

Teorema 5.

Supongamos (H_1) , (H_4) y (H_5) . Supongamos también que

(2.34) $\exists \epsilon > 0$ tal que $\Omega - S(f, \epsilon)$ es acotado. Impongamos por último la hipótesis

$$(H_6) \left\{ \begin{array}{l} \exists x_0 \in \mathbb{R}^N \text{ y } \exists R_0 \geq 0 \text{ tal que si } \Gamma_{R_0} = \{x \in \partial\Omega \mid |x-x_0| \geq R_0\} \\ \text{entonces } \theta(x_0, \Gamma_{R_0}) \leq 0. \end{array} \right.$$

Entonces la solución de (2.25) tiene soporte compacto.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $f \geq 0$. Supon-

gamos que

$$S(f, \epsilon) \subset \Omega^{\epsilon}, \quad \Omega^{\epsilon} = \{x \in \bar{\Omega} \mid |x-x_0| \geq R_{\epsilon}\}.$$

La conclusión se obtendrá construyendo una supersolución $\bar{u}(x) = G(|x-x_0|)$ verificando

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta^+(u) \leq -\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^-(\bar{u}) & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \geq -\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y tal que $\bar{u}(x) = 0$ en $\Omega^R = \{x \in \bar{\Omega} \mid |x| \geq R\}$ para algún R adecuado.

(Obviamente en dicho caso se tendría que $0 \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ y de aquí la conclusión). La función G es explicitada en el Teorema III de Díaz [5] atendiendo a la dimensión del espacio. Así por ejemplo si $N > 2$ entonces

$$G(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} c_1 r^2 + c_2 & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{\epsilon}{2-N} r^{2-N} \log r + c_3 r^{2-N} + c_4 & \text{si } R_{\epsilon} \leq r \leq R \\ 0 & \text{si } R \leq r. \end{cases}$$

donde las constante c_1, c_2, c_3, c_4 y R ($R \geq R_0$) son elegidas adecuadamente de manera que entre otras condiciones se tenga $G \in C^1([0, \infty))$. En cualquier caso G es siempre decreciente y entonces si se supone (por simplicidad) $R_0 = 0$, en $\partial\Omega$ se tiene que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x) \cdot n_i(x) = G'(|x-x_0|) \cos(n(x), x-x_0) \geq G'(|x-x_0|) \cdot \theta(x_0, \partial\Omega) \geq 0$$

y de aquí la desigualdad $-\frac{\partial u}{\partial n} \geq -\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$. En el caso de ser $R_0 > 0$ basta construir \bar{u} definida únicamente sobre Ω^{ϵ} y razonar de manera análoga al Teorema 4 sobre las fronteras $\Omega^{\epsilon} \cap \partial\Omega$ y $\partial\Omega^{\epsilon} - \partial\Omega$. El resto de los detalles (determinación de las constantes de G , caso de $N = 2$, etc.) transcurren de manera análoga al citado Teorema III de [5] y se dejan a la paciencia del lector. #

La hipótesis (H_6) es satisfecha en particular si el complementario de Ω es convexo (en cuyo caso $R_0 = 0$ y x_0 es cualquier punto de $\mathbb{R}^N - \Omega$). Rudamente hablando la hipótesis (H_6) incluye a aquellos abiertos cuya frontera (salvo quizás una parte acotada de ella) puede ser "iluminada" desde un punto exterior. Tal condición también aparece en el tratamiento de ciertos problemas de evolución (Díaz [3]).

Consideremos ahora el caso de condiciones de contorno generales y no necesariamente homogéneas:

$$(2.35) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \phi(x) \in \gamma(u(x)) - \theta(x) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Supuestas $f \in L^{\infty}(\Omega)$, $\phi, \theta \in W^{1, \infty}(\Omega)$ es bien conocida la existencia y unicidad de soluciones $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1, \infty}(\Omega)$ (Brezis [2], Yamada [1]). Tam

bién será útil recordar el criterio de comparación según el cual si se suponen

$$f \leq \tilde{f}, \quad \phi \leq \tilde{\phi} \quad \theta \leq \tilde{\theta} \quad \text{c.p.t. punto}$$

y
(2.36)
$$\tilde{\gamma}^-(r) \leq \gamma^+(r) \quad \forall r \in D(\tilde{\gamma}) \cap D(\gamma)$$

entonces $u \leq \tilde{u}$ c.p.t. punto de Ω (\tilde{u} solución de (2.35) correspondiente). Tal resultado se puede encontrar en Yamada [1] y también en Díaz [5] en éste último con una condición más general que (2.36).

Las estimaciones hasta la frontera para (2.35) son sensiblemente más delicadas que para (2.25) o siendo de utilidad el siguiente resultado técnico:

Lema 2. (Nagai [1])

Sea h solución de (2.11). Entonces para toda constante existe

$R_\xi = R_\xi(\alpha) > 0$ tal que

- (i) $h'(R_\xi) = \xi$ y $h'(t) \geq \xi$ para $t \geq R_\xi$.
- (ii) $R_\xi(\alpha) \leq \frac{N\xi}{\epsilon}$
- (iii) $R_\xi(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow +\infty$. #

Para la estimación en el interior para (2.35) necesitaremos una estimación L^∞ de la solución de (2.35) $_{\gamma_S}$ con

(2.37)
$$\gamma_S(r) = \emptyset \text{ si } r < 0, \quad \gamma_S(0) = (-\infty, 0], \quad \gamma_S(r) = 0 \text{ si } r > 0$$

Esto es recogido en el siguiente resultado:

Lema 3.

Sea $u_S \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ solución de (2.35) $_{\gamma_S}$ supuesto $\phi, \theta \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$ y $f \in L^\infty(\Omega)$. Sea $w \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ la solución única del problema

$$\begin{cases} -\Delta w + \alpha \cdot w = 0 & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial w}{\partial n} = \phi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces

(2.38)
$$\|u_S\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta_*$$

con

(2.39)
$$\delta_* = \|w\|_\infty + \max \left\{ \min \left\{ \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty, \beta^{-1} (\|f\|_\infty) \right\}, \|w-\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right\}.$$

Demostración.

La función $z = u-w$ satisface

$$\begin{cases} -\Delta z + \alpha \cdot z + \beta(z+w) \geq f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial z}{\partial n} \in \gamma_S(z+w-\theta) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y entonces los teoremas de comparación aplicados a z y a la función constante

$$\tilde{z}(x) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty, (\beta^{-1}) \|f\|_\infty \right\}, \|w-\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right\}$$

aseguran la desigualdad $z \leq \tilde{z}$ y de aquí (2.38). #

Establezcamos por fin la estimación en el interior para (2.35).

Teorema 6.

Supongamos $(H_1), (H_2), (H_4)$ y (H_5) . Sea $\Gamma'_\epsilon = \partial\Omega \cap \partial S(f, \epsilon)$

y supongamos también que

(2.40)
$$\theta(x_0, \Gamma'_\epsilon) > 0 \quad \forall x_0 \in S(f, \epsilon)$$

Entonces

$$(2.41) \quad \{x \in \overline{S(f, \epsilon)} : d(x, \partial \overline{S(f, \epsilon)}) \geq \max \{R_{\delta_4}, \frac{R_{\xi_1}}{\theta(x_0, \Gamma'_\epsilon)}\}\} \subset \Omega_0$$

siendo

$$(2.42) \quad \xi_1 = \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

Demostración.

Bastará considerar el caso de datos no negativos y por tanto

$u \geq 0$. Observemos que si γ satisface (H_4) entonces

$$\gamma_S^-(r) \leq \gamma^+(r) \quad \forall r \in D(\gamma_S) \cap D(\gamma) \quad y \quad r \geq 0.$$

En virtud del resultado de comparación comentado anteriormente se tendría que $0 \leq u(x) \leq u_S(x)$ c.p.t. $x \in \Omega$ (u_S solución de (2.35) $_{\gamma_S}$) y por tanto la conclusión deseada se tendrá automáticamente mostrando la estimación (2.39) para el Ω_0 asociado a (2.35) $_{\gamma_S}$. Para obtener ésto último definamos como en ocasiones anteriores la función

$$\bar{u}(x) = h(|x-x_0|)$$

con h solución de (2.11). Sea $\tilde{\Omega} = B_R(x_0)$ con R escogido de manera que

$$(2.43) \quad \tilde{\Omega} \subset S(f, \epsilon)$$

$$(2.44) \quad h(R) \geq \delta_4 \quad \text{si } B_R(x_0) \subset \subset \Omega \quad y$$

$$(2.45) \quad h'(\theta(x_0, \Gamma'_\epsilon)R) \geq \xi_1 \quad \text{si } \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega} \neq \emptyset.$$

Observemos que en Γ'_ϵ se tendría entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x) n_i(x) = h'(|x-x_0|) \cos(n(x), x-x_0) \geq h'(|x-x_0|) \theta(x_0, \Gamma'_\epsilon) \geq \\ &\geq h'(\theta(x_0, \Gamma'_\epsilon) \cdot |x-x_0|) \geq \|\phi\|_\infty \geq \phi(x). \end{aligned}$$

En resumen se tendría

$$\begin{cases} -\Delta u_S + \alpha \cdot u_S + \beta^+(u_S) \leq -\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} + \beta^-(\bar{u}) & \text{en } \tilde{\Omega} \\ u_S \leq \bar{u}, & \text{en } \partial\Omega - \partial\tilde{\Omega} \\ \theta \leq \bar{u}, \quad \phi \leq \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} & \text{en } \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega \end{cases}$$

y entonces por los teoremas de comparación $0 \leq u_S(x) \leq \bar{u}(x)$ c.p.t. $x \in \tilde{\Omega}$. La elección de R satisfaciendo (2.43), (2.44) y (2.45) determina finalmente la estimación (2.41).#

El Teorema 6 admite diversas variantes que comentaremos a continuación. En primer lugar, si se supone $S(f, \epsilon) = \Omega$ entonces la estimación (2.41) puede ser expresada en términos más cómodos substituyendo δ_4 por

$$\delta_5 = \|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

ya que ahora se podría tomar $\tilde{\Omega} = \Omega$ en la anterior demostración y por tanto no aparecerían fronteras artificiales. Tal situación junto con β dado por (2.2) y $\gamma = \gamma_S$ y/o $\gamma \equiv 0$ coincide con los Teoremas 4.2 y 4.3 de Nagai [1].

Otra importante variante del Teorema 6 corresponde al hecho de mayorar a la solución u (o de hecho u_S) de una manera diferente sobre cada una de las fronteras de $\partial S(f, \epsilon)$. Mediante tal procedimiento se obtendría sin dificultad la siguiente (sofisticada pero también muy fina) estimación hasta la frontera:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_0 \supset \{x \in \overline{S(f, \epsilon)} : d(x, \partial S(f, \epsilon) - \partial\Omega) \geq R_{\delta_4}, \quad & \text{(región ①)} \\ d(x, \partial S(f, \epsilon) \cap (\partial\Omega - (\text{sop}\theta \cup \text{sop}\phi))) \geq 0, & \text{②} \\ d(x, \partial S(f, \epsilon) \cap (\text{sop}\phi - \text{sop}\theta)) \geq \frac{R_{\xi_1}}{\theta(x, \Gamma'_\epsilon)} & \text{③} \\ d(x, \partial S(f, \epsilon) \cap (\text{sop}\theta - \text{sop}\phi)) \geq R_{\delta_5} & \text{④} \\ d(x, S(f, \epsilon) \cap (\text{sop}\theta - \text{sop}\phi)) \geq \max \{R_{\delta_5}, \frac{R_{\xi_1}}{\theta(x, \Gamma'_\epsilon)}\} & \text{⑤} \end{aligned}$$

He aquí una ilustración gráfica de la situación

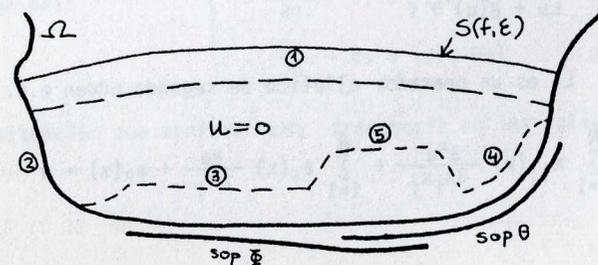


Figura 3.

Finalmente señalemos que la hipótesis (2.40) (que hace referencia a una cierta convexidad sobre $S(f, \epsilon)$) puede ser substituida por una del tipo

$$(2.46) \quad \exists m > 0, \quad |\gamma^0(r)| \geq m|r| \quad \text{si} \quad |r| < \epsilon$$

o bien

$$(2.47) \quad \mathbb{R}^N - S(f, \epsilon) \quad \text{convexo}$$

cuando lo que se estudia es concretamente la compacidad del soporte de la solución de (2.35). En efecto, en tales casos bastaría adaptar la técnica de supersoluciones globales de manera semejante p.e. al Teorema 5.

2.3. Otras ecuaciones multivocas.

Los resultados expuestos en las secciones anteriores son representativos del tipo de conclusiones que son mostradas mediante la técnica de super y subsoluciones locales. El aplicar entonces esta técnica a otros problemas diferentes se reduce a encontrar la función $\bar{u}(x) = h(|x-x_0|)$ (ó más exactamente a encontrar h) de manera que \bar{u} sea una supersolución de la ecuación.

Así G. Díaz [1] ha mostrado que la función

$$(2.48) \quad \bar{u}(x) = \frac{\epsilon}{6K} |x-x_0|^2 \quad (\text{e.d. } h(t) = \frac{\epsilon}{6K} t^2)$$

es una supersolución local sobre $S(f, \epsilon)$ de la ecuación

$$(2.49) \quad Lu + \beta(u) \ni f$$

donde β satisface (H_1) y L es un operador elíptico de segundo orden e.d.

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) \cdot u$$

con $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_i, a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ tales que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \quad \text{para algún } \nu > 0$$

(la constante K de (2.48) viene dada por $K = \sum_{i,j=1}^N \|a_{ij}\|_{L^\infty}$). De esta manera es posible obtener sin gran dificultad resultados similares a los Teoremas 1, ..., 7, para (2.49) junto con las correspondientes condiciones de contorno.

También para la ecuación no lineal

$$(2.50) \quad -\Delta_p u + \beta(u) \ni f$$

con

$$(2.51) \quad -\Delta_p u = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

y β satisfaciendo (H_1) y $R(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$, es posible hallar una super solución local de la ecuación sobre $S(f, \epsilon)$. En concreto en el Teorema 2 de Díaz-Herrero [2] es mostrado que $\forall p, 1 < p < \infty$ la función

$$(2.52) \quad \bar{u}(x) = c|x-x_0|^{\frac{p}{p-1}} \quad (\text{e.d. } h(t) = ct^{\frac{p}{p-1}}) \quad \text{con } c = \frac{p-1}{p} \left(\frac{\epsilon}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

satisface las condiciones requeridas.

Es de señalar que dado el carácter local del estudio llevado a cabo, este sería fácilmente adaptable al caso de condiciones mezcladas e.d. a problemas de la forma

$$(2.53) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} + \phi_1 \in \gamma_1(u - \theta_1) & \text{en } \partial_1 \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} + \phi_2 \in \gamma_2(u - \theta_2) & \text{en } \partial_2 \Omega = \partial \Omega - \partial_1 \Omega \end{cases}$$

situación que aparece con frecuencia en las aplicaciones.

53. Ecuaciones estacionarias no necesariamente multivocas.

La técnica de supersoluciones locales desarrollada en la sección anterior también puede ser aplicada a diversos problemas de la Mecánica, Física e Ingeniería que se formulan mediante ecuaciones en derivadas parciales no lineales pero no necesariamente multivocas.

A modo de ilustración consideremos el problema:

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde β es ahora supuesto grafo maximal monótono de \mathbb{R}^2 con $0 \in \beta(0)$ y $R(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$. De nuevo nuestro objetivo es dar alguna estimación sobre la localización del conjunto $\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}$.

La primera respuesta en este sentido fue dada por Benilan-Brezis-Crandall [1] para el caso de $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $f \in L^1_0(\mathbb{R}^N)$. (e.d. $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y con soporte compacto.) En concreto su resultado afirmaba que dada $f \in L^1_0(\mathbb{R}^N)$ la condición necesaria y suficiente para que la solución u de (3.1) (existente en un cierto sentido débil en $L^1(\mathbb{R}^N)$) tenga soporte compacto es que

$$(3.2) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{j(s)}} < +\infty$$

supuesta j primitiva del grafo β , e.d. $\beta j = \beta$. Tras este trascendental trabajo han sido varios los autores que han extendido el anterior resultado en diversas direcciones:

- * caso de $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ (Díaz [5], Veron [1], Vázquez [1], [2])
- * caso de $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ y de c. de contorno como en (2.25) (Díaz [5], Veron [1]).
- * caso de un operador no lineal en lugar de Δ (Díaz-Herrero [1], y Díaz-Veron [1]).
- * caso de β concreto e hipótesis diferentes (Benilan-Brezis [1])

Un denominador común de los citados trabajos es el uso de supersoluciones globales para concluir la compacidad del soporte de la solución lo que limitaba el interés de este tipo de resultados al caso de dominios Ω no acotados. Sin embargo en Díaz-Herrero [2] se muestra como la estimación del soporte de la solución juega un importante papel en el caso de ciertas ecuaciones no lineales unidimensionales, apareciendo en la teoría de fluidos no newtonianos y planteadas en dominios acotados.

Al igual que en la sección anterior, un elemento fundamental en la técnica es la construcción de una función $\bar{u}(x) = h(|x-x_0|)$ supersolución local de la ecuación. La obtención de una función h es posible cuando es supuesta la hipótesis (3.2). Para mostrar ésto consideremos la función

$$(3.3) \quad \psi_\beta(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{(2j(s))^{1/2}} \quad \text{para } \tau \in \mathbb{R}$$

y definamos entonces $h = \psi_\beta^{-1}$. Es obvio que h es no decreciente y $h(0) = 0$. Además

$$h'(r) = \sqrt{2j(h(r))}$$

y

$$h''(r) \in \beta(h(r))$$

c.p.t. $r \in R(\psi_\beta)$. Obsérvese también que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $R(\psi_\beta) = \mathbb{R}$ pues en otro caso bastaría truncar β obteniendo entonces otro $\tilde{\beta}$ con $R(\psi_{\tilde{\beta}}) = \mathbb{R}$ y teniéndose además que $\tilde{\Omega}_0 \subset \Omega_0$ si $\tilde{\Omega}_0$ denota al conjunto de coincidencia de \tilde{u} solución de (3.1) para $\tilde{\beta}$. (Véanse los detalles en el Lema 6.5 de Benilan-Brezis-Crandall [1]).

Si denotamos ahora por

$$S(f,0) = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$$

entonces un simple ejercicio muestra que $\bar{u}(x)$ satisface

$$(3.4) \quad -\Delta \bar{u}(x) + \beta^-(\bar{u}(x)) \geq f = 0 \quad \text{c.p.t. p. de } S(f,0)$$

y por tanto \bar{u} es una supersolución local para la ecuación y de hecho una supersolución del problema (3.1) (u otros problemas de contorno) si \bar{u} satisface adecuadas condiciones de contorno sobre su dominio de definición.

En función de los anteriores consideraciones y repitiendo paso por paso los razonamientos de la sección anterior es posible "traducir" cada uno de los resultados de dicha sección a la formulación presente con el siguiente "diccionario".

Hipótesis (H ₁)	β satisface (3.2)
$S(f, \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$	$S(f, 0)$
$R_\delta(\alpha)$ del lema 1	$\psi_\beta(\delta)$
(3.5) $\delta_{1\pm}$ del Teorema 1	$(\beta^{-1})^+(\max\{\ f^+\ _\infty, \beta^-(\ g^+\ _\infty)\},$ $(\beta^{-1})^+(\max\{\ f^-\ _\infty, \beta^+(\ g^-\ _\infty)\}).$
δ_s del Teorema 4	$\max\{(\beta^{-1})^+(\ f^+\ _\infty), -(\beta^{-1})^-(\ f^-\ _\infty)\}$
R_ξ del Lema 2	$\psi_\beta(i^{-1}(\xi^2))$
δ_4 del Lema 3	$\ w\ _\infty + (\beta^{-1})^+(\max(\ f\ _\infty, \beta^-(\ w-\theta\ _{L^\infty(\partial\Omega)})))$

A modo de ilustración explicitaremos la versión análoga del Teorema 1.

Teorema 7

Sea β grafo maximal monótono de \mathbb{R}^2 con $0 \in \beta(0)$, $R(\beta) = D(\beta) = R$ y satisfaciendo (3.2). Sea $f \in L^\infty(\Omega)$ y $g \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$.

$$(3.6) \quad \{x \in S(f,0): d(x, \partial S(f,0)) \geq \psi_\beta(\delta)\} \subset \Omega_0$$

con $\delta = \max\{\delta_+, \delta_-\}$ y δ_\pm dados a partir de la traducción (3.5).

Al igual que en el caso multívoco, la estimación (3.6) expresa la anulación de la solución en una cierta región interior de Ω independientemente de la anulación o no del dato g en la frontera. Este comportamiento había sido puesto anteriormente de manifiesto por L. Veron [1] en el caso particular de $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N: x_N \geq 0\}$. En concreto su resultado (de una naturaleza abstracta) se obtiene al interpretar (3.1) en dicho caso como un problema de evolución de segundo orden

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\tilde{x}} u + \alpha \cdot u + \beta(u) \ni 0 & t > 0, \tilde{x} \in \mathbb{R}^{N-1} \\ u(0, \tilde{x}) = g(\tilde{x}) \\ u(+\infty, \cdot) < +\infty \end{cases}$$

siendo $t = x_N$ y $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{N-1})$. En concreto la estimación (3.6) expresa entonces la existencia de un tiempo finito de extinción (e.d. $u(t, \cdot) = 0 \forall t \geq T_0$, para algún $T_0 < +\infty$) enlazándose así con tal propiedad típicamente no lineal (⁵).

Es también importante de observar que si se supone la hipótesis adicional

$$(3.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{j(s)}} \equiv I < +\infty$$

entonces se pueden lograr estimaciones absolutas (e.d. válidas para cualesquiera datos f, g, ϕ ó θ) (véase a este respecto una respuesta de esta índole obtenida para supersoluciones globales en Vázquez [2] y también en Veron [1]).

(⁵) Para un tratamiento exhaustivo de la propiedad de tiempo finito de extinción pueden consultarse, Díaz [4], [6], [8], G. Díaz - Díaz [1] y la bibliografía de estos trabajos.

También para las ecuaciones doblemente no lineales como por ejemplo

$$-\Delta_p u + \beta(u) \ni f \quad \text{en } \Omega$$

($-\Delta_p$ dado en (2.51)) es posible construir supersoluciones locales $\bar{u}(x) = h(|x-x_0|)$ cuando se supone

$$(3.9) \quad 1 < p < \infty \text{ y } \int_{-1}^1 \frac{ds}{(j(s))^{1/p}} < +\infty \quad (\partial j = \beta).$$

En efecto en dicho caso basta definir

$$\psi_p(\tau) = \int_0^\tau \frac{c ds}{(j(s))^{1/p}} \quad \text{con } c = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \cdot \frac{1}{N}$$

y entonces $h = \psi_p^{-1}$ (El resto de los detalles resultan de una fácil modificación de los cálculos contenidos en el Teorema 1 de Díaz-Herrero [2]).

En algunos casos puede ser de interés el construir otro tipo de funciones locales de comparación. Este es el caso p.e. de la ecuación.

$$(3.10) \quad -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(u) \ni f \quad \text{en } \Omega \quad \text{con } 1 < p_i < +\infty$$

$i=1, \dots, n$

y donde se supone β grafo maximal monótono de \mathbb{R}^2 con $0 \in \beta(0)$ y satisfaciendo

$$\int_{-1}^1 \frac{ds}{(j(s))^{1/p_i}} < +\infty \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Entonces definiendo

$$\psi_{p_i}(\tau) = \int_0^\tau \frac{c ds}{(j(s))^{1/p_i}} \quad \text{con } c = \left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)^{1/p_i} \cdot \frac{1}{N}$$

y

$$h_i(t) = \psi_{p_i}^{-1}(t), \quad i = 1, \dots, N$$

un simple cálculo muestra que la función

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^N h_i(|x_i - x_{0,i}|) \quad \text{si } x = (x_1, \dots, x_N) \text{ y } x_0 =$$

$$= (x_{0,1}, \dots, x_{0,1}, \dots, x_{0,N})$$

es una supersolución local de la ecuación (3.10) obteniéndose así una inmediata extensión del Teorema 1 de Díaz-Herrero [2] (La existencia de soluciones para (3.10) había sido establecida anteriormente por Attouch-Damlamian [1] y también por Benilan [1] bajo adecuadas hipótesis sobre β). Obsérvese que incluso es posible obtener estimaciones "unidireccionales" cuando sólo es conocido que

$$\exists i, \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{tal que } \int_{-1}^1 \frac{ds}{(j(s))^{1/p_i}} < \infty$$

cuando se toma $\bar{u}(x) = h_i(|x_i - x_{0,i}|)$. Tal tipo de estimaciones han sido también obtenidas para ecuaciones no lineales de primer orden en Díaz-Veron [1].

§ 4. Aplicación a flujos subsónicos.

En esta sección se pretende mostrar como la técnica de su persoluciones locales, puede ser aplicada al estudio del flujo de un fluido subsónico a través de un perfil simétrico en el plano. Tales consideraciones tienen su punto de partida en los trabajos de Brezis-Stampacchia [1], [2], Brezis-Duvaut [1] y Shimborsky [1] en los que diversos problemas de flujo subsónico son formulados de manera equivalente en forma de adecuadas Inecuaciones Variacionales para las que la frontera del soporte de la solución tiene una transcendental importancia.

El problema del flujo a través de un perfil dado y con una velocidad determinada en el infinito es un problema ya clásico estudiado por numerosos autores bajo muy diversos enfoques. (Véase p.e. los tratados de Bers [1] y Ferrari-Tricomi [1] y sus extensas bibliografías). Sin embargo uno de los métodos clásicos y de mayor interés (el de la "hodografía") conduce a un nuevo problema con ecuaciones más sencillas que las originales pero introduciendo una "frontera libre" con lo que dicha nueva formulación no nu do ser rigurosamente abordada hasta la sistematización de la teoría de Inecuaciones Variacionales. Dada la importancia del modelo físico parece inte resante recordar muy brevemente como se reformulaba tal problema en térmi-- nos de Inecuaciones Variacionales (que es donde se centra nuestra óptica), con el fin de poder interpretar nuestros resultados matemáticos en términos del problema físico, aunque esto no sea más que un intento de poner en evi- dencia la aplicabilidad e interés del tipo de problemas considerados en sec ciones anteriores. Es importante matizar que nuestra aportación original se limita al modelo matemático finalmente obtenido mediante técnicas bien conocidas (para cuya exposición nos basaremos en parte, en la debida a Brezis

[5]).

Sea pues P un perfil dado en el plano, convexo y simétrico con respecto al eje x. Consideraremos flujos simétricos alrededor de P que son uniformes en el infinito y con velocidad determinada q_∞ paralela al eje x.

Sea $\vec{q} = (q_1, q_2)$ la velocidad y $q = |\vec{q}| = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$. Las ecuaciones básicas para determinar el flujo son

$$(4.1) \quad \text{div}(\rho \vec{q}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho q_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho q_2) = 0 \quad (\text{ecuación de continuidad})$$

$$(4.2) \quad \text{rot } \vec{q} = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0 \quad (\text{ecuación del potencial}),$$

donde ρ es la densidad. Usando el teorema de Bernoulli se obtiene

$$(4.3) \quad \rho = h(q)$$

donde h es una función conocida no creciente dependiendo de las propiedades físicas del fluido (p.e. para algunos gases $h(q) = (1 - cq^2)^{1/\gamma - 1}$). Se define entonces la función de corriente ψ mediante

$$(4.4) \quad \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho q_2, \quad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho q_1.$$

Entonces dado que $qh(q) = [\psi_x^2 + \psi_y^2]^{1/2}$, se puede considerar q como función de ψ_x y ψ_y . Usando (4.2) se obtiene

$$(4.5) \quad \left(1 - \frac{q_1^2}{a^2(q)}\right) \psi_{xx} + \left(1 - \frac{q_2^2}{a^2(q)}\right) \psi_{yy} - \frac{2q_1 q_2}{a^2(q)} \psi_{xy} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 - P$$

siendo

$$a^2(q) = -q \frac{h'(q)}{h(q)}$$

(a(q) es la velocidad local del sonido). La ecuación (4.5) admite una impor

tante simplificación cuando se supone ρ constante (fluidos incompresibles) pues en dicho caso (4.5) se reduce a

$$(4.6) \quad \Delta\psi = 0.$$

En todo caso se supone la condición de contorno

$$(4.7) \quad \psi = 0 \quad \text{en} \quad \partial P.$$

La ecuación (4.5) es cuasilínea de tipo mixto, siendo elíptica si $q < a(q)$ es hiperbólica si $q > a(q)$. Si q_c es la solución de $q_c = a(q_c)$ (q_c es la velocidad del sonido) entonces (4.5) es elíptica en el rango subsónico ($q < q_c$) e hiperbólica en el rango supersónico ($q > q_c$).

Utilizando estimaciones a priori y el teorema de punto fijo de Schauder diversos matemáticos han mostrado la existencia de soluciones para (4.5), (4.7) en el caso elíptico (Schiffman, Bers, Finn, Gilberg, Bers [1]). En todo caso sus técnicas no eran constructivas.

Es bien conocido que si consideramos ψ como función de \vec{q} en lugar de (x,y) la ecuación (4.5) se vuelve lineal en las nuevas variables. En concreto en coordenadas polares ($q_1 = q \cos \theta$, $q_2 = q \sin \theta$) se obtiene la ecuación de Chaplygin

$$(4.8) \quad q \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{qh(q)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{h(q)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} \right)$$

y que en caso incomprensible se reduce a

$$(4.9) \quad q^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + q \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

La ecuación (4.8) degenera en $q = 0$ y entonces es conveniente introducir la nueva variable σ en vez de q mediante

$$(4.10) \quad \sigma = \int_q^{q_c} \frac{h(\tau)}{\tau} d\tau$$

con lo que (4.8) toma la forma

$$(4.11) \quad K(\sigma) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = 0$$

siendo

$$K(\sigma) = \frac{1}{h^2(q(\sigma))} \left(1 - \frac{q^2(\sigma)}{a^2(q(\sigma))} \right)$$

y $q(\sigma)$ la función inversa dada a partir de (4.10). Entonces $K(\sigma) > 0$ en el rango subsónico y $K(\sigma) < 0$ en el supersónico.

La ecuación (4.11) pese a ser lineal presenta una importante dificultad en su resolución y es el que ha de ser resuelta en un dominio que es desconocido a priori (la imagen del perfil P bajo la transformación hodografa no es conocida ya que sobre ∂P sólo se conoce que $\psi = 0$ pero no la distribución de velocidades).

Debido a la simetría se tiene que $\psi = 0$ sobre el eje x y por tanto basta estudiar el problema en el semiplano superior donde es $\psi > 0$. Supuesto el flujo totalmente subsónico el perfil P es transformado en una curva Γ contenida en la región $[\sigma > 0]$. Γ es pues una frontera libre cuya ecuación suponemos $\sigma = l(\theta)$.

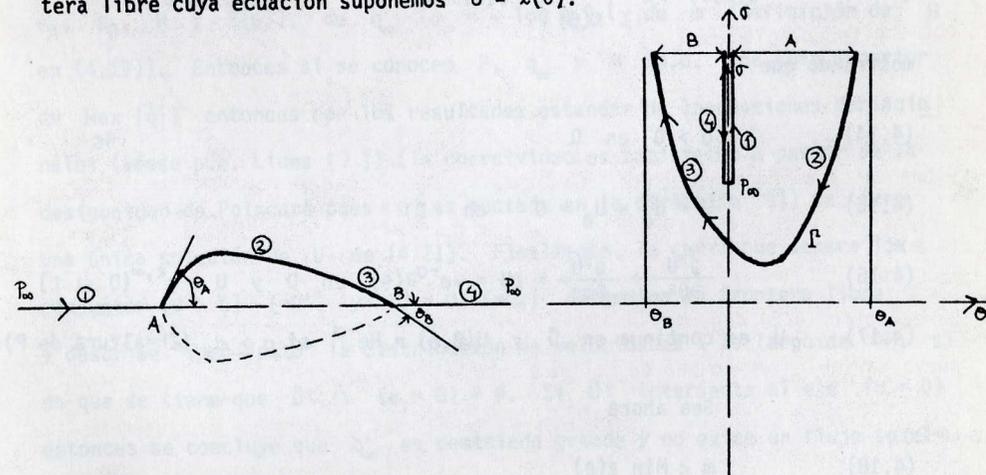


Figura 4.
Plano físico

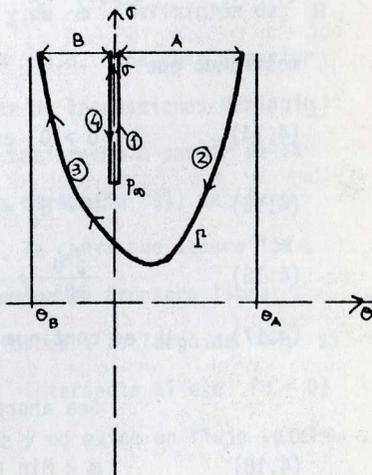


Figura 5.
Plano hodográfico.

Pese a ser Γ una frontera libre se sabe que sobre ella $\psi = 0$ y además es posible expresar $\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$ y $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ en función de $\ell'(\theta)$ y el radio de curvatura $R(\theta)$ de P en el punto $p \in P$ donde P forma un ángulo θ con el eje x . (Se tomará $R(\theta) \leq 0$ dado que P es convexo).

Nos restringiremos ahora al caso de fluidos incompresibles para los que los cálculos son menos molestos que los correspondientes al caso compresible.

Definamos el conjunto D mediante

$$(4.12) \quad D = \{(\theta, \sigma) : \sigma > \ell(\theta), \theta_B < \theta < \theta_A, \theta \neq 0\} \cup \{(0, \sigma) : \ell(0) < \sigma < \sigma_\infty\}$$

con $\sigma_\infty = \int_{q_c}^{q_c} \frac{h(s)}{s} ds$ en general y $\sigma_\infty = -\log q_\infty$ en el caso de fluidos incompresibles.

Inspirados en un método desarrollado por Baiocchi para la resolución de ciertos problemas de frontera libre que aparecen en hidrodinámica, Brezis-Stampacchia [2] introdujeron la nueva incógnita

$$(4.13) \quad U(\theta, \sigma) = e^{-\sigma} \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} e^s \psi(\theta, s) ds, \quad (\theta, \sigma) \in D.$$

mostrando que

$$(4.14) \quad U > 0 \text{ en } D$$

$$(4.15) \quad U = U_\sigma = U_\theta = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$(4.16) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} = \Delta U = -e^{-\sigma} R(\theta) \text{ en } D \text{ y } U \in C^{2, \infty}(D \cup \Gamma)$$

$$(4.17) \quad U \text{ es continua en } \bar{D} \text{ y } U(0, \sigma) = He^{-\sigma} \text{ si } \sigma \geq \sigma_\infty \text{ (2H=altura de P).}$$

Sea ahora

$$(4.18) \quad m < \min_{\theta_B < \theta < \theta_A} \ell(\theta)$$

y definamos

$$(4.19) \quad \Omega = (\theta_B, \theta_A) \times (m, +\infty).$$

Extendamos U a Ω escogiendo $U(\theta, \sigma) = 0$ en $\Omega - \bar{D}$. El resultado fundamental que enlaza con la teoría de Inecuaciones Variacionales es recogido en el siguiente resultado

Teorema 8 (Brezis-Stampacchia [2]).

Sea

$$(4.20) \quad \mathcal{K} = \{V(\theta, \alpha) \in H_0^1(\Omega); V \geq 0 \text{ en } \Omega \text{ y } V(0, \sigma) = He^{-\sigma} \text{ para } \sigma \geq \sigma_\infty\}$$

Entonces U definida por (4.13) pertenece a \mathcal{K} y además $\forall V \in \mathcal{K}$ se tiene que

$$(4.21) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} (V-U) + \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \sigma} (V-U) \right) d\theta d\sigma \geq \int_{\Omega} R(\theta) e^{-\sigma} (V-U) d\theta d\sigma.$$

Como CONCLUSION de lo visto hasta el momento, consideremos la Inecuación Variacional (4.21), que está bien formulada ya que Ω , σ_∞ , H y $R(\theta)$ son conocidos (y dependen sólo de propiedades de P (a través de θ_A , θ_B , H y $R(\theta)$), de q_∞ ($\sigma_\infty = -\log q_\infty$) y de m (definición de Ω en (4.19)). Entonces si se conocen P , q_∞ y m (e.d. una cota superior de $\max_{\partial P} |\vec{q}|$) entonces por los resultados estándar de Inecuaciones Variacionales (véase p.e. Lions [1]) (la coercividad es satisfecha a partir de la desigualdad de Poincaré pues Ω es acotado en la dirección θ) se tiene una única solución de U de (4.21). Finalmente, la curva que separa los conjuntos $\{U > 0\} (=D')$ y $\{U = 0\} (= \Omega_0)$ determina la frontera libre Γ y describe "ipso facto" la distribución de velocidades a lo largo de ∂P , si es que se tiene que $D' \cap \{\sigma = 0\} = \emptyset$. Si D' intersecta al eje $\{\sigma = 0\}$ entonces se concluye que q_∞ es demasiado grande y no existe un flujo totalmente subsónico atravesando P .

La estimación del conjunto Ω_0 tiene pues una gran trascendencia tal y como se acaba de señalar. El siguiente resultado da una primera respuesta a esta problemática:

Teorema 9 (Brezis-Stampacchia [2]).

Supongamos

$$(4.22) \quad \min_{\substack{\theta < \theta < \theta \\ B^- \quad A}} |R(\theta)| = r > 0$$

Entonces

$$(4.23) \quad \min_{\substack{\theta < \theta < \theta \\ B^- \quad A}} \ell(\theta) \geq \sigma_\infty + \sigma_0(r)$$

y por tanto

$$(4.24) \quad \max_{\partial p} |\vec{q}| \leq q_\infty e^{-\sigma_0(r)}$$

donde $\sigma_0 < 0$ es la única solución de $(1 + \sigma_0(r)) e^{-\sigma_0(r)} = 1 - \frac{H}{r}$. #

La demostración de la conclusión (4.23) es mostrada mediante la comparación de la solución U (no negativa) con la función

$$(4.25) \quad \bar{U}(\sigma, \theta) = \bar{U}_r(\sigma) = \begin{cases} re^{-\sigma} + re^{-\sigma_\infty - \sigma_0(r)} (\sigma - \sigma_\infty) + He^{-\sigma_\infty - re^{-\sigma_\infty}} & \text{si } \sigma \geq \sigma_\infty + \sigma_0(r) \\ 0 & \text{si } \sigma < \sigma_\infty + \sigma_0(r) \end{cases}$$

que así construida es una supersolución para (4.21).

En el resto de esta sección pretendemos mostrar como la técnica de supersoluciones locales puede ser adecuadamente aplicada en la obtención de estimaciones similares a (4.23). Como en secciones anteriores, tales estimaciones son expresadas por medio de distancias a fronteras (ya sean estas naturales e.d. de $\partial\Omega$, o artificiales) lo que contrasta con la estimación (4.23) que da una estimación sobre el mínimo de $\ell(\theta)$ uniforme en θ .

Antes de entrar en materia necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 4 (Brezis-Stampacchia [2]).

Sea $w(\theta)$ la función definida por

$$(4.26) \quad w(\theta) = \begin{cases} (x_A - X(\theta)) \cdot \text{sen } \theta + Y(\theta) \cos \theta & \text{si } \theta > 0 \\ (x_B - X(\theta)) \cdot \text{sen } \theta + Y(\theta) \cos \theta & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

donde x_A, x_B son las x -coordenadas de A y B y $(X(\theta), Y(\theta))$ son las coordenadas del punto Q de ∂P_+ en el que la tangente a ∂_+ en Q forma un ángulo con el eje de las x . Dado $T > m$ (m dado en 4.18), sea $\Omega_T = (\theta_B, \theta_A) \times (m, T)$.

Bajo estas condiciones, si $U_T \in H^1(\Omega_T)$ satisface

$$(4.27) \quad \begin{cases} -\frac{\partial^2 U_T}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 U_T}{\partial \sigma^2} + \beta(U_T) R(\theta) e^{-\sigma} & \text{en } \Omega_T \\ U_T(0, \sigma) = He^{-\sigma} & \text{si } \sigma_\infty < \sigma < T \\ U_T(\theta, \sigma) = 0 & \text{si } (\theta, \sigma) \in \{\theta_A\} \times (m, T) \cup \{\theta_B\} \times (m, T) \cup \{\theta_B, \theta_A\} \times \{m\} \\ U_T(\theta, T) = w(\theta) e^{-T} & \text{si } \theta_B < \theta < \theta_A \end{cases}$$

(con β dado por (2.2)), entonces $0 < U(0, \sigma) < U_T(\theta, \sigma)$ c.p.t. $(\theta, \sigma) \in \Omega_T$. #

La función $w(\theta)$ tiene una clara interpretación geométrica pues representa la distancia entre A (si $\theta > 0$) o B (si $\theta < 0$) y la recta tangente a ∂P_+ en el punto $(X(\theta), Y(\theta))$. Además se tiene que para $\theta > 0$ y $\theta < 0$

$$(4.28) \quad \begin{cases} w''(\theta) + w(\theta) = -R(\theta) \\ w(\theta_A) = w'(\theta_A) = 0 \\ w(\theta_B) = w'(\theta_B) = 0 \end{cases}$$

A continuación ilustraremos la aplicabilidad de la técnica de supersoluciones locales por medio de un caso particular sirviendo de modelo. A este fin supongamos que la función $R(\theta)$ viene dada mediante

$$(4.29) \quad R(\theta) = \begin{cases} \delta \theta - H & \text{si } \theta \in [-b, \pi, 0] \\ \frac{\theta}{\delta} - H & \text{si } \theta \in [0, a\pi] \end{cases}$$

donde H, δ, a y b son parámetros positivos tales que $\delta b\pi - H < 0$. (6)

(6) En la práctica existen unos cuantos "tipos" de perfiles de un especial interés y cuyas características son completamente explícitas (véase p.e. los modelos expuestos en Abbott-Von Doenhoff [1]).

Un simple cálculo muestra que la función w viene dada en este caso mediante

$$w(\theta) = \begin{cases} -(H + \delta b\pi) \cos(\theta + b\pi) + \delta \sin(\theta + b\pi) + H - \delta\theta & \text{si } -b\pi \leq \theta < 0 \\ -(H - \frac{a\pi}{\delta}) \cos(a\pi - \theta) - \frac{1}{\delta} \sin(a\pi - \theta) + H - \frac{\theta}{\delta} & \text{si } 0 < \theta \leq a\pi \end{cases}$$

Obviamente la función (4.29) satisface que $\text{Min}_{-\pi b \leq \theta \leq \pi a} |R(\theta)| = \delta\pi b - H < 0$ y entonces el teorema 9 puede ser aplicado. Observemos también que si definimos

θ_i $i = 1, 2, 3, 4, 5$ mediante

$$\theta_1 = -b\pi, \theta_2 = -\frac{b\pi}{2}, \theta_3 = 0, \theta_4 = \frac{a\pi}{2}, \theta_5 = a\pi$$

entonces se tiene que $\text{Min}_{|\theta_i, \theta_{i+1}|} |R(\theta)| = r_i$ siendo

$$r_1 = \delta\pi b - H, r_2 = \frac{\delta\pi b}{2} - H, r_3 = H, r_4 = \frac{\pi a}{2\delta} - H.$$

Definamos ahora $\Omega_i = (\theta_i, \theta_{i+1}) \times (m, \sigma_\infty)$ y sus fronteras

$$\partial_1 \Omega_i = \{\theta_i\} \times |m, \sigma_\infty|, \partial_2 \Omega_i = \{\theta_{i+1}\} \times |m, \sigma_\infty|, \partial_3 \Omega_i = |\theta_i, \theta_{i+1}| \times \{m\}, \partial_4 \Omega_i = |\theta_i, \theta_{i+1}| \times \{\sigma_\infty\}$$

Teorema 10 - Supuesta $R(\theta)$ dada por (4.29) entonces la solución (θ, σ) se anula sobre el conjunto Σ_i ,

$$\Sigma_i = \{(\theta_0, \sigma_0) \in \Omega_i : d((\theta_0, \sigma_0), (\theta_i, \sigma_\infty)) \geq 2\sqrt{\frac{w(\theta)}{r_i}} \forall \theta \in |\theta_i, \theta_{i+1}|, \sigma_\infty\} \\ \max(d((\theta_0, \sigma_0), (\theta_i, \sigma)), d((\theta_0, \sigma_0), (\theta_{i+1}, \sigma))) \geq 2\sqrt{\frac{r_i(\sigma)}{r_i}} e^{\frac{\sigma}{2}} \forall \sigma \in |m, \sigma_\infty|$$

si $i = 2, 3,$

$$\Sigma_1 = \{(\theta_0, \sigma_0) \in \Omega_1 : d((\theta_0, \sigma_0), (\theta, \sigma_\infty)) \geq 2\sqrt{\frac{w(\theta)}{r_1}} \forall \theta \in |\theta_1, \theta_2|,$$

$$d((\theta_0, \sigma_0), (\theta_2, \sigma)) \geq 2\sqrt{\frac{r_1(\sigma)}{r_1}} e^{\frac{\sigma}{2}} \forall \sigma \in |m, \sigma_\infty|\}$$

$$\Sigma_4 = \{(\theta_0, \sigma_0) \in \Omega_4 : d((\theta_0, \sigma_0), (\theta, \sigma_\infty)) \geq 2\sqrt{\frac{w(\theta)}{r_4}} \forall \theta \in |\theta_4, \theta_5|,$$

$$d((\theta_0, \sigma_0), (\theta_4, \sigma)) \geq 2\sqrt{\frac{r_4(\sigma)}{r_4}} e^{\frac{\sigma}{2}} \forall \sigma \in |m, \sigma_\infty|\}.$$

Demostración.

Introduzcamos la función

$$\bar{u}_i(\theta, \sigma) = \frac{r_i e^{-\sigma_\infty}}{4} (|\theta - \theta_0|^2 + |\sigma - \sigma_0|^2)$$

con $(\theta_0, \sigma_0) \in \Sigma_i$. Es claro que la función \bar{u}_i satisface

$$-\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \sigma^2} + \beta(\bar{u}_i) = -r_i e^{-\sigma_\infty} \geq R(\theta) \cdot e^{-\sigma} \text{ en } \Omega_i$$

$$\bar{u}_i(\theta, \sigma_\infty) = \frac{r_i e^{-\sigma_\infty}}{4} (|\theta - \theta_0|^2 + |\sigma_0 - \sigma_\infty|^2) \geq w(\theta) e^{-\sigma_\infty} \text{ si } \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$$

$$\bar{u}_i(\theta_i, \sigma) = \frac{r_i e^{-\sigma_\infty}}{4} (|\theta - \theta_i|^2 + |\sigma_0 - \sigma|^2) \geq \bar{U}_{r_i}(\sigma) \text{ si } m \leq \sigma \leq \sigma_\infty$$

$$\bar{u}_i(\theta_{i+1}, \sigma) = \frac{r_i e^{-\sigma_\infty}}{4} (|\theta - \theta_{i+1}|^2 + |\sigma_0 - \sigma|^2) \geq U_{r_i}(\sigma) \text{ si } m \leq \sigma \leq \sigma_\infty$$

$$\bar{u}_i(\theta_1, \sigma) \geq 0, \bar{u}_4(\theta_5, \sigma) \geq 0 \text{ si } m \leq \sigma \leq \sigma_\infty$$

$$\bar{u}_i(\theta, m) \geq 0 \text{ si } \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$$

Ahora bien, por el lema 4 es sabido que

$$0 \leq U(\theta, \sigma_\infty) \leq w(\theta) e^{-\sigma_\infty} \text{ c.p.t. } \theta \in (\theta_1, \theta_5)$$

y análogamente, la demostración del Teorema 9 muestra que

$$0 \leq U(\theta, \sigma) \leq U_{r_i}(\sigma) \text{ c.p.t. } \theta \in (\theta_i, \theta_{i+1}), \sigma \in (m, \sigma_\infty).$$

En cada Ω_i se tiene la mayoración $0 \leq U \leq \bar{u}_i$ sobre $\partial \Omega_i$ y por tanto la conclusión deriva de la aplicación de los resultados de comparación. #

La naturaleza del resultado anterior queda ilustrada mediante la siguiente figura:

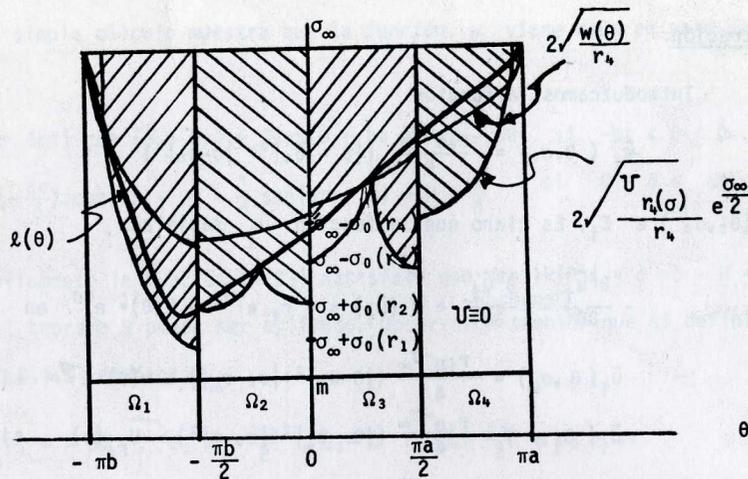


Figura 6

Obviamente la estimación del Teorema 10 con sólo repetir su demostración para particiones del intervalo $[-b\pi, a\pi]$ mas finas que la anteriormente utilizada. Finalmente podrían ser utilizadas técnicas de Análisis Numérico para la obtención de una estimación "numérica" de la curva $\rho(\theta)$ y por tanto del máximo de \vec{q} sobre ∂P .

También para el caso de flujos comprensibles Brezis y Stampacchia han encontrado resultados similares a los Teoremas 8 y 9 (véase Brézis [5]) y de esta manera la técnica de supersoluciones locales puede ser también adaptada en la obtención de estimaciones sobre la frontera libre $l(\theta)$.

Otros problemas de flujos subsónicos en los que la estimación del conjunto de coincidencia de la Inecuación Variacional correspondiente desempeña un papel transcendental corresponden a los problemas de perfiles con estela (Brezis-Duvaut [1]) y de flujos a través de canales (Tomarelli [1]) y Simborsky [1]). En todos los casos anteriores la técnica de supersoluciones locales podría ser aplicada mejorando así las estimaciones en general formuladas en términos similares al Teorema 9.

55. Comentarios finales.

5.1. El método de supersoluciones locales utiliza de una manera fundamental estimaciones "a priori" sobre la norma en L^∞ de la solución del problema considerado. Tal y como se ha puesto de manifiesto en secciones anteriores esto conduce a suponer acotados a los datos del problema y entonces la estimación deseada es obtenida mediante técnicas ligadas al principio del máximo.

Sin embargo, el método de supersoluciones locales también opera para aquellos casos en los que no siendo los datos acotados es posibles estimar localmente la norma L^∞ de la solución.

Este tipo de proceder ya había sido utilizado en alguna manera por Benilan-Brezis-Crandall [1] al abordar el problema (3.1) sobre $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $f \in L^1_0(\mathbb{R}^N)$. En dicho caso se puede suponer β grafo maximal acotado de \mathbb{R}^2 y por tanto sobre $S(f,0)$ se tiene que $\Delta u = \beta(u)$ e.d. $\Delta u \in L^\infty(S(f,0))$ y entonces por las estimaciones L^p se sabe que $u \in W^{1,p}(S(f,0)) \forall 1 \leq p < \infty$ y en particular $u \in C^0(S(f,0))$.

De manera análoga también el problema (2.1) (p.e. con $g = 0$) se puede suponer $f^+ \in L^2(S(f,\epsilon))$ puesto que sobre dicho conjunto se tiene que $-\Delta u_+ + \alpha u_+ \leq f^+ - \beta^+(0) \leq -\epsilon$ y entonces la técnica iterativa de Moser muestra (véase p.e. Gilbarg-Trudinger [1] Theorem 8.15) que $u \in L^\infty(S(f,\epsilon))$ obteniéndose incluso una estimación de la norma de u en $L^\infty(S(f,\epsilon))$ en función de $\|f^+\|_{L^2}$.

En los dos casos anteriores desgraciadamente las estimaciones sobre la norma L^∞ de u en alguna región, son establecidas en función de las normas de los datos (no acotados) haciendo intervenir constantes que

no son fácilmente computables lo que hace que las estimaciones sobre el conjunto de coincidencia no sean de gran validez a menos que lo único que se cuestione es la compacidad o no del soporte de la solución del problema considerado (Esto último es lo que sucede p.e. en Benilan-Brezis-Crandall [1]). Dejamos al lector el formular los resultados de compacidad del soporte para datos no acotados obtenidos mediante la aplicación de la técnica de supersoluciones locales. (Obsérvese que la mayorización de la supersolución local sobre la estimación de la norma L^∞ de la solución es sólo necesaria en las fronteras "artificiales" del sub-conjunto local $\tilde{\Omega}$ de $S(f,\epsilon)$ ó $S(f,0)$).

5.2. El caracter local de la técnica desarrollada en este trabajo permite su aplicación a problemas incluso diferentes de los señalados en otras secciones. Así por ejemplo existe una clase importante de Inecuaciones Variacionales en los que el obstáculo ψ de la formulación P_ψ de la sección 2.1 no está definido en todo Ω siendo posible también estimar el conjunto de coincidencia. (Para una correcta formulación de esta clase de problemas véase Kinderlehrer-Stampacchia [1] pág. 137).

Otros tipos de Inecuaciones Variacionales tales como el problema de Signorini (multivocidad sólo en la condición de contorno) y el elastico-plástico (restricciones sobre el gradiente de u) pueden ser también abordados mediante nuestra técnica para obtener diferentes e importantes propiedades (lo que será objeto de un trabajo posterior).

Incluso para algunas ecuaciones de evolución la técnica aquí desarrollada es de gran utilidad en el estudio de la propiedad denominada de localización. (Véase a este respecto, los resultados de Díaz-Herrero [2]).

5.3. Por último es importante señalar que la consideración de otro tipo de propiedades concernientes al conjunto de coincidencia Ω_0 ha atraído la aten-

ción de prestigiosos especialistas. Así p.e., la regularidad de $\partial\Omega_0$, es exhaustiva tratada en la reciente monografía de Kinderlehrer-Stampacchia [1] donde se encontrará una larga lista de referencias así como otras propiedades del conjunto de coincidencia asociado a diversas Inecuaciones Variacionales.

BIBLIOGRAFIA.

Abbott, I.H. y von Doenhoff, A.E.

- [1] (1949) Theory of wings sections. McGraw-Hill.

Attouch, H. y Damlaman, A.

- [1] (1977) "Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasilineaires". Procc. of the Royal Society of Edimburgh. 79 A. 107-129.

Benilan, Ph.

- [1] (1978) "Operateurs accretifs et semi-groupes dans les espaces $L^p(1 \leq p \leq +\infty)$ ". En Functional Analysis and Numerical Analysis. Ed. H. Fujita. Japan. Soc. for the Promotion of Sciences.

- [2] (aparecerá) "Principe du maximum et perturbation d'operateurs accretifs dans $L^1(\Omega)$ ".

Benilan, Ph. y Brezis, H.

- [1] (aparecerá) "Nonlinear problems related to the Thomas-Fermi equation".

Benilan, Ph. Brezis, H. y Crandall, M.G.

- [1] (1975) "A semilinear elliptic equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$ ". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Serie IV-II. 523-555.

Bensoussan, A., Brezis, H. y Friedman, A.

- [1] (1977) "Estimates on the free boundary for quasi variational inequalities". Comm. Partial Differential Equations, 2, 297-321.

Bers, L.

- [1] (1958) Mathematical aspects of Subsonic and Transonic gas dynamics. Chapman and Hall.

Bers, L., Jhon, F. y Schechter, M.S.

- [1] (1964) Partial differential equations. Interscience N.Y.

Bidaut-Veron, M.F.

- [1] (1978) "Propriété de support compact de la solution d'une equation aux derivées partielles non lineaires d'ordre 4". C.R. Acad. Sc. Paris 284 A, 1005-1009.

Brezis, H.

- [1] (1971) "Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations". En Contributions to Nonlinear Functional Analysis. Ed. E. Zarantonello. Academic Press.

- [3] (1973) Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Lectures Notes North Holland.

- [4] (1974) "Solutions of variational inequalities with compact support". Uspekhi Mat. Nauk. 129, 103-108.

- [5] (1975) "A new method in the study of subsonic flows". En Partial Differential equations and related topics. Ed. J. Goldstein. Lecture Notes in Math. n°446. Springer.

Brezis, H. y Duvaut, G.

- [1] (1973) "Ecoulements avec sillages autour d'un profile symétrique sans incidence". C.R. Acad. Sci. Paris. 276., 875-878.

Brezis, H. y Stampacchia, G.

- [1] (1973) "Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires". C.R. Acad. Csi. Parts. 276, 129-132.

- [2] (1976) "The Hodograph method in Fluid-Dynamics in the Light of Variational Inequalities". Arch. for Rat. Mech. and Analysis. 61. 1, 1-18.

Brezis, H. y Strauss, W.

- [1] (1973) "Semilinear second-order elliptic equations in L^1 ". Jour. of Math. Soc. Japan. 25, n°4, 565-590.

Díaz Díaz, G.

- [1] (1979) "Estimacion del conjunto de coincidencia para ciertas inecuaciones variacionales". Actas del II. Congreso de E. Diferenciales y Aplicaciones. Barcelona.

- [2] (1980) "Estimation de l'ensemble de coincidence de la solution des problemes d'obstacle pour les equations de Hamilton-Jacobi-Bellman". C.R. Acad. Sc. Paris, 290, 587-591.

- [3] (1980) Problemas en Ec. en Derivadas Parciales con no linealidades sobre operadores diferenciales de segundo orden. Tesis en la Universidad Complutense.

Díaz Díaz, G. y Díaz Díaz, J.I.

- [1] (1979) "Finite extinction time for a class of non linear parabolic equation". Comm. in Partial Differential Equations. 4, n° 11 pp. 1213-1231.

Díaz Díaz, J.I.

- [1] (1975) "Soluciones con soporte compacto de problemas unilaterales mixtos". Real Acad. Cien. Exactas, F. y Naturales. Madrid

- [2] (1978) "Soluciones con soporte compacto para algunos problemas no lineales". Actas de la V Reunión de Matemáticos de expresión latina. 390-394.
- [3] (1979) "Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems". Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applications, 3, nº 6, pp. 831-847.
- [4] (1978) "Anulación de soluciones para ciertos problemas parabólicos no lineales". Rev. Real Acad. Ci. Madrid 72, pp. 613-616.
- [5] (apar.) "Soluciones con soporte compacto para algunos problemas estacionarios". Aparecerá en Collectanea Mathematica.
- [6] (1979) "Resultados y métodos sobre la propiedad de extinción en tiempo finito para ecuaciones de evolución". Actas del II Congreso de Ec. Diferenciales y Aplicaciones. Barcelona.
- [7] (apar.) "Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Aplicaciones a ciertos problemas parabólicos no lineales". Aparecerá en Rev. de la Real Acad. de Ci. de Madrid.
- [8] (apar.) Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasificación para los modelos de difusión del calor". Aparecerá como Memoria en la Real Acad. de Ci. Madrid.

Díaz Díaz, J.I. y Herrero García, M.A.

- [1] (1978) "Propriétés de support compact pour certaines équations elliptiques et paraboliques non lineaires". C.R. Acad. Sc. Paris. 286, 815-817.
- [2] (apar.) "Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems". Aparecerá en Proc. of Royal Soc. of Edinburgh.

Díaz Díaz, J.I. y Veron, L.

- [1] (apar.) "Trabajo sobre ecuaciones cuasilineales de primer orden.

Duvaut, G. y Lions, G.

- [1] (1972) Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod.

Ferrari, C. y Tricomi, F.

- [1] (1972) Transonic Aerodynamics. Academic Press, N.Y.

Gilberg, D. y Trudinger, N.S.

- [1] (1977) Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag.

Kinderlehrer, D. y Stampacchia, G.

- [1] (1980) An introduction to Variational Inequalities and their applications. Academic Press.

Lions, J.L.

- [1] (1969) Quelques méthodes de resolution des problemes aux limites nonlineaires.

Nagai, T.

- [1] (1979) "Estimates for the coincidence sets of solutions of elliptic variational inequalities". Hiroshima Math. J. 9, 335-346.

Shimborsky, E.

- [1] (1979) "Variational methods applied to the study of symmetric flows in laval nozzles". Comm. in Part. Diff. Eq. 4, 1, pp. 41-77

Tomarelli, F.

- [1] (1978) "Un probleme de fluidodynamique avec les inéquations variationnelles". C.R. Acad. Sci. Paris, 286, pp. 999-1002.

Vázquez Suárez, J.L.

- [1] (1979) "Existencia de soluciones de soporte compacto para una ecuación diferencial semilineal sobre un abierto no acotado". Actas de las VI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticos. Santander.

- [2] (apar.) "An a priori interior estimate for the solutions of a nonlinear problem representing weak diffusion". Aparecerá en Nonlinear Analysis .

Veron, L.

- [1] (apar.) "Equations d'évolution semi-lineaire du second ordre dans L^1 ".

Watson, G.N.

- [1] (1958) A treatise on the theory of Bessel functions (2ª edición). Cambridge University Press.

Yamada, N.

- [1] (1979) "Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities in bounded domains". Hiroshima, Math. J. 9, pp. 7 - 16.
- [2] (apar.) "Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities in bounded domains II". Aparecera en Funkcial. Ekvac.