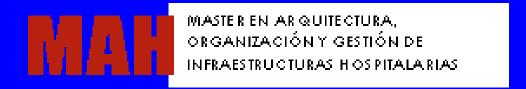
Parte 1. Sistemas dinámicos y su contro

J.I. Díaz

Real Academia de Ciencias



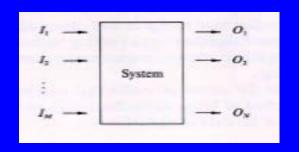
Madrid, 9 de febrero de 2008

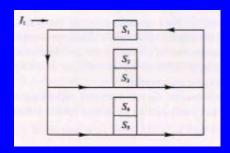


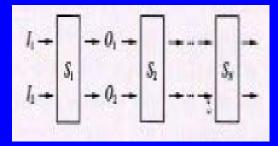
20/08/2023 J.I. Díaz

1. Introducción: sistemas

Entrada --- Sistema --- Salida





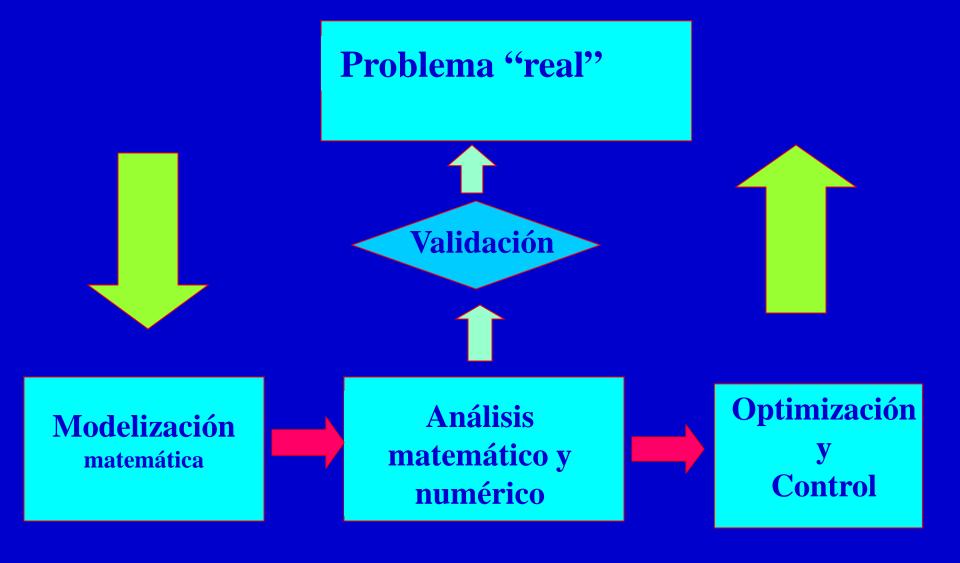


$$I_1 + \begin{bmatrix} S_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_4 \end{bmatrix} + O_1$$

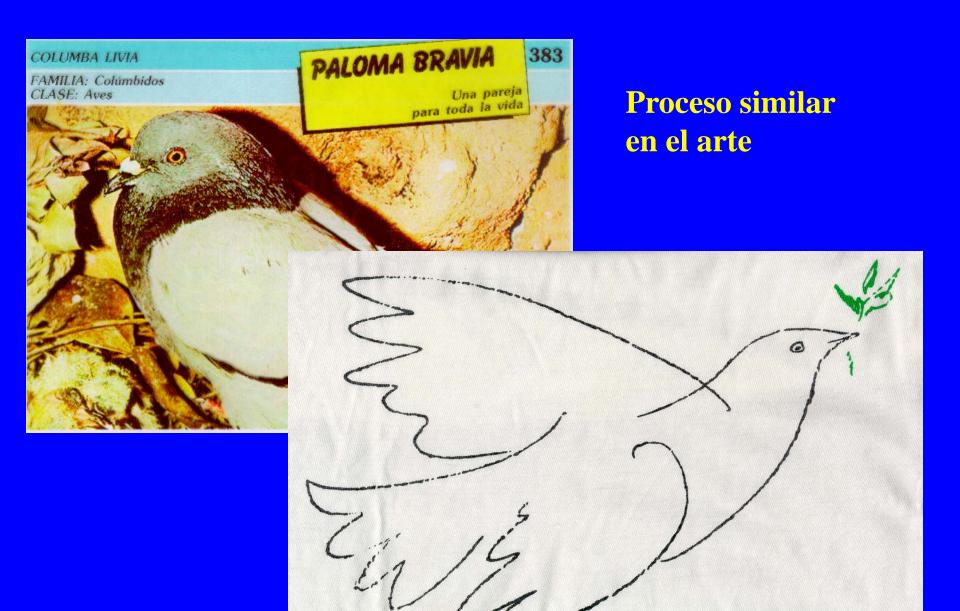
$$I_2 + \begin{bmatrix} S_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_3 \end{bmatrix} + O_2$$

Objetivo: mejorar el comportamiento del sistema

Metodología de la Matemática Aplicada

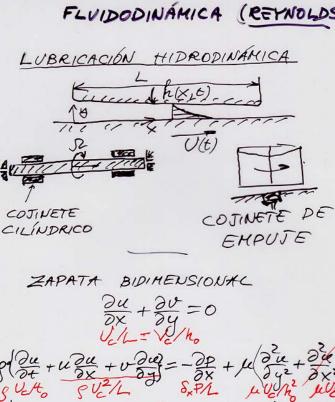


Modelización.



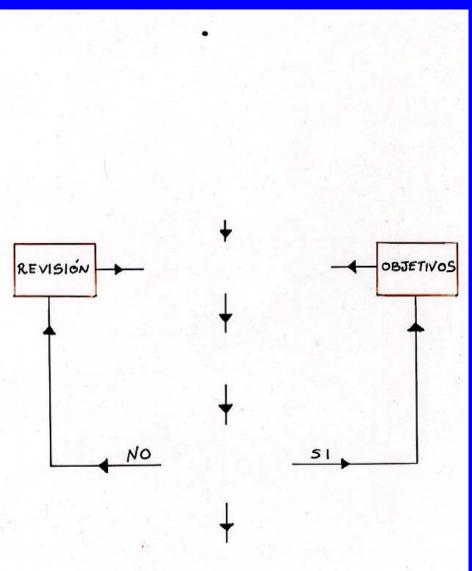
El arte de la modelización

TEORIA DE LA LUBRICACIÓN FLUIDODINÁMICA (REYNOLDS)



られナルランナルラッタ y=0: u=U(t), v=0 y=h(x,t): u=0, v=2h UE) = h(x,t) - no, to ho/Leel, ho/Vtoel; to/Vtoel HIPOTÉSIS DE LA TEORIA DE LA LUBRICACIÓN (CAPAS DELGADAS) ACELERACION LOCAL DESPREC. ACELERACIÓN CONVECTIVA DESPRECIABLE ECUACIONES (DE STOKES) SIMPLIFICADAS $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 0=-3p + 12 342 0=2P -> p=P(X,t)? y=0: u=U(t), v=0 y=h(x,t): u=0, v=ah/at $u = U(1 - \frac{y}{h}) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h)$ Coutte Poiseville v = - 50 dy - 3h = - 50 dy The + 3x Sudy = 0 | q = Shedy $q_{x} = \frac{Uh}{2} - \frac{h^{3}}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$ $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$ LECUACIÓN DE REYNOLDS DE LA LUBRICACIÓN





PROBLEMAS REALES.

Una posible clasificación: Programa Marco I+D de la Unión Europea

ENERGIA

- · Energias no nucleares (Petroleo, Carbón, Sola) · Seguridad en fisión nuclear
- . Fusión termonuclear

TECNOLOGIA DE LA INFORMACIÓN, COMUNICAC

- · Tecnologia de la Información,
- · Tecnologia de las Comunicaciones, Aeronant
- · Sistemas Telemáticos, Electrónica, Ordenador

TECNOLOGIAS INDUSTRIALES Y DE LOS MATERIALES

- · Nuevos materiales
- · Procesos tecnológicos en Quinica, Farmacia,...
- · Metalurgia, Tecnologia minera....

MEDIO AMBIENTE

- · Climatologia, Meteorologia, Oceanografia....
- · Polución, planificación urbana

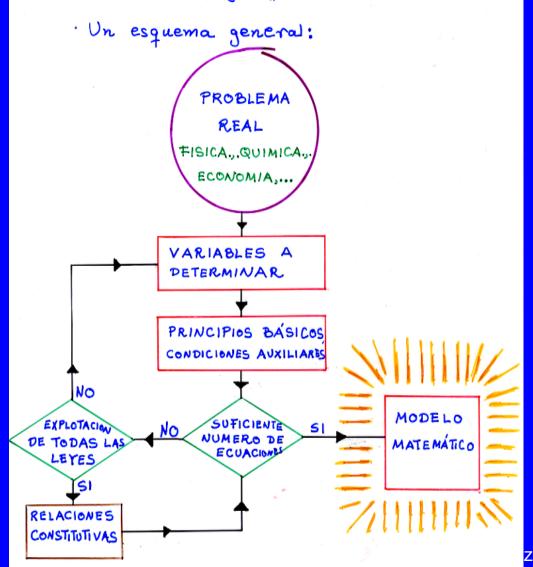
CIENCIAS Y TECNOLOGIA DEL SER VIVO

- · Biotecnologia
- · Alimentación, Ciencias Agrarias
- . Investigaciones biomédicas y ciencias sociales



MODELIZACIÓN.

- · Modelo = prototipo . Simplificación.
- · Modelos análógicos / Simulación numérica.



- · El modelo depende enormemente de los objetivos a lograr.
- . Grandes alternoitivas:
 modelos directos / modelos inversos
 modelos deterministas/modelos estocásticos
 modelos "continuos" / modelos discretos
 modelos transitorios / modelos estacionarios
 modelos "microscópicos" / modelos "macroscópicos"
- . Necesidad de la simplificación:
 - . Técnicas de Analisis Dimensional (variables adimensionales, parametros distinguidos,....)
 - · Fenómenos relevantes de cada caso convección/difusión casión pura convección pura difusión/absorción, convección/absorción absorción pura
- · Acoplamiento y/o utilización de modelos previos.



TRATAMIENTO MATEMÁTICO.

- · Existencia de soluciones
 - . Técnicas de Análisis Funcional y Teoria de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y en Derivadas Parciales.
 - · Distintos tipos de soluciones (clásicas, fuertes, débiles [en el espacio de energia: La soluciones de entropia", soluciones de viscosidad".
 - · En problemas transitorios:
 - · existencia local en el tiempo.
 - · existencia global: prolongabilidad/blow up
 - . En problemas estacionarios: existencia o no existencia segun parámetros
- · Unicidad de soluciones . Multiplicidad . Bifurca ción respecto de los valores de parámetros.
- · Dependencia continua de las soluciones respecto de los datos y parámetros.
- · Estabilidad. Comportamiento asintótico · Caso de t ->+00 (problemas de evolución) · Caso de 1×1->+00 (dominios no acotados)

- · Otras propiedades cualitativas:
 - · regularidad de la Solución.
 - . Formación de "interfases" o fronteras libres" separando regiones de distinto comportamiento.
 - . Comparación con soluciones de otros modelos
- · Aproximación:
 - . Discretizacion del dominio de definición.
 - . Algoritmos. Estudio de los problemas discretos
 - · Convergencia.
 - . Implementación en el ordenador.
 - · Visualización de resultados (realidad virtual").

VALIDACIÓN.

- · De gran importancia.
- · Depende de los objetivos propuestos.
- · Confrontación
 - . con soluciones eractas de casos sencillos.
 - . con datos experimentales.
- "Robustez" respecto pequeñas modificaciones.
- · Apelación a modelos mas complejos en la jerarquia.



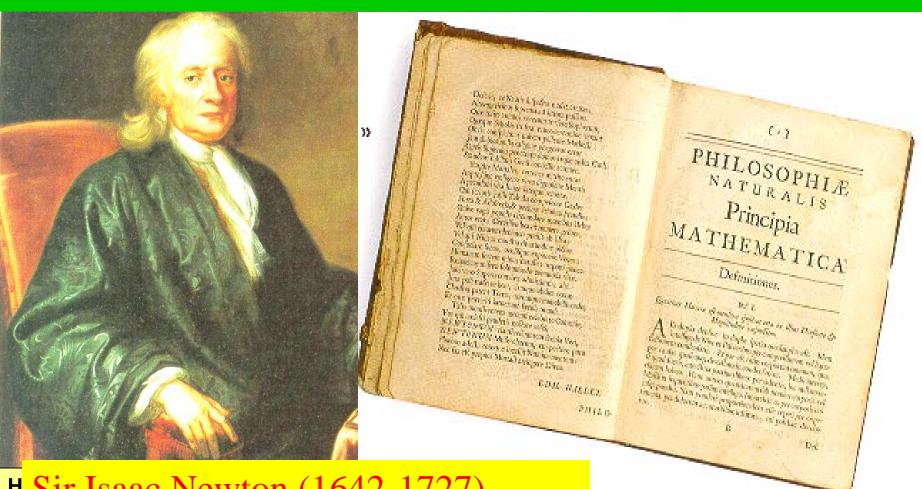
PREDICCIÓN, CONTROL.

- · Simulación (realidad vertual") en casos de dificil experimentación (Medio Ambiente, Economia, Astrofísica....) o experimentación muy costosa (petroleo, energia nuclear, diseño de coches y aviones....)
- · Ahorro económico.
- · Dificultades
 - · Toma de datos . Complejidad. Asimilación.
 - . Datos incompletos.
- · Optimización/Control: ¿ como actuar sobre los sistemas para alcanzar estrategias (minimización, maximización)...?
- · Problemas multi-criterio.
- · Irreversibilidad de los cambios introducidos.
- . Prevención de riesgos.



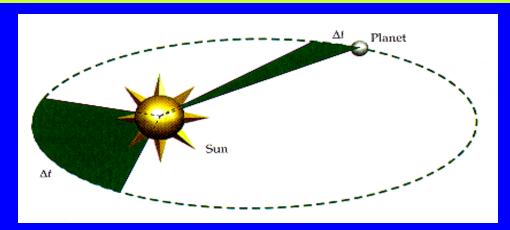
1.1. Hitos históricos en Sistemas Dinámicos: caos

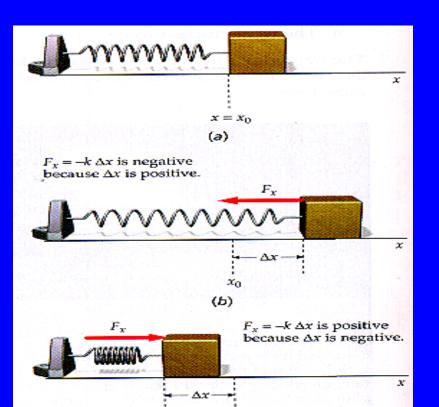
1.1. En Mecánica Clásica



H Sir Isaac Newton (1642-1727)

Tipos de problemas

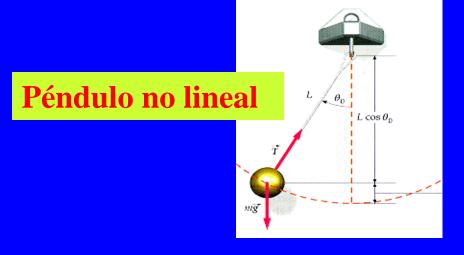








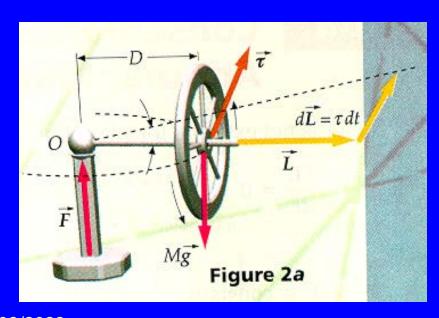
J.I. Díaz

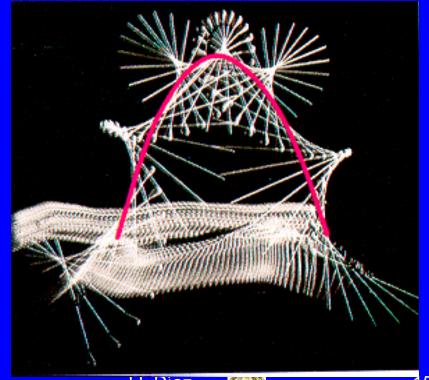




S.D. Discreto

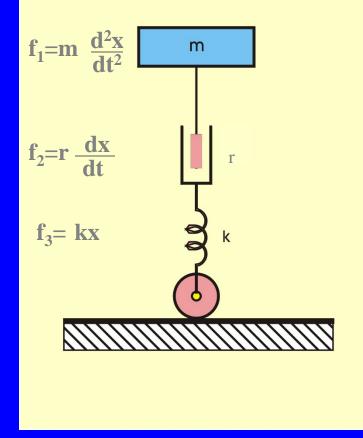
Sólidos Rígidos





J.I. Diaz

SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES



MODELO MATEMÁTICO DE UN AMORTIGUADOR

$$\mathbf{f_1} + \mathbf{f_2} + \mathbf{f_3} = \mathbf{m} \frac{\mathbf{d}^2 \mathbf{x}}{\mathbf{d}t^2} + \mathbf{r} \frac{\mathbf{d}\mathbf{x}}{\mathbf{d}t} + \mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Example 2.1 Particle dynamics

Consider a particle with mass m modelled as a mass point, which moves along a straight line with velocity u subject to a force proportional to u^{α} , $\alpha \in \mathbb{R}$, starting at t = 0 with velocity u_0 .

The mathematical model is then

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \beta u^{\alpha} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$
 (2.4.7)

Observe that the function u^{α} has the following properties:

- If $\alpha < 0$, it blows up to infinity when u = 0;
- If $\alpha = 0$, it satisfies the Lipschitz condition with L = 0;
- If $0 < \alpha < 1$, it is continuous but not Lipschitz (it is Lipschitz away from 0);
- If $\alpha = 1$, it satisfies the Lipschitz condition with L = 1;
- If $\alpha > 1$, it is continuous but not Lipschitz (it is locally Lipschitz).

Hence according to Theorems 2.4.1 and 2.4.2, existence is assured only for $\alpha \geq 0$ and uniqueness only for $\alpha = 0, 1$.

A second aspect to remember is that, in the above theorems, existence and uniqueness are proved for any initial condition u_0 .

If $u_0 \neq 0$, the solution to (2.4.7) can be easily obtained by separation of variables

$$u(t) = \begin{cases} u_0 \left[1 + \frac{\beta(1-\alpha)}{u_0^{1-\alpha}} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{if } \alpha \neq 1 \\ u_0 e^{\beta t} & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$
 (2.4.8)

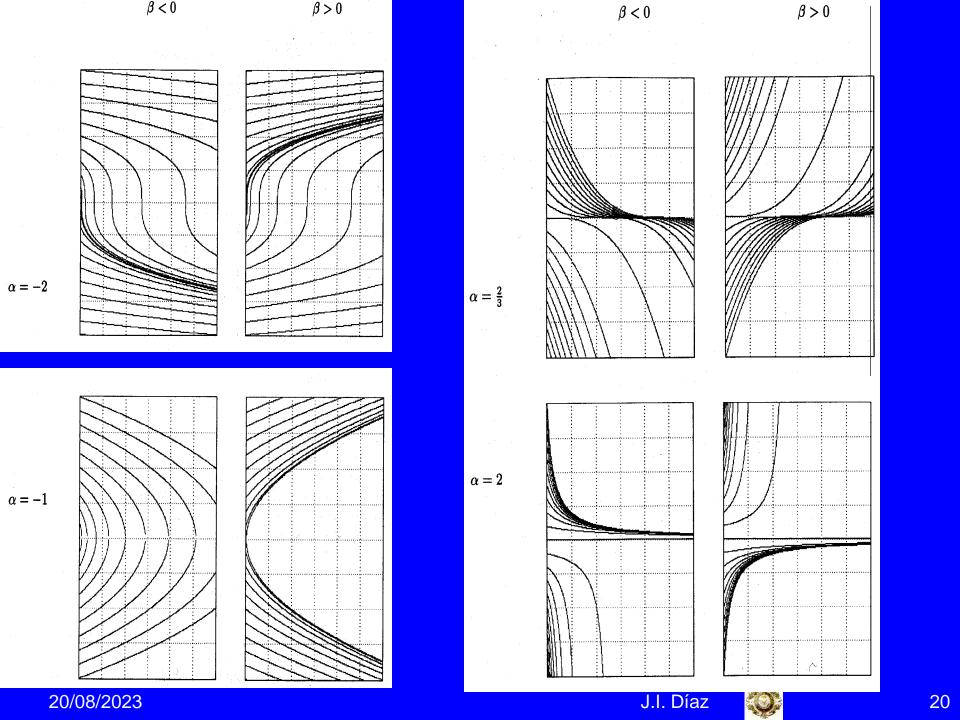
J.I. Díaz

18

	Theoretical prediction	$u_0 \neq 0$	$u_0 = 0$
$\alpha = -2$		1, [+∞]	1, [+∞]
lpha = -1		$\frac{(\beta > 0) \ 1, [+\infty]}{(\beta < 0) \ 1, \left[\frac{u_0^2}{2}\right]}$	$\frac{(\beta > 0) \ 2, [+\infty]}{(\beta < 0) \ 0}$
$\alpha = 0$	uniqueness	1, [+∞]	1, [+∞]
$\alpha = \frac{2}{3}$	existence	$\frac{(\beta u_0 > 0) \ 1, [+\infty]}{(\beta u_0 < 0) \ \infty, [+\infty]}$	∞ , $[+\infty]$
$\alpha = 1$	uniqueness	1, [+∞]	1, [+∞]
lpha=2	existence	$\frac{(\beta u_0 > 0) \ 1, \left[\frac{1}{u_0}\right]}{(\beta u_0 < 0) \ 1, [+\infty]}$	$1,[+\infty]$

Table 2.4.1 — Theoretical existence and uniqueness results, number of solutions, and, in square brackets, maximal existence time for $|\beta| = 1$.

J.I. Díaz 20/08/2023



Problema de los

3 cuerpos, ...

Henri Poincaré (1854-1941)



En 1908, H. Poincaré (1854-1912),

"puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan otras muy grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras producirá otro enorme en las últimas. La predicción resulta imposible"

Ŏ.

Características del Caos

Proceso determinista

Sistemas dinámicos no lineales

Trayectoria errática

Atractor

Hipersensible a las condiciones iniciales

Objeto fractal



S. IX – *XX*

HENRI POINCARÉ (1854-1912)

ESCUELA RUSA

S. XX

KOLMOGOROV (1903 – 1987)

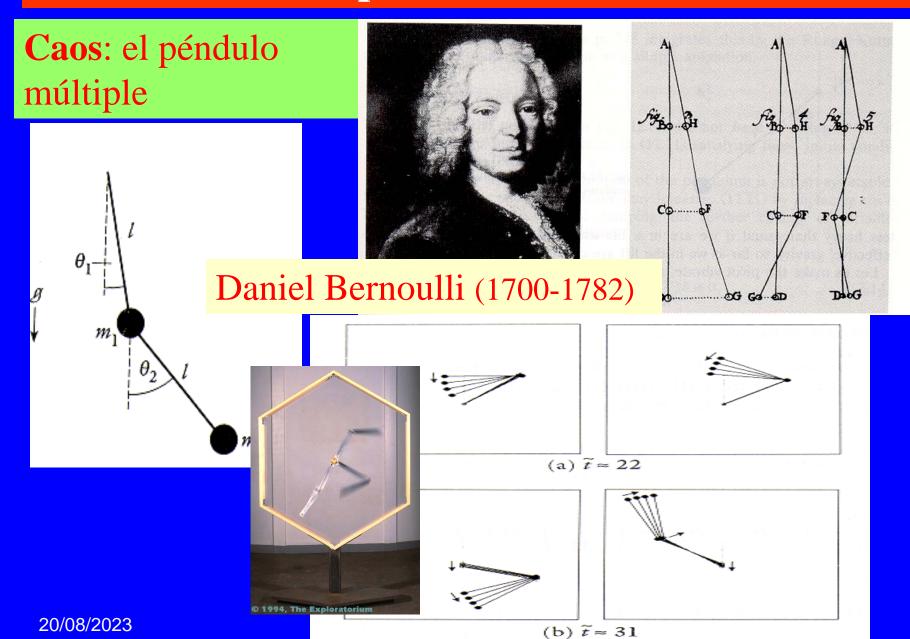
LORENZ (USA) 1961

1961 – 75 EXPLOSIÓN DE LA TEORÍA DEL CAOS

1975 - 2000 POPULARIZACIÓN



También en otros problemas:



24

Caos en el péndulo variable (botafumeiro)

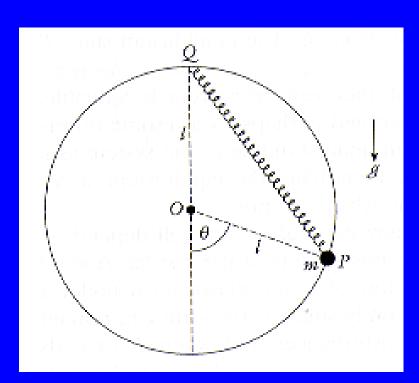


En Sistemas Dinámicos Continuos se necesitan al menos 3 grados de libertad para que ocurra el caos

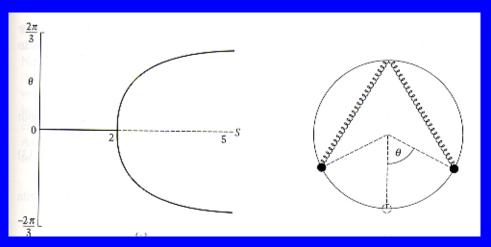
25

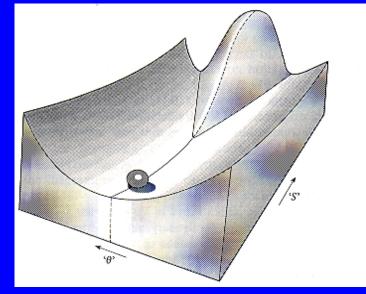
20/08/2023 J.I. Díaz

Papel crucial de los parámetros: Bifurcación de equilibrios estacionarios



Otro ejemplo: Péndulo en rotación



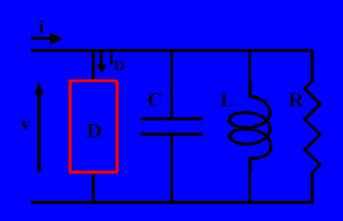


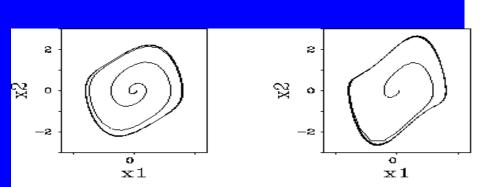
26

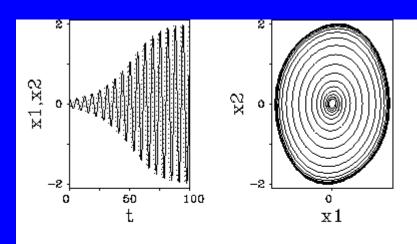
20/08/2023 J.I. Díaz

1.2. Motivación en circuitos eléctricos: van der Pol (1926): Teoría cualitativa de EDO,

Andronov(1930), Kolmogorov (1903 – 1987),







$$\ddot{\mathbf{x}} - \epsilon (1 - \mathbf{x}^2)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2$$

Abbildung 1.2: Phasenraumporträt für den van der Pol-Oszillator mit $\epsilon=0.5$ (links) und $\epsilon = 1.0$ (rochts)

Criterios de soluciones periódicas: Teorema de Poincaré-Bendixon,...

THEOREM 2.7.1 (Poincaré-Bendixson Theorem) Consider the autonomous system

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \tag{2.7.14}$$

and a domain \mathcal{D} in the (u_1, u_2) -plane.

- If D does not contain any stationary point and if no trajectory departs from \mathcal{D} , then \mathcal{D} contains a limit cycle.
- *If*

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}$$

is continuous and does not change sign in \mathcal{D} , then no limit cycle can exist in \mathcal{D} .

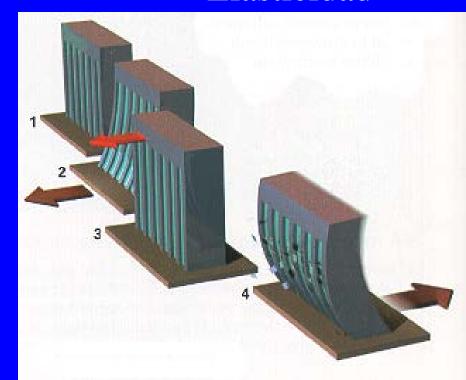
J.I. Díaz 20/08/2023

1.3. Una variante en Mecánica de Medios Continuos

Mecánica de Fluidos

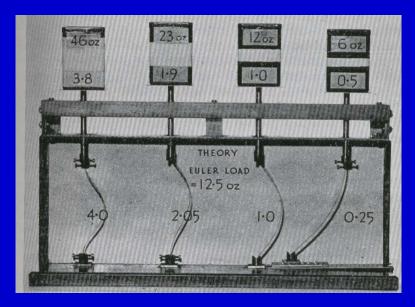


Elasticidad





20/08/2023



Diferentes perfiles de una columna

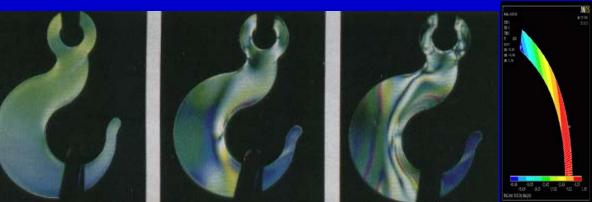
Fig. 3

Validación (regreso a la modelización): Sección no despreciable (y no homogénea)

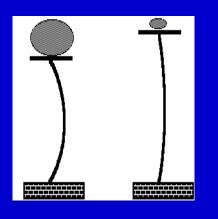


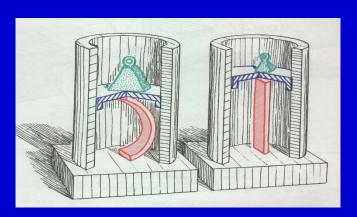
Teoría de la Elasticidad tridimensional

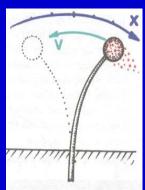
Navier, St. Venant,...

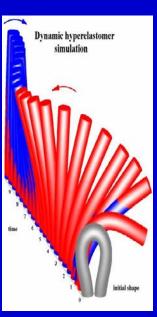


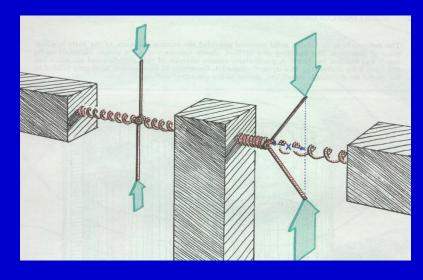
Observaciones sobre la dinámica (J.J. Stoker 1950)

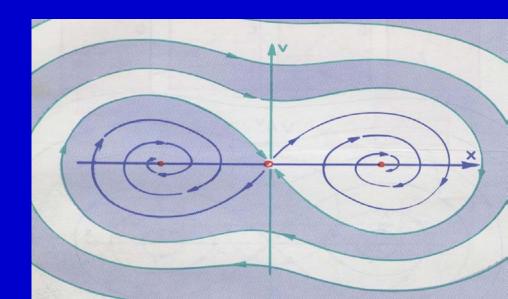








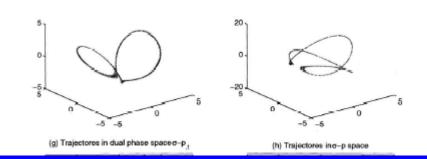


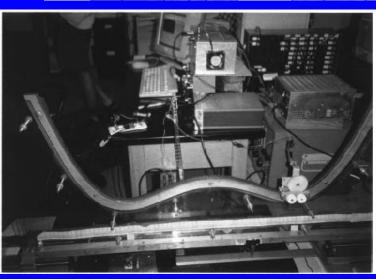


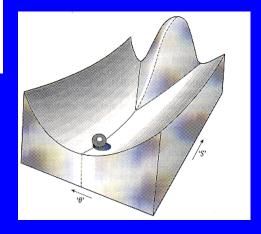
Ecuación de Duffing

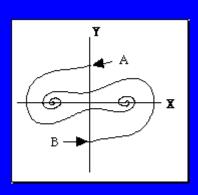
$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} - x + x^3 = F\cos(\omega t)$$

Con peso: dos equilibrios











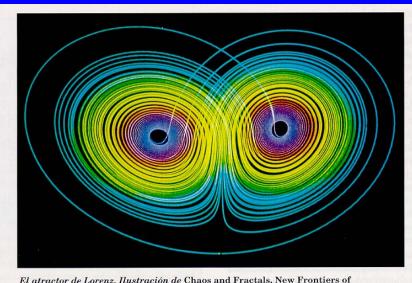
S.D. en espacios de dimensión infinita

Takoma Narrows

(Washington, 1940)

J.I. Díaz

1.4. Caos en Meteorolgía



 $El\ atractor\ de\ Lorenz.\ Ilustración\ de\ Chaos\ and\ Fractals.$ New Frontiers of Science. Edit. Springer-Verlag.

$$\frac{dx}{dt} + \sigma(x - y) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + y - rx + xz = 0$$

$$\frac{dz}{dt} + bz - xy = 0$$

Modelos atmosféricos (barotrópicos)

Claude Navier (1785-1836), Sir George Gabriel Stokes (1819-1903)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{i3} + f_{ri}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \operatorname{div}(\vec{v}).$$

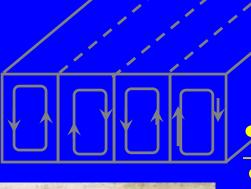
$$p = \rho R T$$
 .

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{RT}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + Q,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial q}{\partial x_j} = Q',$$

Otros temas de Mecánica de Fluidos conduciendo al caos:

Células de Rayleigh-Benard



with the state of the state of the water water to be stately with the tenter of the

any begans to the subsequence of the serious patents before the persons for the persons to the p

Boussinesq

$$\frac{\P u}{\P t} + (u \cdot \tilde{\mathsf{N}}) u = -\tilde{\mathsf{N}} p + \frac{1}{R_e} \mathsf{D} u + (T - T_0) g$$

Turbulencia (Kolmogorov)





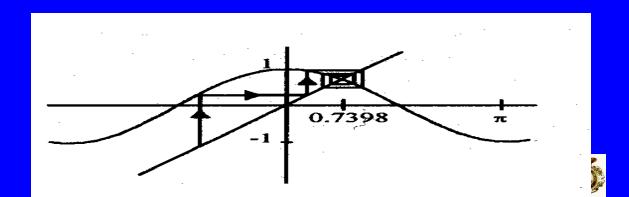
J.I. Díaz

1.5. El papel del ordenador: sistemas dinámicos discretos

En su forma más general, un sistema dinámico discreto definido en un conjunto X no vacío es una aplicación Φ de $N \times X$ en X que verifica:

- $1 \Phi(0, x) = x$, para todo x de X.
- 2.- $\Phi(n, \Phi(m, x)) = \Phi(n+m, x)$ para todos n, m de N, y para todo x de X.

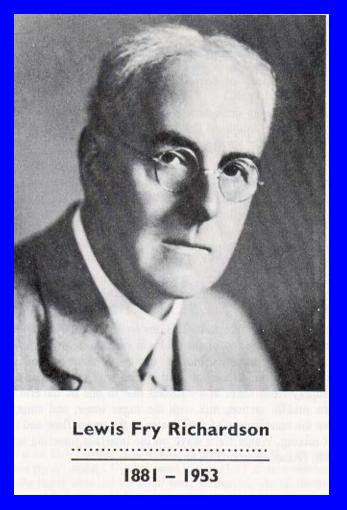
También suele usarse la notación $\Phi(n, x) = \Phi_n(x)$

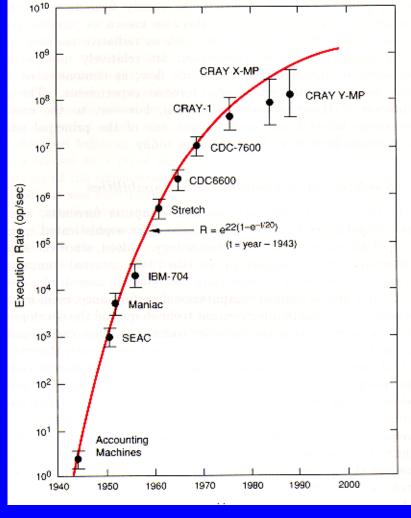


Richardson. Super-odenadores: Cálculo

paralelo.

Las 64.000 máquinas de Richardson





38

Ley de G.E. Moore (1965): "La potencia de computación se duplica cada año"

20/08/2023 J.I. Díaz

El ejemplo más simple de sistema dinámico discreto definido en un conjunto X es el obtenido iterando una aplicación de X en sí mismo:

Si
$$f: X \to X$$
 y se define $\Phi(0, x) = x$ $\Phi(1, x) = f(x)$ $\Phi(n, x) = f(\Phi(n-1, x))$

obtenemos un sistema dinámico sobre X.

Nótese que $\Phi(n, x) = f(f(f(...(f(x))...))) = f^n(x)$, si se conviene en que f^0 es la aplicación identidad.

()

Dado un punto x_0 el conjunto de sus imágenes por f,

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$$

se denomina la <u>órbita</u> de x_0 .

Si $f(x_0) = x_0$, el punto x_0 se llama punto fijo de f.

Si para algún natural k > 1 se verifica que $f^k(x_0) = x_0$,

el punto x_0 se dice <u>periódico</u>, y la órbita correspondiente órbita periódica. El menor k que verifica la relación anterior se llama *período* de la órbita.

Un punto x_0 se llama eventualmente periódico si existe un natural s tal que el punto $f^s(x_0)$ es periódico.

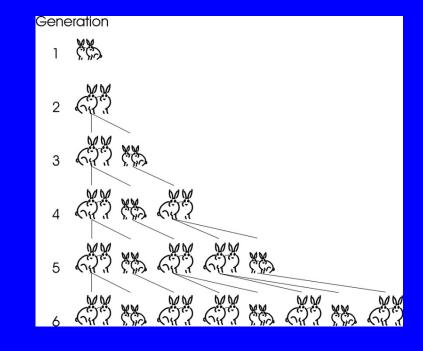
40

J.I. Díaz 20/08/2023

Sistemas dinámicos discretos en diversos contextos.

Un ejemplo de sistema dinámico discreto (no caótico) en un contexto inesperado: los números de Leonardo Fibonacci (sigloXII).

- Modelo de crecimiento de esa población basado en las siguientes reglas:
- (a) Un par de conejos se reproducen por parejas
- (b) Una pareja da lugar a otra nueva)



(c) No se mueren

Sea F_n el número de Fibonacci de parejas en la generación n

$${F_n} = {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...}$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
 n>2

También se aplica al crecimiento de las hojas (y frutos) de ciertas plantas



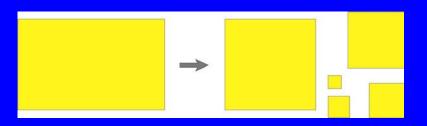
Por ejemplo, los lirios y los diafragmas tienen 3 pétalos, las primaveras y los ranúnculos tienen 5 pétalos, las flores del maíz tienen 13 pétalos, y las margaritas pueden tener 34, 55 y 89 pétalos.

20/08/2023 J.I. Díaz

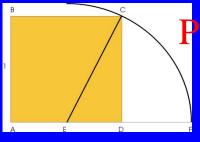
Se tiene que

$$\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

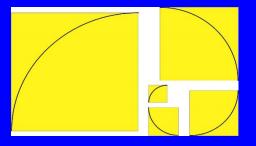
$$F_n/F_{n-1}$$
 (R) f =1.61803398...

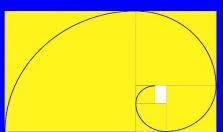


$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

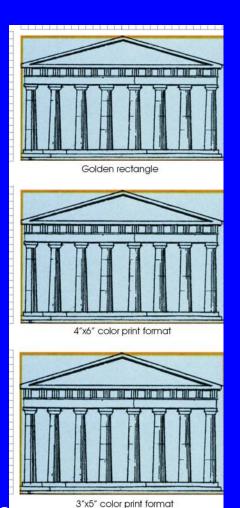


Partenon (Grecia)









Otra conexión inesperada con sistemas dinámicos

discretos:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f(...f(x)) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{$$

Si estudiamos la órbita de x=infinito basta con despreciar los términos en _______

$$f(\infty)=1$$

$$f(f(\infty))=1+\frac{1}{1}=2$$

$$f(f(f(f(\infty)))=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2}$$

$$f(f(f(f(f(\infty))))=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{5}{3}$$

No. de iteraciones	Valores de la órbita	
0	1	
1	2	
2	3/2=1.5	
3	5/3=1.66666	
4		
5		
6		
7		
8		
9	89/55=1.61818 	

Sensibilidad a las condiciones iniciales

El sistema dinámico obtenido por iteración de la aplicación f de X en X es sensible a las condiciones iniciales si existe una distancia r > 0 tal que para cualquier punto x_0 de X y cualquier entorno U de x_0 existen un punto y de U y un entero positivo ktales que

$$d(f^k(x_0), f^k(y)) > r$$

J.I. Díaz 20/08/2023

Transitividad

El sistema dinámico obtenido por iteración de la aplicación f de X en X es transitivo - o tiene la propiedad de mezcla - si para cualesquiera abiertos no vacíos U y V de X existe un natural ktal que

$$f^k(U) \cap V \neq \phi$$

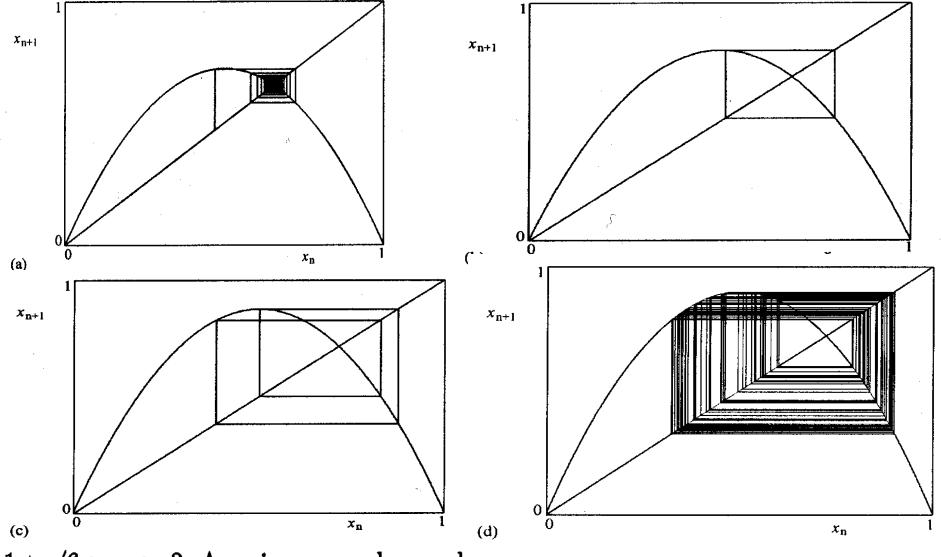
Este hecho significa, hablando informalmente, que en cualquier entorno de cualquier punto hay puntos cuyas órbitas visitan en su recorrido a casi todo el espacio.

J.I. Díaz 20/08/2023

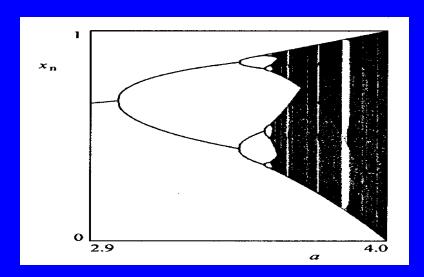
Sistemas caóticos

Un sistema dinámico discreto es caótico si:

- Es sensible a las condiciones iniciales
- Es transitivo
- Las órbitas periódicas son densas en el espacio



 $1+\sqrt{6}>a>3$. As a increases beyond this, successive biturcations give rise to a cascade of period doublings, producing cycles of periods 4 (Fig. 3.5c), and then 8, 16, ..., 2^n . With further increase of a we observe a chaotic regime, in which trajectories look like the sample functions of random processes (Fig. 3.5d).





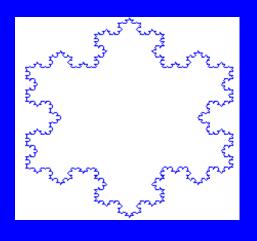


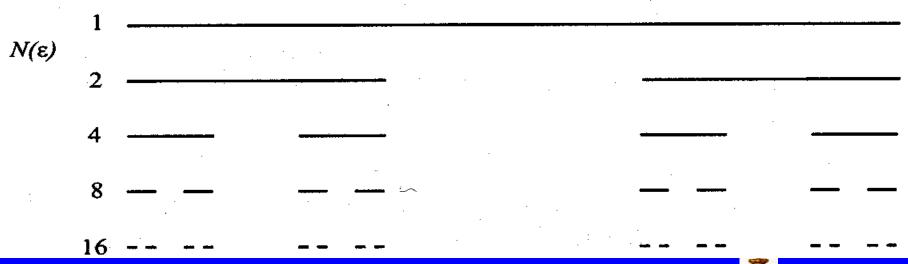


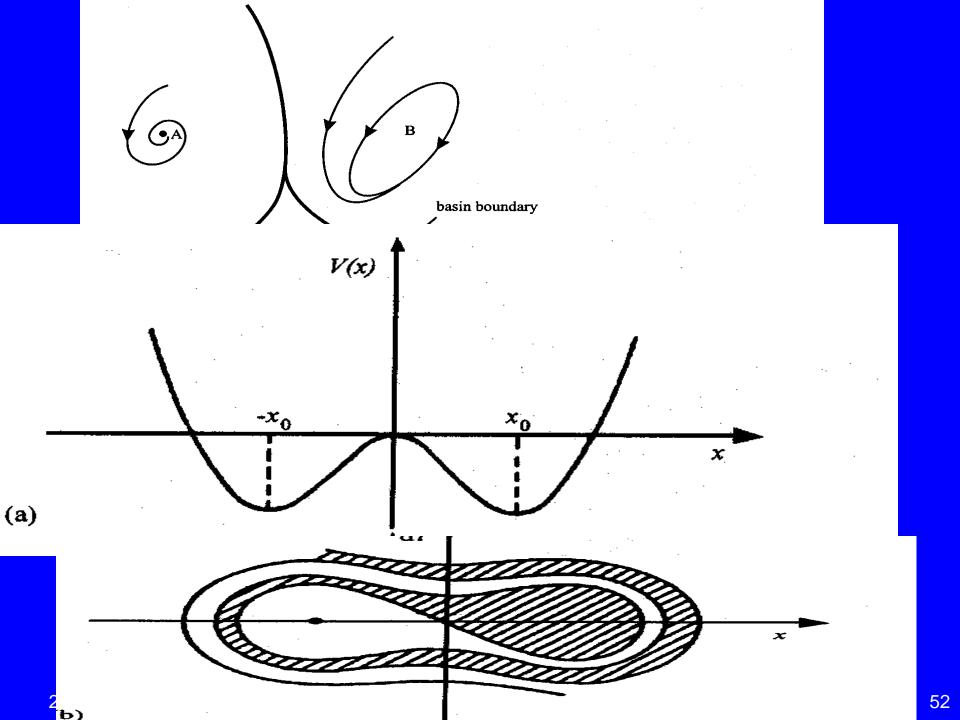


(0)



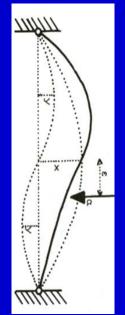


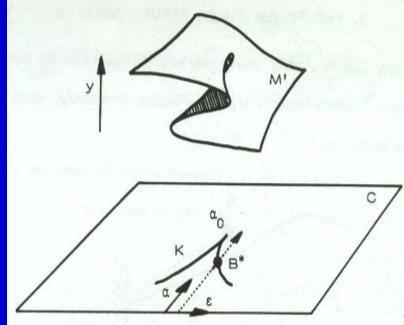




Muchos otros contextos:

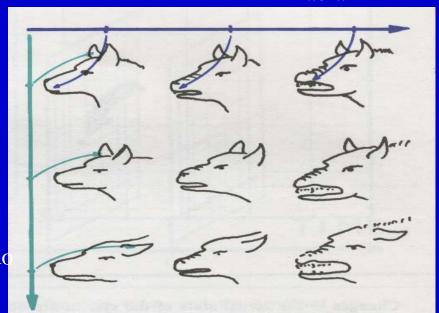
Catastrophe Theory, E. C. Zeeman: *Selected papers 1972-1977*

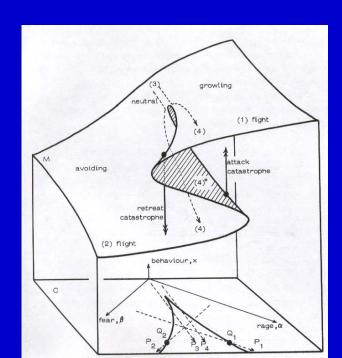




Psicología: mecanismo de agresión

rabia





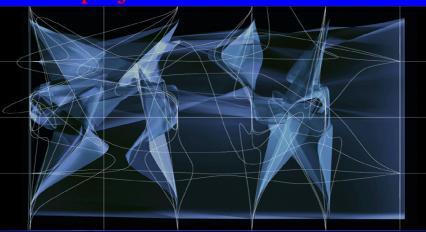
miedo

EL PAIS, 17 de enero de 2005 Suplemento, Exposición en el Centro Conde Duque



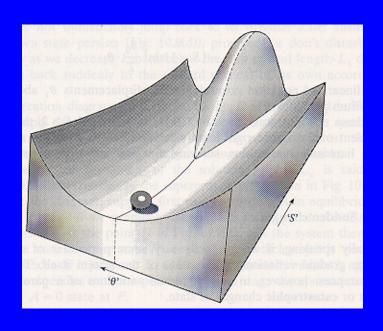
Peter David Eisenman *1932

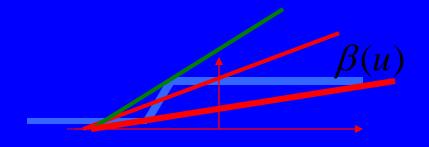
Premio Bienale de Venezia, 2004 Complejidad creciente





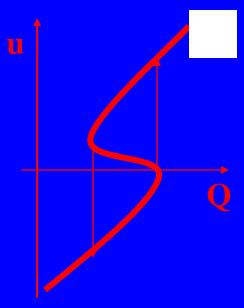
Bifurcación e Histéresis



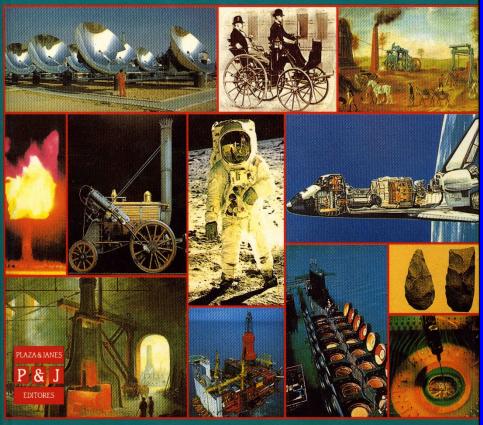


Equilibrios del Modelo 0-dimensional

$$A + Bu = Q\beta(u)$$



Crónica de la Técnica de la Crónica de la Cr



Principio de causalidad

"Nada surge sin un plan"

Leucipo y (su discípulo)

Demócrito de Mileto (425 a de C)

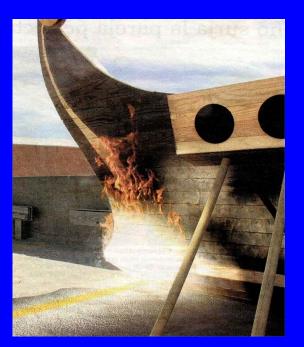
Matemáticas / Tecnología

Quehacer científico: convivencia del deseo de comprensión racional del mundo con la intención de actuar o controlar para conseguir fines difícilmente accesibles.

Euclides / Arquímedes: legendarias invenciones, transporte de líquidos, espejos parabólicos (hace 2.200 años) ...







Recreación:
David Wallace
MIT
(4/10/2005)



20/08/2023 J.I. Díaz

Historia de la Tecnología en España, Dirigida por F. J. Ayala-Carcedo, Valatenea, Barcelona, 2001

PERÍODOS HISTÓRICO-TECNOLÓGICOS

				CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES	
	ERA	PERÍODO/FASE		TECNOECONÓMICAS	SOCIOHISTÓRICAS
ERA DE LA TÉCNICA	CAZADORA- RECOLECTORA	Cultura del Guijarro y Pa	leolítico	Piedra tallada, hueso, madera Fuego desde hace 400.000 años Períodos glaciales cada 110.000 años	Sociedades nómadas Mutaciones humanas biológicas (Del <i>Homo habilis</i> al <i>Sapiens sapiens</i>)
		Mesolítico (1ª Transición Tecnológica) 10000-7000 a.C.		Calentamiento del clima y migración de la megafauna al norte	Crisis alimentaria
	AGRARIA	Neolítico (1ª Revolución Tecnológica) 7000-5000 a.C.		Agricultura y ganadería. Piedra pulimentada, cerámica, tejidos (1ºs materiales artificiales). Energía animal	Aparece el excedente económico: artesanos, comercio y explosión demográfica Sociedades sedentarias gentilicias
	(2ª T I Eda y Ed (2ª R	Calcolítico (2ª Transición Tecnológica) 5000-3000 a.C.	Cobre, oro, plata Escritura	Primeras ciudades y estados territoriales Primeras civilizaciones e imperios hidráulicos (Mesopotamia, Egipto, India, China). Esclavitud
		I Edad de los Metales y Edad Media (2ª Revolución Tecnológica)	Bronce 3000-1400 a.C.	Comienzos de la Ciencia Máquinas simples	
			Hierro d. 1400 a.C.	 1as Redes de transporte internacionales 1er Período de la manufactura 2a Revolución Agrícola, ss. XIII-XIV d.C. 1a Revolución Científica (Grecia) 	Civilizaciones e imperios clásicos marítimos (Grecia, Roma). Esclavitud Sociedad feudal medieval y servidumbre Gremios
	Protoindustrialización (3ª Transición Tecnológica) (1500-1765)		Uso intensivo de las energías naturales: hidráulica y eólica. Apogeo de la manufactura. 2ª Revolución Científica (s. XVII) Imprenta (1455) 3ª Revolución Agrícola (ss. XVII-XVIII)	d. 1400: Período de descubrimientos e imperios marítimos (Portugal y España principalmente). Renacimiento 2ª Revolución Comercial 2ª Revolución Urbana	

20/08/2023 J.I. Díaz

59