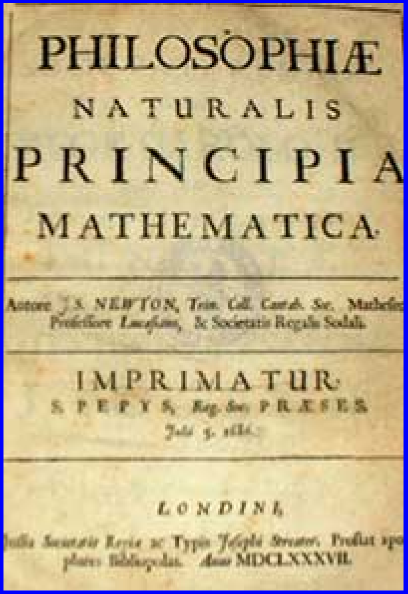
Comprensión: Mundo Natural / Actuación y control: creación artificial

1687


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.


Sir Isaac Newton (1642-1727)

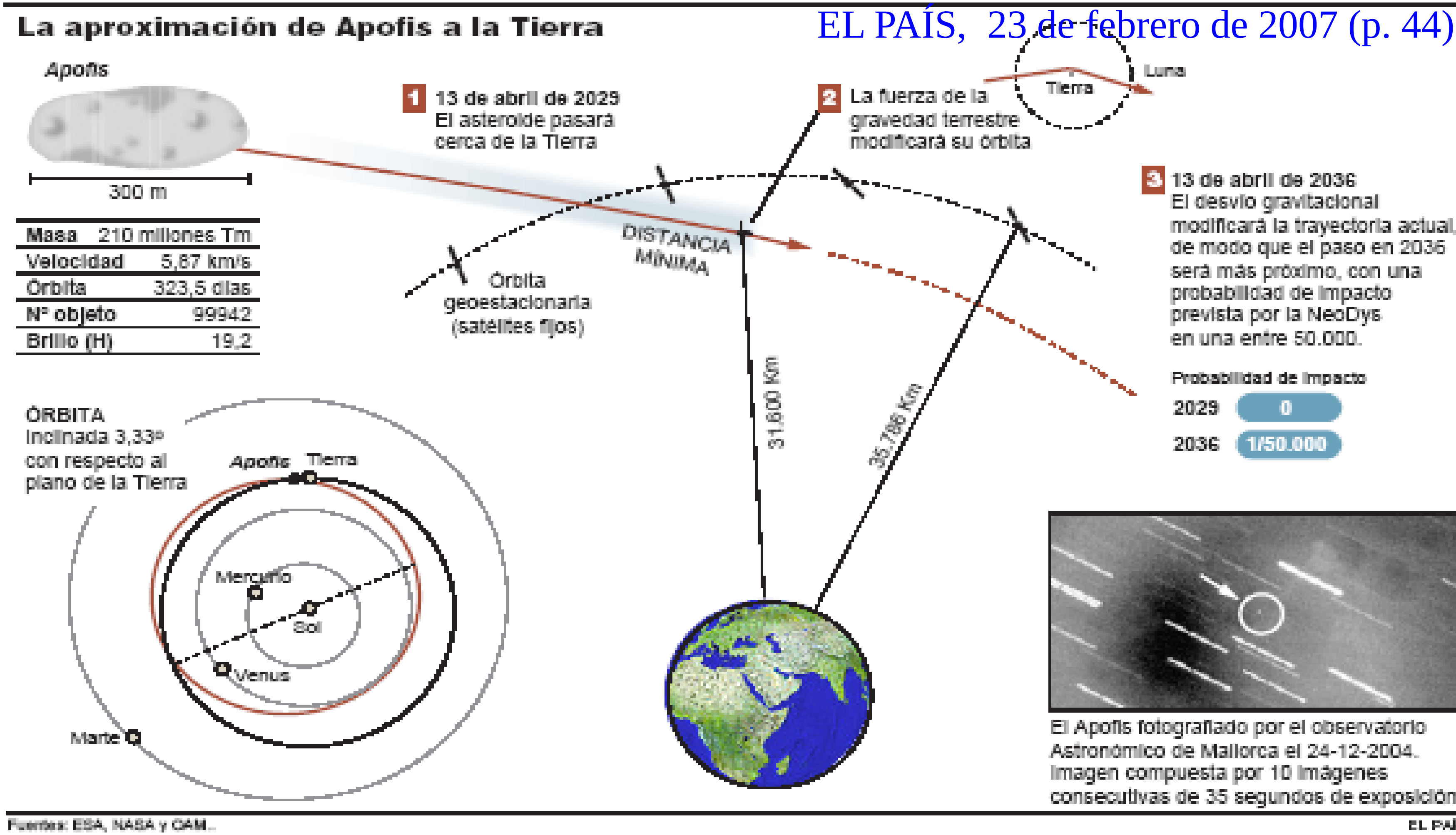
Optimalidad en la Filosofía Natural:

(“acciones” naturales)

Teoría de control: o acciones humanas (no presentes en la naturaleza: acciones artificiales)

De Kepler y Newton a nuestros días

EL PAÍS, 23 de febrero de 2007 (p. 44)



El acercamiento a la Tierra en 2029 de un asteroide activa la defensa espacial

Apofis pasará a menor distancia que los satélites geoestacionarios y puede chocar en 2036

Reivindicación de lo "Artificial"

- *Artificial*: 4. No natural, falso.
- 1. Hecho por mano o arte del hombre
- *Artífice*: 1. com. Artista, que cultiva alguna arte bella, 2. Persona que ejecuta científicamente una obra mecánica o aplica a ella alguna de las bellas artes, 3 fig. Autor, el que es causa de algo. 4. fig. Persona que tiene arte para conseguir lo que quiera.
- *Artificio:* Arte, primor, ingenio o habilidad con que está hecha alguna cosa. 2. Predominio de la elaboración artística sobre la naturalidad. 3. artefacto, máquina*.*

La cultura (el arte) como acción artificial

Re-elaboraciones

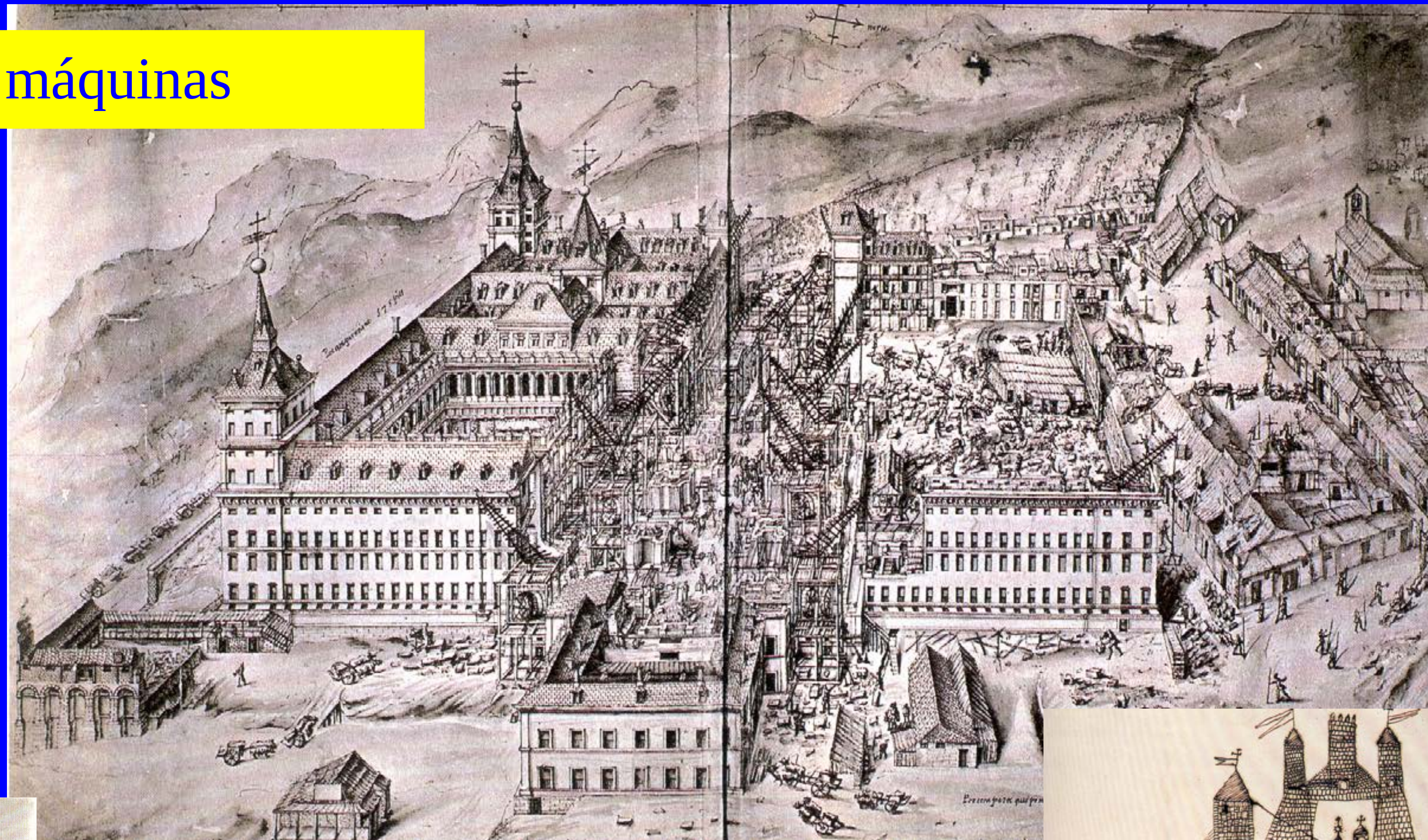
Sergei Vasilyevich Rachmaninov (1873-1943)

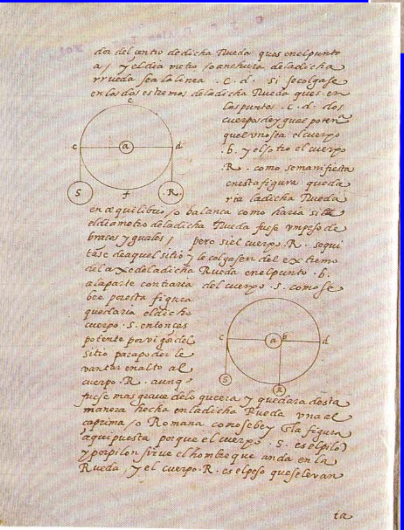
Rhapsody on a Theme of Paganini, Op.43

Pablo Picasso
Les Demoiselles d'Avignon. 1907

Domenicos Theotocopoulos
“El Greco”
The Visitation 1610-14

Artificios y máquinas

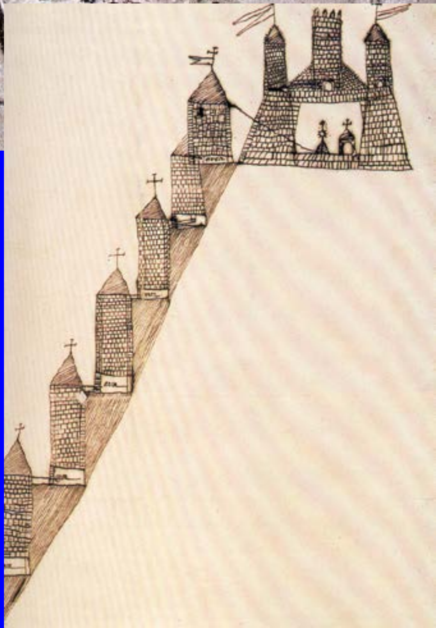




dor del centro dedicha Rueda ques enelpunto
a, y el diametro o anchura deladicha
rrueda sea la linea .c.d. si se colgase
en los dos estremos deladicha Rueda ques en
los puntos .c.d. dos
cuerpos de ygual potencia
que el vno sea el cuerpo
.b. y el otro el cuerpo
.R. como se manifiesta
en esta figura queda
ria ladicha Rueda
en equilibrio o balança como haria si
el diametro deladicha Rueda fuese vn peso de
braços yguales, pero si el cuerpo .R. se qui
tase deaquel sitio y le colgasen del extremo
del axe deladicha Rueda enelpunto .b.
ala parte contraria del cuerpo .S. como se
vee por esta figura
quedaria el dicho
cuerpo .S. entonces
potente por via del
sitio para poder le
vantar en alto al
cuerpo .R. aunq
fuese mas graue delo que era y quedara desta
manera hecha en ladicha Rueda vna al
caprima o Romana como se vee y la figura
aqui puesta porque el cuerpo .S. es el pilon
y por pilon sirue el hombre que anda en la
Rueda, y el cuerpo .R. es el peso que se levan
ta

Architectura y machinas, 1563

Artificio de Juanelo, 1561.



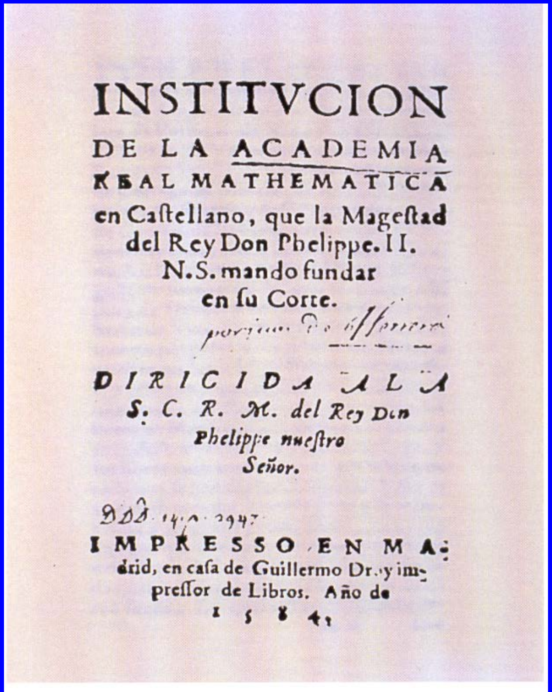
J.I. Díaz

Primeros Ingenieros en España / Matemática

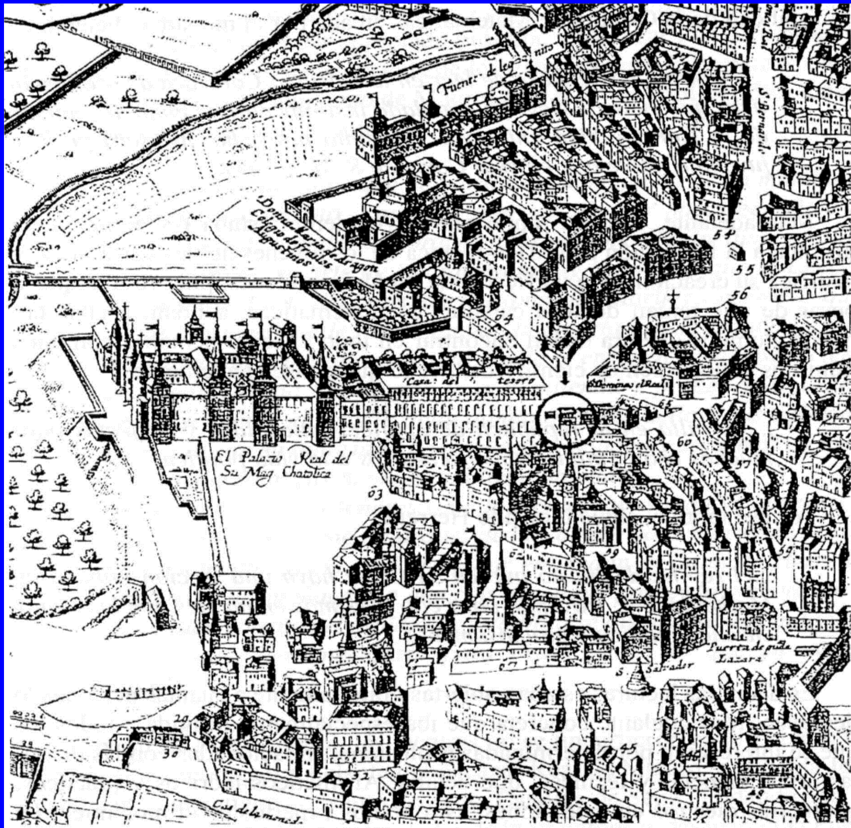
Juan de Herrera (1530-1597)

Academia Real Matemática

1584: Biblioteca Mazarine, París



INSTITVCION
DE LA ACADEMIA
REAL MATHEMATICA
en Caſtellano, que la Mageſtad
del Rey Don Phelippe. II.
N.S. mando fundar
en ſu Corte.
por Juan de Herrera
DIRIGIDA A LA
S. C. R. M. del Rey Don
Phelippe nueſtro
Señor.
IMPRESSO EN MA-
drid, en caſa de Guillermo Droy impreſſor de Libros. Año de
1584.



Casa de la Academia Real Mathematica. Plano de Gaspar de Witt (1622-1623). Museo Municipal de Madrid.

Plan del resto de esta sección

2. 2. Los inicios. *Filosofía natural*. Cálculo de Variaciones

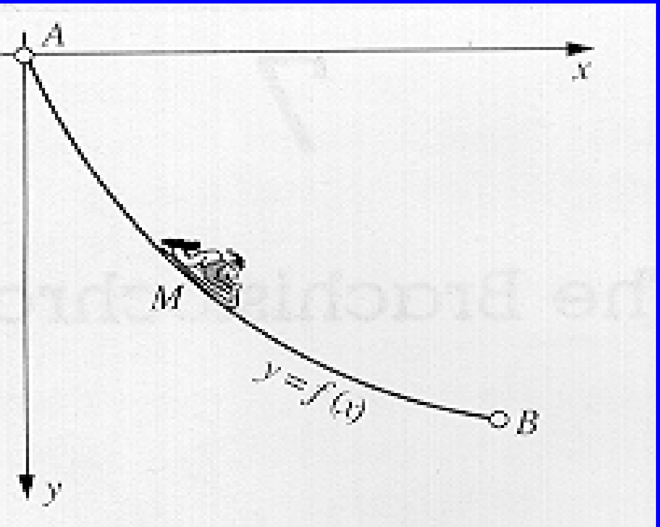
3. Control. Acciones artificiales

2. 2. Los inicios

La braquistócrona (más-corto-tiempo):

1696, Jean Bernoulli (1667-1748): *dados dos puntos A y B en un plano vertical, hallar la curva que los enlaza por la que un cuerpo que caiga desde A hasta B, por la gravedad, lo haga en el menor tiempo.*

Galileo (1561-1642), 1638: un arco de círculo.



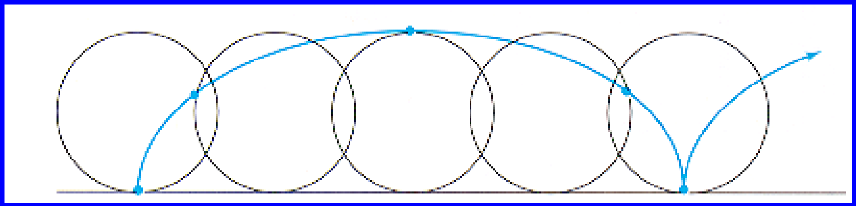
Resuelto en 1697 por: Jean y Jacques Bernoulli (1654-1705),

I. Newton (1642-1727),

G. Leibniz (1646-1716),

G.F.A. l'Hôpital (1661-1704).

la cicloide

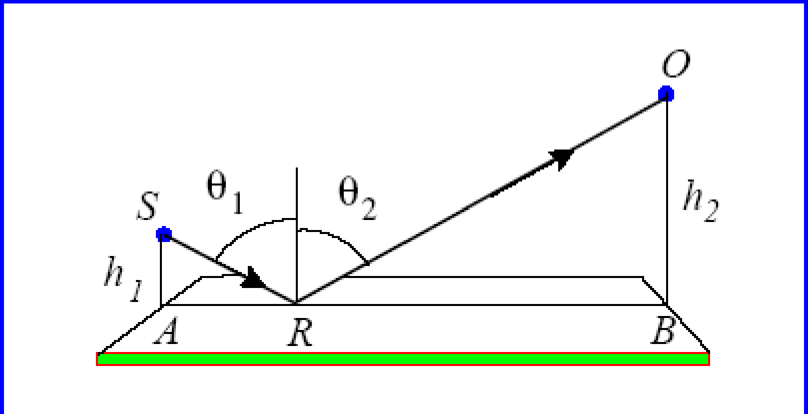


Galileo Galilei (1562-1642),

Blaise Pascal (1623-1662),..

Resultados pioneros sobre procesos óptimos:

- **Pierre de Fermat (1601-1665): “la luz se propaga de la manera más rápida posible”**



I. Newton (1687): Cuerpo de revolución de menor resistencia al aire. "El barco *chato* de Newton"

Newton,I.. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

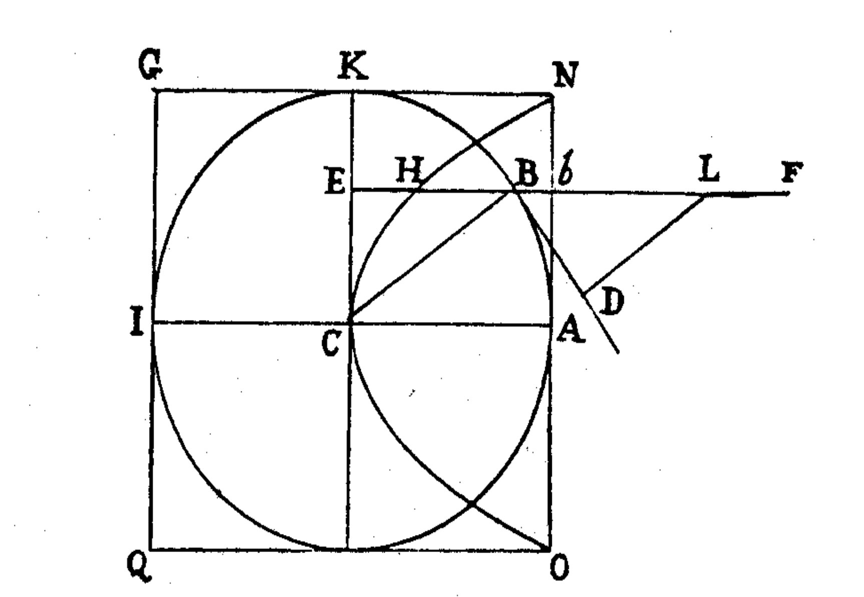
¿cuál es el cuerpo de revolución que ofrece menor resistencia al movimiento?

Proposition XXXIV (Book II):

Esfera, cono y cuerpo general de revolución.

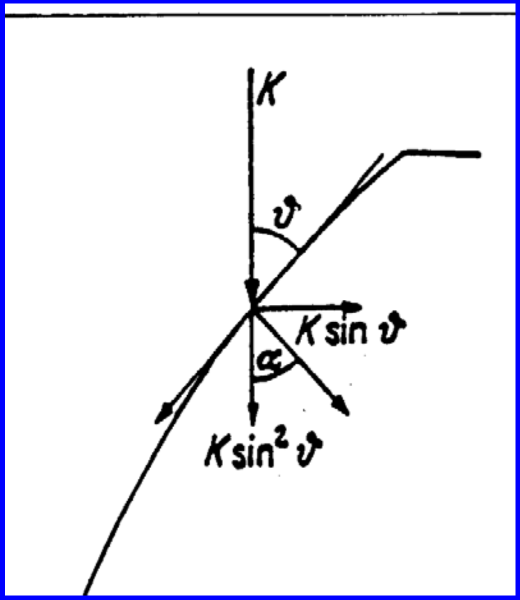
Método geométrico

"it may be of use in the builfing of ships"



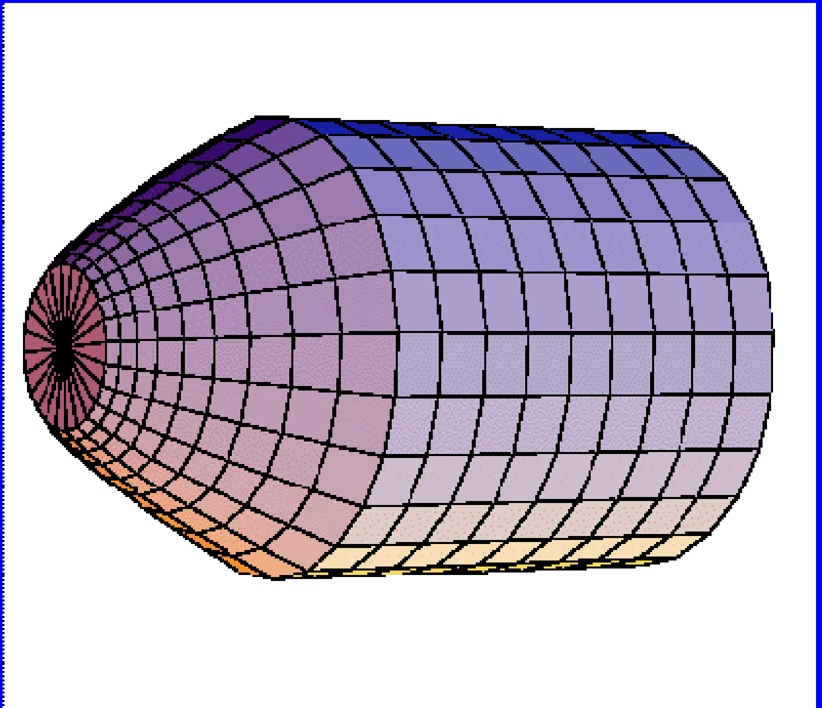
Resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad

Solución óptima: especie de cono truncado (*barco chato*)



Sin detalles (no más de una página): larga historia

Version detallada de Newton (requerimiento de D. Gregory en 1691)



H.H. Goldstine: A History of the Calculus of Variations, Springer-Verlag, New York, 1980.

Análisis del problema: Legendre (1786), Bolza (1909),...

J. Eur. Math. Soc. 7, 395–411

JEMS

M. Comte · J. I. Díaz

On the Newton partially flat minimal resistance body type problems

tratamiento de imágenes, transición de fases, elasticidad no lineal,...

Retorno a la optimización en la “filosofía natural”

El principio de mínima acción de P. L. M. de Maupertuis (1698-1759)

• **Búsqueda de un esquema filosófico del mundo**

1746: *Las leyes del movimiento y el equilibrio deducidas de un principio metafísico*:"Si ocurre algún cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio ha de ser lo más pequeña posible"

J.S. Köning 1751 (carta de 1707 de Leibniz a Hermann)

G. W. Leibniz (1646-1716) 1710: *Ensayo sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal*: "El mejor de los mundos"

Mejor = mínimo (pero en economía mejor= máximo rendimiento)

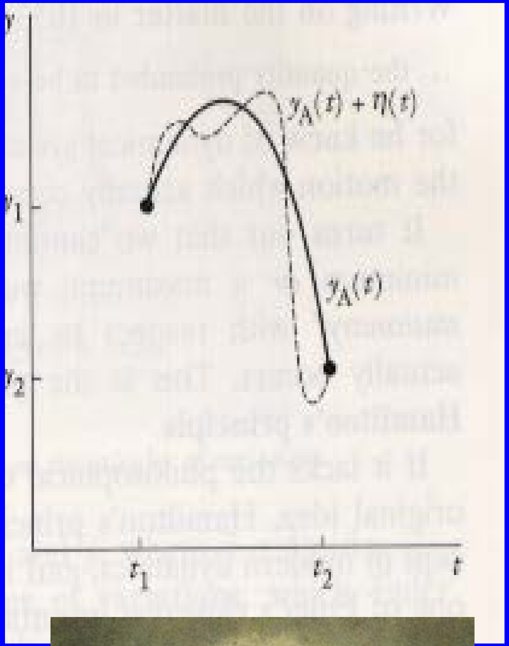
Nacimiento del Cálculo de Variaciones

Leonhard Euler (1707-1783)

Acción en un intervalo (t_1, t_2)

= energía cinética – energía potencial

(1743<1746, Maupertuis)



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

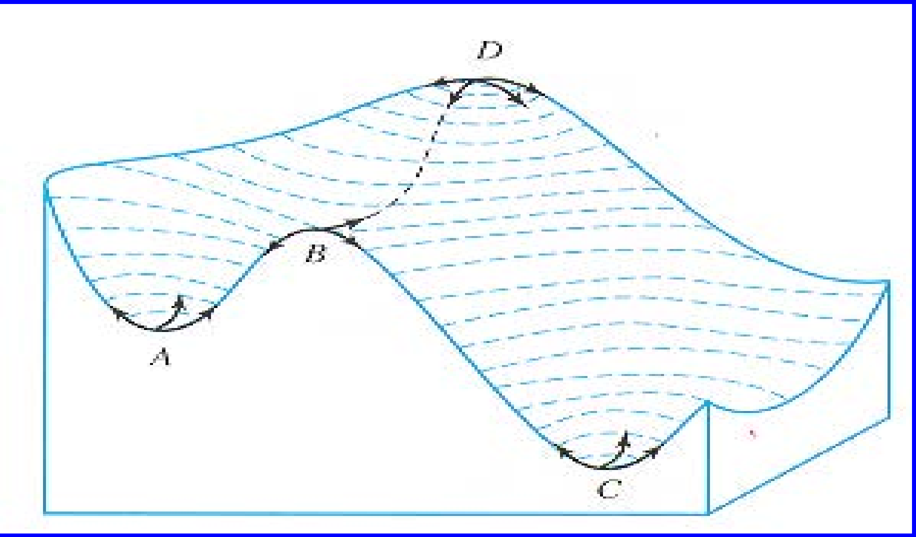
Carta del 12 de agosto de 1755 (19 años)

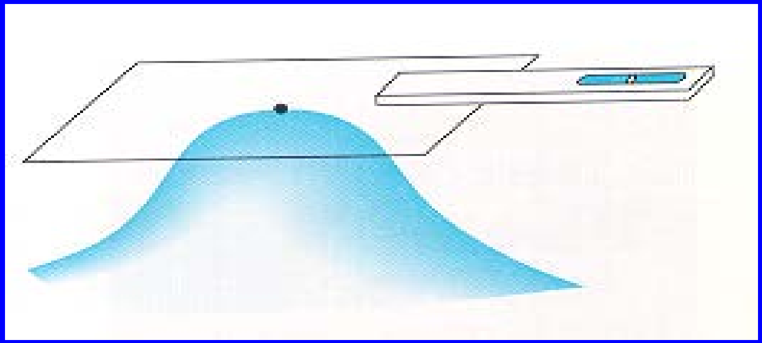
Métodos:

Directos (análisis sin requerir nada adicional)

Indirectos (supuesto que todo es tan suave y regular como se necesite)

Condiciones necesarias: máximos, mínimos, puntos de inflexión (**puntos estacionarios**)



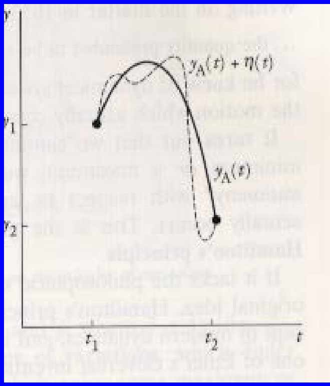


Reducción de infinitas dimensiones a una dimensión:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x`)dt \rightarrow Inf \qquad x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1$$

Variación de x_0 (t)

$$x_0(t) + \alpha h(t) \qquad h(t_0) = h(t_1) = 0.$$



Variación de J

$$\delta J = 0$$

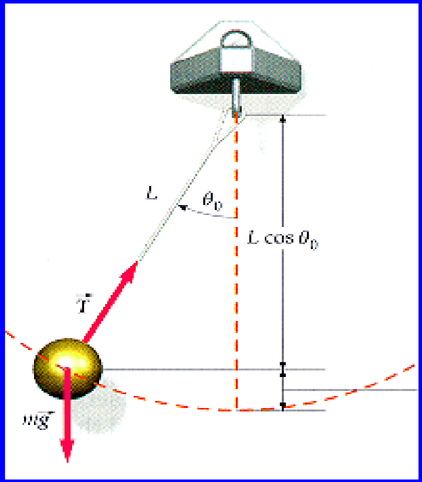
$$\delta J(x,h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\Bigg|_{x(t)} h(t)\, dt,$$

Ecuación de Euler (1744) - Lagrange (1762)

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = 0.$$

Multiplicadores de Lagrange:

Movimientos con ligaduras

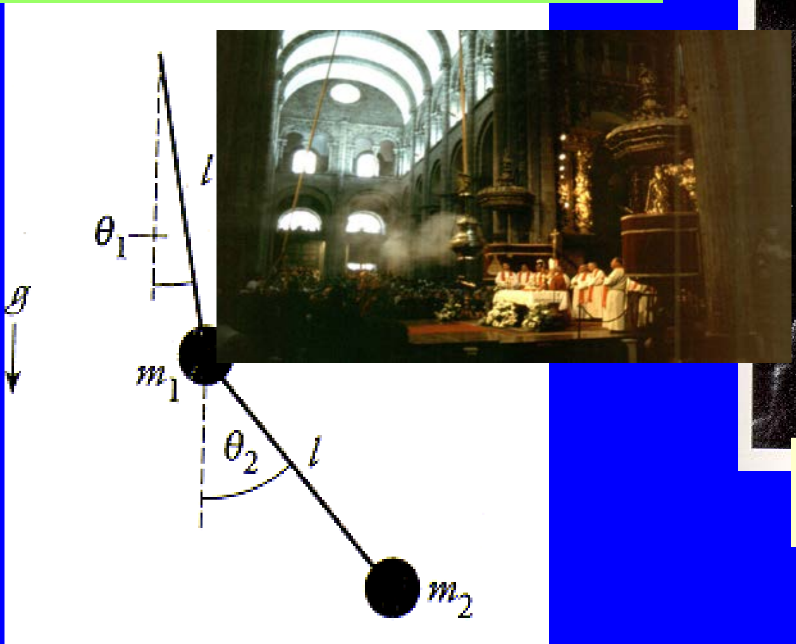


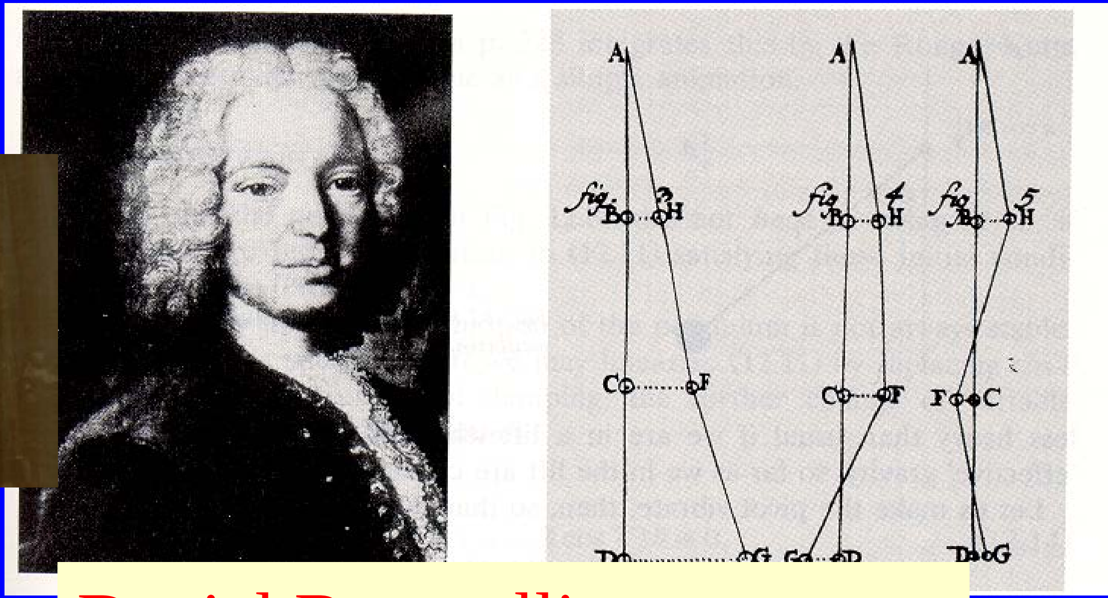
Péndulo no lineal

Ecuaciones no lineales:

teoría cualitativa, aproximación,…

el péndulo múltiple

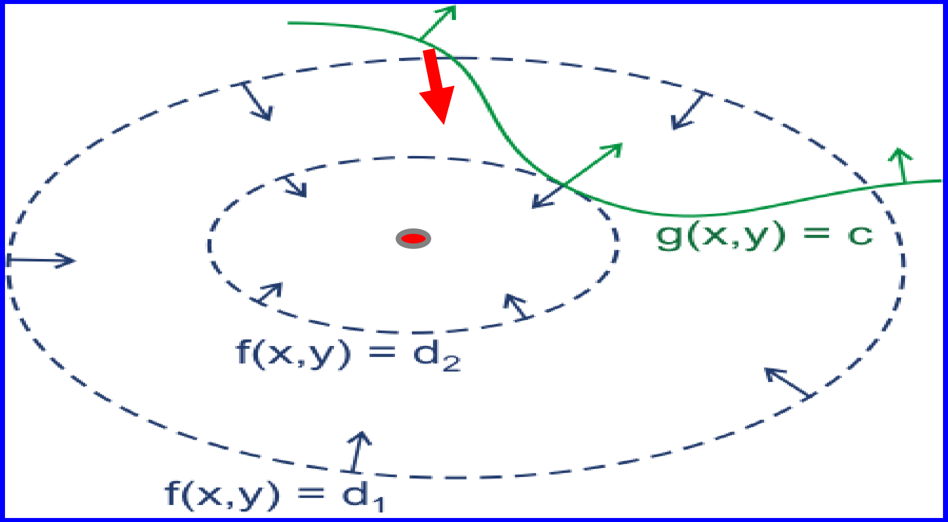




Daniel Bernoulli (1700-1782)

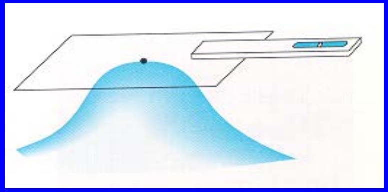
Multiplicadores de Lagrange

- Evitan las ligaduras pero “complican” la función Lagrangiana (o funcional de coste)



Max de f(x,y) sobre la curva g(x,y)=c

Solo cuando el nivel de g es tangencial al de f, al pasear por la curva (por la derecha o por la izquierda) en ese punto f no varía: es un máximo o mínimo



gradiente de f= (*gradiente* de g)·Cte

- **W.R. Hamilton (1805-1865): la acción es sólo un punto estacionario y a veces, incluso, un máximo.**
- **Principio de acción estacionaria.**
- **Dualidad: formulación hamiltoniana**

$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ $H(t, q_i, p_i)$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

- **Distinción entre la naturaleza de pp. estacionarios: A. Legendre (1752-1833), C. Jacobi (1804-1851).**

Métodos directos

Karl Weierstrass (1815-1897)

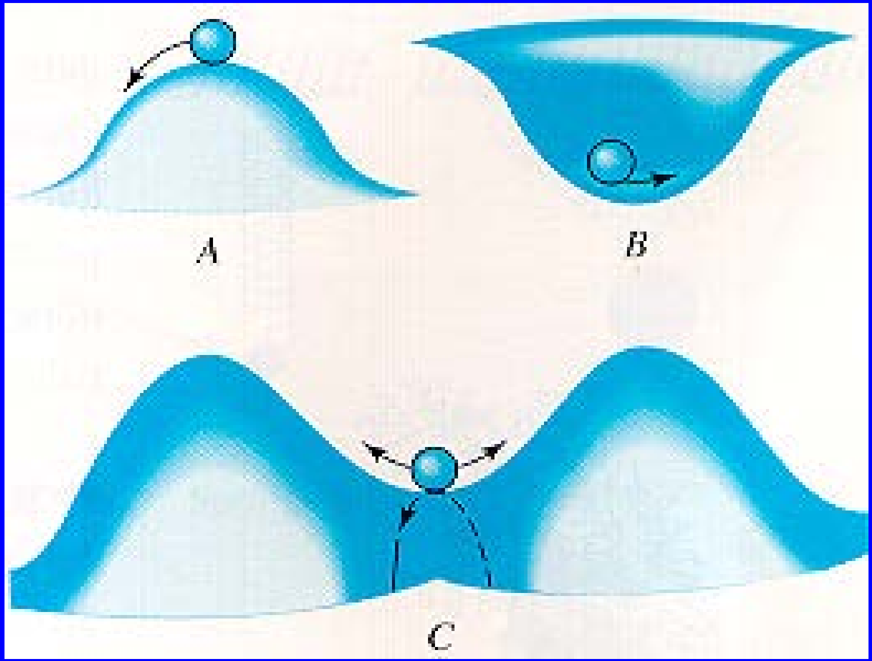
Consolidación (rigor matemático)

Problemas sin solución,...

David Hilbert (1862-1943): Paris, 1900,

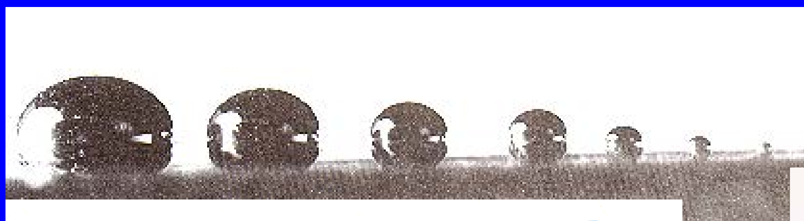
Problema 20: ¿ admiten solución los problemas de contorno del Cálculo de Variaciones, una vez definida de manera adecuada la noción de solución?

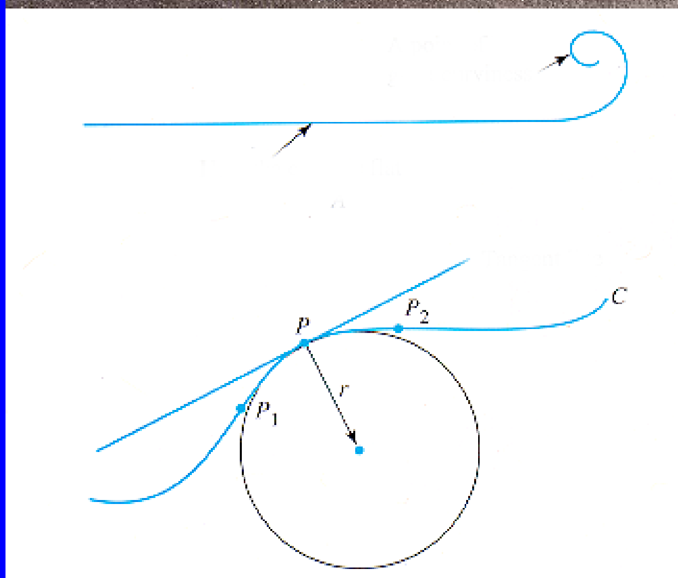
Principios variacionales y estabilidad (sistemas conservativos)

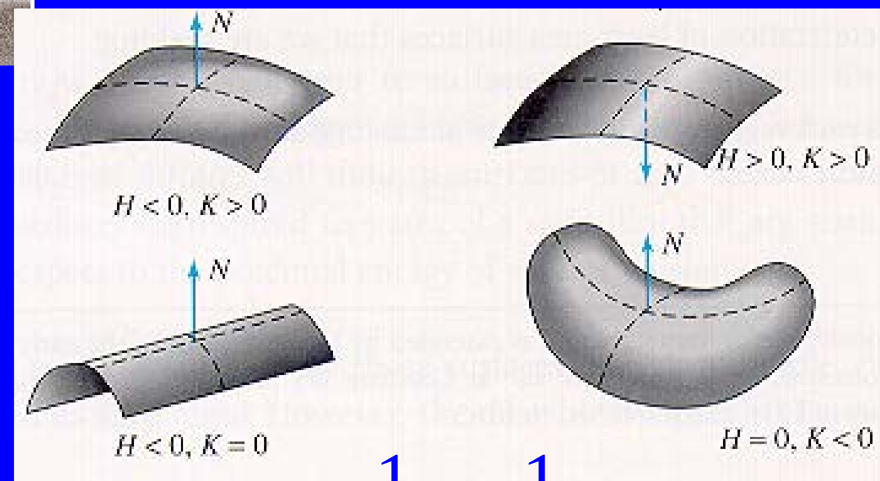


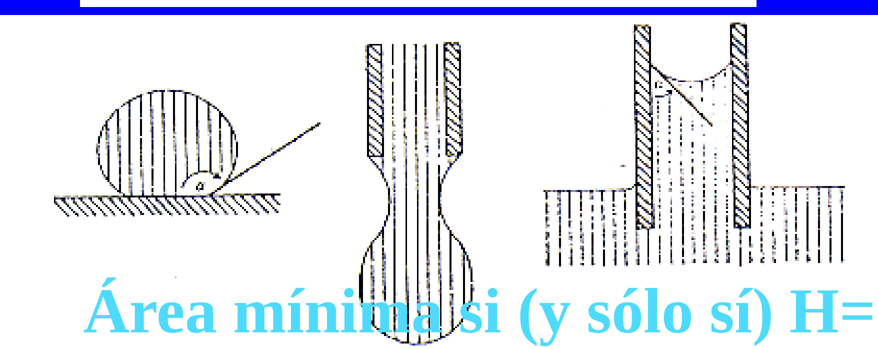
- P. G. L. Dirichlet (1805-1859),
- H. Poincaré (1854-1912),
- A.M. Lyapunov (1857-1918),...

C. de V. en Fluidoestática: Curvartura media





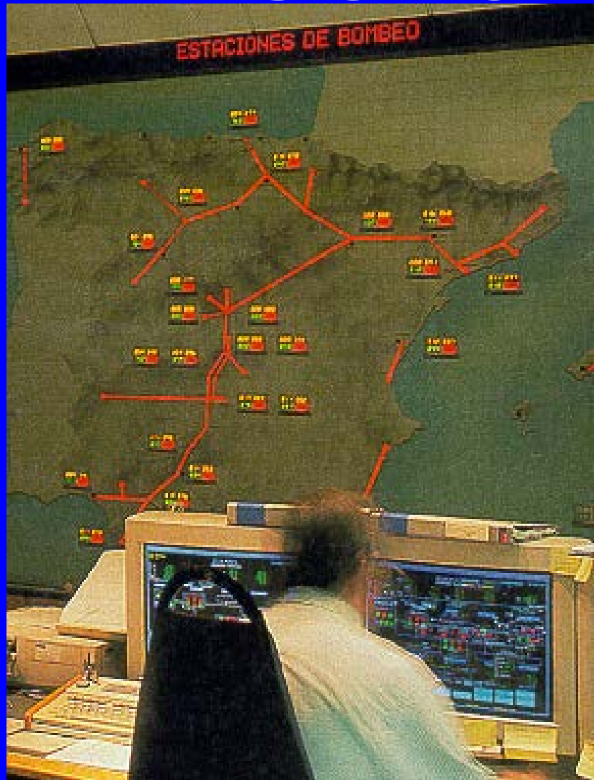


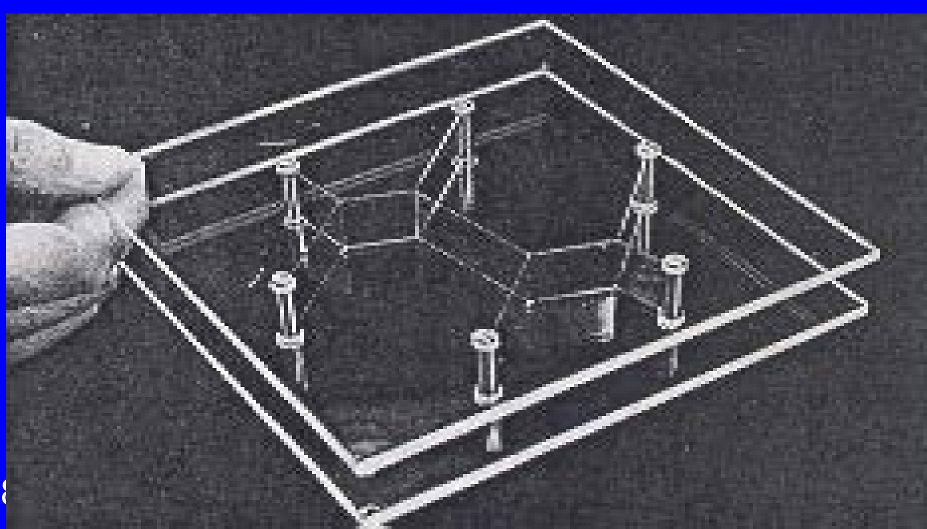


P. S. de Laplace (1749-1827), Th.Young (1773-1829), C.F. Gauss (1777-1855),

Área mínima si (y sólo sí) H=0, Superficies jabonosas= minimales

Conexiones óptimas





Jacob Steiner (1796-1863).

Teoría de grafos,..

El Cálculo de Variaciones en España

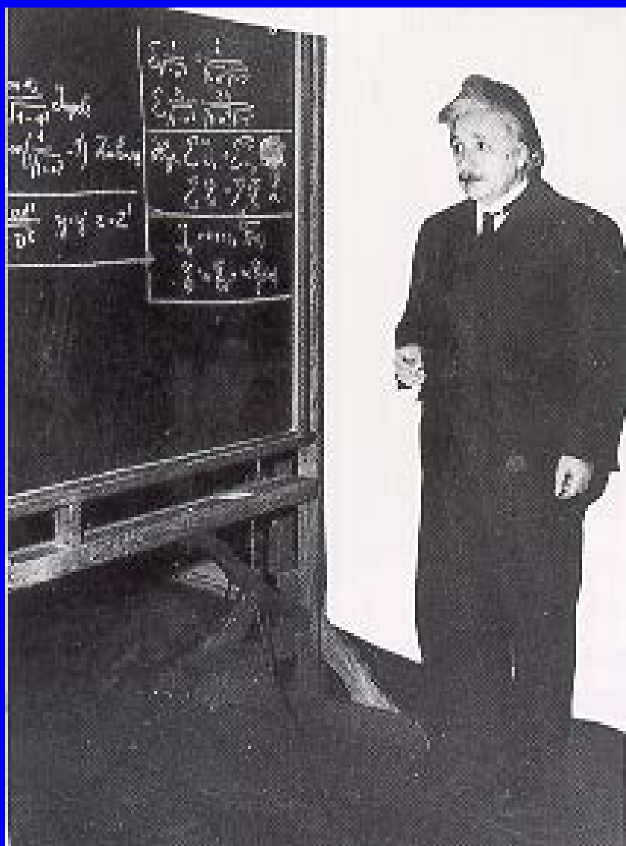
- **Benito Bails (1730-1797), 1772, (inquisición)**
- **José Echegaray Eizaguirre**
  (1833-1915), 1858.
  [Gumersindo Vicuña (1883),
  Simón Arcilla (1888)]

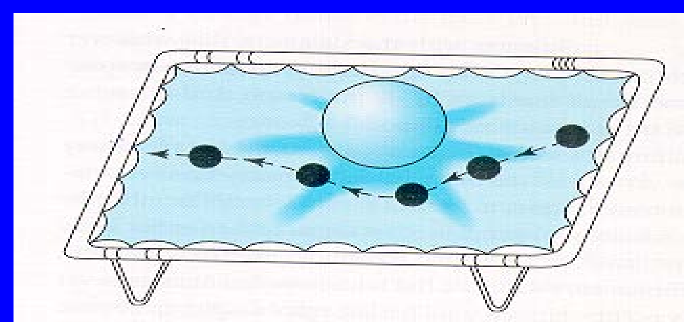
- **E. Terradas (1883-1950):**

“Sur le mouvement d’un fil”,*Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2, 250-255, 1912).*

- **Julio Rey Pastor (1888-1962): Los problemas lineales de la Física (1955).**

Principio de acción estacionaria y Relatividad General (1915):





Albert Einstein (1879-1955) **David Hilbert (1862-1943)**

- **D. Hilbert,** “Die Grundlagen der Physik”, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenchaften zu Göttingen* (1915), 395-407.
- **A. Einstein**, “Zur allgemeinen Relativitätstheory (Nachtrag), *Sitzungsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* **46,** (1915), 799-801.
- L. Corry, J. Renn,J. Stachel, “Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute”, Science, 278, 1270-1273, **1997**

Erste Korrektur meiner ersten Note.

1

$$G_{im} - \frac{1}{2} g_{im} = T_{im}$$

Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.

25

Die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie seine Elektrodynamik aufbaut, und die gewaltigen Problemstellungen von Einstein sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — wesentlich aus drei einfachen Axiomen ein ~~neues~~ System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der gestellten Probleme enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.

Es seien w_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter. Die das Geschehen in w_s charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn von Einstein zuerst eingeführte Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s;

2) die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne.

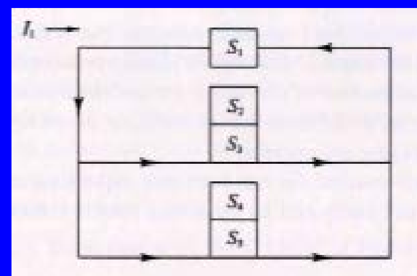
Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr zunächst folgende zwei Axiome:

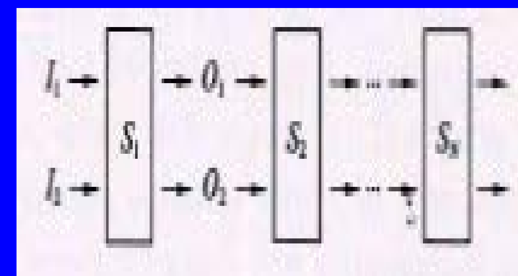
6 - DEZ.1915

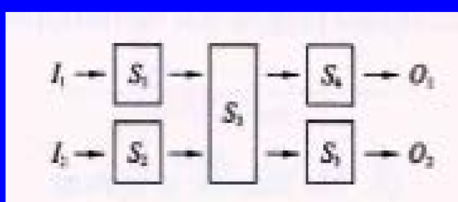
Fig. 1. The first page of a set of proofs of Hilbert's first communication, with Hilbert's handwritter corrections and a printer's stamp, dated 6 December 1915. [Reproduced with permission by the

3. Control

Entrada → Sistema → Salida







Objetivo: mejorar el comportamiento del sistema

- **Control óptimo** **(alcanzar lo mejor)**:

  $\mathrm{Min}\{J(u): u \text{ en } K\}$

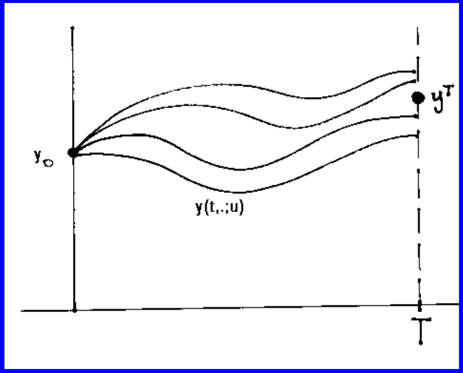
  Usualmente $J(u)=J_1(u)+c|y(u)-y_d|$, $c\geq 0$

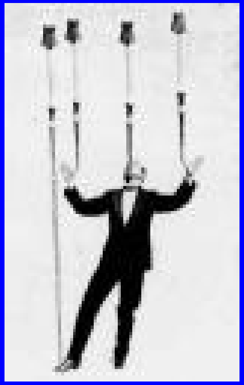
  * Ecuación de estado determinista (EDO o EDP) o estocástica

  * Ecuación estacionaria o dinámica

  * Ecuación continua o discreta

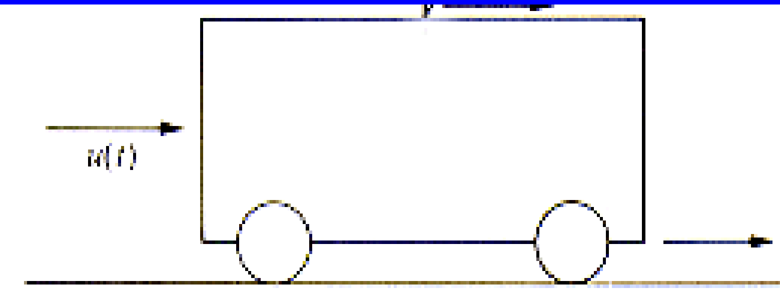
* **Control posicional** **(bordear lo imposible)**:





Posición inestable.

Control óptimo: Controles bang-bang

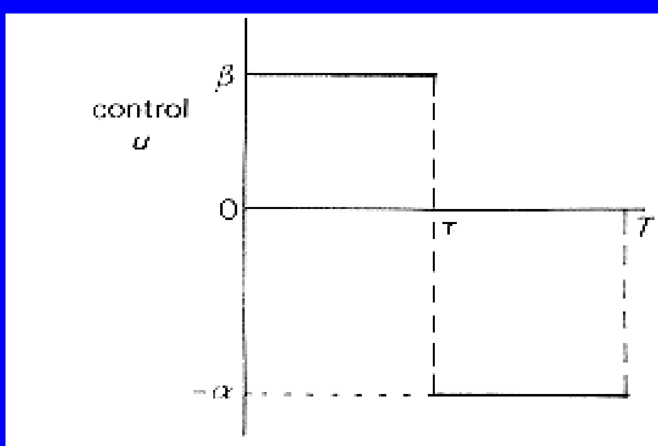


V(0)=0

V(T)=0

Aceleración u(t), $-\alpha \le u(t) \le \beta$ $v`(t) = u(t)$

Problema: hallar u(t) para que T sea mínimo

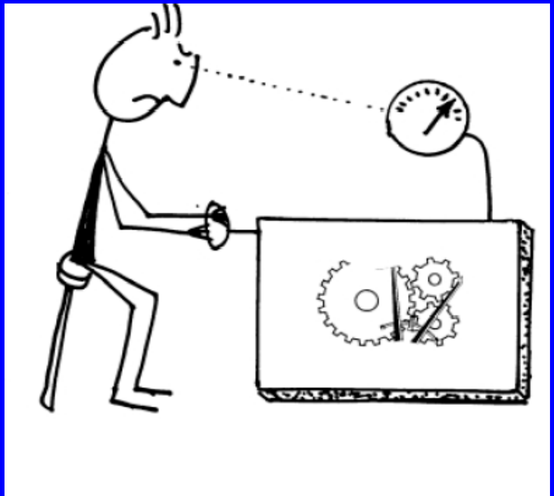


EDO con coeficientes discontínuos

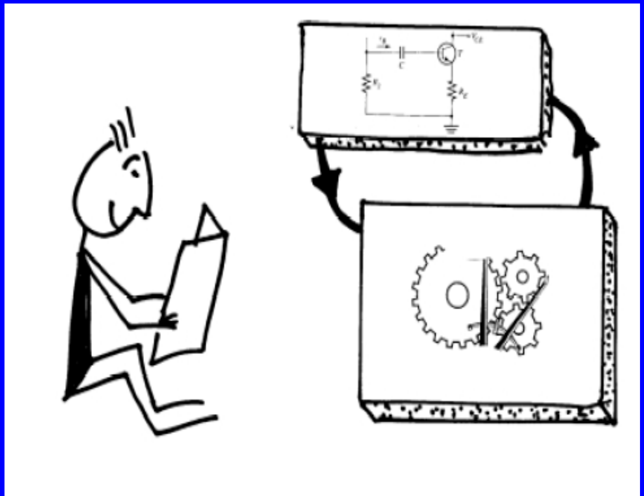
C. Caratheodory (1873-1950),.......

El control óptimo conduce intrinsecamente a comportamientos no regulares

Lazo abierto / lazo cerrado



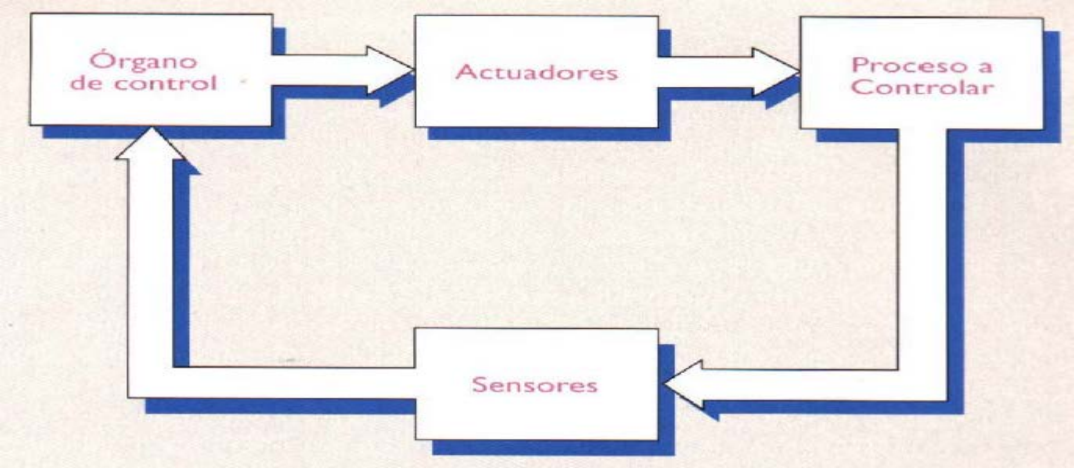
a) Control manual



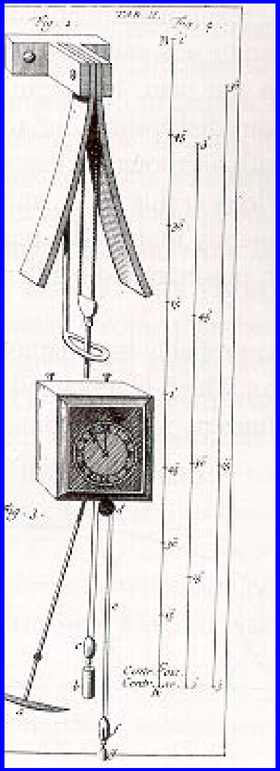
b) Control automático

realimentación
(feedback)

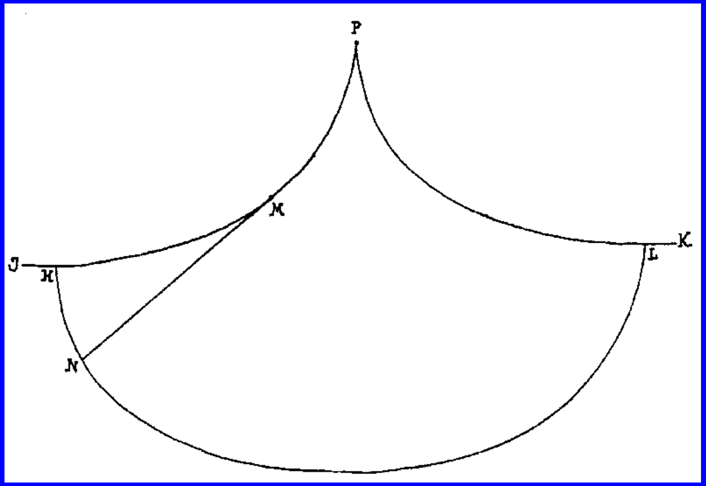
retroalimentación



Antecedentes del control por realimentación (feedback)**:** El péndulo cicloide de Christian Huygens (1629-1695), 1673.



•Métodos precisos para medir el tiempo.



"Gobernador" para el control de velocidad de rotación

Th. Mead 1787: Molino de viento

J. Watt (1736-1819): Máquinas de vapor

G. B. Airy (1801-1892): Telescopios astronómicos

Enfoque totalmente matematizado:

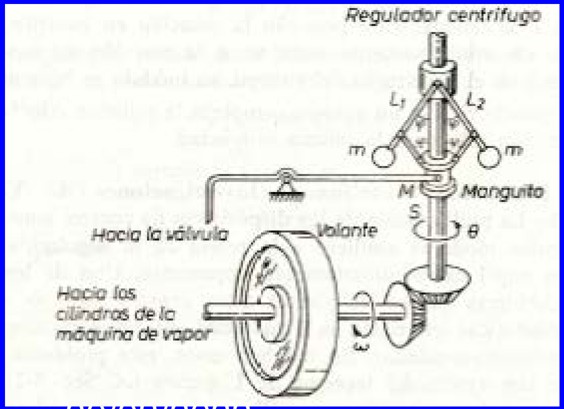
J. B. L. Foucault (1819-1868),

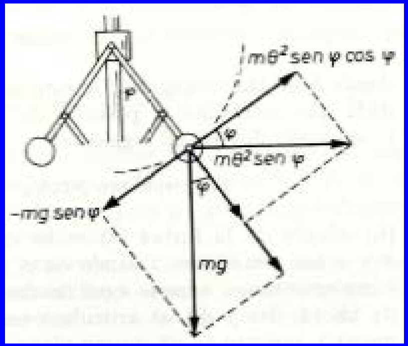
J.C. Maxwell (1831-1879)

On governors (1866)

I. I. Vichnegradski

Sobre los reguladores de acción directa (1876)

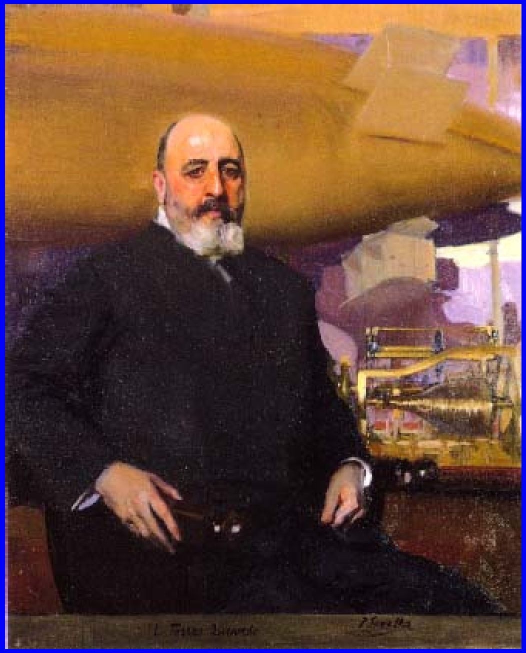




$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\varphi} &= mn^2\omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - mg \operatorname{sen}\varphi - b\dot{\varphi}, \\ J\dot{\omega} &= k\cos\varphi - F, \end{aligned}\right\}$$

Realimentación: automática

Leonardo Torres Quevedo (1852-1936)



Presidente de la RSME

Presidente de la Real Academia de Ciencias

Miembro extranjero de la Acadèmie des Sciences

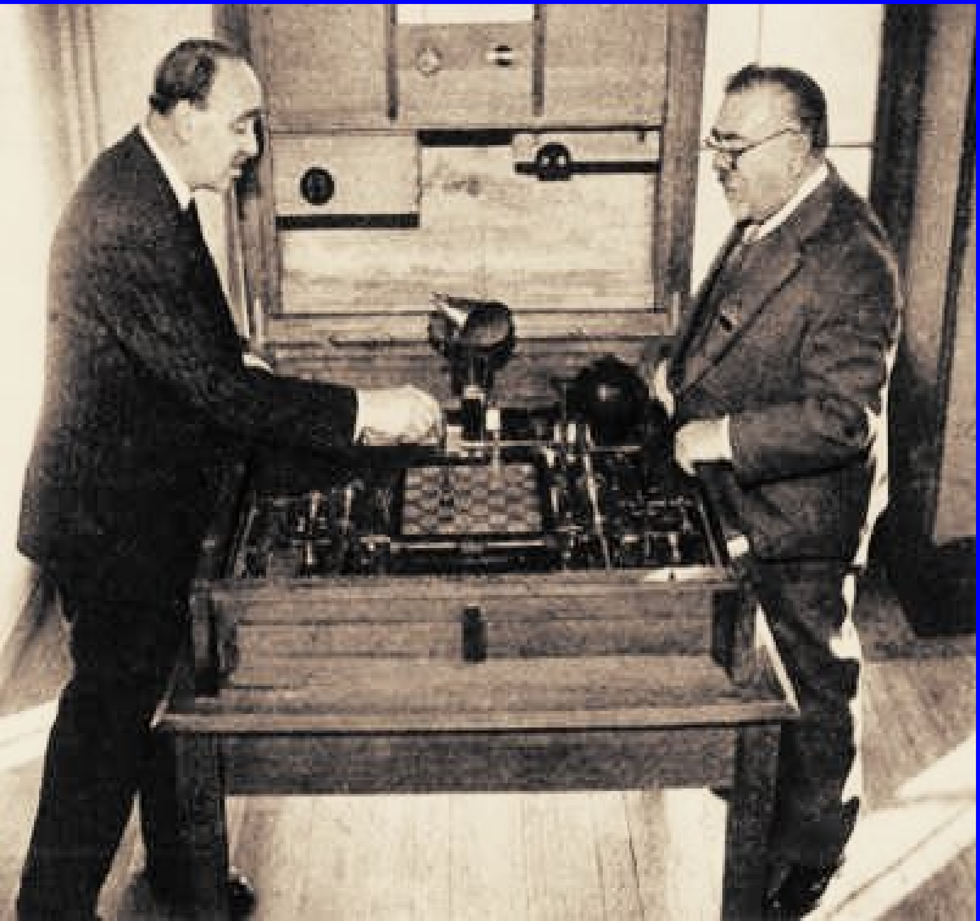
1894 - 1964

N. Wiener, Cybernetics,

The M.I.T. Press, 1948 (2ª 1961).

Subtítulo : “El control y la comunicacion en el animal y en la maquina"

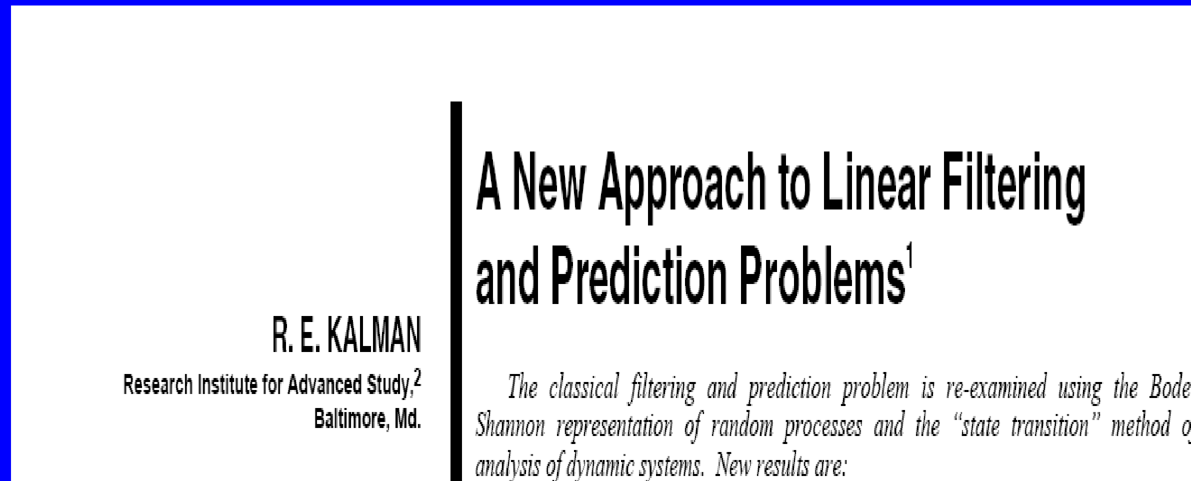
R. Lorente de No (1902-1990)



Pedro Puig Adam (visita de N. Wiener en 1952)

Criterios de controlabilidad y observabilidad

Rudolf Emil Kalman (1930-)

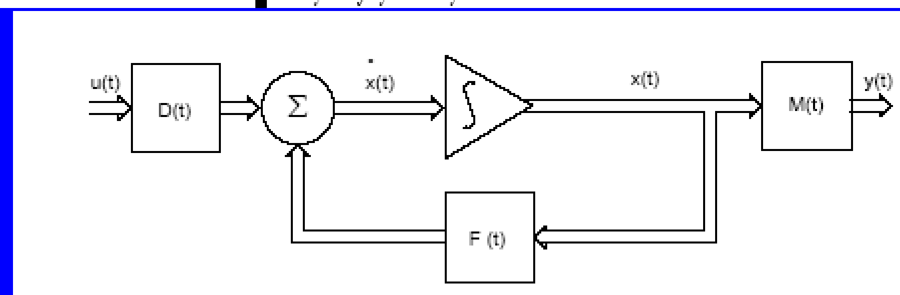


A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems[1]

R. E. KALMAN
Research Institute for Advanced Study,[2]
Baltimore, Md.

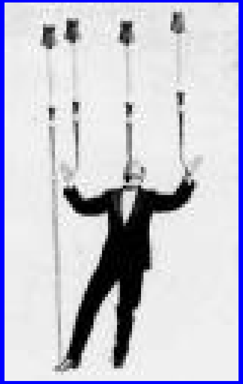
The classical filtering and prediction problem is re-examined using the Bode-Shannon representation of random processes and the "state transition" method of analysis of dynamic systems. New results are:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{x}/dt &= \mathbf{F}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned}\right\}$$



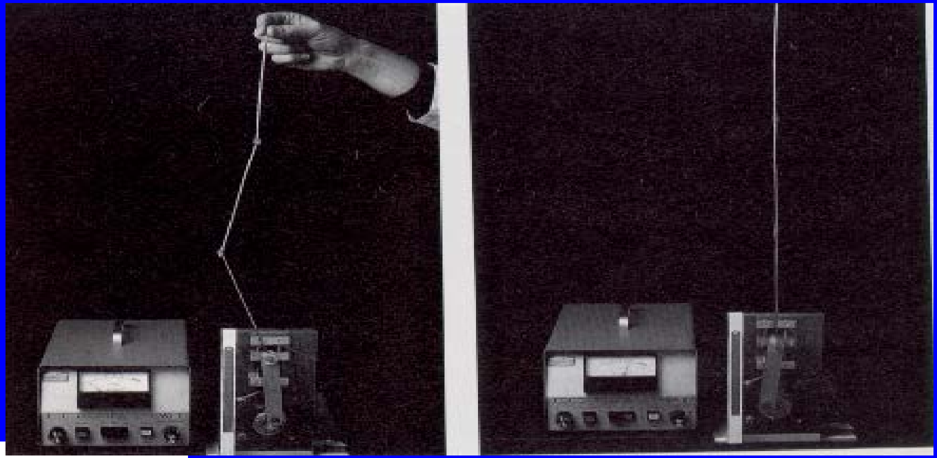
Condiciones necesarias y suficientes para Controlabilidad, Observabilidad en sistemas lineales, Filtro de Kalman, …

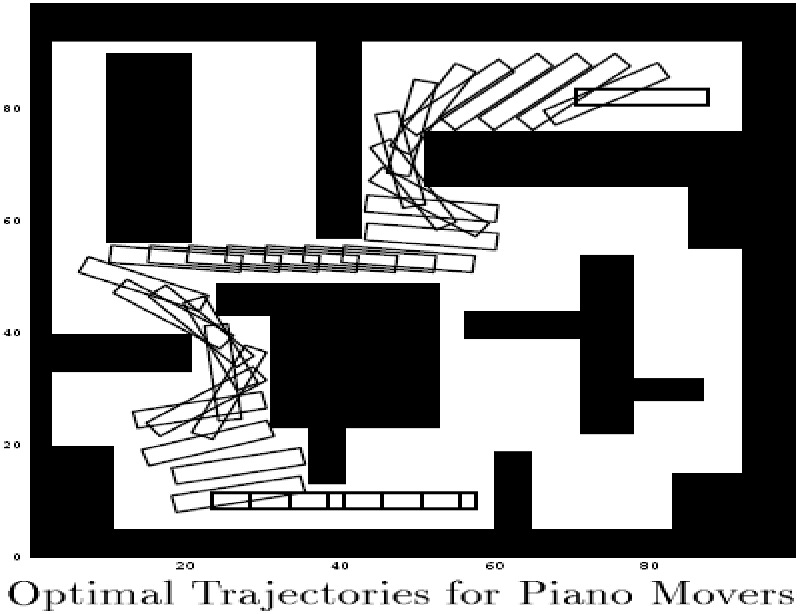
El péndulo invertido: lograr "lo imposible"



Posición inestable.

bucle cerrado





Control = análisis intrinsecamente no regular

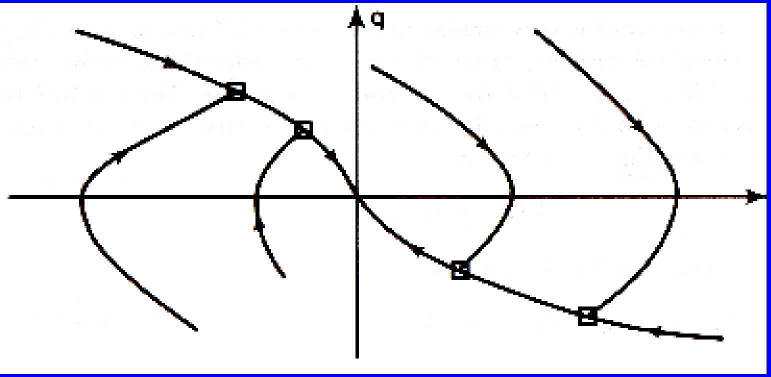
Control del caos,…

Regreso a Control Óptimo

El principio del máximo de L.S. Pontriaguin (1960),...

Lev Semenovich Pontryagin
1908 - 1988

Reducción a un nº finito de dimensiones: inspirado en la dualidad Hamiltoniana y multiplicadores de Lagrange



Curva de cambios (switch)

Principio de la programación dinámica de R. Bellman (1967)

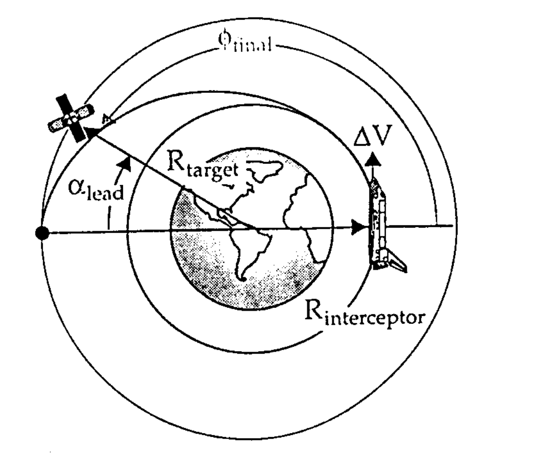
Richard Ernest Bellman (1920–1984)

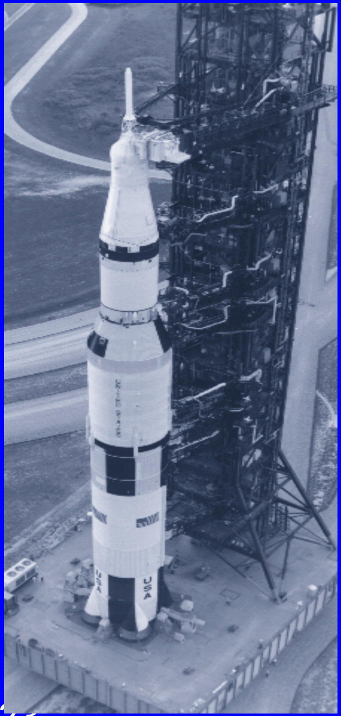
$$S(t,x)=\int_{t_0}^{t} F(s,x(s),u(s))ds$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\min_{u\in U}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)',(f(t,x(t),u(t)))-F(t,x(t),u(t)))\right)=0,$$

Ecuación de tipo Hamilton-Jacobi (EDP de primer orden)

Control óptimo en navegación espacial



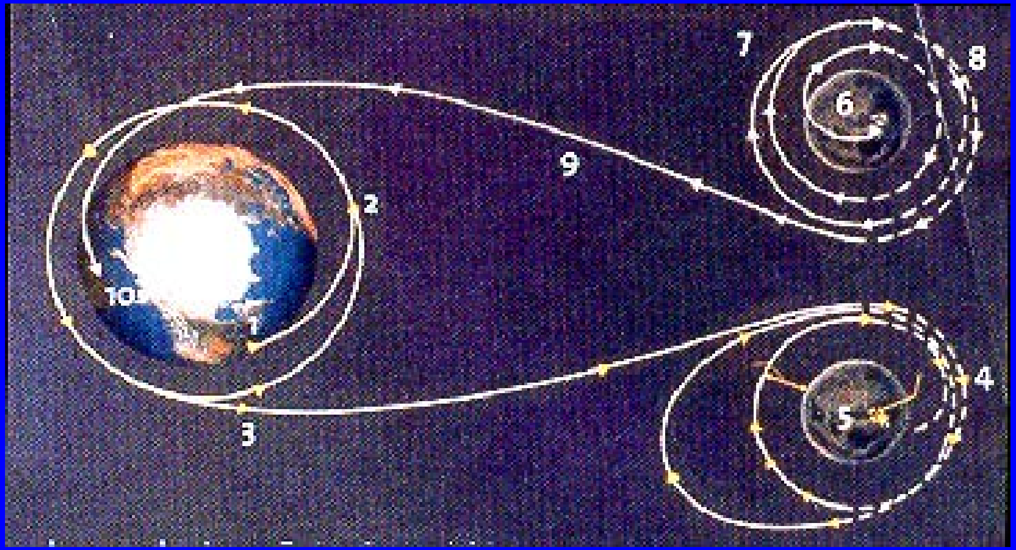


- Cálculo y optimización de trayectorias (Mecánica Celeste) [aceleración indirecta] muy anterior a la construcción de las lanzadoras y astronaves.
- Optimización (economía) del combustible,..
- Multiplicadores de Lagrange:

  D.F. Lawden 1955, A. Miele 1958, G. Leitmann 1959, A.I. Lurie 1963,....

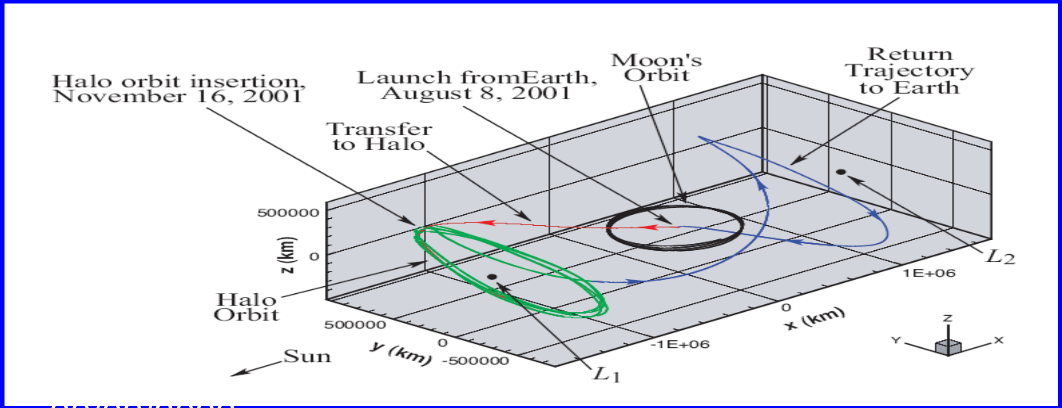
Misiones espaciales

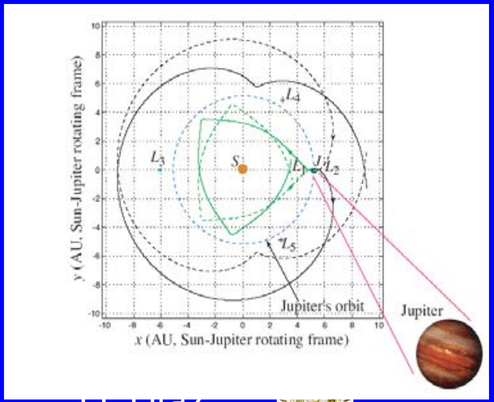
Apolo 11, 20 de julio de 1969

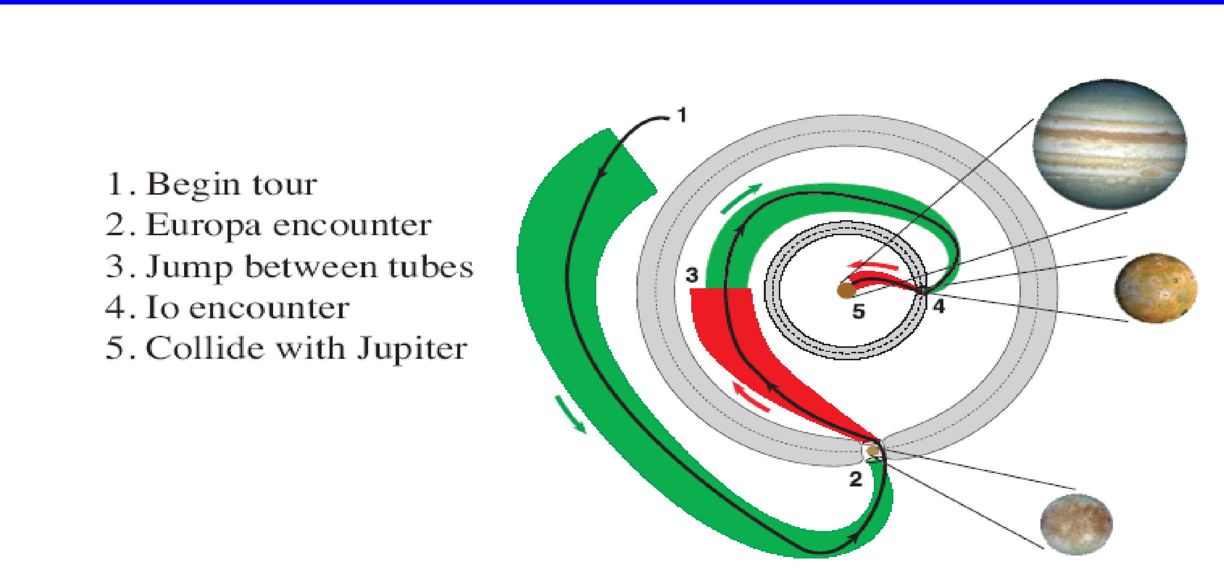


Expedición a las lunas de Júpiter

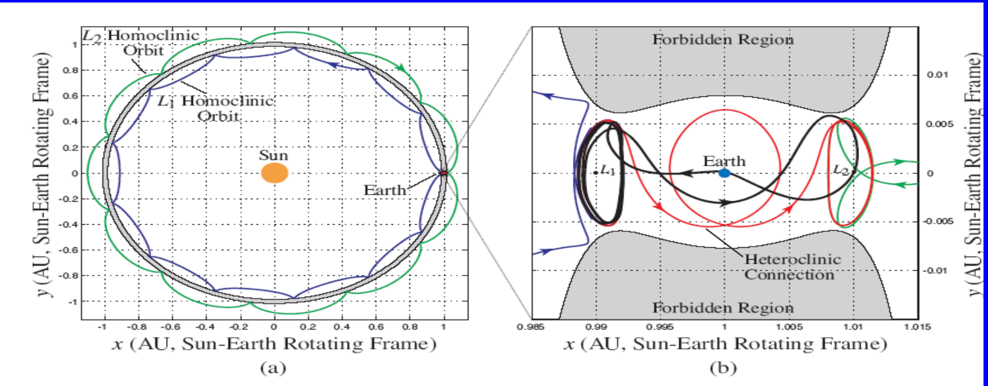
2000–present: Barrabés, Font, Gómez, Nunes, and Simó (part of the Barcelona group) systematically study jumping between resonant orbits; Koon, Lo, Marsden, and Ross at Caltech systematically study jumping between interior and exterior resonances and its application to space mission trajectory design





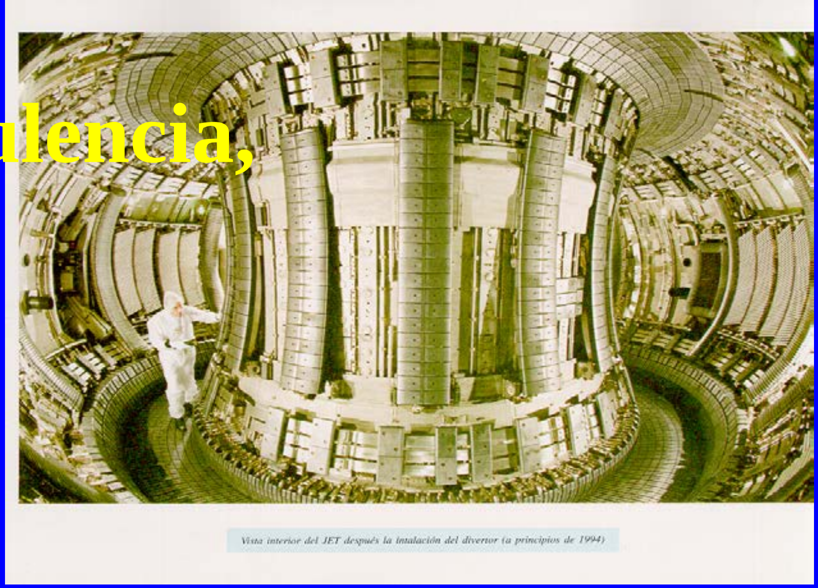


Expedición a las lunas de Júpiter

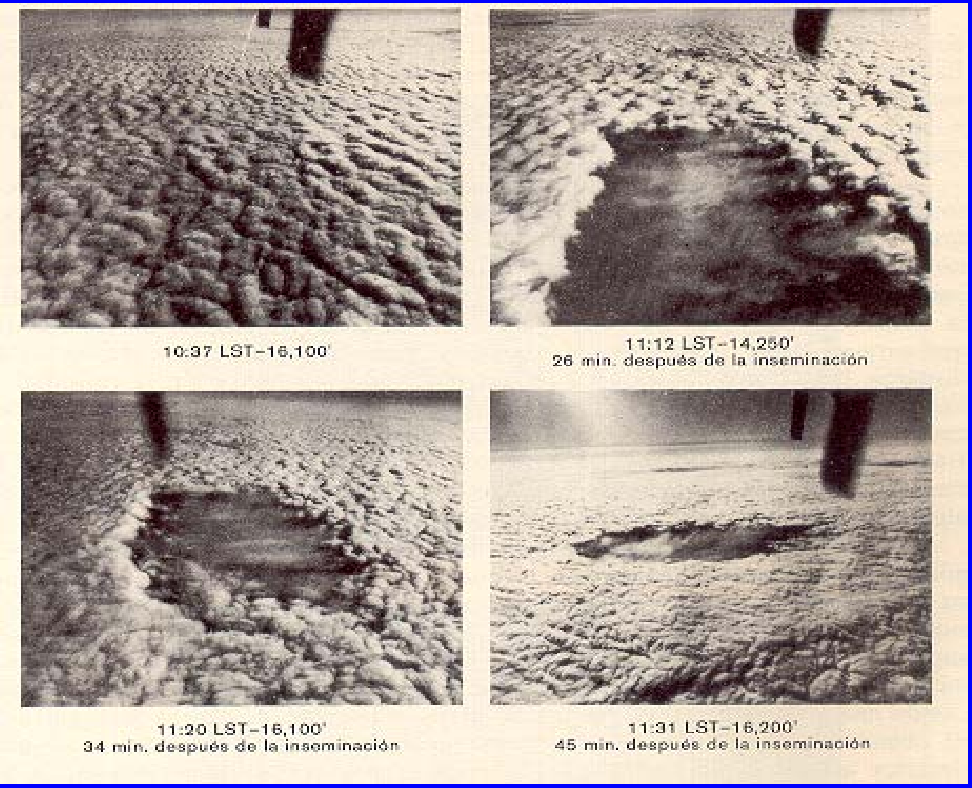


Invariant manifolds for the *Sun–Earth–spacecraft* 3-body problem

Fusión termonuclear, turbulencia,

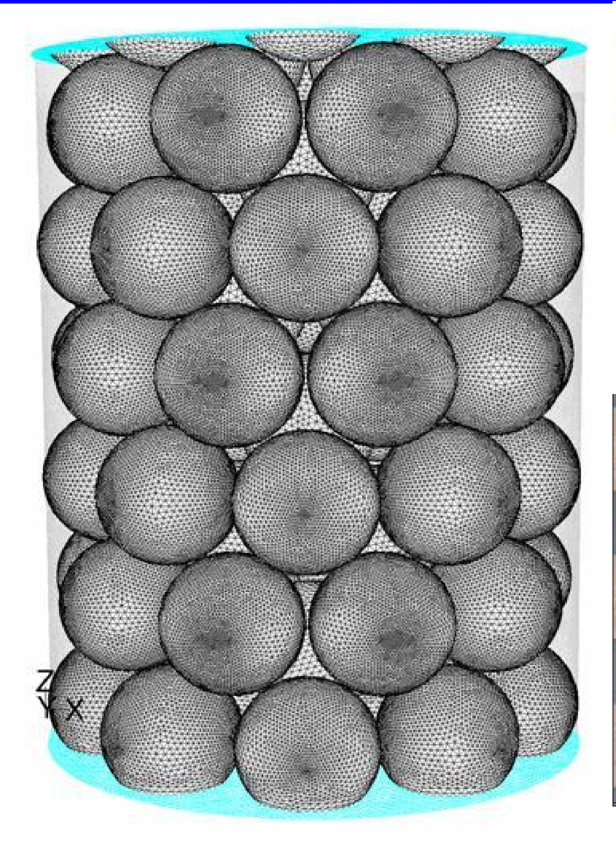


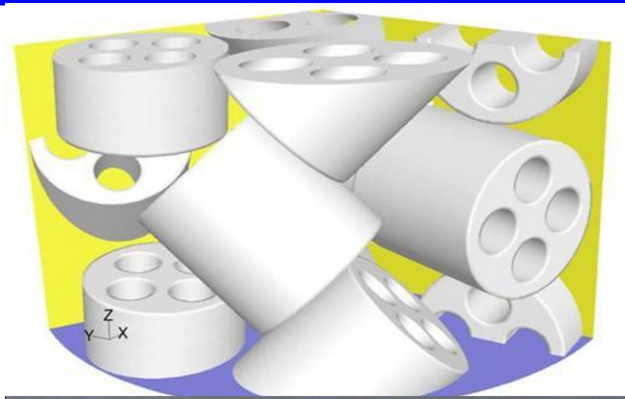
Control del clima

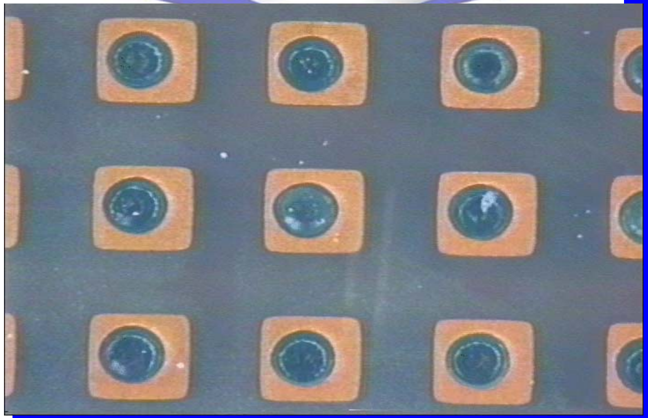


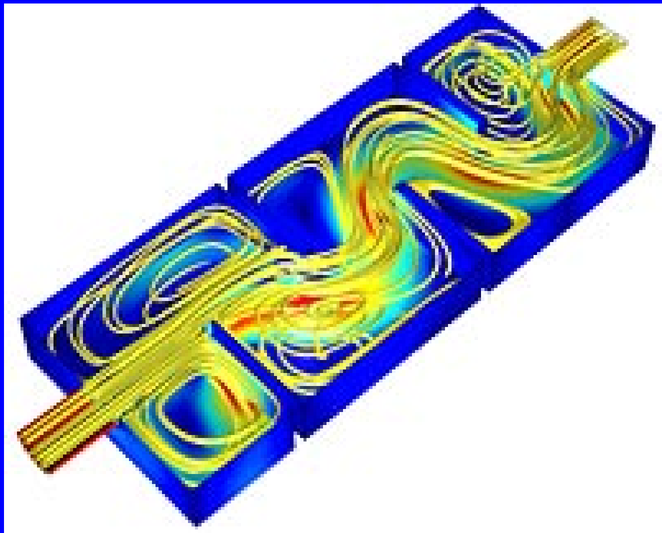
1972: Cambridge, EE.UU.

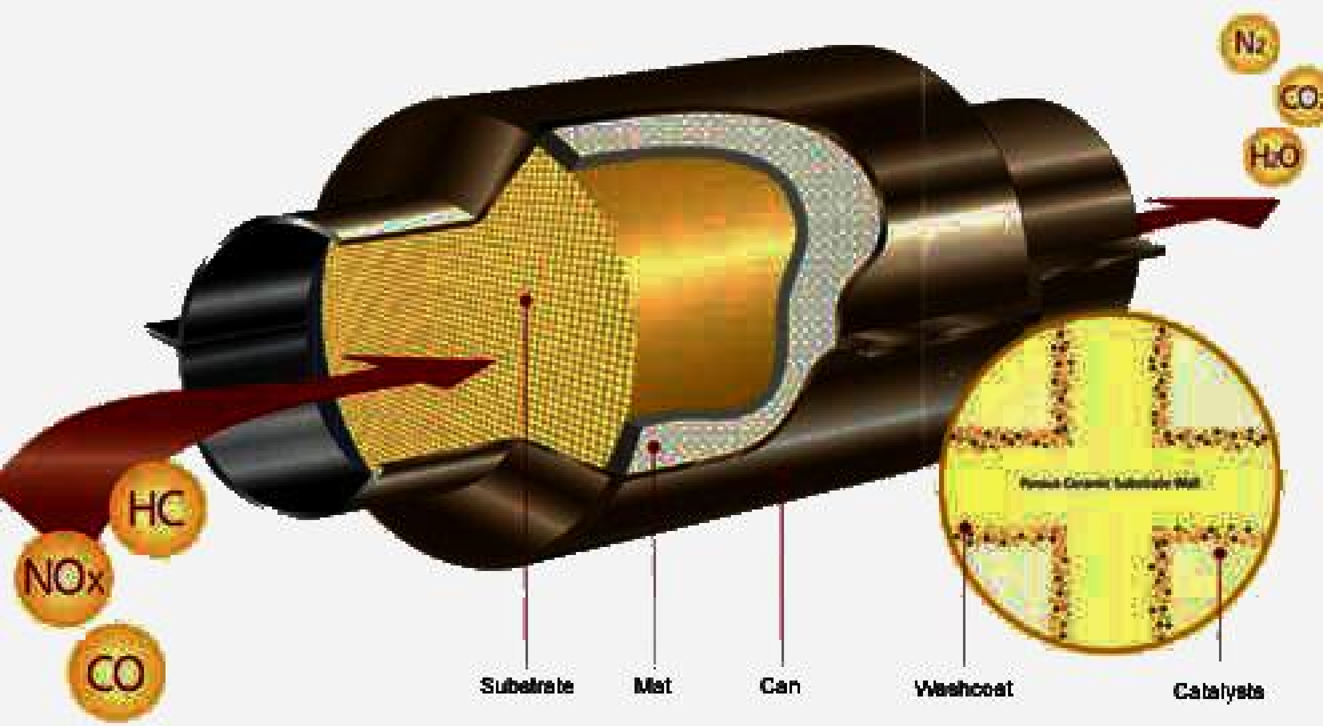
Control en sistemas complejos: reacciones químicas

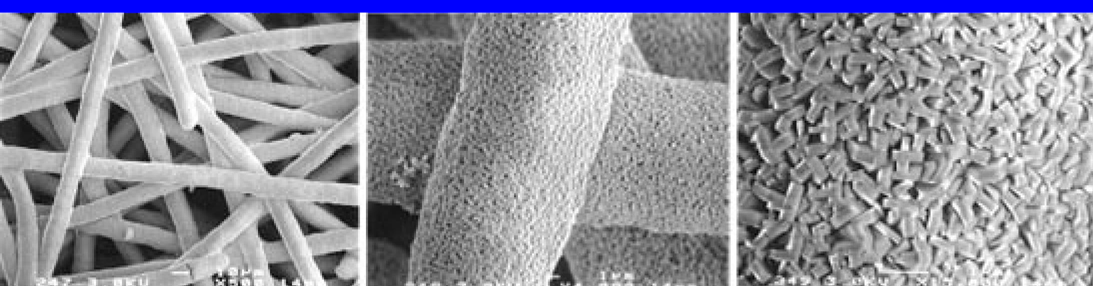


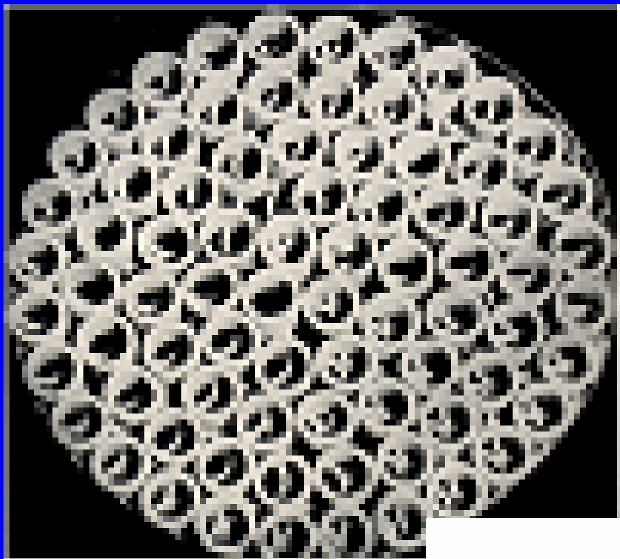


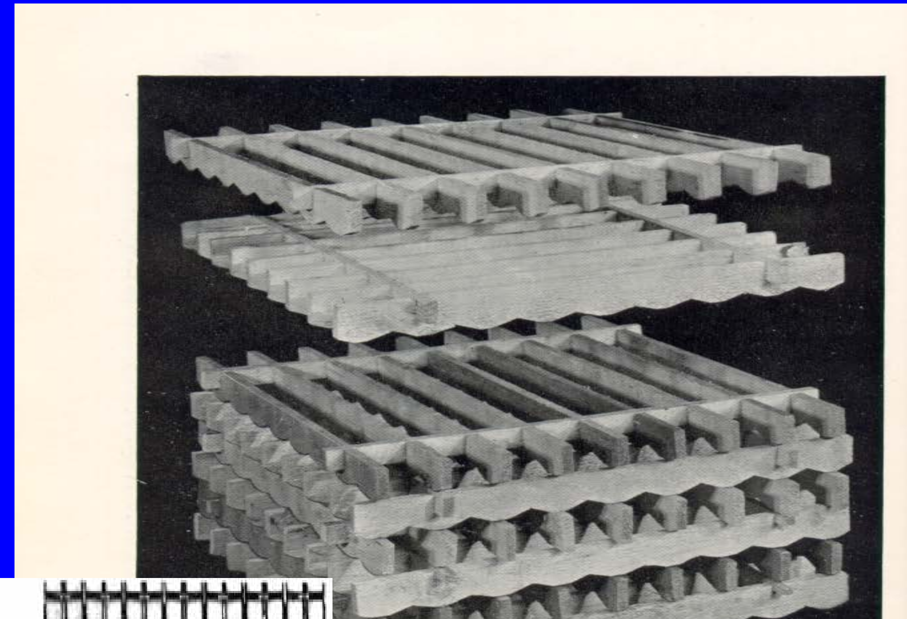


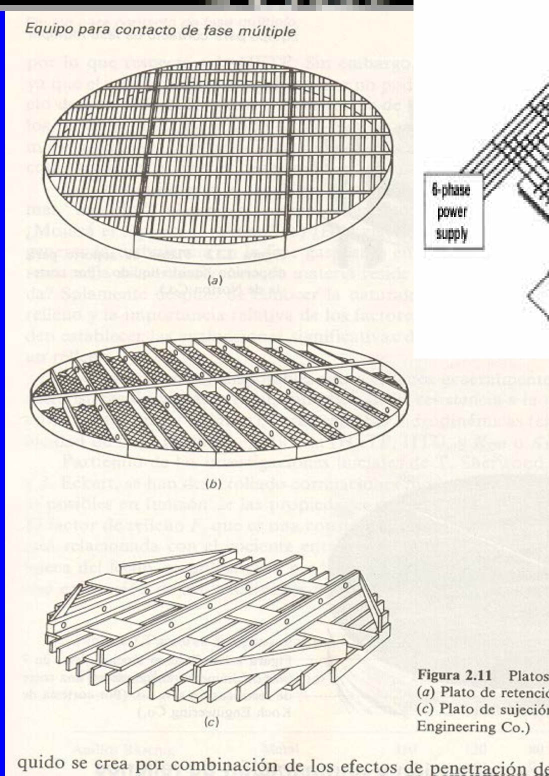


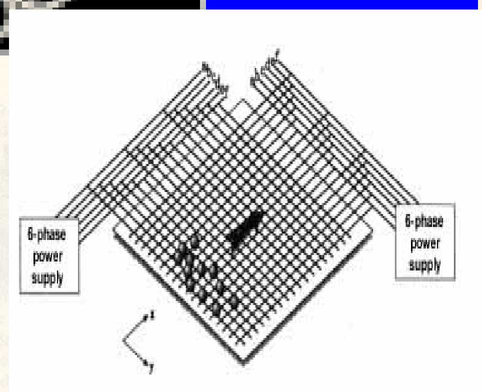

N_2
CO_2
H_2O
HC
NOx
CO
Substrate
Mat
Can
Washcoat
Catalysts

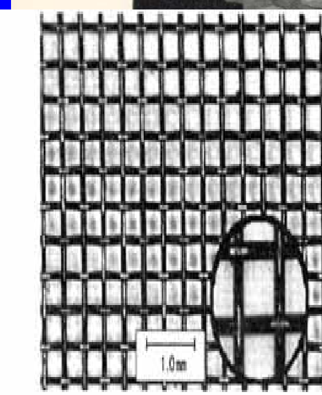


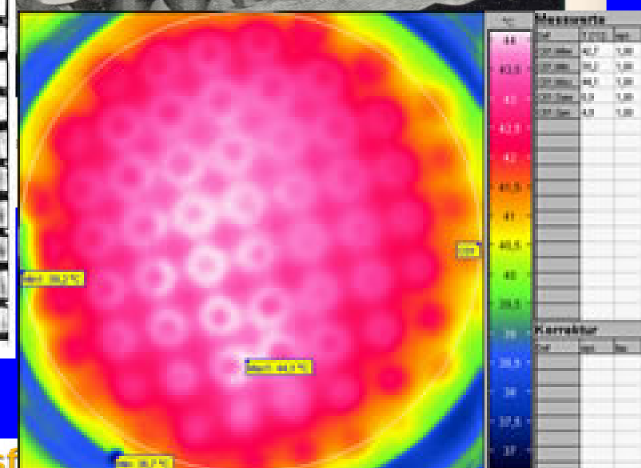


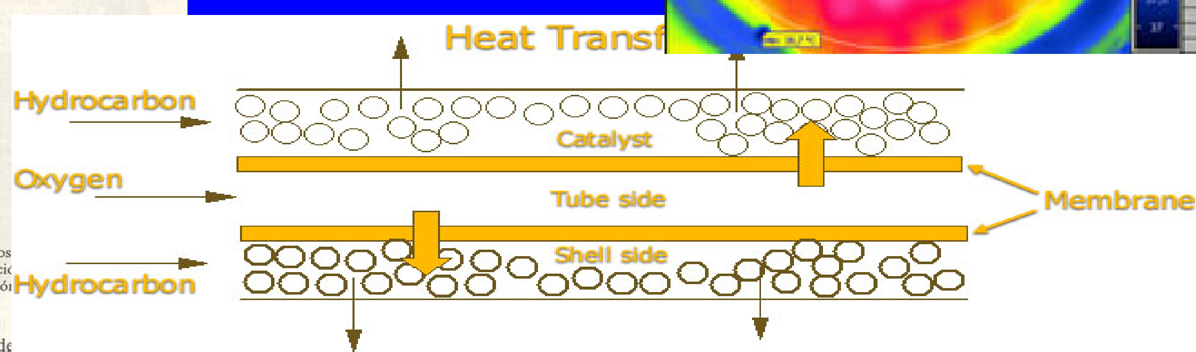



Equipo para contacto de fase múltiple
(a)
(b)
(c)
Figura 2.11 Platos
(a) Plato de retenció
(c) Plato de sujeción
Engineering Co.)
quido se crea por combinación de los efectos de penetración de

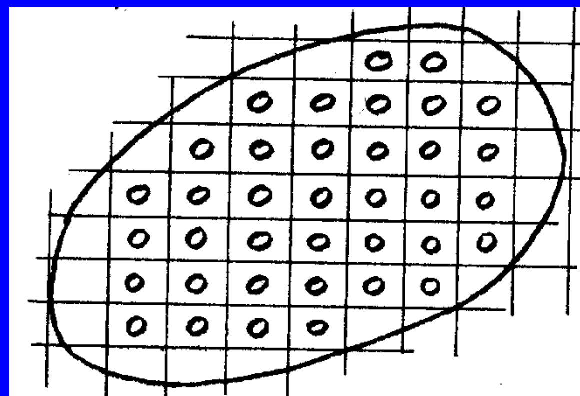

6-phase power supply
6-phase power supply

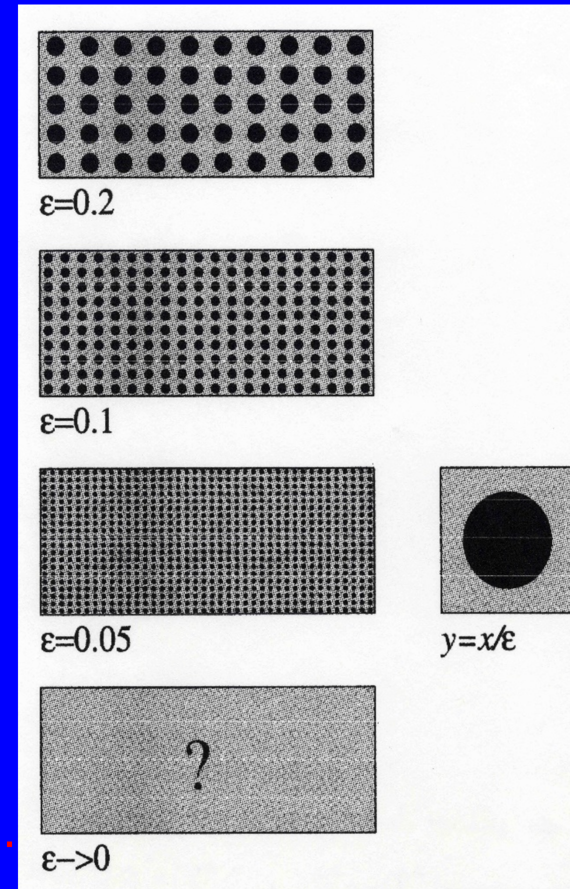

1.0m




Heat Transf
Hydrocarbon
Catalyst
Oxygen
Tube side
Membrane
Shell side
Hydrocarbon

Homogeneizacion





Sánchez-Palencia, Bensoussan-Lions-Papanicolau,..

Control del comportamiento a escala macroscópica mediante la actuación de controles (forma de partículas) a escala microscópica

Piensa globalmente y actúa localmente

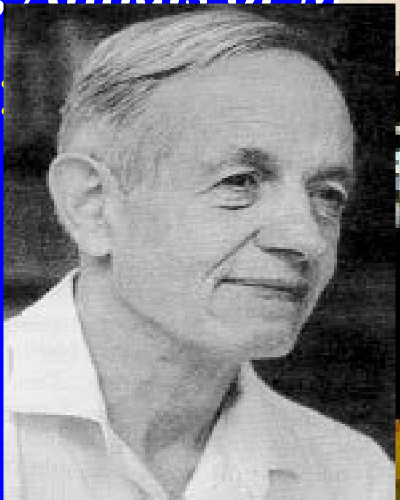
Componentes económicos y sociales: varios controles (agentes, jugadores)

- A. Cournot, Recherches sur la les principes mathematiques de la theorie des richesses, 1838.
- V. Pareto “Manuel d’economie politique” 1909.
- J. von Neumann 1928,.. O. Morgenstern “Theory of games and economic behavior” 1947.
- H. von Stackelberg, 1934.
- J. Nash 1954, Non-cooperative games, *Annals of M*

Premio Nobel de Economía (1994):

John Nash

Reinhard Selten



- **Una Introducción a la teoría de juegos diferenciales**
- **Una primera clasificación en la Tª de Juegos:**
    - Finitos (cada jugador tiene solo un nº finito de posibles acciones)
        - en forma normal (información estática = matriz)
        - en forma extensiva (información dinámica = árbol)
            - » Un solo acto
            - » Múltiples actos
    - Infinitos
        - Discretos
        - Continuos
- **Otra clasificación:**
    - de bucle abierto (sin reacción ante decisiones de otro jugador: persecución sin información,..)
    - de bucle cerrado (decisiones como funciones de los estados: persecuciones con información,..)

- Algo de historia:
  - Carta de 29 de julio de B. Pascal a P. Fermat (también principio de la Probabilidad)
  - E. Waldegrave 1712, D. Bernoulli 1732, P. Laplace 1814, P. Bertrand 1888,.., E. Zermelo 1912 (ajedrez),..
  - E. Borel 1912 teoría sistemática de juegos finitos.
  - J. Von Neumann 1928,.., libro con O. Morgenstern “Theory of games and economic behavior” 1947.
  - R. Isaacs 1954, introduce la teoría de juegos diferenciales,... L.S. Pontryagin ,..A. Friedman,...

6.1 Ejemplo 1. Tres fa

* Oligopolio sin costes

  * Tres agentes "fabricantes"

  * Cada uno puede producir

int

	x_1	x_2	x_3	x	p	B_1	B_2	B_3
1^a	4	8	6	18	2	8	16	12
2^a	4	5	6	15	5	20	25	30
3^a	3	3	3	9	11	33	33	33
4^a	7	3	3	13	7	49	21	21
5^a	5	5	5	15	5	25	25	25
6^a	6	5	5	16	4	24	20	20
7^a	4	5	5	14	6	24	30	30

* Oferta total: $x = x_1 + x_2 + x_3$

* Precio: p (a más copias en el mercado menor precio)

$$\begin{cases} p = 20 - x, & \text{si } 20 > x, \\ p = 0, & \text{si } 20 \leq x. \end{cases}$$

* Beneficio de cada agente: $B_i = px_i$

* Se juega una sola vez

Ejemplo numérico: Algunos resultados posibles:

* Objetivo de cada agente: Maximizar sus beneficios.

* Solución cooperativa: (3,3,3). No es "estable": no es un "equilibrio".

* Único equilibrio: (5,5,5).

Conclusiones

1. **Equilibrio**: Situación autoestabilizante (no compensa desviarse de esa posición si todos los demás cumplen)

2. ¡¡El mayor éxito no es necesariamente la mejor estrategia!!

3. Errores de estrategia de un agente pueden originar peores consecuencias a otros agentes que al que lo comete.

4. La rentabilidad para todas las partes no es un incentivo suficiente para la cooperación: debe haber un equilibrio.

6.2 Ejemplo2: El ladrón y el guardían.

*Jugadores: Un ladron L y un guardian nocturno G (p.e.de una joyería).

*Posibles decisiones:

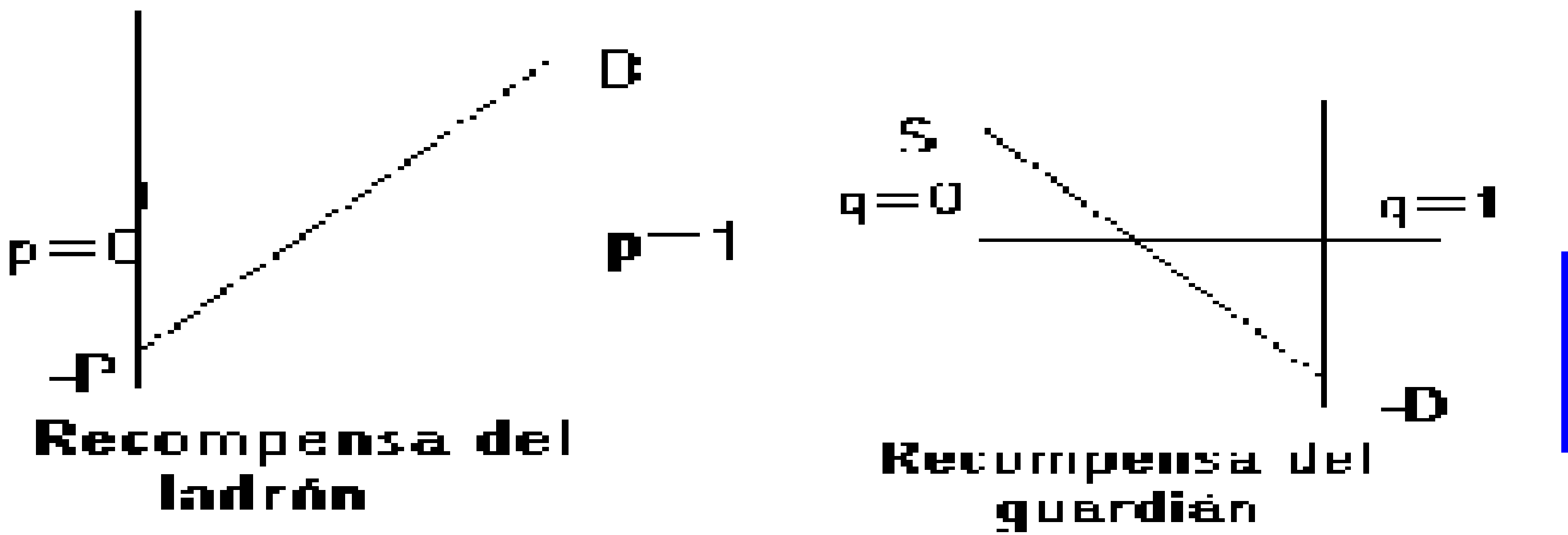
L roba en donde vigila G o se queda en su casa

G duerme o permanece despierto.

*Posibles repercusiones:

Para el ladrón: positiva B (botín)/negativa P (prisión)

Para el guardian: Positiva S (dormir)/negativa D (despido)



* Sea

$q =$ frecuencia (o probabilidad) de que L robe.

$p =$ frecuencia (o probabilidad) de que G se duerma.

Ahora el equilibrio es un cierto valor del par (q, p). Supongamos que existe unas *funciones de recompensa*

* El equilibrio (q_0, p_0) corresponde a los valores de corte de las rectas: situaciones de indiferencia

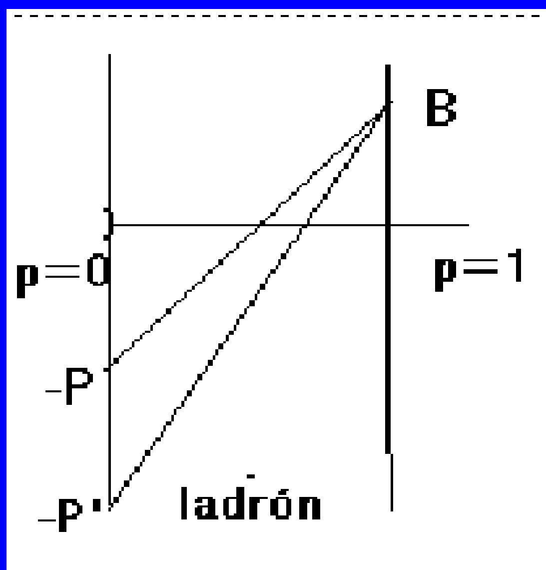
* La recompensa del ladrón determina la situación de equilibrio del guardia y viceversa.

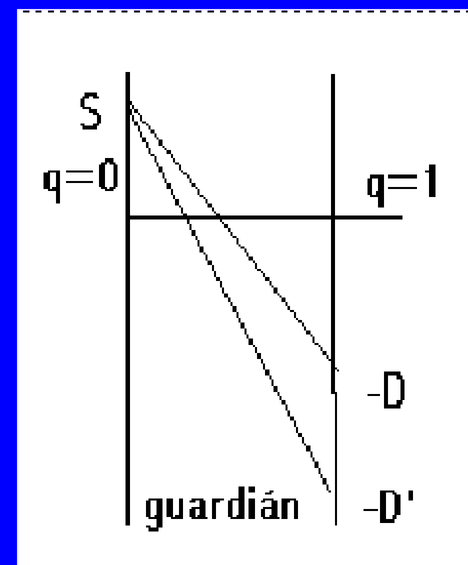
* Consecuencia: **Paradoja de los incentivos**

Supongamos que se aumenta la sentencia de carcel de P a P' (se suponen S y D fijos). Entonces: la probabilidad de equilibrio de que el ladron robe no cambia (solo depende de la f. de recompensa del guarda)⇒la probabilidad de que vigile será menor⇒ consecuencia extraña al distinguir entre *corto plazo y largo plazo*

cambios	corto plazo	largo plazo
P crece	L roba menos	G duerme más y L roba igual
D crece	G duerme menos	L roba menos y G duerme igual

* Efectos al repetir el juego más de una vez.





6.3 Ejemplo 3. Un sistema de EDOs en ecología: competición de especies.

* Dos especies biológicas $x(t), y(t)$ compitiendo en el mismo medio. La ley de estado para cada especie es la ecuación logística amortiguada por los enferntamientos entre ellas:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy) \\ \dot{y} = y(d - ex - fy) \end{cases}$$

*Competición $\Leftrightarrow c > 0$ y $e > 0$.

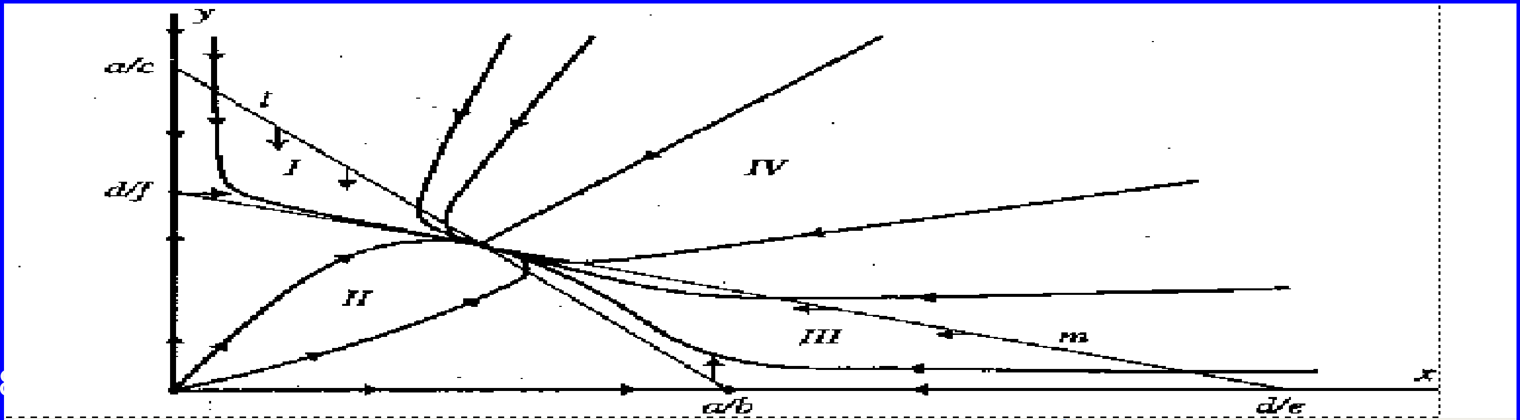
*¿Puntos estacionarios (x_∞, y_∞) del sistema en los que $x_\infty > 0$ e $y_\infty > 0$?

* El diagrama de fases depende de la posición relativa de las rectas

$$l: \; a - bx - cy = 0$$
$$m: \; d - ex - fy = 0$$

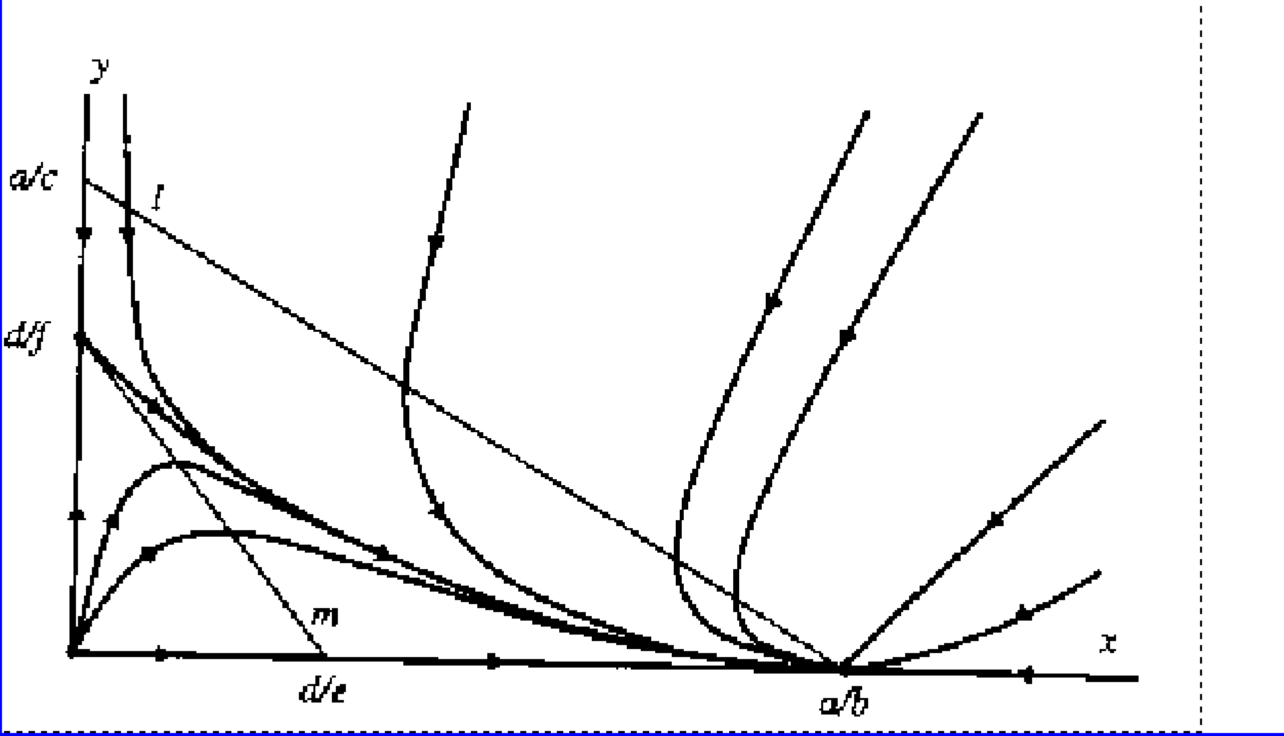
*Casos:

i) $\frac{a}{c} > \frac{d}{f}$ y $\frac{a}{b} < \frac{d}{e}$



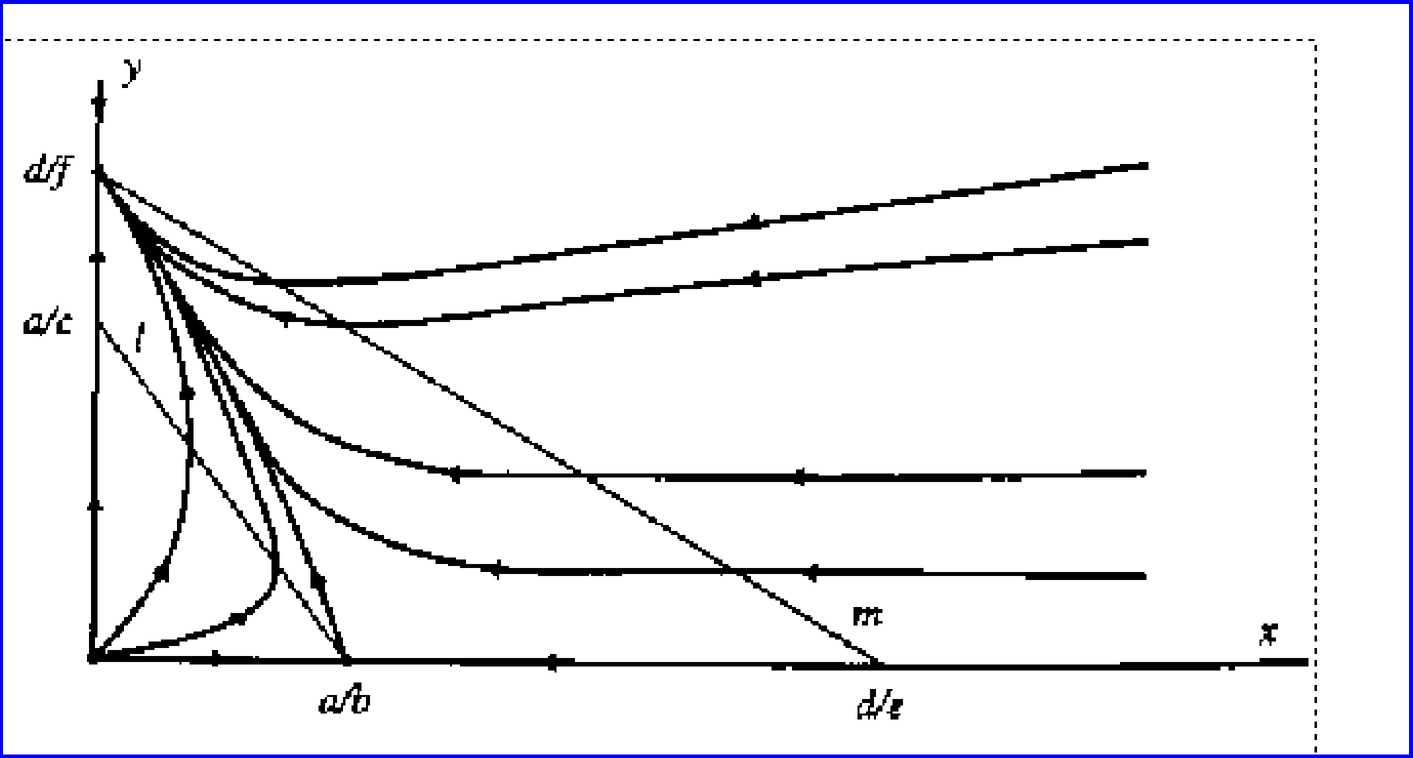
(No compiten demasiado: hay una coexistencia posible)

ii) $\frac{a}{c} < \frac{d}{f}$ y $\frac{a}{b} > \frac{d}{e}$



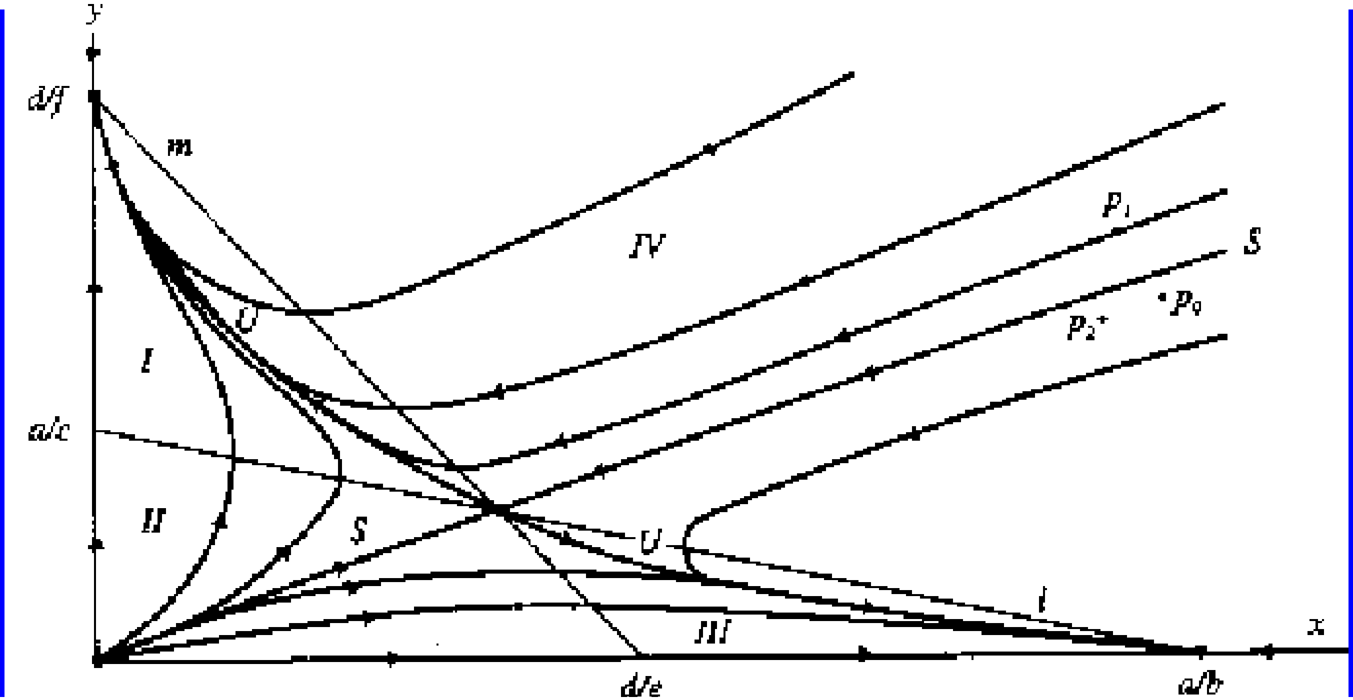
(No hay coexistencia y la especie x aniquila a la otra)

iii) $\frac{a}{c} < \frac{d}{f}$ y $\frac{a}{b} < \frac{d}{e}$



(Situación similar pero opuesta a la anterior: la especie y aniquila a la otra)

iv) $\frac{a}{c} < \frac{d}{f}$ y $\frac{a}{b} > \frac{d}{e}$

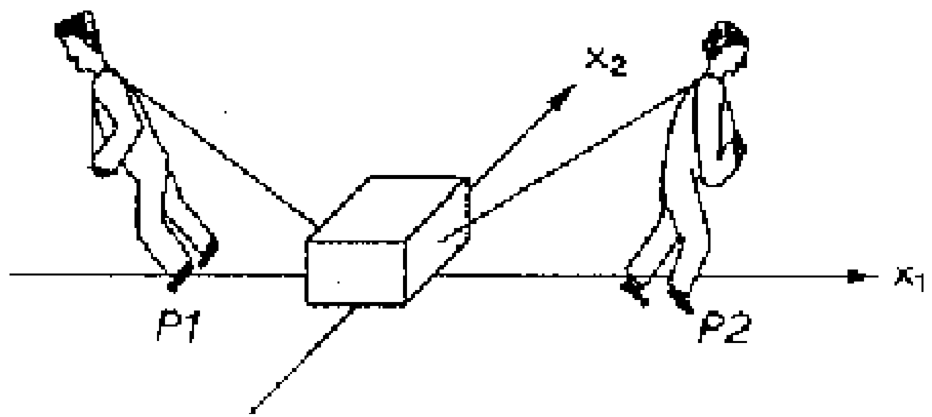


(Competición máxima: punto silla, separatrices hacia los puntos estacionarios en los que se extingue una de las especies: todo depende de los datos iniciales)

6.4 Ejemplo 4. El juego del arrastre.

* Objeto de masa unidad arrastrado sobre el plano, de posición $(x_1(t), x_2(t))$.

* Dos jugadores P^1, P^2 tiran de él con fuerzas $\mathbf{F}^1$,$\mathbf{F}^2$ de magnitud unidad pero pueden elegir diferentes direcciónes $u_1(t)$, $u_2(t)$.



* En $t = 0$ está en el origen de coordenadas. Se fija un tiempo posterior, p.e. $t = 1$.

P^1 quiere minimizar $x_1(1)$
[cuanto más alejado en la parte negativa del eje x_1 mejor]
P^2 quiere maximizar $x_1(1)$
[cuanto más alejado en la parte positiva del eje x_1 mejor]

*Funciones coste: $J_1 = x_1(1)$, $J_2 = -x_1(1)$: Juego de suma cero.

*Solución: Tiran en igual dirección y sentido opuesto $\Rightarrow (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$, $\forall t$. Solución *punto silla*

***Una variante**: Juego de suma no nula.

P^1 quiere minimizar $x_1(t)$
[cuanto mas alejado en la parte negativa del eje x_1 mejor]
P^2 quiere minimizar $x_2(t)$
[cuanto mas alejado en la parte negativa del eje x_1 mejor]

* Funciones coste: $J_1 = x_1(1)$, $J_2 = x_2(1)$:
* Ecuaciónes de estado

$$\ddot{x}_1 = \cos u_1 + \cos u_2 \quad \dot{x}_1(0) = x_1(0) = 0$$
$$\ddot{x}_2 = sen u_1 + sen u_2 \quad \dot{x}_2(0) = x_2(0) = 0$$

* Decisión $\{u_1(t) = \pi, u_2(t) = -\frac{\pi}{2}\} \Rightarrow J_1 = x_1(1) = -\frac{1}{2}$, $J_2 = x_2(1) = -\frac{1}{2}$
* Si P_2 elige $u_2(t) = -\frac{\pi}{2}$ lo mejor para P_1 es elegir $u_1(t) = \pi$ (cualquier otra elección hace que $J_1 > -\frac{1}{2}$)
*Analogamente: Si P_1 elige $u_1(t) = \pi$ lo mejor para P_2 es elegir $u_2(t) = -\frac{\pi}{2}$.
***Definición**: Una solución $u_1(t)$, $u_2(t)$ se dice un *equilibrio de Nash* si ningún jugador puede mejorar su objetivo alterando unilateralmente su decisión.
* Si ambos deciden $u_1(t) = u_2(t) = \frac{5\pi}{4}$ entonces $J_1 = J_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(< \frac{1}{2})$ pero han de cooperar pues: si P_2 adelanta que va a elegir $u_2(t) = \frac{5\pi}{4}$ entonces bastaría que P_1 tomase $u_1(t) \equiv c$, con c cualquier constante $c \in [\pi, \frac{5\pi}{4})$ y mejoraría ($J_1 < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$) pero entonces ¡$P_2$ empeoraría ($J_2 > -\frac{1}{2}\sqrt{2}$)!.
*Esa es la llamada *solución optimal de Pareto* (ninguna otra decisión conjunta puede llevar a un resultado mejor). Típica de juegos cooperativos.


Fin de la primera parte