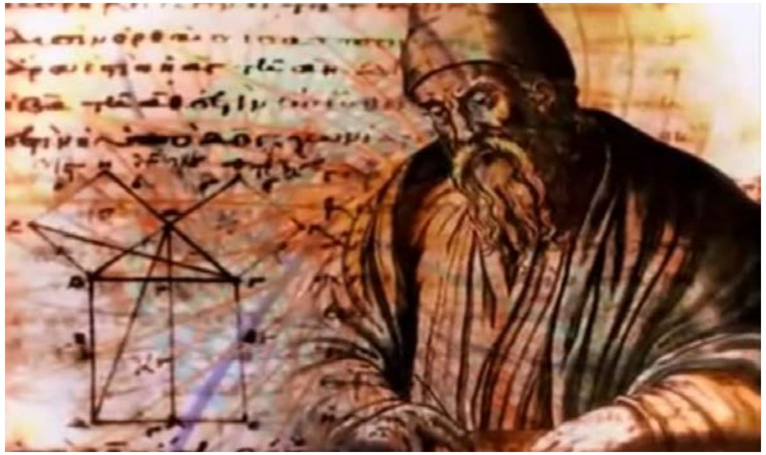
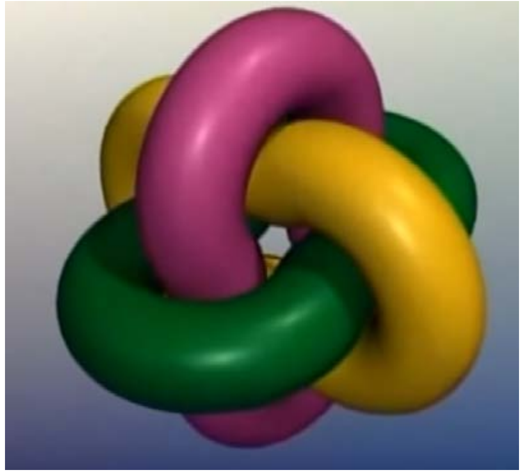


De los Elementos de Euclides, hace 2.300 años, a la teoría de nudos como símbolo de la Unión Internacional de Matemáticos

Los anillos de Borroneo



Simbolizan la unión de más de 300 ramas de la Matemática

4. Simetría en los patrones de encajes

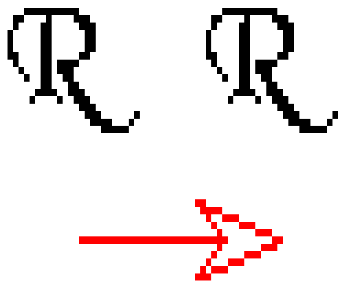
La Alhambra y los grupos Cristalográficos.

Dinastía Nazarí (1238-1492)

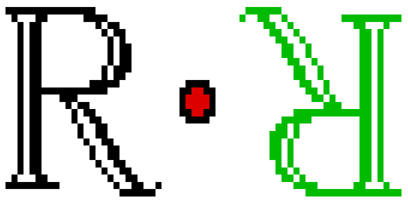
Arte islámico: no figuras de seres vivos. Decoraciones geométricas (formas simétricas repetidas)

Transformaciones planas: isometrías

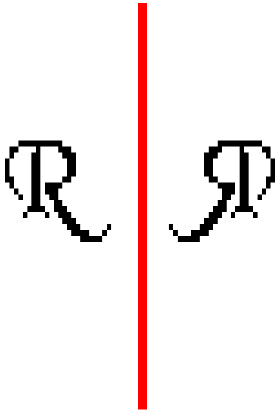
Traslación



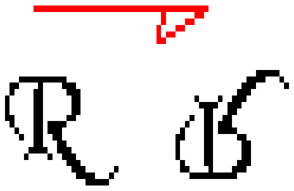
Rotación



Reflexión

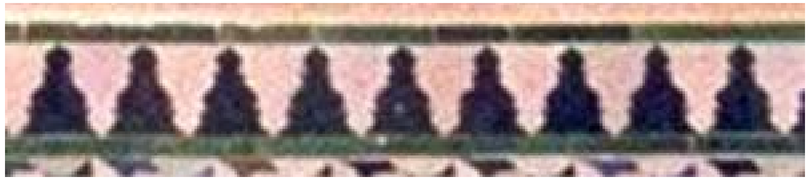


Reflexión con deslizamiento



Estructura de Grupo (vida cotidiana / precisión matemática)

Frisos (simetría de en una sola dirección)

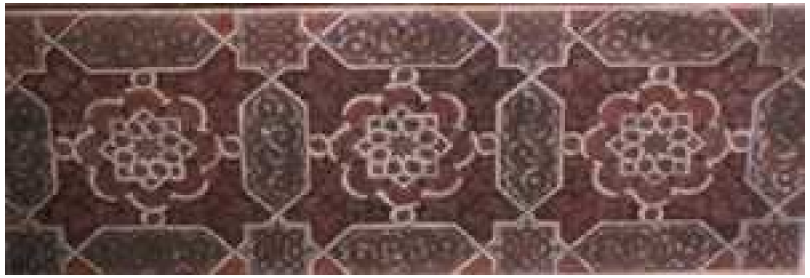


Simetrías de reflexión, rotación y traslación

F_5

Todas las simetrías

$\mathbf{F_7}$



Teselación: patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos: que no queden espacios y que no se superpongan las figuras.

Se crean usando transformaciones isométricas sobre una figura inicial, es decir, copias idénticas de una o diversas piezas o teselas con las cuales se componen figuras para recubrir enteramente una superficie.

Grupos cristalográficos planos

(formas de papeles pintados :*wallpaper patterns*)

Simetrías en dos direcciones (arriba/abajo, izquierda/derecha)

Ninguna rotación, línea de deslizamiento distinta a un eje de reflexión

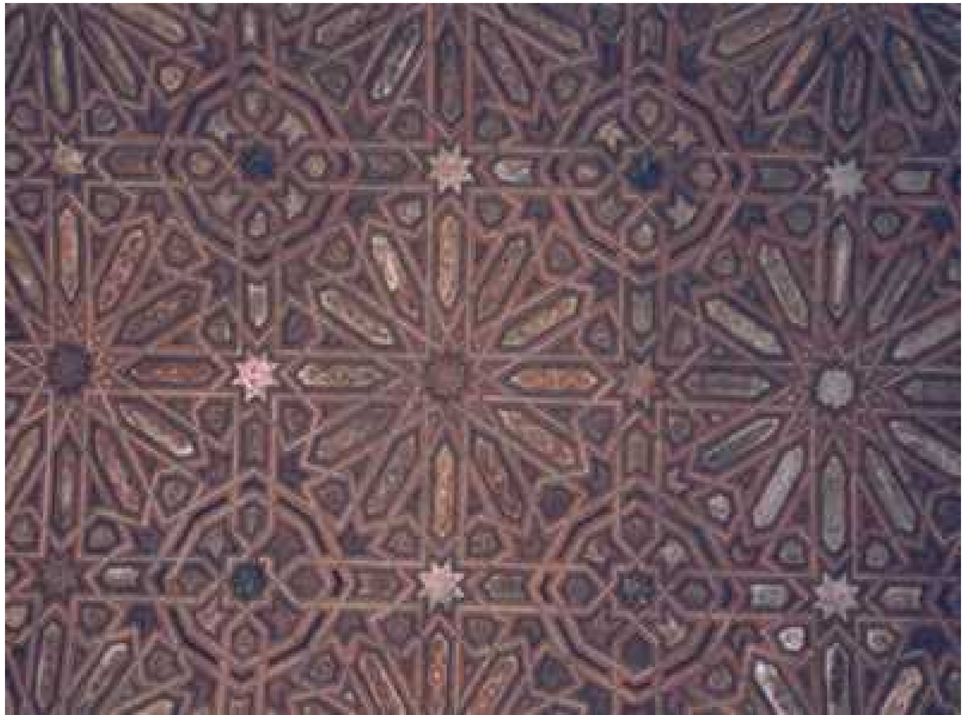
Grupo cm

Ninguna reflexión, rotación de un cuarto de vuelta

Grupo p4

Grupo p4

Dos ejemplos de la misma clase de grupos pueden ser muy distintos entre sí



También en techos

Rotación de cuatro pliegues y reflexión

Grupo p4m

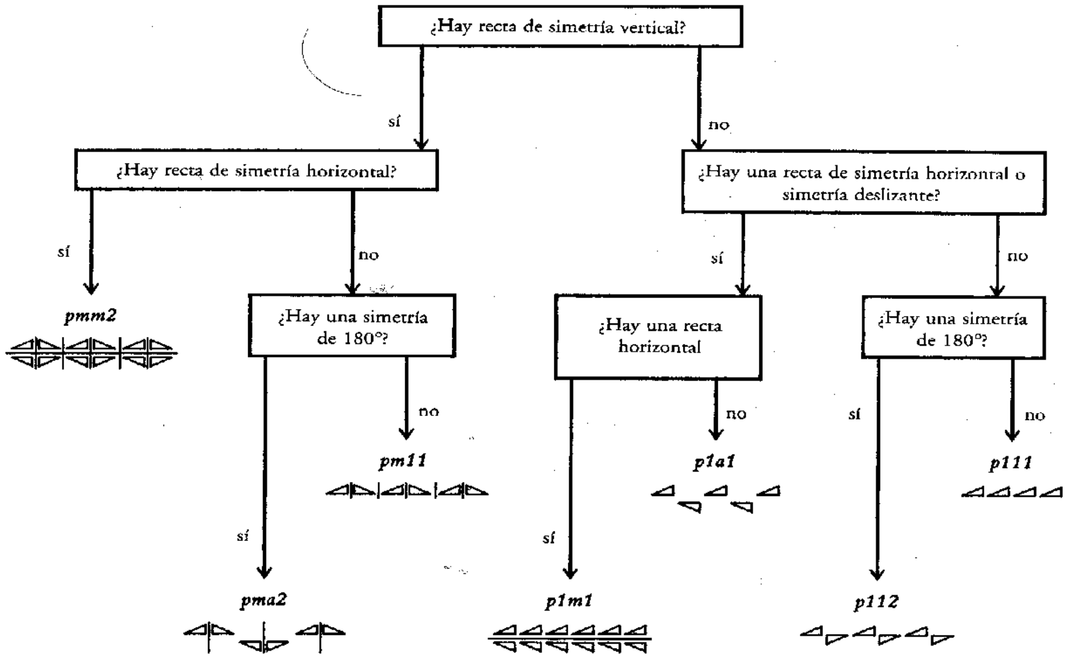
Rotación de seis pliegues sin reflexión

Grupo p6

¿ Cuantas clases de grupos critalográficos planos pueden existir?

A finales del siglo XIX: hay tan sólo 17 grupos cristalográficos planos distintos

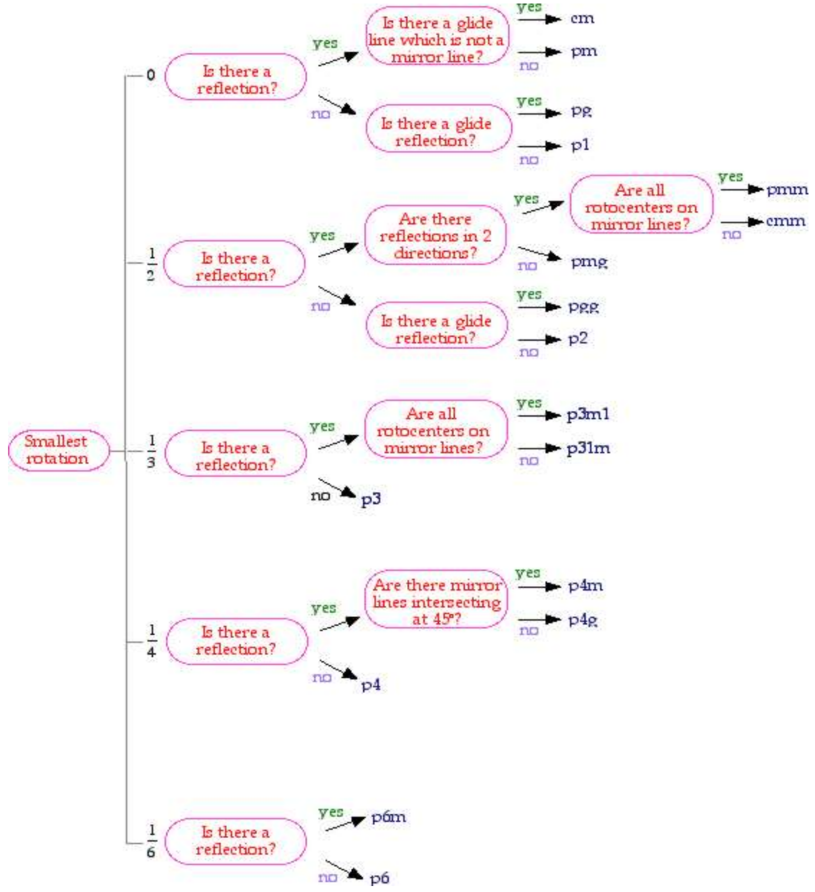
E. S. Fedorov (1885), A. M. Schenflies (1886), W. Barlow (1894)



En matemáticas, **un friso** es el cubrimiento de la región del espacio de longitud infinita pero de anchura finita, limitada por dos rectas paralelas, obtenido a partir de la aplicación de movimientos en el plano a una determinada figura o agrupación de figuras.

La combinación de los movimientos de traslación, reflexión, y rotación permiten obtener **siete subgrupos de frisos diferentes:**
Frisos de las traslaciones;
Friso de las traslaciones y la simetría horizontal;
Friso de las traslaciones y la simetría vertical;
Friso de las traslaciones y del deslizamiento;
Friso de las traslaciones y del giro de 180º;
Friso de las traslaciones, el giro de 180º y las simetrías horizontales;
Friso de las traslaciones, la simetría vertical y el deslizamiento;

Si el motivo plano se repite sin solaparse ni dejar huecos, el friso se denomina **mosaico (o teselación)**



Clasificación de los 17 grupos critalográficos planos

Solo hay 17 teselaciones regulares distintas

Comparable al descubrimiento de Urano por matemáticas y sin observaciones previas

En 1986 se habían hallado en la Alhambra 13 de los 17 grupos
(B. Grünbaum y C.G. Shepard)

En 1987, Rafael Pérez Gómez (Univ. De Granada) encuentró ejemplos de los 4 grupos que faltaban

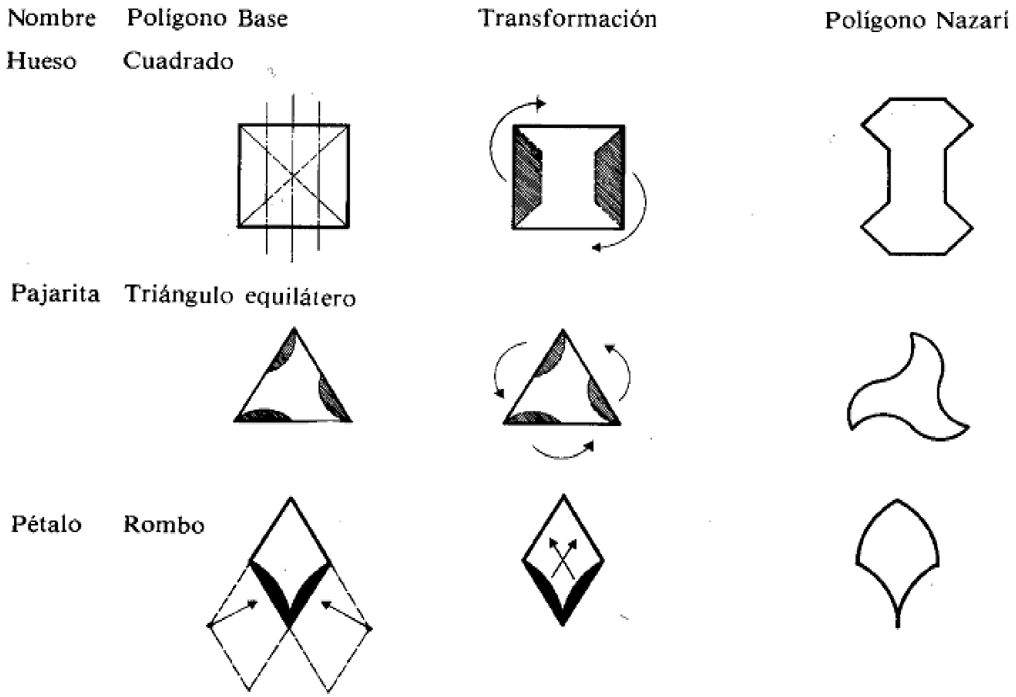
Riqueza y esplendor de la geometría Nazarí

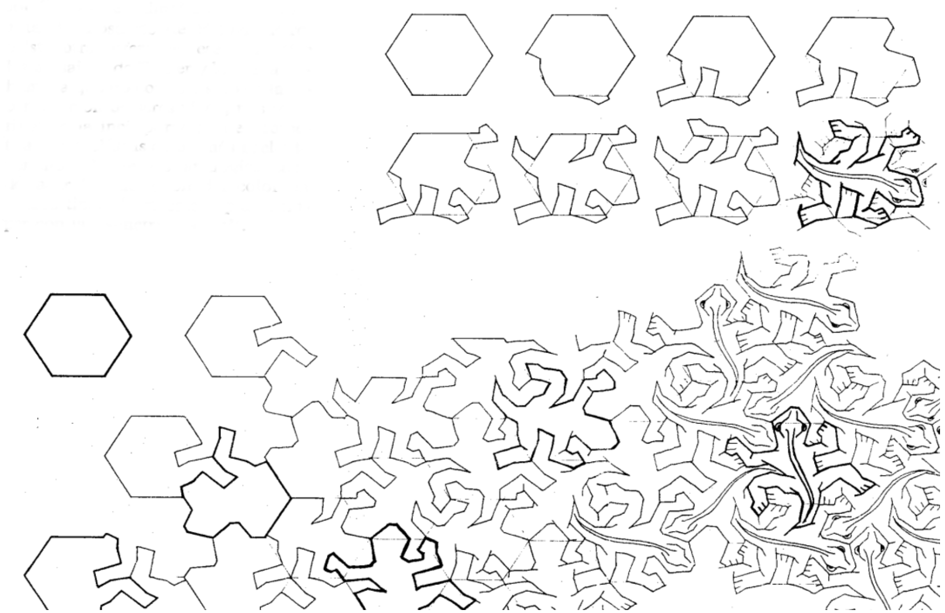
Testimonios del uso de matemáticas por los artesanos nazaríes:

Libros de geometría de Al-Farabi (870-950), Abu Kamil (850-930), Abu'l-Wafa' al-Buzjani (940-998),...

Documentos concretos sobre reuniones y discusiones entre matemáticos y artesanos

Los 17 grupos de teselaciones regulares en la Alhambra

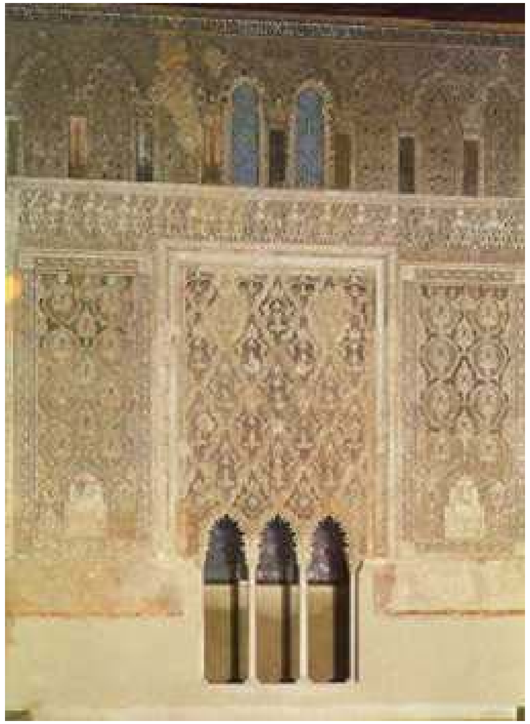




Inspiración de

M. C. Escher (1898-1972)

Algunos ejemplos en Toledo



Sinagoga del Tránsito (siglo XIV)

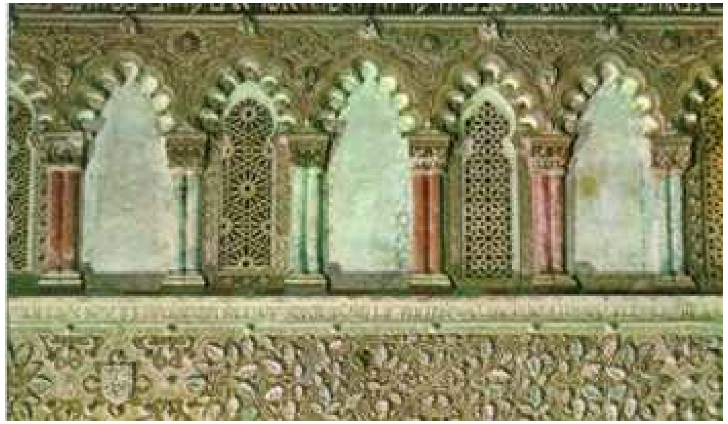


Figura diédrica finita de orden 16

Motivo central: Grupo **cm**

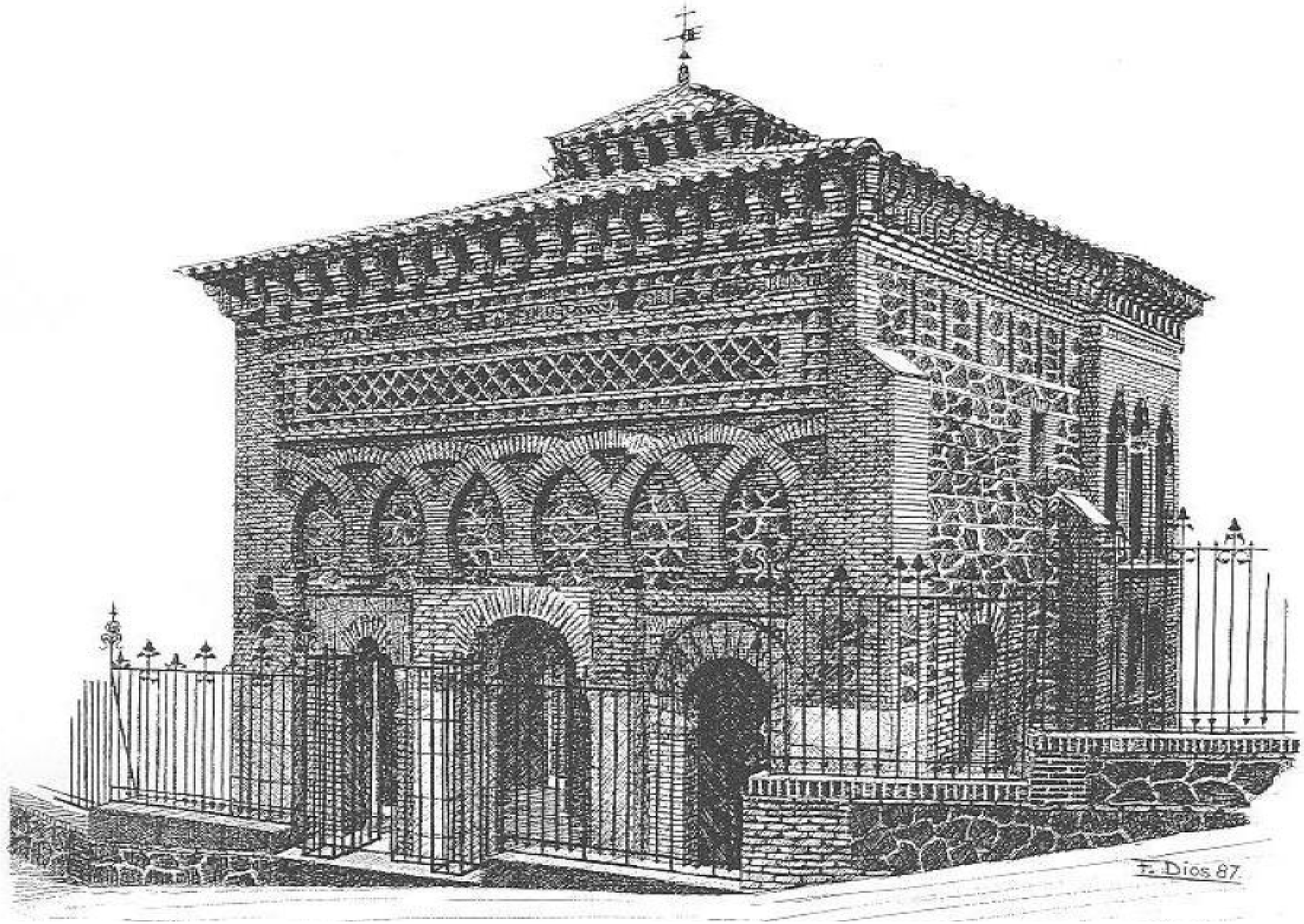
Monasterio de San Juan de los Reyes

Figura cíclica de orden 8

Grupo p4

Grupo p4m

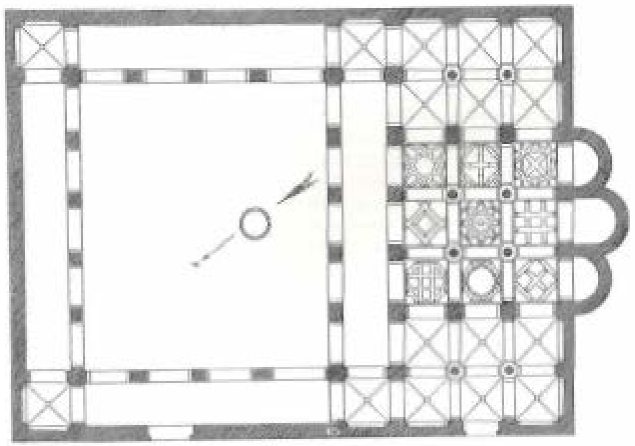
Venerada desde muchos puntos de vista

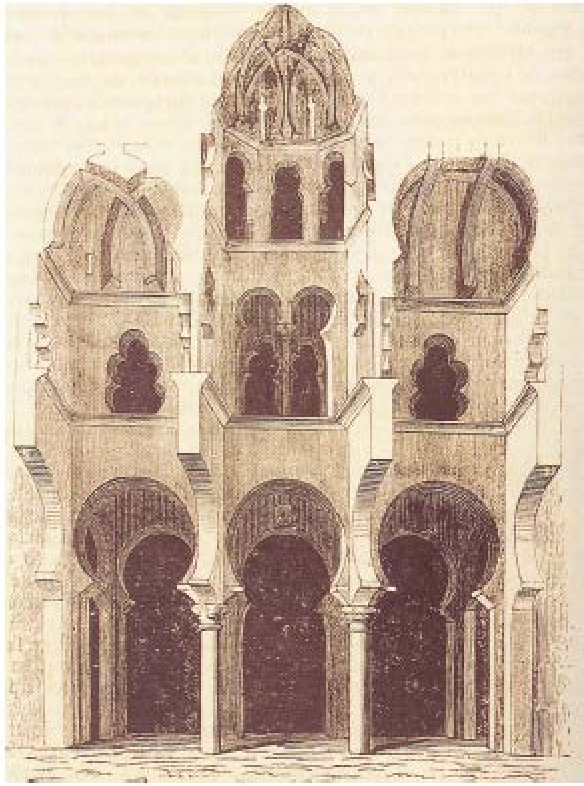


La Mezquita de Bab al-Mardum o Cristo de la Luz, nombre con el que se la conoce hoy en día, es una mezquita de la época califal de los Taifa, aproximadamente del año 1.000 d.C. y fue construída como oratorio ligado a una puerta de acceso a la ciudad (Bab al-Mardum, que se traduce como puerta del mayordomo) para uso de los recién llegados a Toledo o para la preparación a la salida.

Estudio matemático de las bóvedas: Ascensión Mortalla de la Hoz y Agripina Sanz, UPM, *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura, UPM, Madrid, Abril, 2008: Actas, pp. 63-74.*

En la época del rey Alfonso VI (1200 d.C.) fue transformada en un templo de culto cristiano dedicado al Cristo de la Luz, realizándose entonces la construcción de un ábside en su parte posterior de estilo mudéjar, siendo este la más antigua muestra de arte mudéjar de la que se tiene constancia.





8 metros de altura

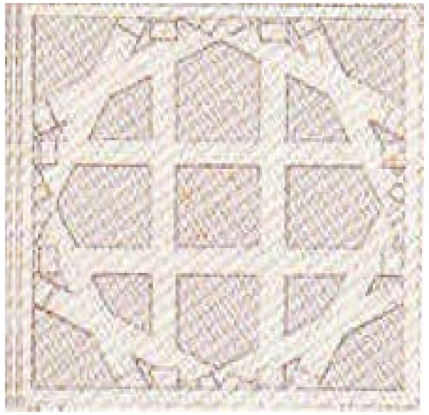
En las proyecciones de las bóvedas aparecen ejemplos de elementos del

Grupo de transformaciones isométricas de Leonardo da Vinci

G={f, f isometría del plano, f(F)=F}

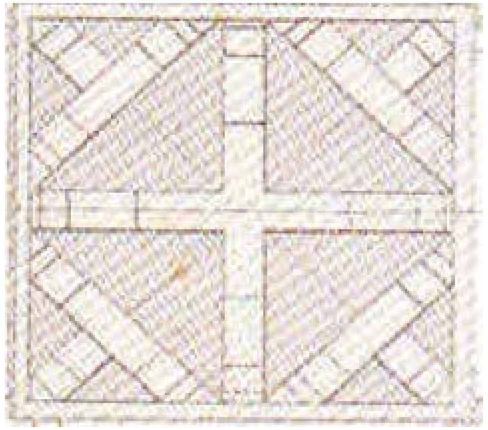
Si el giro con centro P y ángulo α está en S(F) también estarán los giros con centro en P y ángulo kα. Por ser un grupo finito para k=n obtendremos que nα=2π por tanto α=2π/n. Entonces S(F) contendrá los giros que se obtienen por composición reiterada de $G_P^{\frac{2\pi}{n}}$ A este grupo se le conoce por grupo cíclico generado por $G_P^{\frac{2\pi}{n}k}$ y lo designaremos por C_n

$$C_n = \left\{ G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, 2, \dots n \right\}$$

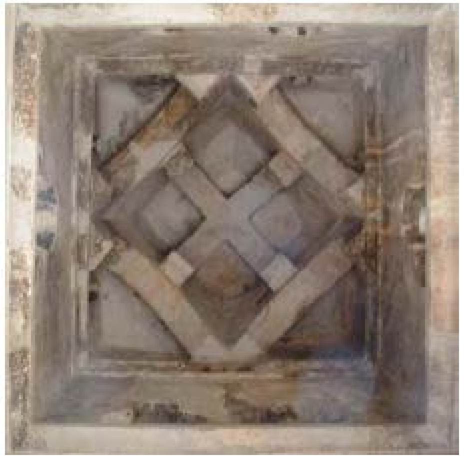


Dos cuadrados girando y generando una estrella de 8 puntas

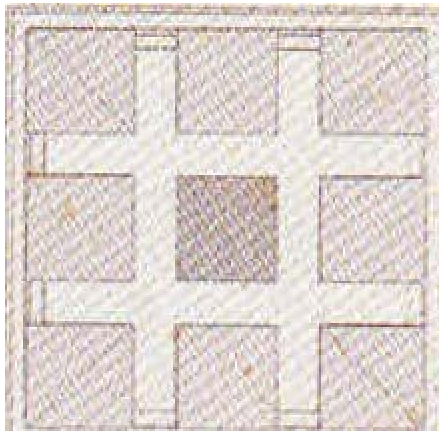
Dos cuadrados: uno conteniendo a otro



Combinación de diagonales de los cuadrados exterior e interior



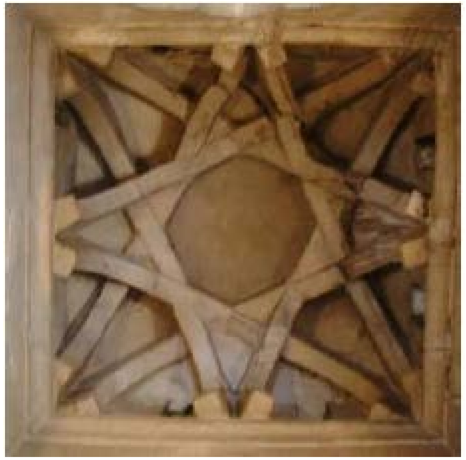

Diagonales resaltadas en el cuadrado interior

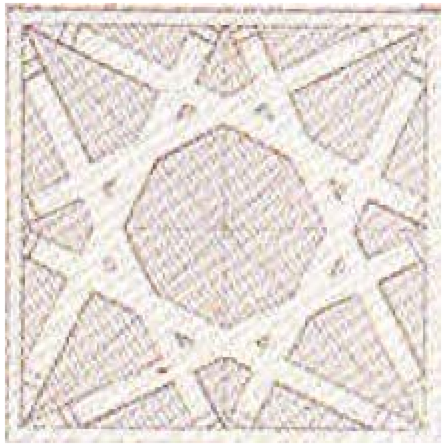



Reproducción de la propia planta central de la Mezquita


Combinación de cuadrados y diagonales

El conjunto de isometrías que dejan invariantes los diseños de las bóvedas anteriores, está formado por cuatro simetrías axiales, cuyos ejes se cortan en el centro de la figura, y giros de amplitud k90º, para k=1,2,3,4, con centro en dicho punto, cuya descripción es D_4={$G^{90ª}$, $G^{180ª}$, $G^{270ª}$, $G^{360ª}$,S_1, S_2 , S_3 , S_4 }. El grupo de simetría al que da lugar este conjunto de transformaciones se conoce como grupo cíclico de Leonardo D_4 cuya característica principal es que la figura tiene un punto fijo respecto a las isometrías que la dejan invariante que coincide con su centro.





Apariencia estrellada: grupo de simetría D_4

Aplicación al punto de cruz

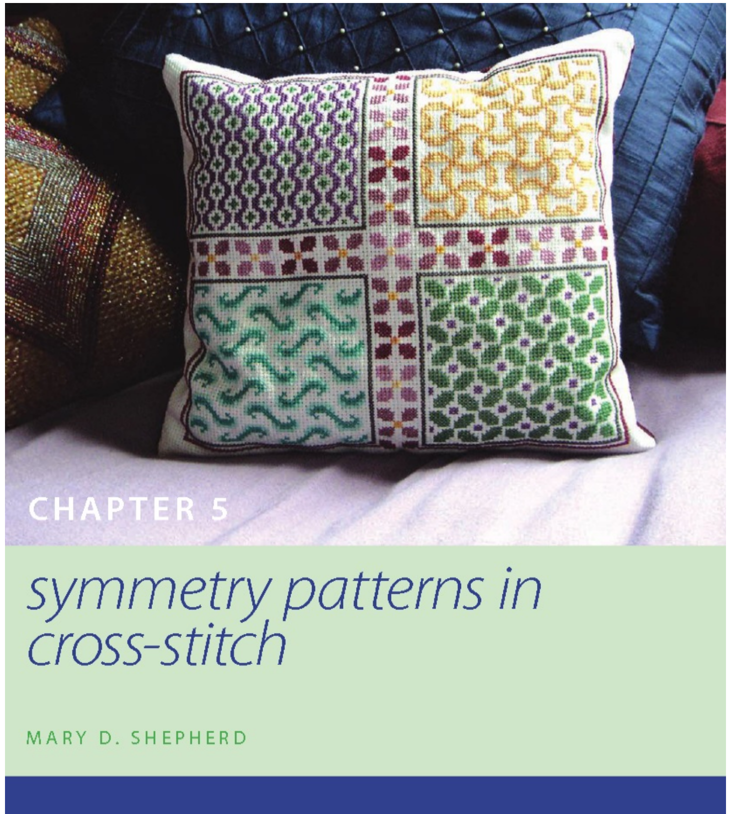
making mathematics with needlework

ten papers and ten projects

edited by
SARAH-MARIE BELCASTRO
CAROLYN YACKEL

A K Peters, Ltd.
Natick, Massachusetts

2008



1.1 The Basic Transformations

Before we look at the different types of patterns possible, let's discuss the four types of symmetry transformations that can occur in plane figures. All symmetry transformations keep the basic figure the same size and shape without stretching, shrinking or distorting the shape of the figure.

The first transformation we will consider is *translation*. A translation moves the basic figure without turning or flipping it as shown in Figure 5.

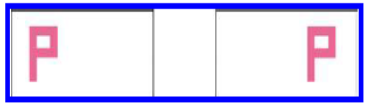


Figure 5. Translation of a single figure within the boxed area.

For a pattern to have translation symmetry, the entire pattern must match up after a translation, as in Figure 6.

Figure 6. Repetition of a figure with translation symmetry extending infinitely in two directions along a single line.

In a *rotation* a single point remains fixed while all other points move (rotate) about that point by a specific number of degrees, the angle of rotation. See Figure 7.

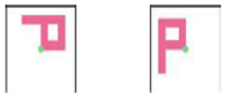


Figure 7. Rotation by 90° of a single figure within the boxed area about the point marked in green.

In general (although not in cross-stitch), any angle of rotation that evenly divides 360° is possible. For a pattern to have rotational symmetry, the entire pattern must match up after rotation, as in Figure 8.

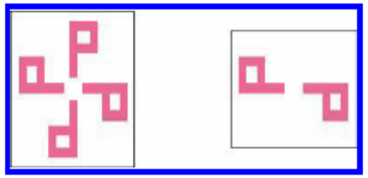


Figure 8. Two figures with rotational symmetry. The one on the left has 90° rotational symmetry, and the one on the right has 180°.

In a *reflection*, a line is fixed (see Figure 9) and acts like a mirror, reflecting each side to the other.

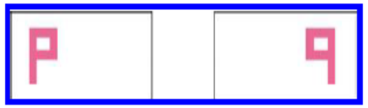


Figure 9. Reflection of a single figure within the boxed area.

In a pattern with reflection symmetry, the sides will match if the pattern is folded along the line of reflection as in Figure 10.

Figure 10. A figure with reflection symmetry. The line of reflection is shown in black.

The fourth and final transformation is a combination of translation and reflection and is called a *glide reflection*. As can be seen in Figure 11, the line of reflection and the line along which the pattern is translated are always parallel.

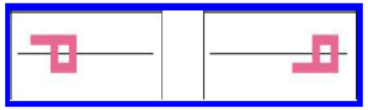


Figure 11. A glide reflection transformation with the line of refection shown.

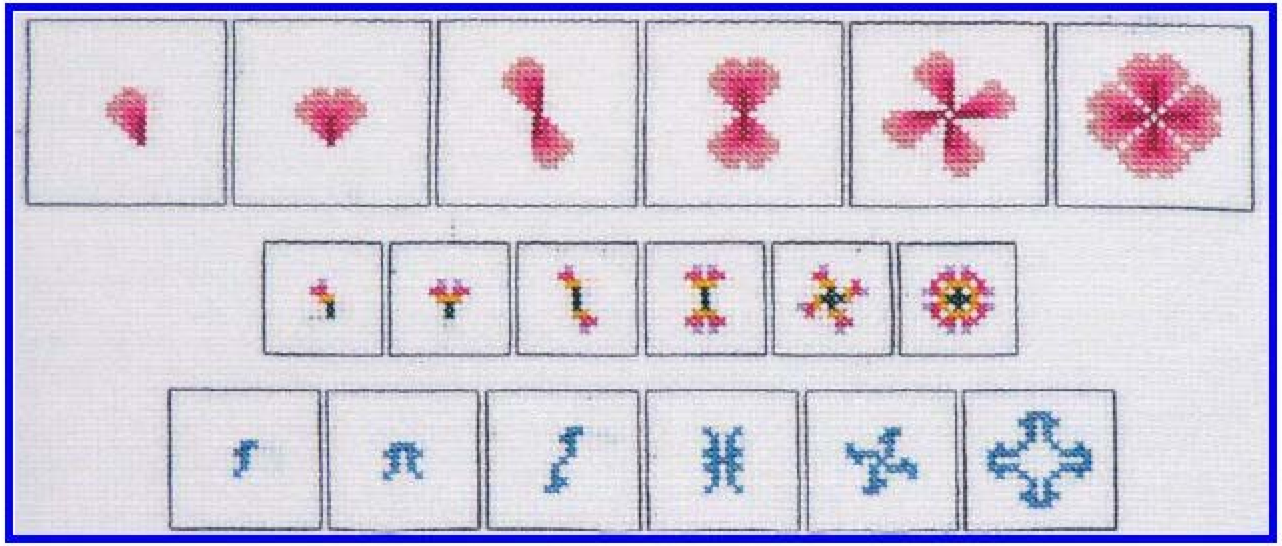


Figure 13. Three demonstrations of the possible rosette patterns in cross-stitch.

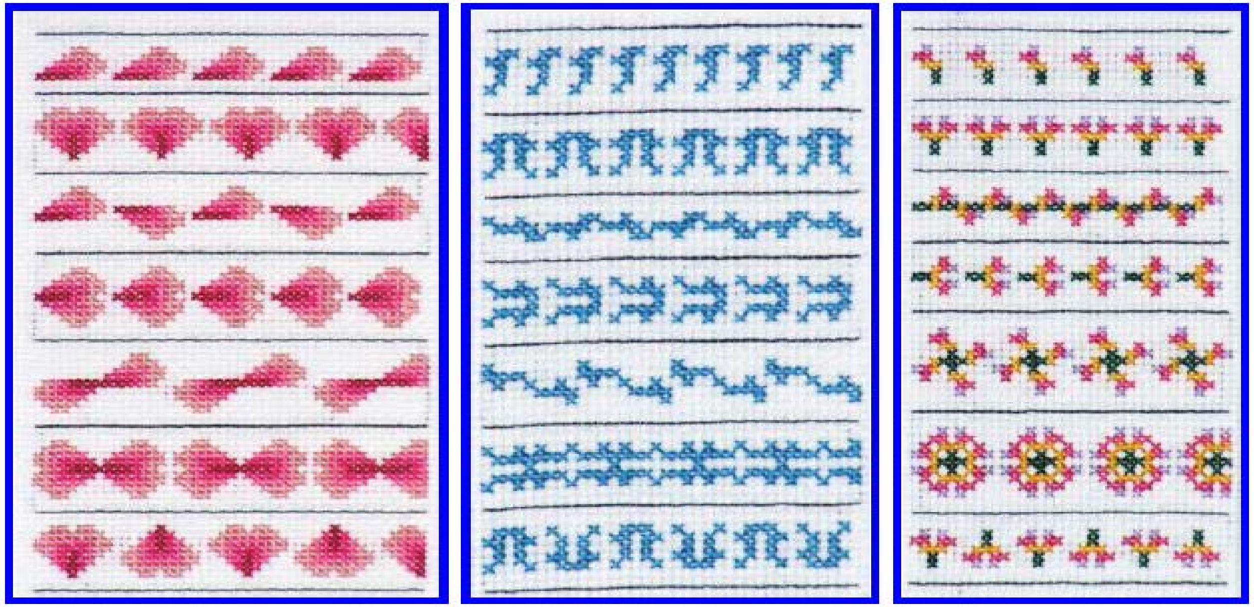


Figure 14. The seven basic frieze patterns.

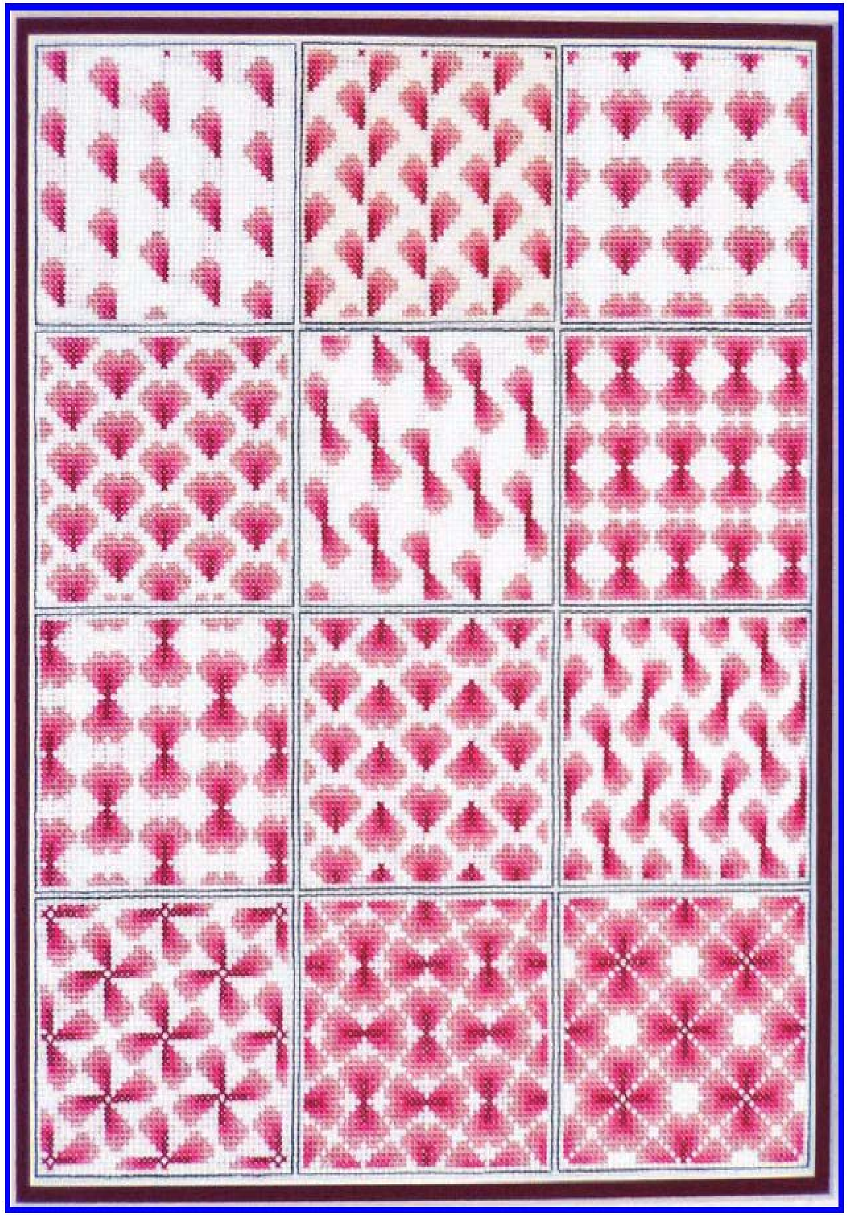


Figure 15. The twelve possible wallpaper patterns.

Code	Rotation	Reflection	Glide Reflection	Notes
p1	none	No	No	-
pg	none	No	Yes	-
pm	none	Yes	-	Glide reflection axis along line of reflection.
cm	none	Yes	-	Glide reflection axis not along line of reflection.
p2	180°	No	No	-
pgg	180°	No	Yes	-
pmg	180°	Yes	-	All reflections parallel.
cmm	180°	Yes	-	Non-parallel reflections, some rotation centers not on reflection axes.
pmm	180°	Yes	-	Non-parallel reflections, all rotation centers on reflection axes.
p4	90°	No	-	-
p4g	90°	Yes	-	Lines of reflection do not intersect at 45°.
p4m	90°	Yes	-	Lines of reflection intersect at 45°.

Table 1. The twelve wallpaper patterns realizable in cross-stitch, coded using International Union of Crystallography nomenclature.

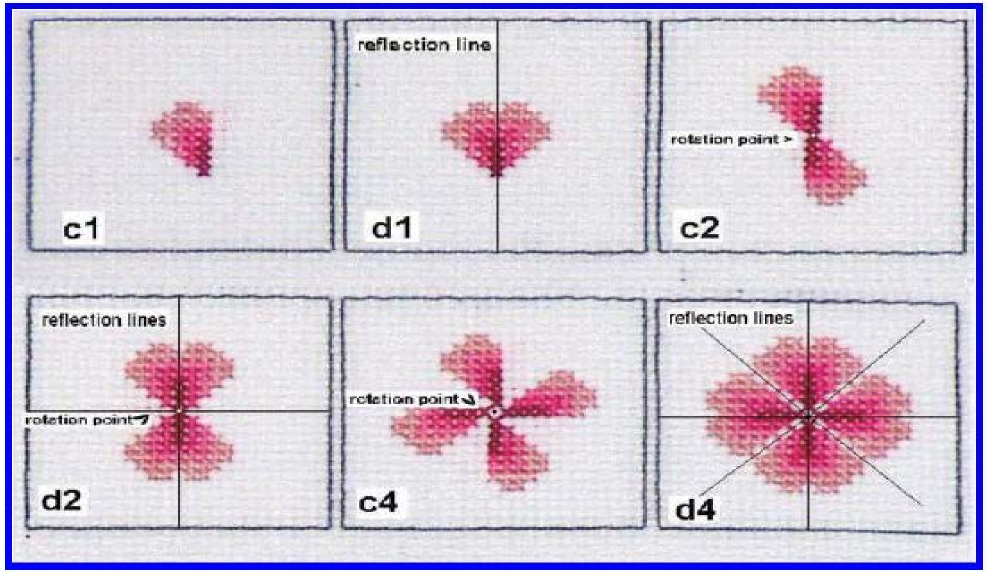


Figure 16. Rosette patterns, labeled, with lines of reflection and centers of rotation marked.

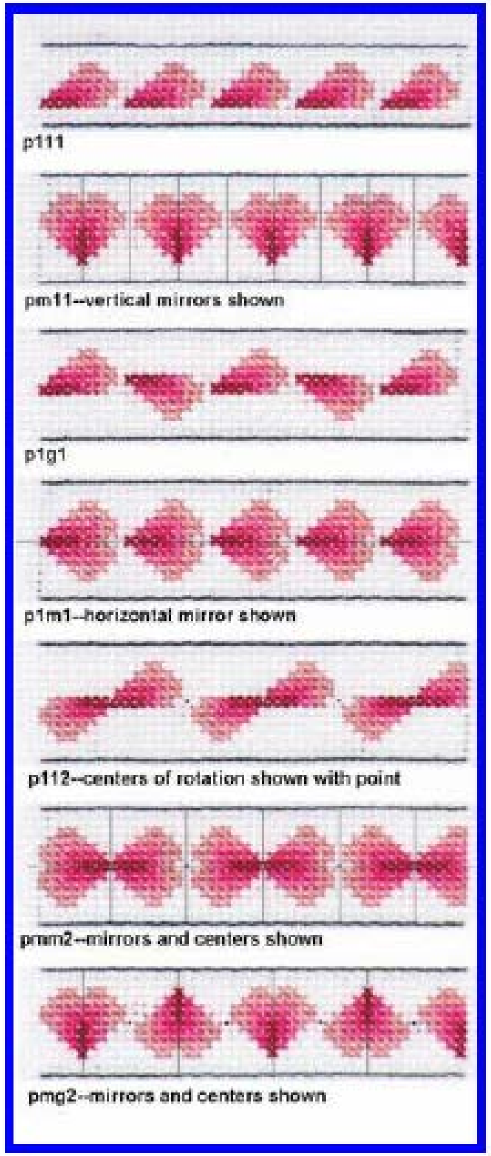


Figure 17. The seven frieze patterns, labeled, with the symmetries shown.

Ejemplos de patrones regulares

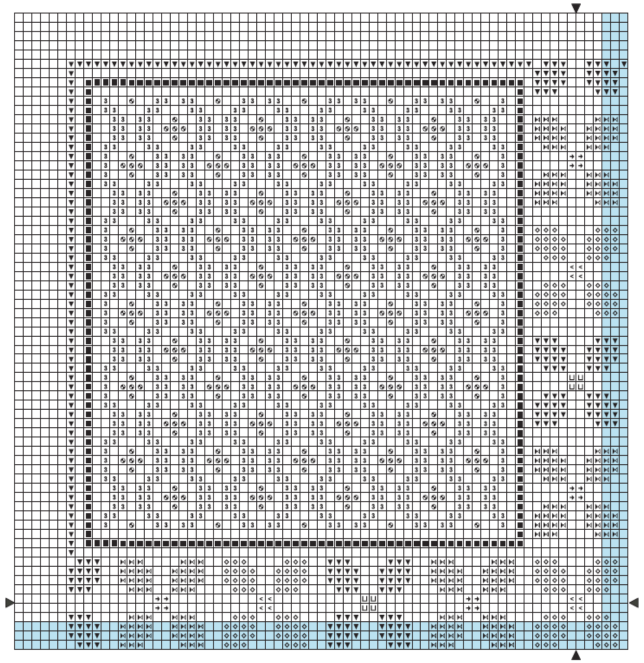


Figure 23. Upper-left quadrant.

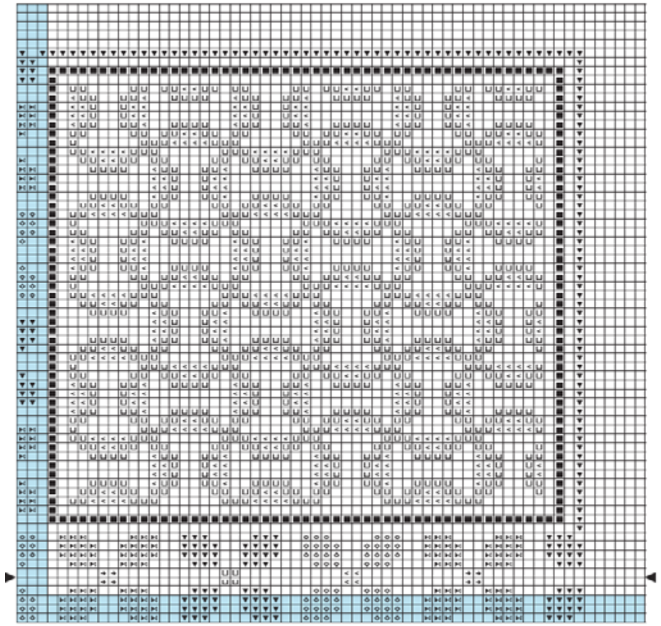


Figure 24. Upper-right quadrant.

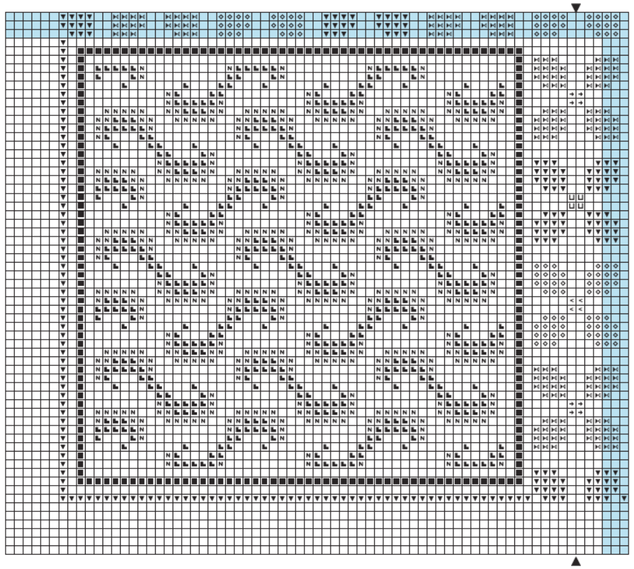


Figure 25. Lower-left quadrant.

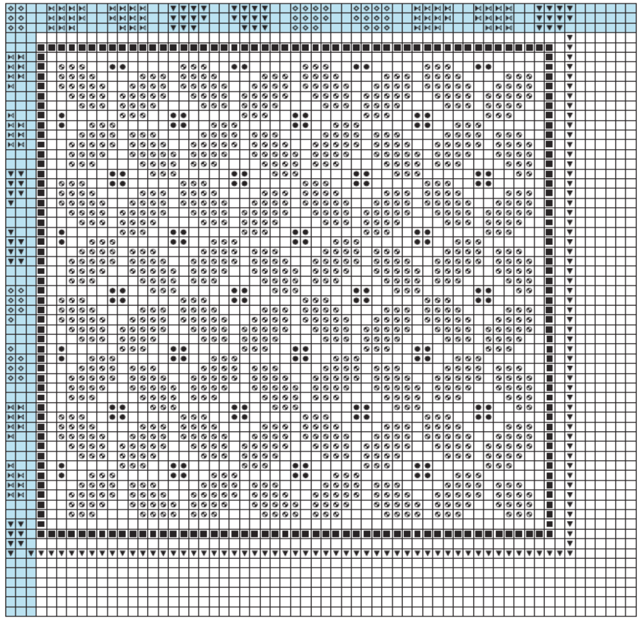


Figure 26. Lower-right quadrant.

Bibliography

[1] Burn, R. P. *Groups: A Path to Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.

[2] Conway, J. H. "The Orbifold Notation for Surface Groups." In *Groups, Combinatorics and Geometry*, LMS Lecture Notes 165, edited by M. W. Liebeck and J. Saxl, pp. 438–447. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.

[3] Crowe, Donald. "Symmetries of Culture." In *Bridges Proceedings 2001*, edited by Reza Sarhangi and Slavik Jablan, pp. 1–20. Tarquin publications, St Albans, UK, 2001. Also available at http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowe1/index.html.

[4] Crowe, Donald, and Washburn, Dorothy. *Symmetries of Culture*. University of Washington Press, Seattle, 1988.

[5] Kopsky, V., and Litvin, D. B. "Nomenclature, Symbols, and Classification of the Subperiodic Groups." *Acta Crystallographica*, vol. A49, no. 3, 1993, p. 594.

[6] Shepperd, M. "Mathematics Resources by Topic: Groups/Symmetry Patterns." http://michaelshepperd.tripod.com/resources/groups.html.

[7] Sibley, Thomas. *The Geometric Viewpoint: A Survey of Geometries*. Addison Wesley Longman, Reading, MA, 1998.

[8] Lee, Xah. "The Discontinuous Groups of Rotation and Translation in the Plane." http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c0_WallPaper.html, 2003.

5. Reflexiones finales: ¿ artesanía popular con los ordenadores del siglo XXI ?

Cambios y evolución del encaje de bolillos en los últimos 500 años

Métodos de “ensayo y error” para descubrir nuevos estilos y puntos por parte de las encajeras más expertas

Dos canadienses, en 2014 han propuesto un “modelo matemático” para identificar y diseñar patrones de encaje por medio de un ordenador.

Developing a Mathematical Model for Bobbin Lace

Veronika Irvine* and Frank Ruskey†
Department of Computer Science
University of Victoria, British Columbia, Canada

December 4, 2014

Resumen (1 página) en
Vuelta y Cruz, nº 19
(atención de Anje González)

Los problemas que consideran son:

1. ¿Puede un modelo matemático “identificar” correctamente fondos de encaje conocidos?
2. ¿Puede usarse el modelo para descubrir nuevos (y bonitos) fondos nuevos?

Para diseñar un fondo hay dos retos:

a) ¿Qué se puede hacer con 4 hilos: una trenza, una hoja de Guipur, o un simple medio punto?
b) ¿Qué pares de hilos deberíamos combinar para conseguir esos 4 hilos?

El primer reto: hacer una vuelta-cruce o una vuelta-cruce-alfiler-vuelta –cruce ya ha sido muy experimentado por las encajeras (39 variaciones del Punto de la Virgen)

En todas las variaciones el diagrama de pares es el mismo, pero los puntos realizados varían desde medio punto a trenzas.

El segundo reto es realmente el objetivo de esa pareja de canadienses.

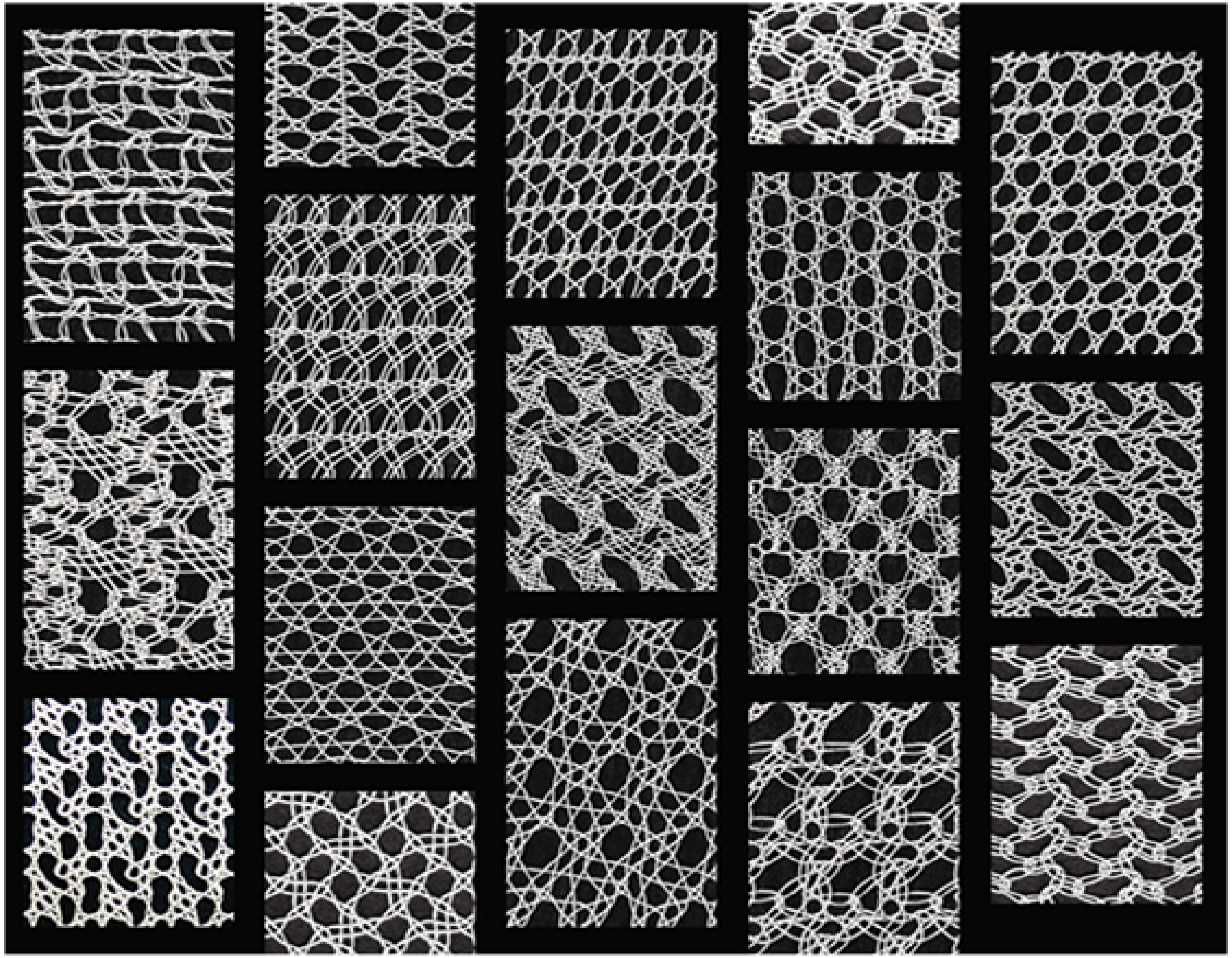
Utilizan la Teoría de Grafos y han definido una “lista de propiedades que todos los fondos de encaje han de tener y traduciéndolo así a propiedades matemáticas de ese tipo de grafos dirigidos.
Han llegado así a la “propiedad de conservación de hilos” (no tener que añadir o quitar hilos para rellenar un patrón de forma rectangular)

Además, han desarrollado un programa de ordenador para crear diagramas de grafos de manera sistemática y examinar si cada diagrama reúne todas las propiedades de un fondo de bolillos apto de ser trabajado

El programa identificó más de 100.000 diagramas de fondos de encajes diferentes y aptos de ser realizados .

Al comprobar sus resultados con catálogos de fondos de encaje (como el del libro de Uta Ulrich **(Gründe mit System**, 2011) antes citado , que incluye 449 patrones de fondo de encaje comprobaron que el programa "sólo puede crear diagramas de grafos bastante sencillos y no pueden generar todos los fondos: por ejemplo, estrellas y arañas son imposibles con su programa.
Además, la gran mayoría de los patrones generados por ordenador no presentan simetría, a parte de la repetición de cuadraditos.

Pese a esas "pegas" encontraron nuevos patrones (que no están en listados de patrones conocidos) como estos:



Pero ese modelo matemático no ha logrado descifrar completamente todos los encajes posibles.

El encaje de bolillos
asignatura del Magisterio y artesanía popular

Gracias por vuestra atención