

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE

M A D R I D

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XVI

**TECNICA DE SUPERSOLUCIONES LOCALES PARA PROBLEMAS
ESTACIONARIOS NO LINEALES. APLICACION AL ESTUDIO
DE FLUJOS SUBSONICOS**

POR

J. Ildefonso Díaz Díaz

Memoria premiada en el Concurso a Premios de 1980



M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELEFONO 221 25 29
1982

TECHNIQUE OF LOCAL SUPERSOLUTIONS FOR NON-LINEAR STATIONARY PROBLEM.
APPLICATION TO THE STUDY OF SUBSONIC FLOWS.

ABSTRACT.

The main purpose of this work is the presentation and sistematization of a technique (which we call technique of local supersolutions) for the obtention of estimates on the localization and geometry of the coincidence set $(\Omega_0 = \{x: u(x) = 0\})$ of the solutions of very different non-linear problems in stationary partial differential equations.

Estimates on the set Ω_0 play an important role in problems of free boundary as those of Variational Inequalities. For these class of problems, several mathematicians (the author among them) have previously established several estimates on Ω_0 by means of the construction of suitable super and subsolutions defined on the whole domain in which the Inequality is posed. The main idea of the technique developed here, consists in considering super and subsolutions defined only in small neighborhoods of suitable points of the domain. The mentioned technique is then applied to a large class of different situations, and the estimates obtained in this way are notably finer than those previously known.

Finally, as an illustration of the importance of the considered problems, as well as the power of this technique, we take several problems of subsonic flows crossing plane profiles with prescribed velocity at the infinity. Such problems, already classic, can be formulated in an equivalent way in form of Variational Inequalities by means of the hodograph transformation, and so the estimate of the localization of the free boundary $\partial\Omega_0$ is very important because it represents the distribution of velocities of the flow on the boundary of the profile.

RESUMEN.

El propósito principal de este trabajo radica en la presentación y sistematización de una técnica (que denominamos técnica de supersoluciones locales) para la obtención de estimaciones sobre la localización y geometría del conjunto de coincidencia ($\Omega_0 = \{x: u(x) = 0\}$) de las soluciones de muy diversos problemas no lineales en ecuaciones en derivadas parciales estacionarias.

Estimaciones sobre el conjunto Ω_0 desempeñan un importante papel en problemas de frontera libre tales como las Inecuaciones Variacionales. Para esta clase de problemas, diversos matemáticos (entre los que se cuenta el autor) habían establecido anteriormente diversas estimaciones sobre Ω_0 mediante la construcción de adecuadas super y subsoluciones definidas sobre todo el dominio en el que es planteada la Inecuación. La idea esencial de la técnica aquí desarrollada consiste en considerar super y subsoluciones definidas únicamente en entornos pequeños de adecuados puntos del dominio. Dicha técnica es aplicada a una gama muy variada de situaciones y las estimaciones así obtenidas son notablemente más finas que las conocidas hasta el momento.

Finalmente, a modo de ilustración de la trascendencia de los problemas considerados, así como de la potencia de la técnica desarrollada, se abordan diversos problemas de flujos subsónicos atravesando perfiles planos con velocidad determinada en el infinito. Tales problemas, ya clásicos, pueden ser formulados equivalentemente en forma de Inecuaciones Variacionales mediante la transformación hodografa y así la estimación de la localización de la frontera libre $\partial\Omega_0$ tiene una gran importancia por representar esta última la distribución de velocidades del flujo sobre la frontera del perfil.

§1. Introducción.

A lo largo de este trabajo nos ocuparemos de diversos problemas no lineales planteados en términos de ecuaciones en derivadas parciales estacionarias. Una clase de tales problemas a la que dedicaremos una atención especial es la constituida por las Inecuaciones Variacionales del tipo

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha u \geq f & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ (u)(-\Delta u + \alpha u - f) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω se supone abierto regular de $\mathbb{R}^N$ de frontera $\partial\Omega$, Δ designa al operador de Laplace y α es una constante no negativa.

Problemas del tipo del (1.1) aparecen en numerosas situaciones concretas de la Física, Química e Ingeniería (véase a este respecto la monografía de Duvaut-Lions [1]). El problema (1.1) puede expresarse de diversas formas equivalentes y así en concreto no es difícil mostrar que su solución minimiza un cierto funcional sobre un conjunto cerrado y convexo del espacio $H^1(\Omega)$ lo que justifica en alguna manera la terminología de Inecuación Variacional atribuida a tal problema. Sin temor a equivocarnos podemos afirmar que desde los trabajos pioneros de J.L.Lions y G.Stampacchia en la década de los sesenta hasta nuestros días tal tipo de problemas ha atraído la atención de un gran número de especialistas constituyendo uno de los temas de más radiante actualidad tanto por la novedad de su formulación matemática como por sus relevantes aplicaciones concretas.

Una de las características típicas de las Inecuaciones Variacionales radica en la generación de "fronteras libres", es decir, regiones de Ω (caso de (1.1)) o de $\partial\Omega$ distinguidas de una manera peculiar del

resto de Ω o de $\partial\Omega$ pero desconocidas a priori. Así por ejemplo si u es solución de (1.1) el dominio Ω es dividido en dos regiones

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega: u(x) = 0\} \quad (\text{conjunto de coincidencia})$$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega: u(x) > 0\} \quad (\text{conjunto de continuación})$$

La trascendencia y significación de conocer o estimar tales conjuntos es muy variada. (Obsérvese p.e. que en Ω_1 u solución de (1.1) satisface la ecuación

$$-\Delta u + \alpha u = f).$$

El principal objetivo de este trabajo radica en la obtención de estimaciones "a priori" sobre el tamaño y localización espacial de esas fronteras libres (como p.e. la frontera de Ω_0).

La obtención de tal tipo de resultados fue inicialmente considerada de una manera sistemática por H. Brézis en [4] cuando Ω es supuesto no acotado, mostrando la llamativa e importante conclusión de que $\bar{\Omega}_1$ es compacto si f es supuesta estrictamente negativa en el infinito y p.e. $g = 0$. De hecho su resultado es enunciado en términos más generales que (1.1) mediante la formulación

$$(1.2) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u) \geq f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$

con β grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ multívoco en 0 ⁽¹⁾.

(¹) Véase la definición exacta en la sección siguiente.

La técnica utilizada por él reposa en el principio de comparación de soluciones para (1.2) así como en la construcción de super y subsoluciones $\bar{u}$ y $\underline{u}$ con soporte compacto obteniéndose entonces la desigualdad a priori $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ y de aquí la conclusión. Tras su lucido trabajo han sido varias las direcciones en las que se han extendido sus resultados (²).

* Otras condiciones de contorno: Redheffer [1], Díaz [1] G. Díaz [3], Veron [1], ...

* Operadores diferenciales de 2º orden más generales. Brezis [4], Díaz [1], G. Díaz [1], Veron []... (caso de operadores lineales), Díaz-Herrero [1], [2], Vázquez [2], G. Díaz [3]... (caso de operadores no lineales).

* Caso de β no necesariamente multívoco. Benilán-Brezis-Crandall [1], Díaz [5], Díaz-Herrero [1], [2], Vázquez [1], Benilán-Brezis [1], ...

* Ecuaciones de orden distinto a dos: Bidaut-Veron [1], (4º orden), Díaz-Veron [1] (1º orden)...

Un común denominador a los trabajos anteriores consiste en que las funciones auxiliares $\underline{u}$ y $\bar{u}$ son construidas sobre todo Ω (super y subsoluciones globales). En la mayoría de los casos $\underline{u}$ y $\bar{u}$ son escogidas entre las funciones radiales (e.d. no dependiendo más que de $|x|$), obteniéndose así estimaciones radiales sobre la localización y tamaño del conjunto $\bar{\Omega}_1$ (= soporte de u).

(²) Una exposición panorámica conteniendo gran parte de la información existente hasta 1977 se tiene en Díaz [2]

Más recientemente Bensoussan-Brezis-Friedman [1] han obtenido estimaciones sobre Ω_0 para (1.1) más finas que las ofrecidas por la técnica de supersoluciones globales e incluso de interés para el caso Ω acotado. Sus ideas (más tarde mejoradas en Nagai [1], Yamada [1], [2] y Díaz-Herrero [2]) radican en la construcción de funciones de comparación de la forma

$$(1.3) \quad \bar{u}(x) = h_1(|x-x_0|), \quad \underline{u}(x) = -h_2(|x-x_0|)$$

donde h_i es una función real no decreciente tal que $h_i(0) = 0$, ($i = 1, 2$) y x_0 ha de escogerse adecuadamente para que $\bar{u}$ y $\underline{u}$ sean super y subsoluciones obteniéndose así estimaciones de Ω_0 mediante el conjunto de tales x_0 .

En este trabajo se pretende mostrar como es posible obtener estimaciones más finas, y de hecho en condiciones más generales que las de los trabajos precedentes mediante la aplicación de funciones de comparación de la forma (1.3) pero no necesariamente definidas sobre todo Ω . El espíritu que nos anima es el de sistematizar una técnica (que podríamos denominar de supersoluciones locales) capaz de ser aplicada en muy diversas situaciones. Tal intento nos parece incluso de un mayor interés que el de la novedad o generalidad de los resultados que expondremos en secciones siguientes y que en realidad pese a su importancia en sí mismos pueden ser considerados sólo como ilustrativos.

Este ánimo de dar una mayor preponderancia a la técnica que a los resultados nos ha conducido a la consideración de muy variadas formulaciones y también a pasar con una mayor rapidez sobre cuestiones tales como las de existencia, unicidad y comparación de soluciones de una naturaleza diferente y en general bien conocidas para los modelos tratados.

En un intento de poner en evidencia la potencia de la técnica presentada se abordan diversos problemas de flujos subsónicos atravesando perfiles planos simétricos con velocidad determinada en el infinito. Tales importantes problemas han atraído la atención de numerosos matemáticos, físicos e ingenieros y pueden ser ya calificados como problemas clásicos de la mecánica de fluidos y de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.

Nuestra aproximación a tales cuestiones se basa en el método (también clásico) de la hodografía que permite reducir el problema considerado (ya sea para fluidos incompresibles como compresibles) al caso de ecuaciones en derivadas parciales (elípticas gracias al carácter subsónico). Sin embargo la aparición de una frontera libre (y por tanto desconocida "a priori") en esa nueva formulación impedía un tratamiento riguroso de dicha situación hasta que la moderna teoría de Inecuaciones Variacionales arrojó luz sobre la escena. Esto fué llevado a cabo en Brezis-Stampacchia [1], [2], Brezis-Duvaut [1] y más recientemente Simborsky [1], reduciendo el problema a adecuadas Inecuaciones Variacionales sobre las que se apoya nuestro tratamiento matemático.

En dichas Inecuaciones Variacionales la frontera libre $\partial\Omega_0$ representa la distribución de velocidades a lo largo de la frontera de perfil o del canal y es por tanto de una importancia capital. Nuestra aportación original a este respecto radica en la obtención de estimaciones sobre el tamaño y localización de dicha frontera mejorando las anteriormente establecidas por los citados autores.

Por último se hacen diversos comentarios referentes al caso de datos no acotados y a otros tipos de resultados sobre la naturaleza del conjunto de coincidencia Ω_0 .

El plan del resto del trabajo es el siguiente:

§2. Técnica de supersoluciones locales para ecuaciones multivocas.

- 2.1. El problema de Dirichlet.
- 2.2. Condiciones de contorno generales.
- 2.3. Otras ecuaciones multivocas.

§3. Ecuaciones estacionarias no necesariamente multivocas.

§4. Aplicación a flujos subsónicos:

§5. Comentarios finales.

§2. Técnica de supersoluciones locales para ecuaciones multivocas.

Tal y como ya se ha señalado en la Introducción el objetivo de la presente sección radica en la obtención de estimaciones sobre la localización y tamaño de la frontera libre $\partial\Omega_0$.

Un hecho importante a señalar a este respecto radica en que el carácter no vacío del conjunto Ω_0 será debido a la no linealidad de los problemas considerados, ya que son muchos los criterios que muestran que ésto no sucede para el caso de problemas en ecuaciones en derivadas parciales lineales. (Propiedad de continuación única, principio fuerte del mínimo, desigualdad de Harnack, etc... B-J-S [1])

Sin más preámbulos entraremos en materia comenzando por el estudio de (1.2).

2.1. El problema de Dirichlet.

Un problema modelo sobre el que comenzaremos centrando nuestra atención es el dado por la Inecuación Variacional (1.1). Tal problema puede ser formulado con una mayor generalidad por medio de los llamados grafos maximales monótonos de R^2 . Dichos grafos (o funciones multivocas de R en R) vienen caracterizados mediante el grafo de funciones reales b no decrecientes a las que se les añade los segmentos verticales en los puntos de salto. Más concretamente se puede asegurar (Brezis [3]) que para todo grafo maximal monótono de R^2 existe $b: R \rightarrow R$ no decreciente tal que

$$\beta(r) = \begin{cases} (-\infty, b(r+)) & \text{si } b(r-) = -\infty \\ [b(r-), b(r+)] & \text{si } -\infty < b(r-) \leq b(r+) < +\infty \\ [b(r-), +\infty) & \text{si } b(r+) = +\infty \end{cases}$$

De esta manera el grafo de toda función real continua b y no decreciente

es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$. El principal interés de permitir que β (como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) pueda ser multívoca en algún punto radica en la aparición de tal situación en las Inecuaciones Variacionales. En efecto, es un simple ejercicio comprobar que si $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ (para algún $p \in [1, \infty)$) es solución de (1.1) entonces u satisface

$$(2.1) (= (1.2)) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u) \ni f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$

en el sentido de que $\exists w \in L^p_{loc}(\Omega)$ con $w(x) \in \beta(u(x))$ c.p.t. $x \in \Omega$ y tal que $-\Delta u + w = f$ en Ω , siendo β el grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$(2.2) \quad \beta(r) = \emptyset \text{ si } r < 0, \quad \beta(0) = (-\infty, 0] \text{ y } \beta(r) = 0 \text{ si } r > 0.$$

El grafo β dado por (2.2) es claramente multívoco en $r = 0$. Esta condición (típica de los problemas (2.1) que conducen a Inecuaciones Variacionales de algún tipo) será la única característica peculiar que supondremos en esta sección sobre la formulación de (2.1). Una manera de expresar la multivaluación de β se tiene al recurrir a las siguientes funciones (secciones) asociadas a β :

$$\begin{aligned} \beta^+(r) &= \max \{z : z \in \beta(r)\} \text{ si } r \in D(\beta) (= \{r \in \mathbb{R} : \beta(r) \neq \emptyset\}) \\ \beta^-(r) &= \min \{z : z \in \beta(r)\} \text{ si } r \in D(\beta) \\ \beta^+(r) &= \beta^-(r) = +\infty \text{ si } r \in D(\beta) \text{ y } r \geq \sup D(\beta) \\ \beta^+(r) &= \beta^-(r) = -\infty \text{ si } r \in D(\beta) \text{ y } r \leq \inf D(\beta). \end{aligned}$$

En concreto supondremos a lo largo de toda esta sección la siguiente hipótesis general:

$$(H_1) \quad \beta \text{ es un grafo maximal monótono de } \mathbb{R}^2 \text{ con } 0 \in \beta(0) \text{ y } \beta^-(0) < \beta^+(0).$$

Una variante importante de la formulación (2.1) se refiere al caso de obstáculos ψ no necesariamente nulos. Más concretamente, dado $\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ el problema

$$P_\psi \quad \begin{cases} -\Delta v + \beta(v - \psi) \ni f & \Omega \\ v = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

puede reducirse al (2.1) mediante el cambio $u = v - \psi$. De esta manera el conjunto Ω_0 para (2.1) viene dado por el conjunto de coincidencia $\{x \in \Omega : v(x) = \psi(x)\}$. Tal variante puede ser utilizada para estimar el conjunto $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega : u(x) \leq \lambda\}$ supuesto $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. En efecto basta definir $\psi(x) \equiv \lambda$ y entonces recordar que si v_λ es la solución de P_λ entonces los teoremas de comparación (véase p.e. Yamada [1]) permiten asegurar que

$$u(x) \leq v_\lambda(x)$$

y de esta manera estimar Ω_λ es equivalente a estimar el conjunto de coincidencia asociado a P_λ .

Tal y como se ha dicho en la introducción nuestros objetivos actuales son de una naturaleza muy diferente a la de la existencia, unicidad y regularidad de soluciones, y de aquí que nos limitemos a este respecto a indicar algunas referencias en donde se pueden encontrar respuestas satisfactorias a dichos temas. En concreto (2.1) puede ser abordado en diferentes espacios funcionales atendiendo a la regularidad de f . Así, si $\alpha > 0$ para $f \in L^2$ se obtiene $u \in W^{2,2}_{loc}$ (Brezis [2]) y para $f \in L^1$ se obtiene $u \in W^{1,q}$ con $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ (Brezis-Strauss [1]). El caso $\alpha = 0$ es más delicado y requiere hipótesis adicionales sobre β o sobre Ω (véase p.e. Benilan-Brezis-Crandall [1] y Brezis [2]). En nuestro caso y para

una exposición más directa de la técnica que pretendemos sistematizar nos situaremos en una formulación cómoda suponiendo de momento

$$(H_2) \quad \alpha > 0$$

$$(H_3) \quad f \in L^\infty(\Omega), \quad g \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$$

con lo cual por los resultados de regularidad de Brezis [2] se tiene asegurada la existencia y unicidad de una solución u de (2.1) satisfaciendo $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ y entonces continua por las inclusiones de Sobolev.

Una herramienta fundamental de nuestra técnica será la comparación de soluciones, que nos permite afirmar que si $f \leq \hat{f}$ y $g \leq \hat{g}$ c.p.t. punto, entonces $u \leq \hat{u}$ c.p.t. punto de Ω ($\hat{u}$ solución de (2.1) correspondiente a $\hat{f}$ y $\hat{g}$). (Véase p.e. Brezis [2]).

Tal y como ya se ha indicado en la Introducción, la técnica que emplearemos consistirá en la construcción de supersoluciones $\bar{u}$ de la forma

$$(2.3) \quad \bar{u}(x) = h(|x-x_0|)$$

con h función real no decreciente con $0 = h(0)$, y con la particularidad de que $\bar{u}$ no necesita estar definida en todo Ω . Observemos que si u es solución de (2.1) entonces necesariamente ha de ser

$$(2.4) \quad f(x) \leq \beta(0) \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega_0.$$

Veremos que la condición (2.4) es "casi" suficiente a la hora de determinar Ω_0 . En concreto si para $\epsilon > 0$ fijo introducimos los conjuntos

(3) Como se verá más tarde el problema de la construcción de subsoluciones $\underline{u}$ es completamente análogo.

$$(2.5) \quad S(f, \epsilon) = \{x \in \Omega: \beta^-(0) + \epsilon \leq f(x) \leq \beta^+(0) - \epsilon\}$$

nuestros resultados afirmarán que basta "adentrarse" suficientemente en $S(f, \epsilon)$ para tener la seguridad de que se está en Ω_0 .

Se exigirá pues que la función $\bar{u}$ de (2.3) sea supersolución de la ecuación (2.1) pero sólo sobre $S(f, \epsilon)$. Finalmente la comparación de $\bar{u}$ con u estará asegurada si podemos afirmar que $u \leq \bar{u}$ sobre $\partial S(f, \epsilon)$. Ahora bien $\partial S(f, \epsilon)$ puede involucrar fronteras "artificiales" en Ω distintas de $\partial\Omega$ por lo que en dichas partes de $\partial S(f, \epsilon)$ bastará exigir que se tenga

$$(2.6) \quad u(x) \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \bar{u}(x)$$

En virtud de lo expuesto, la mayor o menor fidelidad de las estimaciones obtenidas será función de dos factores distintos

- a) el mayor o menor grado en que $\bar{u}$ satisface la ecuación de (2.1)
- b) la mayor o menor optimalidad de las estimaciones sobre $\|u\|_{L^\infty}$ obtenidas "a priori"

El punto a) motiva la introducción de diferentes funciones h que originan supersoluciones locales $\bar{u}$ con distinto grado de verificación la ecuación de (2.1). Para poner ésto en evidencia observemos que unos cálculos sencillos muestran que si $\bar{u}$ es dada por (2.3) con $h \in C^2(\mathbb{R}^+)$ entonces

$$(2.7) \quad -\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} = -h''(|x-x_0|) - \frac{N-1}{|x-x_0|} h'(|x-x_0|) + \alpha h(|x-x_0|)$$

Por otro lado el exigir que $\bar{u}$ sea supersolución local de la ecuación (2.1) se reduce a obligar que se verifique

$$(2.8) \quad -\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^-(\bar{u}) \geq f \quad \text{en} \quad S(f, \epsilon)$$

y por tanto en función de la monotonía de β^- se tiene que como $\bar{u}$ es ≥ 0

$$-\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^-(\bar{u}) \geq -\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^+(0)$$

y por tanto (2.8) se tiene asegurada exigiendo que h sea tal que

$$(2.9) \quad h''(t) + \frac{N-1}{t} h'(t) - \alpha \cdot h(t) \leq \epsilon.$$

Una primera elección de h puede ser

$$(2.10) \quad h(r) = \frac{\epsilon}{2N} r^2$$

(Bensoussan-Brezis-Friedman [1]) y entonces en (2.9) se tiene la desigualdad estricta en $t > 0$. Recientemente Nagai [1] ha abordado el problema de la determinación de h verificando en (2.9) la igualdad en $\forall t > 0$. Tal elección de h conducirá a mejores estimaciones que las obtenidas por h dada en (2.10) y de ahí que centremos nuestra atención en ella. En concreto, eligiéremos h solución del problema de Cauchy

$$(2.11) \quad \begin{cases} h''(t) + \frac{N-1}{t} h'(t) - \alpha \cdot h(t) = \epsilon & \text{en } (0, \infty) \\ h(0) = h'(0) = 0 \end{cases}$$

con $\epsilon > 0$ fijo. Mediante adecuados cambios de variables es posible mostrar (véase p.e. Watson [1]) que la solución de (2.11) viene dada por

$$h(t) = \frac{\epsilon}{\alpha} \left\{ \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\alpha} t}{2}\right)^{1-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}-1}(\sqrt{\alpha} t) - 1 \right\} =$$

$$= \frac{\epsilon}{\alpha} \left\{ \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma\left(\frac{N}{2} + m\right)} \left(\frac{\sqrt{\alpha} t}{2}\right)^{2m} - 1 \right\}$$

donde $I_\nu(t)$ es la función modificada de Bessel y Γ es la función gamma. Gracias a las propiedades bien conocidas de las funciones de Bessel se obtiene sin dificultad que

$$(2.13) \quad h(t) > 0, \quad h'(t) > 0, \quad \theta h'(t) \geq h'(\theta t) \quad \text{para } \theta \in [0, 1] \text{ y } t \geq 0.$$

Otras propiedades menos inmediatas y que serán de utilidad más tarde están recogidas en el siguiente lema técnico (*):

Lema 1. (Nagai [1]).

Para toda constante positiva δ , existe una única constante positiva $R_\delta = R_\delta(\alpha)$ tal que si h es dada por (2.12) entonces

$$(i) \quad h(R_\delta) = \delta \quad \text{y} \quad h(t) > \delta \quad \text{si} \quad t > R_\delta$$

$$(ii) \quad R_\delta < \left(\frac{2N\delta}{\epsilon}\right)^{1/2}$$

$$(iii) \quad R_\delta(\alpha) \rightarrow \left(\frac{2N\delta}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad \text{cuando} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

$$(iv) \quad R_\delta(\alpha) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \alpha \rightarrow +\infty.$$

Comenzaremos estimando Ω_0 en el interior de Ω :

Teorema 1.

Supuestas (H_1) , (H_2) y (H_3) entonces

$$(2.14) \quad \{x \in S(f, \epsilon) : d(x, \partial S(f, \epsilon)) \geq R_{\delta_1}\} \subset \Omega_0$$

con

$$(2.15) \quad \delta_1 = \max\{\delta_+, \delta_-\} \quad \text{y} \quad \delta_\pm = \max \left\{ \|g^\pm\|_\infty, \frac{1}{\alpha} \|f^\pm\|_\infty \right\}$$

y R_{δ_1} dado a partir del Lema 1.

(*) Para tranquilidad del lector anticipamos ya que sólo las propiedades (2.13) y las del Lema 1 serán utilizadas en lo que sigue pudiendo prescindirse de la "horrorosa" expresión (2.12).

Demostración.

Comenzaremos considerando (2.1) formulado mediante los datos $\tilde{f} = f^+ \geq 0$ y $\tilde{g} = g^+ \geq 0$, cuya solución (necesariamente no negativa,) denotaremos por u_+ . Sea ahora $x_0 \in S(f, \epsilon)$ para ϵ fijo y definamos $\tilde{u}(x) = h(|x-x_0|)$ con h solución de (2.11). Se tiene entonces que

$$-\Delta \tilde{u} + \alpha \cdot \tilde{u} + \beta^-(\tilde{u}) \geq -\epsilon + \beta^+(0) \geq \tilde{f}(x) \quad \text{c.p.t. } x \in S(f, \epsilon).$$

Consideremos $\tilde{\Omega} = B_R(x_0)$ con R escogido de manera que

$$(2.16) \quad \tilde{\Omega} \subset S(f, \epsilon)$$

$$(2.17) \quad h(R) = \delta_+$$

Observando que si u_+ es solución de (2.1) correspondiente a $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ se tiene

$$\|u_+\|_{\infty} \leq \delta_+$$

(razónese por comparación en $L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$) se concluye que

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} + \alpha \cdot \tilde{u} + \beta^-(\tilde{u}) \geq f & \text{en } \tilde{\Omega} \\ \tilde{u} \geq \|u_+\|_{\infty} \geq u_+ & \text{en } \partial\tilde{\Omega} \end{cases}$$

y entonces por los criterios de comparación se concluye

$$0 \leq u_+(x) \leq h(|x-x_0|) \quad \text{c.p.t. } x \in \tilde{\Omega}.$$

Las condiciones (2.16) y (2.17) son obviamente satisfechas si

$$(2.18) \quad x_0 \in \{x \in S(f, \epsilon) : d(x, \partial S(f, \epsilon)) \geq R_{\delta_+}\}$$

con $R = R_{\delta_+}$ y entonces u_+ es nula en el conjunto de (2.18). Razonando análogamente con respecto a $\tilde{f} = -f^-$, $\tilde{g} = -g^-$ y denotando u_- a la solu

ción de (2.1) correspondiente se obtiene que

$$u_-(x) \leq u(x) \leq u_+(x) \quad \text{en } B_R(x_0), \quad R = \min \{R_{\delta_+}, R_{\delta_-}\}$$

y de aquí la conclusión. #

Obsérvese que la estimación (2.14) es independiente de la anulación o no del dato g sobre $\partial\Omega$. Tal tipo de comportamiento no habíase puesto de manifiesto anteriormente para (2.1) lo que en cierta manera es debido a la utilización de funciones de comportamiento radiales y a la vez globales.

El Teorema 1 contiene al Theorem 4.1. de Nagai [1] al hacer Ω acotado, $S(f, \epsilon) = \Omega$ para algún $\epsilon > 0$ y β dado por (2.2). Por otra parte el apartado (ii) del Lema 1 muestra que la estimación (2.14) es más fina que las de Bensoussan-Brezis-Friedman [1] y Yamada [1] (correspondientes a h dado por (2.10)). También los apartados (iii) y (iv) del Lema 1 permiten estudiar automáticamente la evolución de la estimación (2.14) cuando se hace $\alpha \rightarrow 0$ o bien $\alpha \rightarrow +\infty$.

Tal y como se comentó anteriormente a propósito de la desigualdad (2.6), es posible obtener estimaciones más finas que (2.14) con solo obtener estimaciones menores que δ_1 sobre $\|u\|_{\infty}$. (A este respecto δ_1 podría ser comparado con la cota superior

$$(2.19) \quad \delta_2 = (\beta^{-1})^+ \max \{ \|f\|_{\infty}, \beta^-(\|g\|_{\infty}) \}.$$

Nos ocuparemos ahora de la obtención de estimaciones sobre Ω_0 hasta la frontera. Como una primera aproximación a esta problemática observemos que si en la demostración del Teorema 1 se elige

$$(2.20) \quad \tilde{\Omega} = \Omega \cap B_R(x_0)$$

con R tal que se tengan (2.16) y (2.17) entonces es posible "llegar" hasta la frontera si se conoce alguna información sobre el soporte de g puesto que si un trozo de $\partial\tilde{\Omega}$ coincide con $\partial\Omega$ -sop g sobre dicha frontera se tiene $\bar{u} \geq u$ de una manera automática gracias a la positividad de h . En consecuencia se tiene:

Teorema 2.

Supuestos (H_1) , (H_2) y (H_3) se tiene

$$(2.21) \quad \{x \in \overline{S(f, \epsilon)} : d(x, \partial S(f, \epsilon) - (\partial\Omega - \text{sop } g)) \geq R_{\delta_1}\} \subset \bar{\Omega}_0$$

R_{δ_1} dado en el Teorema 1. #

Nada mejor que un sencillo ejemplo gráfico para ilustrar la estimación (2.21)

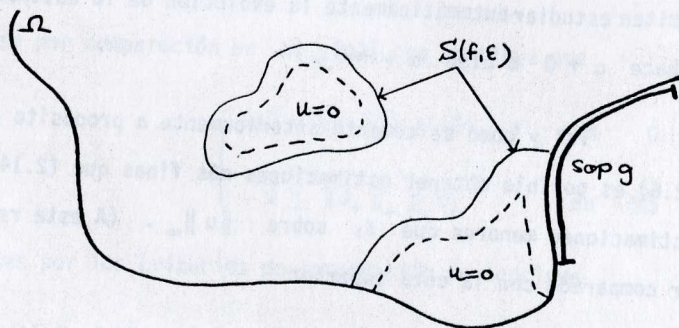


Figura 1.

Otra técnica diferente para obtener estimaciones hasta la frontera para Ω_0 está inspirada en otras funciones de comparación introducidas por Yamada [1], [2] y Nagai [1].

Teorema 3.

Supongamos (H_1) , (H_2) y (H_3) . Supongamos también que

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists x_0 \in \partial\Omega \text{ y } \exists r > R_{\delta_1} \text{ tal que } g = 0 \text{ en } \partial\Omega \cap B_r(x_0) \text{ y} \\ \Omega \cap B_r(x_0) \subset S(f, \epsilon) \text{ con } R_{\delta_1} \text{ dado en el Teorema 1} \end{array} \right\}. \text{ Entonces } u(x) = 0$$

para (2.23) $x \in \overline{S(f, \epsilon)}$ tal que $|x - x_0| \leq r - R_{\delta_1}$.

Demostración.

De nuevo basta suponer (2.1) formulado con f^+ y g^+ como datos. Dado $x_0 \in \overline{S(f, \epsilon)}$ definamos la función

$$(2.24) \quad \bar{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - x_0| \leq r - R_{\delta_1} \\ h(|x - x_0| - r + R_{\delta_1}) & \text{si } |x - x_0| > r - R_{\delta_1} \end{cases}$$

con h solución de (2.11). Observando que la función $h_a = h(t-a)$ satisface

$$\bar{h}'' + \frac{N-1}{t} \bar{h}' - \alpha \bar{h} < \epsilon \quad \text{en } (a, \infty)$$

se tiene entonces que

$$-\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^-(\bar{u}) \geq -\epsilon + \beta^+(0) \geq f^+(x) \quad \text{c.p.t. } x \in S(f, \epsilon)$$

Escojamos ahora $\tilde{\Omega} = S(f, \epsilon) \cap B(x_0, r)$. En $\partial\tilde{\Omega}$ se tiene

$$\bar{u}(x) \geq u_+(x) \quad \text{sobre } \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega \quad (\text{por la positividad de } h$$

y (2.22))

$$\bar{u}(x) \geq u_+(x) \quad \text{sobre } \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega \quad (\text{por la elección de } \bar{u})$$

La demostración concluye a partir de la comparación $u_+ \leq \bar{u}$ en $\tilde{\Omega}$ y razonando como en el Teorema 1. #

Finalizaremos este apartado señalando que el caso de

$\alpha = 0$ puede ser abordado por estas técnicas de supersoluciones locales ope

rando con h dada por (2.10) y tomando como estimación de $\|u\|_\infty$ la dada en (2.19).

2.2. Condiciones de contorno generales.

En este apartado nos ocuparemos inicialmente del problema

$$(2.25) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde n es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ y

(H₄) γ es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \gamma(0)$.

Más tarde nos ocuparemos también del caso de condiciones del tipo de (2.25) pero no necesariamente homogéneas.

De nuevo la cuestión de existencia y unicidad de soluciones para (2.25) ha sido estudiada en Brezis [1] ($f \in L^2$), Brezis-Strauss [1] y Benilan [1] ($f \in L^q$, $1 \leq p \leq +\infty$). También para este problema son bien conocidos los teoremas de comparación correspondientes a diferentes f y γ (véase p.e. Brezis [2], Díaz [5] y Yamada [1]).

Con el fin de obtener desigualdades del tipo (2.6) será de gran utilidad conocer estimaciones "a priori" sobre la norma $\| \cdot \|_\infty$ de la solución. A este respecto, si $\alpha > 0$, se tiene

$$(2.26) \quad -\frac{1}{\alpha} \|f^-\|_\infty \leq u(x) \leq \frac{1}{\alpha} \|f^+\|_\infty \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega$$

así como para $\alpha \geq 0$ y $R(\beta) = \mathbb{R} = D(\beta)$

$$(2.27) \quad (\beta^{-1})^-(\|f^-\|_\infty) \leq u(x) \leq (\beta^{-1})^+(\|f^+\|_\infty) \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega.$$

Ambas estimaciones pueden obtenerse por comparación con adecuadas constantes.

La (2.26) también puede ser justificada mediante la teoría de tipo (M) de Benilan [2].

Dado el carácter interior del Teorema 1, la estimación (2.14) permanece válida para la solución de (2.25) con solo substituir δ_1 por

$$(2.28) \quad \delta_3 = \min \{ \max \{ \frac{1}{\alpha} \|f^-\|_\infty, \frac{1}{\alpha} \|f^+\|_\infty \}, \max \{ -(\beta^{-1})^-(\|f^-\|_\infty), (\beta^{-1})^+(\|f^+\|_\infty) \} \}.$$

Las estimaciones hasta la frontera requieren un tratamiento diferente. Para llevarlo a cabo utilizaremos la siguiente notación: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $\Gamma' \subset \partial\Omega$ definimos

$$(2.29) \quad \theta(x_0, \Gamma') = \inf \{ \cos(n(x), x-x_0), x \in \Gamma' \}$$

donde $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ en $x \in \Gamma'$ y $(n(x), x-x_0)$ designa el ángulo entre $n(x)$ y $x-x_0$. El número $\theta(x_0, \Gamma')$ depende pues de la "geometría" de Ω y así por ejemplo si Ω es convexo y acotado, y si $x_0 \in \Omega$ entonces $\theta(x_0, \partial\Omega) > 0$.

Se tiene

Teorema 4.

Supongamos (H_1) , (H_2) , (H_4) y

$$(H) \quad f \in L^\infty(\Omega).$$

Sea $\Gamma'_\epsilon = \partial\Omega \cap \partial S(f, \epsilon)$ y supongamos que

$$(2.31) \quad \exists S_\epsilon \subset S(f, \epsilon) \text{ tal que } \theta(x_0, \Gamma'_\epsilon) \geq 0 \quad \forall x_0 \in S_\epsilon$$

Entonces

$$(2.31) \quad \{x \in \overline{S(f, \epsilon)} : d(x, \partial S_\epsilon - \partial\Omega) \geq R_{\delta_3}\} \subset \bar{\Omega}_0$$

Demostración.

De nuevo bastará suponer $\tilde{f} = f^+ \geq 0$ y u_+ solución correspondiente de (2.25). Dado $x_0 \in S(f, \epsilon)$ definamos la función

$$\bar{u}(x) = h(|x - x_0|)$$

con h solución de (2.9). Escojamos $\tilde{\Omega} = \Omega \cap B_R(x_0)$ con R escogido de manera que se tenga

$$(2.32) \quad \tilde{\Omega} \subset S_\epsilon$$

$$(2.33) \quad \bar{u}(x) \geq \delta_3 \text{ sobre } \partial\tilde{\Omega} - \partial\Omega$$

Por otra parte, en $\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega$ se tiene que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x) n_i(x) = h'(|x - x_0|) \cdot \cos(n(x), x - x_0) \geq h'(|x - x_0|).$$

$$\theta(x_0, \Gamma') \geq 0.$$

En conclusión se tiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_+ + \alpha \cdot u_+ + \beta^+(u_+) \leq -\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^-(\bar{u}) & \text{en } \tilde{\Omega} \\ u_+ \leq \bar{u} & \text{en } \partial\tilde{\Omega} - \partial\Omega \\ -\frac{\partial u_+}{\partial n} \geq -\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} & \text{en } \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega \end{array} \right.$$

y entonces por los resultados standard de comparación se tiene que

$$0 \leq u_+(x) \leq \bar{u}(x) \quad \text{c.p.t. } x \in \tilde{\Omega}.$$

La demostración concluye como en el Teorema 1 y con la observación de que

(2.32) y (2.33) son satisfechas si

$$x_0 \in \{x \in \overline{S(f, \epsilon)}; d(x_0, \partial S_\epsilon - \partial\Omega) \geq R_{\delta_3}\}.$$

La hipótesis (2.30) es satisfecha en particular si se supone Ω convexo o p.e. las componentes de $S(f, \epsilon)$ cercanas a $\partial\Omega$ conjuntos convexos. De nuevo un sencillo ejemplo gráfico nos permitirá ilustrar el significado de la estimación (2.32).

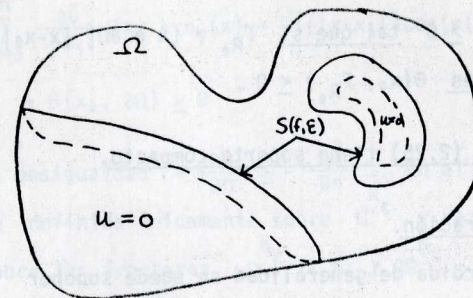


Figura 2.

El Teorema 4 extiende resultados similares de Nagai [1] y Yamada [1], establecidos en diversas situaciones concretas.

Supuesto Ω abierto no acotado de $\mathbb{R}^N$ el Teorema 4 permite concluir que si se supone $S(f, \epsilon)$ de complementario en Ω acotado y Ω p.e. convexo entonces la solución de u de (2.25) tiene soporte compacto. Esta misma conclusión ha sido obtenida en Díaz [5] sustituyendo la hipótesis de convexidad sobre Ω por otra expresando un crecimiento positivo de γ en 0 (véanse los detalles en el Teorema III de la anterior referencia). Sin embargo ya se señaló en Díaz [2] que la técnica allí utilizada permitía también substituir la hipótesis sobre γ por otra sobre la "geometría" de $\partial\Omega$. Dado que tal afirmación fue sólo presentada (y no mostrada) en [2] y en virtud también de que el tipo de supersoluciones involucrado es de un carácter diferente al hasta ahora utilizado aquí expondremos tal resultado a continuación.