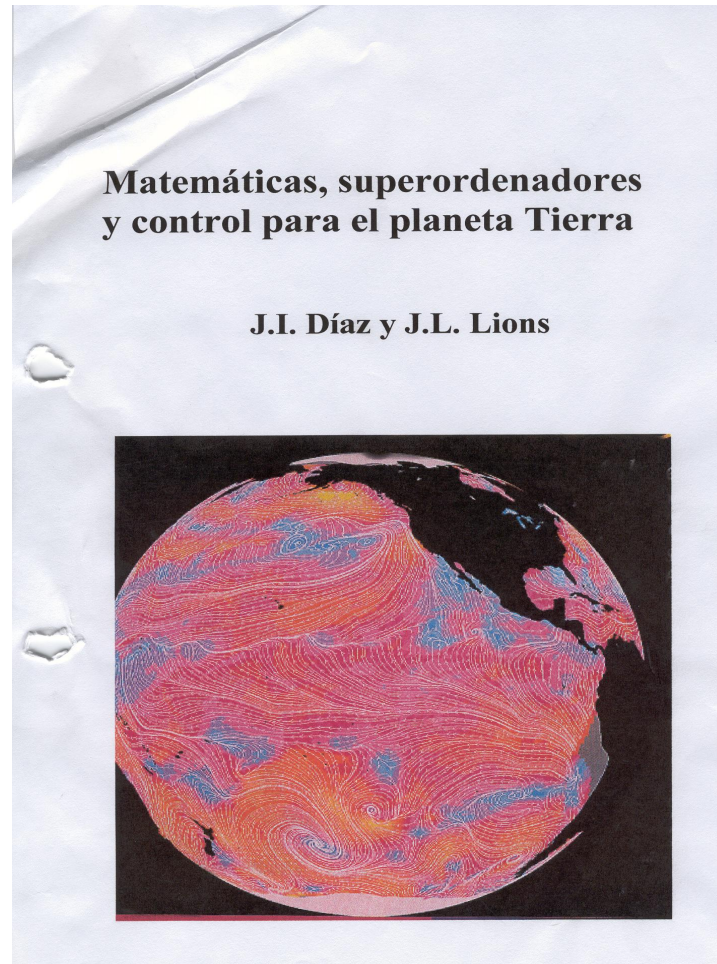
Díaz, J.I., Lions, J.-L., eds., *Mathematics, Climate and Environment*, Research Notes in Applied Mathematics 27, Masson, Paris, 1993.

Environment, *Economics and Their Mathematical Models*, Research Notes in Applied Mathematics 35, Masson, Paris, 1994.

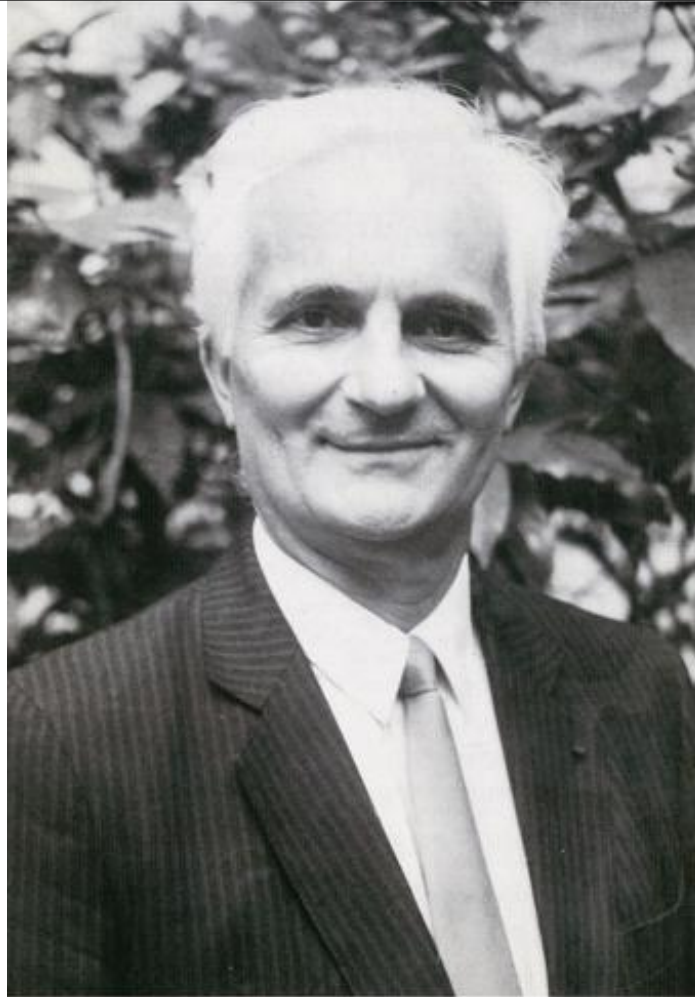
Advanced Institute de la NATO (Santa Cruz de Tenerife, del 11 al 21 de enero de 1995).

Díaz, J. I., ed., *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997.

fax de 29 de julio de 1999:



Mención en Lions J.-L., Some Remarks on the Mathematical Modelling of Planet Earth System, *Atti dei Convegni Lincei, Accademia Nazionale dei Lincei*, 158, 2000, 73-93.



Pese a su indudable carisma, ofrecía una accesibilidad, una generosidad científica y un temperamento tan extraordinariamente afable que colocaba a su interlocutor en el centro de su preocupación y atención. Su ejemplo será siempre un acicate para las presentes y futuras generaciones.

**J.I. Díaz: “El legado de Jacques-Louis Lions (1928-2001) a través de sus libros: mi limitada visión”**

*La Gaceta de la RSME*, Vol.5, nº 2, 330-354, 2002.  
*Boletín de SEMA*, nº 21, 13-37, 2002

**<http://www.mat.ucm.es/~jidiaz/>**