

Modelización: de la justificación matemática de sencillos juegos mecánicos a las aplicaciones industriales

J.I. Díaz

RAC, IMI (UCM)

Madrid, 5 de junio de 2014



X Ciclo de conferencias de divulgación científica: Ciencia para todos



Real Academia de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturales



La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

Sistema real

Predicción

Gobierno o control

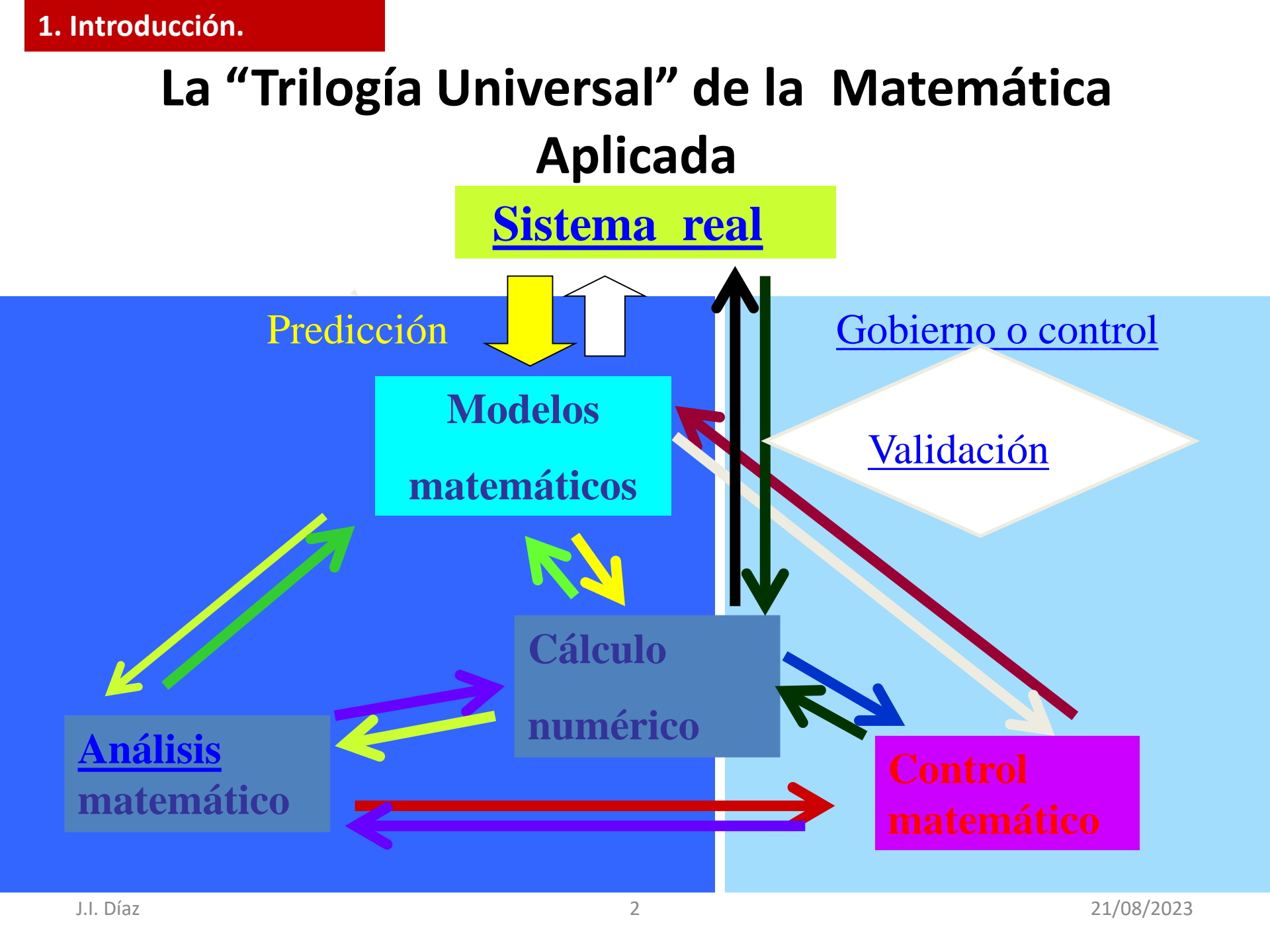
Modelos matemáticos

Validación

Cálculo numérico

Análisis matemático

Control matemático



La primera de las etapas a la hora de abordar matemáticamente un problema "real" la constituye su modelización.

Modelo= conjunto de relaciones utilizado para representar y estudiar de forma simple y comprensible un objeto o fenómeno de la realidad.

La experiencia muestra que obtener un modelo "correcto" no es siempre una tarea fácil y de hecho puede equivaler a haber resuelto ya más de la mitad del problema.

Su carácter constructivo involucra inevitablemente otras componentes ligadas a la experiencia, intuición y sentido estético.

Estas son quizás las razones por la que numerosos autores se refieren a ese proceso cómo "el arte de modelizar".

No confundir con el "proceso de modelado" típico de los artistas. Esta es la razón por la que este conferenciante propuso, en **Junio de 2002**, a la **Real Academia Española**, acuñar la palabra "**Modelización**"

(inexistente hasta entonces en castellano)

y que tal y como le comunicó su entonces Vicepresidente, (y Presidente de la de Ciencias) **A. Martín Municio**, fue aprobada en tan sólo unos meses.

En esta conferencia se comenzará por reproducir tres sencillos juegos mecánicos que suelen llamar la atención a quienes los observan: la peonza Estas son quizás las razones por la que numerosos autores se refieren a ese proceso cómo "el arte de modelizar". "peonza invertible" (*Tippe Top*), "la piedra celta" y "el disco de Euler".

Analizaremos los grandes rasgos de su modelización matemática (sin entrar en detalles excesivamente técnicos) y sus insospechados comportamientos comunes.

Incluso en cursos académicamente reglados, habitualmente no son tenidos en cuenta.

La Mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas pues por medio de ella surgen los frutos de la matemática.

Leonardo da Vinci (1452-1519)

Notebooks, v. 1, ch. 20.(1489-1508)



Muchos de esos juegos son una sencilla y directa visualización de procesos bastante más complejos que aparecen en la esfera de las aplicaciones industriales.

Al final de la charla se expondrán algunos problemas matemáticos "de origen industrial" que tienen ciertos rasgos comunes con los sencillos juegos mecánicos anteriores.

Valores eternos y universales: **curiosidad y afán de comprender**



Jean Siméon **Chardin** (París, 1699–1779)
L'enfant au toton (1708: en el Louvre)



27 de Abril de 2014

Niño absorto ante una peonza 306 años más tarde



Scanned at the American
Institute of Physics

Wolfgang Pauli (1900-1958: PN 1945) y Niels Bohr (1885-1962: PN 1922), disfrutando de la observación de la *tippe-top*, University of Lund, Mayo 31 1951.

ij Un precedente muy distinguido de la curiosidad por los giros de objetos singulares !!

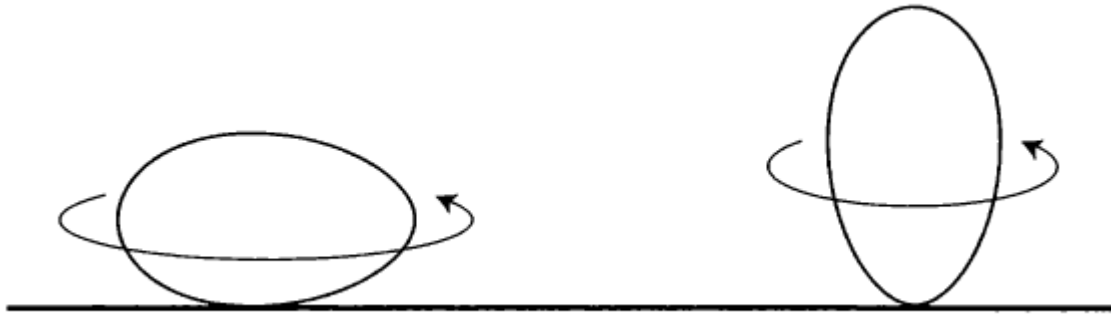
Tope top (la peonza invertible)



Tippe+Top+-+La+peonza+que+se+da+la+vuelta+sola-HD.mp4

<http://vimeo.com/49101839>

Más tradicional pero menos vistoso: rotación de huevos duros



Ya en la década de 1800 , Sir William Thomson (Lord Kelvin, 1824, 1907) y su amigo Bailie Hugh Blackburn (1823-1909) experimentaron girando “piedras con forma de huevo” (eggshaped) que se encuentran en la playa. Vieron propiedades similares a las de la Tippe Top (peonza invertible) , que aún no se había inventado .

Una referencia más moderna sobre el estudio matemático de giros de huevos duros:

N. BOU-RABEE, J. E. MARSDEN, AND L. A. ROMERO, *A geometric treatment of Jellett's egg*,
Z. Angew. Math. Mech., 85 (2005), pp. 618–642.

Sobre la historia de la peonza invertible

En el libro del Prof. Ayudante de Lord Kelvin, John Perry (1850-1920) [Spinning Tops and Gyroscopic Motions, 1890] se describe un pequeño objeto esférico con un centro de masa que no coincide con el centro de la esfera.

Cuando el objeto se coloca sobre una mesa, el centro de masa apunta hacia abajo, hacia la mesa. Tras el giro, su centro de masa se levanta (al igual que en una Tippe Top).

En 1891, Helene Sperl patentó (en Munich) una peonza con estas propiedades.

Denominada como "**Wendekreisel**" en Alemania .

Pero la patente venció se acabó al año siguiente por impago de la cuota de la patente .

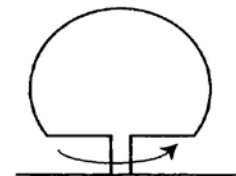
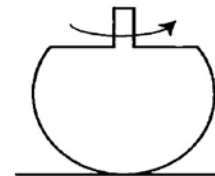
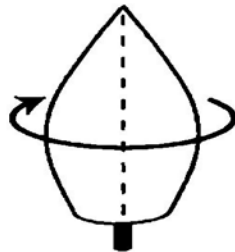
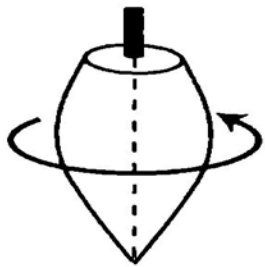
En 1950 una tal peonza invertible fue re-patentada por el ingeniero danés Werner Ostberg (quien la denominó "tippe-top") .

Tuvo la idea durante una visita a América del Sur, donde había visto a la gente jugando con una fruta pequeña y redonda. Cuando giraban por el tallo como una peonza giraba por un segundo y luego se invertía y giraba sobre el tallo .

Produjo en masa la Tippe Top y ganó gran popularidad en todo el mundo (En Canadá de venta en farmacias, y a partir de 1953 en las cajas de cereales: Nabisco , General Mills,...)

En 1952 comienza ya el estudio matemático sobre la Tippe Top con el artículo de C.M. Braams (Rijks University, Utrecht).

¿De donde saca la energía para girar invertida?



¿Por qué cambia el sentido de giro una vez que se invierte?

La “piedra celta” (*rattleback, anagyre*)

Mi viaje a Cardiff (2007): museo de la ciencia



amazing spinning celtic priest stone.mp4



Emmanuel Péluchon
ébéniste – boisselier
Place Excelsior
110 rue Rivière – Suite #3
Bedford, Québec J0J 1A0

www.facebook.com/emmanuelpeluchon.com

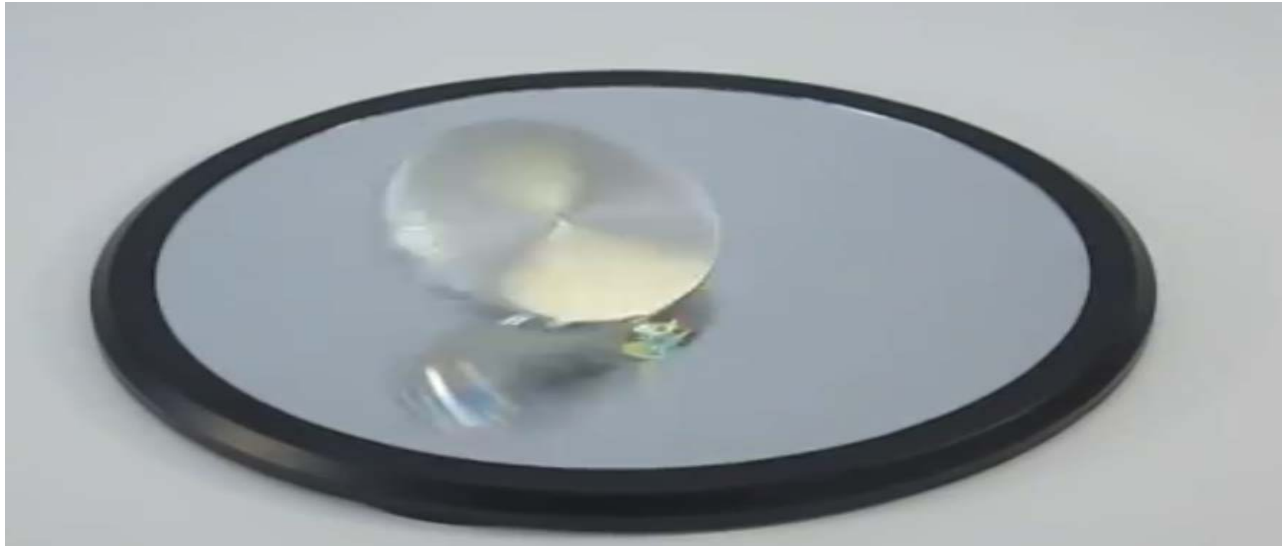


Mouvement de l'anagyre (HD - gros plan & ralenti).mp4

De nuevo:

¿De donde saca la energía para cambiar el sentido de giro?

3. Disco de Euler



Euler's Disk.mp4

Mi conferencia en Paris VI (2004), H.K. Moffat (Newton Institute, Cambridge)

Comprado a Damert Company, Auburn, Alabama, USA.

¿Por qué gira más rápidamente
antes de pararse ?

¿Por qué el ruido puntual antes de
pararse?

2. Modelización y análisis matemático: aplicación al sólido rígido

Principios fundamentales

Segunda Ley de Newton + Variación del momento angular

Leyes constitutivas

Forma del sólido rígido, Movimiento con ligaduras

Modelo “bien planteado en sentido de Hadamard”

Existe solución del modelo y depende continuamente de los datos

¿Solución exacta? (sistemas integrables por cuadraturas)

Estabilidad (comportamiento para tiempos grandes)

Principio de estabilidad linealizada

Estabilidad de Lyapounov



Leonhard Euler (1707-1783)

"Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable." Mém. de l'Acad. Sci. Berlin 14, 154-193, 1758.

“Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides”, 1755

“La teoría queda reducida a unas ecuaciones diferenciales: solo falta el cultivo de su análisis matemático”.

El problema del movimiento por la gravedad de una peonza no es, en general, resoluble exactamente en términos de cuadraturas.

Durante muchos años los únicos casos integrables conocidos fueron: 1 (Euler) peonza con punto fijo coincidiendo con su centro de gravedad (para que la gravedad no influye en el movimiento) y 2 (Lagrange) caso en el que el punto fijo de la peonza y el centro de gravedad se encuentran en un eje de simetría.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Carta a Euler de 12 de agosto de 1755 (19 años)

Nacimiento del Cálculo de Variaciones



Karl Weierstrass (1815-1897)

Consolidación: rigor matemático: Problemas sin solución,...

Funciones elípticas de Weierstrass ,....,



Sofia Vasílievna Kovalévskaya

(Moscú, 1850- Estocolmo, 1891)

Primera matemática rusa de gran relevancia

Primera mujer que consiguió una plaza de profesora universitaria en Europa (Suecia, 1881).

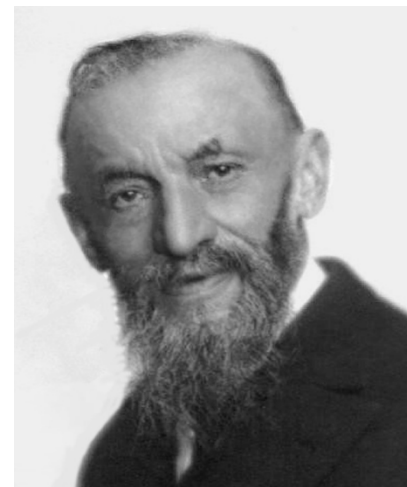


S. Kovalevskaya (188); una solución analítica para el caso de una peonza en la que dos de los principales momentos de inercia en el punto fijo son iguales y el doble de la tercera y cuando el centro de gravedad está en el plano de los momentos iguales de inercia (Whittaker 1944, p . 164) .

Teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias



Augustin Louis **Cauchy** (1789 - 1857)



Giuseppe **Peano** (1858-1932)

G. Peano, *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*, Atti Accad. Sci. Torino, 21 (1886) 437–445.

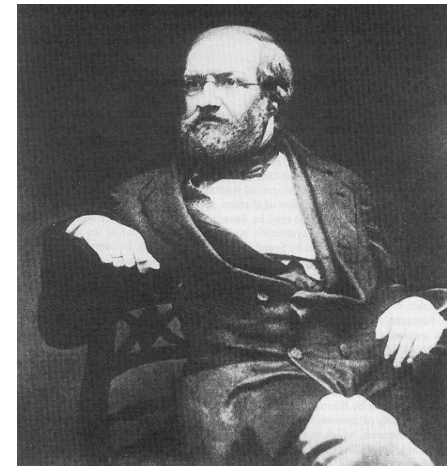
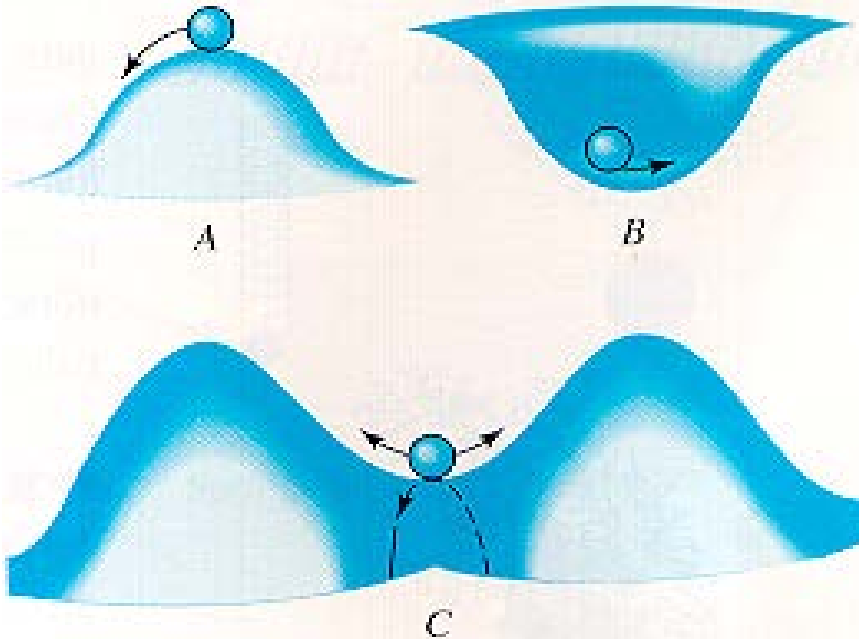


Rudolf Otto Sigismund **Lipschitz**
(1832 – 1903)

Universidad de Bonn desde 1864
Alumno de Dirichlet
Director de tesis de Felix Klein

Estabilidad: sistemas conservativos y sistemas disipativos

$t \rightarrow +\infty$



- P. G. L. Dirichlet (1805-1859),
- H. Poincaré (1854-1912),
- A.M. Lyapunov (1857-1918),...

Un caso sencillo pero enigmático

Cuerpo con tres momentos de inercia diferentes en ausencia de fuerzas

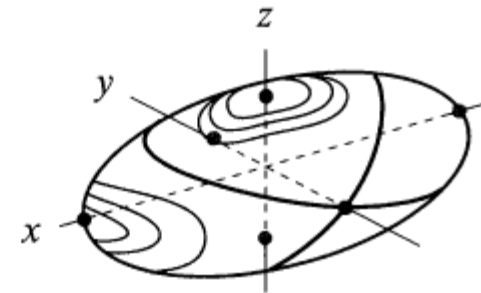
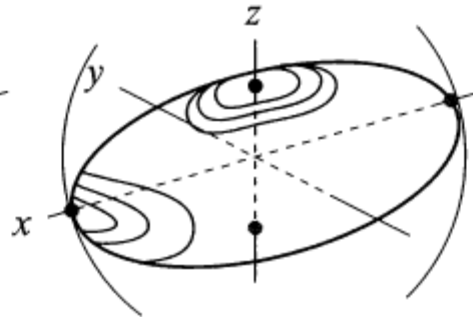
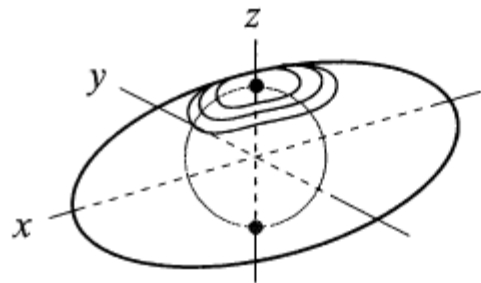
$$\tau_1 = I_1 \omega_1' + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3$$

$$\tau_2 = I_2 \omega_2' + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1$$

$$\tau_3 = I_3 \omega_3' + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2.$$

$$2T = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2.$$

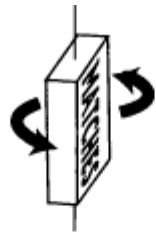


(c)

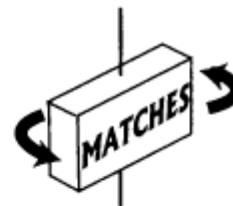
Elipsoide de Louis Poinot (1777 - 1859)



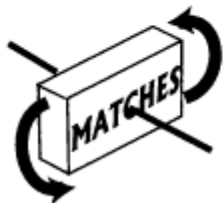
axis of largest moment of inertia



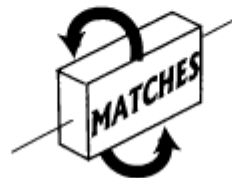
axis of smallest moment of inertia



axis of intermediate moment of inertia



(a)



(b)



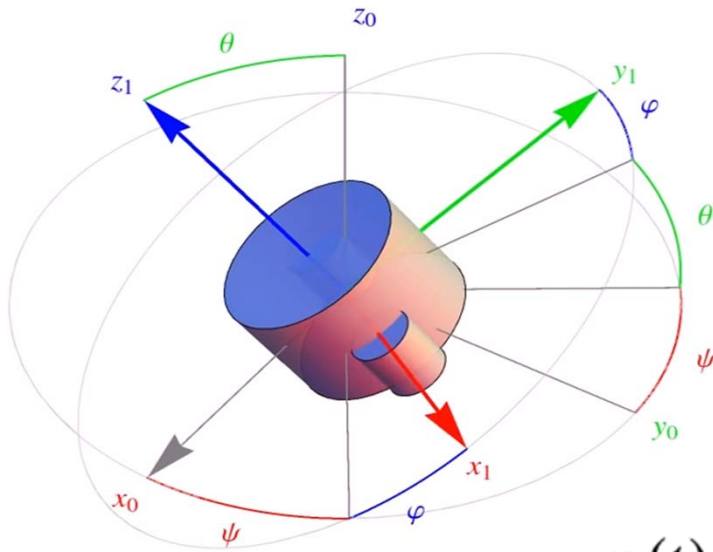
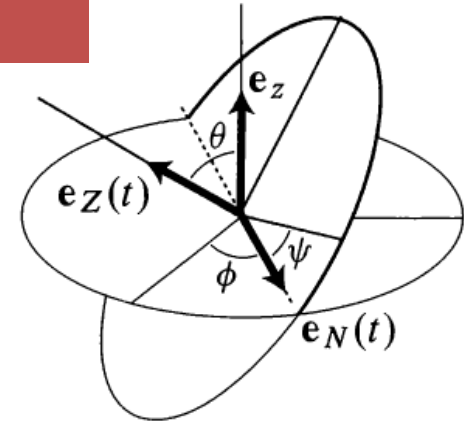
(c)



Solid Body Rotation.mp4

Una herramienta genial: ángulos de Euler

\mathbf{e}_z = unit vector along the third axis z ,
 $\mathbf{e}_N(t)$ = unit vector along the line of nodes,
 $\mathbf{e}_Z(t)$ = unit vector along the third body axis Z ,



313 rotation sequence (Euler Angles).mp4

El vector velocidad angular y los ángulos de Euler

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \phi'(t) \cdot \mathbf{e}_z + \theta'(t) \cdot \mathbf{e}_N(t) + \psi'(t) \cdot \mathbf{e}_Z(t).$$

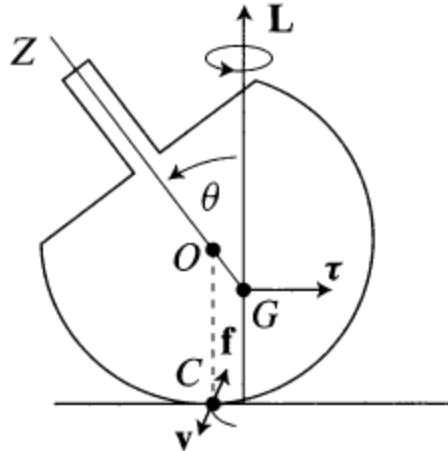
$$\omega_1 = \phi' \sin \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi$$

$$\omega_2 = \phi' \sin \theta \cos \psi - \theta' \sin \psi$$

$$\omega_3 = \phi' \cos \theta + \psi'.$$

3. Estudio de la peonza reversible

Adaptado de W.A. Pliskin (1958)



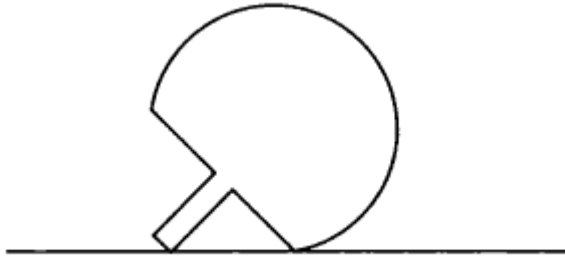
$$\langle \mathbf{e}_Z, \boldsymbol{\tau} \rangle = \langle \mathbf{e}_Z, \mathbf{L}' \rangle = \langle \mathbf{e}_Z, \mathbf{L} \rangle'.$$

$$\langle \mathbf{e}_Z, \boldsymbol{\tau} \rangle = -|\boldsymbol{\tau}| \sin \theta,$$

$$\langle \mathbf{e}_Z, \mathbf{L} \rangle' = (|\mathbf{L}| \cos \theta)' = -|\mathbf{L}| \sin \theta \cdot \theta',$$

$$\theta' = |\boldsymbol{\tau}|/|\mathbf{L}| = \mu WR/I\omega,$$

Ley constitutiva de la fricción



Velocidad angular del punto de contacto C respecto del eje Z

$$\tau_2 = I_1 \omega_2' + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - I_3 \alpha \omega_1.$$

$$aW \sin \theta = I_1 \theta'' + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - I_3 \alpha \omega_1.$$

Tercer momento de inercia casi igual a los dos primeros

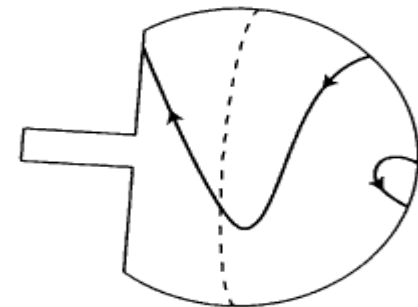
$$\mathbf{L} = \omega \cdot \mathbf{e}_z,$$

$$\omega_1 = \omega \sin \theta, \quad \omega_3 = \omega \cos \theta,$$

$$aW \sin \theta = I_1 \theta'' + (I_1 - I_3) \omega^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \alpha \omega \sin \theta.$$

$$\theta'' \text{ despreciable} \quad \alpha = \frac{aW}{I_3 \omega} + \frac{(I_1 - I_3)}{I_3} \omega c$$

$$\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \cos \theta_0 = \frac{aW}{\omega^2 (I_1 - I_3)},$$



Algunas referencias sobre la peonza reversible

Braams, C. M. "The Symmetrical Spherical Top." Nature 170, No. 4314.

Braams, C. M. Physica 18, 503, 1952.

Braams, C. M. "The Tippe Top." Amer. J. Phys. 22, 568, 1954.

Cohen, R. J. Amer. J. Phys. 45, 12, 1977.

Ebenfeld, S. and Scheck, F. Ann. Phys. 243, 195, 1995.

Hart, J. B. "Angular Momentum and the Tippe Top." Amer. J. Phys. 27, 189, 1959.

Hugenholz, N. M. Physica 18, 515, 1952.

Isaeva, L. S. J. Appl. Math. Mech. 23, 572, 1959.

Kuyppers, F.; Meyer, G. P.; Freihart, J.; Friedl, C.; Gerisch, M.; Kraus, H. J.; and Seidel, K. ZAMM 74, 503, 1994.

Leutwyler, H. Eur. J. Phys. 15, 59, 1994.

O'Brien, S. O. and Synge, J. L. Proc. Roy. Irish Acad. A56, 23, 1954.

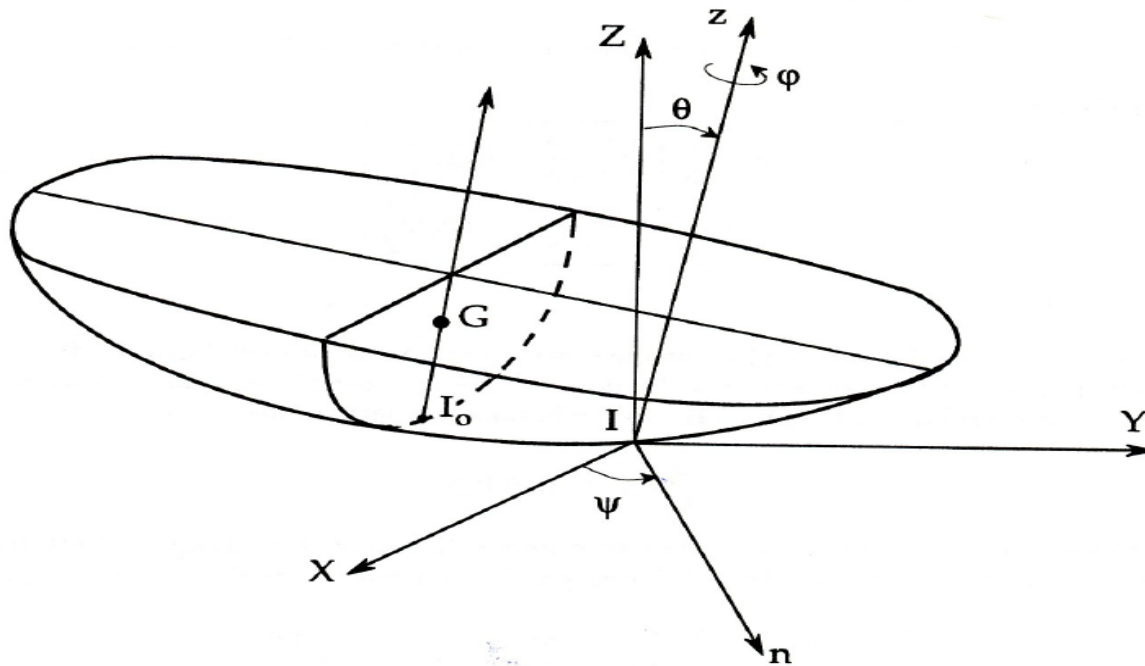
Or, A. C. SIAM J. Appl. Math. 54, 597, 1994.

Pliskin, W. A. "The Tippe Top (Topsy-Turvy Top)." Amer. J. Phys. 22, 28-32, 1954.

Animación basada en el modelo matemático: realidad virtual



tippetop.mpg



$\{G; \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ sistema de referencia (baricéntrico) de direcciones principales de inercia del sólido

Valores propios del tensor de inercia $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

El eje Gy corta a la superficie del sólido en el punto $I_0 := (0, -a, 0)$

Suponemos que en ese punto el vector normal es una dirección principal del sólido

En el entorno de I_0 la superficie admite una ecuación (al menos al tercer orden de aproximación)

$$y = -a + \frac{1}{2}(Px^2 + 2Qxz + Rz^2)$$

Denotamos por

$$\Lambda = PR - Q^2$$

suponemos que el sólido es convexo en un entorno de I_0 , es decir

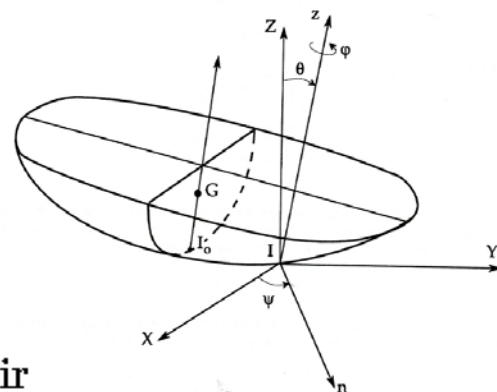
$$P > 0 \text{ y } \Lambda > 0 \text{ (lo que obliga a que } R > 0\text{)}.$$

Los radios de curvatura principales son los inversos de los valores propios (que son positivos pues $P > 0$ y $\Lambda > 0$)

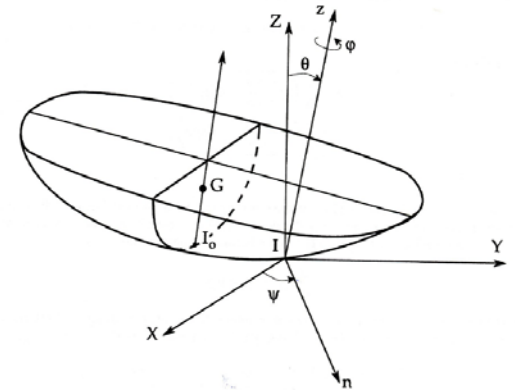
$$\begin{vmatrix} P - \frac{1}{\rho} & Q \\ Q & R - \frac{1}{\rho} \end{vmatrix} = 0$$

En el caso particular de total simetría ($Q = 0$) los planos principales de curvatura coinciden con los planos de direcciones principales de inercia $x = 0$ y $z = 0$ y la ecuación de la superficie se puede escribir como

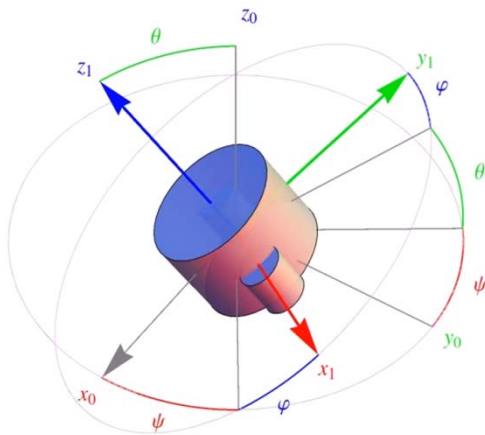
$$y = -a + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{z^2}{\rho_2}\right)$$



Condiciones de ligadura (o contacto).



Sea $\{O; \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z\}$ un sistema de referencia absoluto (fijo), con OZ en la vertical ascendente (coincidiendo con la dirección Gy si el sólido está en equilibrio) y sea $Z = 0$ la ecuación del plano horizontal (supuesto fijo). Utilizaremos los ángulos de Euler de los ejes x, y, z respecto de los ejes X, Y, Z .

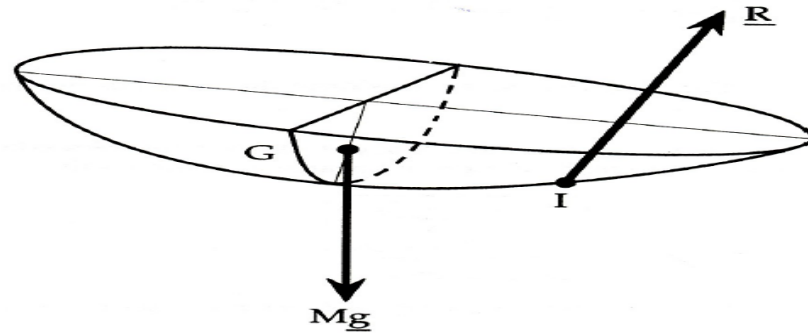


Por ejemplo

$$\mathbf{e}_Z = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \text{sen}\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_z$$

Suponemos que el sólido rueda sin deslizamiento sobre el plano $Z = 0$.

Sea $\mathbf{I}(t)$ el punto de contacto (en un entorno de I_0).



Las hipótesis de ligadura (no holonómica) son:

- i) $\mathbf{I}(t)$ es un punto de la superficie exterior del sólido
- ii) La normal al sólido en $\mathbf{I}(t)$ es paralela al eje Z
- iii) La velocidad del punto $\mathbf{I}(t)$ es nula (pues el plano está en reposo)

Si escribimos $\mathbf{I}(t) = (x, y, z)$ (en realidad funciones del tiempo) se ha de tener

$$f(x, y, z) \equiv y + a - \frac{1}{2}(Px^2 + 2Qxz + Rz^2) = 0$$

$$\nabla f \times \mathbf{e}_z = 0$$

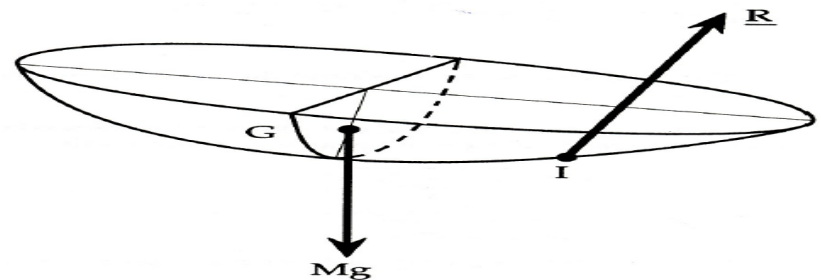
lo que proyectado en los ejes \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} se escribe como

$$\begin{pmatrix} Px + Qz \\ -1 \\ Qx + Rz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \\ \text{sen}\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos da el punto de contacto en términos de los ángulos de Euler (que son desconocidos a priori)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\Lambda} \left(Q \frac{\cot\theta}{\cos\varphi} - R \tan\varphi \right) \\ z = \frac{1}{\Lambda} \left(-P \frac{\cot\theta}{\cos\varphi} + Q \tan\varphi \right) \end{cases}$$

Ecuaciones del movimiento



Tomamos momentos angulares desde el punto $\mathbf{I}(t)$

Como siempre, se muestra la relación entre el momento angular, la matriz de inercia (la forma del sólido) y el vector velocidad angular

$$\mathbf{L}_I(t) = \mathbf{J}_I \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$$

siendo

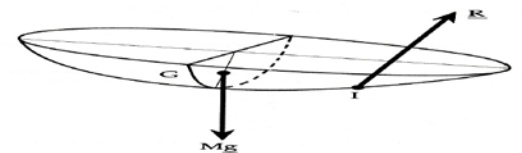
\mathbf{J}_I matriz de inercia respecto de un sistema de referencia (relativo) $\{\mathbf{I}; \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$
(es decir de direcciones paralelas a $\{\mathbf{G}; \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$)

$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ vector velocidad angular (relativa) del sólido respecto $\{\mathbf{I}; \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_x + (-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{e}}_y + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_z$$

La ecuación del momento angular (suponiendo que la ligadura no holónoma es "perfecta") se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_I(t) = \overline{\mathbf{I}(t) \mathbf{G}(t)} \times m \mathbf{g}$$



Por el Teorema de G. G. de Coriolis (1792-1843)-D. Poisson (1741-1840)

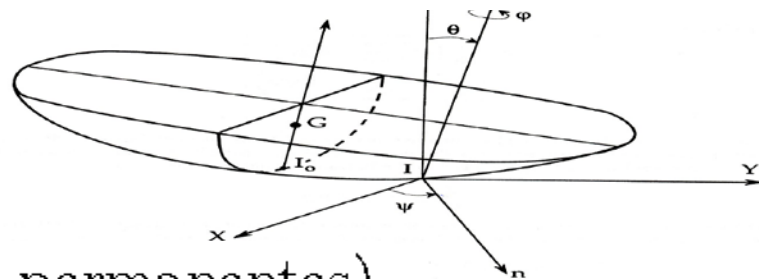
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}_I \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)) = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_I \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)) \Big|_{rel} + \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\mathbf{J}_I \hat{\boldsymbol{\omega}}(t))$$

lo que nos lleva a las ecuaciones de Euler (sistema no lineal acoplado) para las coordenadas de $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$.

Estabilidad en torno a giros horizontales

Se comprueba que los giros horizontales (movimientos permanentes)

$$\theta_\infty(t) = \frac{\pi}{2}, \varphi_\infty(t) = 0, \dot{\psi}_\infty(t) = \dot{\psi}_0$$



son soluciones particulares (movimientos permanentes)

Proceso de linealización (exposición "formal")

Tomamos una "variación infinitesimal" de los ángulos de Euler (puntos de equilibrio de las ecuaciones de Euler) de la forma

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} - u(t), \quad \varphi(t), \quad \dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_0 + v(t)$$

$u(t)$, $\varphi(t)$, $v(t)$, y sus derivadas, "muy pequeñas"

(e.d. en un entorno de la función nula en $C^1(0, +\infty)^3$).

La linealización ($\cot \theta \simeq u$, $\cos \varphi(t) \simeq 1$) de la condición de ligadura conduce a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\Lambda}(Qu - R\varphi) \\ z = \frac{1}{\Lambda}(-Pu + Q\varphi) \end{cases}$$

y el vector velocidad angular relativa utilizando esa linealización se puede escribir (respecto de la base relativa $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$) como

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \varphi - \dot{u} \\ \dot{\psi}_0 + v \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}_0 u \end{pmatrix}$$

El vector \mathbf{e}_Z se puede aproximar (en ese orden de aproximación) por

$$\mathbf{e}_Z = \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y + u \hat{\mathbf{e}}_z$$

con lo que el momento de la fuerza (peso) se convierte en

$$\overline{\mathbf{I}(t)\mathbf{G}(t)} \times (-mg\mathbf{e}_Z) = mg\left\{\left(\frac{P}{\Lambda} - a\right)u - \frac{Q}{\Lambda}\varphi\right\}\hat{\mathbf{e}}_x + mg\left\{\frac{Q}{\Lambda}u + \left(a - \frac{R}{\Lambda}\right)\varphi\right\}u\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Finalmente, denotando por

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 + ma^2, \quad \bar{\lambda}_3 = \lambda_3 + ma^2$$

y escribiendo la versión linealizada de $\mathbf{J}_I\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\mathbf{J}_I\hat{\boldsymbol{\omega}}(t))$ respecto de la base relativa $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ las ecuaciones de Euler conducen al SISTEMA LINEAL de segundo grado en u y

$$\bar{\lambda}_1 \ddot{u} - \dot{\psi}_0 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - ma \frac{R}{\Lambda}) \dot{\varphi} - ma \dot{\psi}_0 \frac{Q}{\Lambda} \dot{u} + (\dot{\psi}_0)^2 (\lambda_2 - \lambda_3) u - m(a(\dot{\psi}_0)^2 + g)(au - \frac{P}{\Lambda} u + \frac{Q}{\Lambda} \varphi) = 0$$

$$\bar{\lambda}_3 \ddot{\varphi} + \dot{\psi}_0 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - ma \frac{P}{\Lambda}) \dot{u} + ma \dot{\psi}_0 \frac{Q}{\Lambda} \dot{\varphi} + (\dot{\psi}_0)^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \varphi - m(a(\dot{\psi}_0)^2 + g)(a\varphi - \frac{R}{\Lambda} \varphi + \frac{Q}{\Lambda} u) = 0$$

Aleksandr Mijáilovich **Lyapunov** (1857 –1918)

"*Problème générale de la stabilité du mouvement*" (1892)

Teorema de Ph. Hartman (1915-) – D.M. Grobman, o teorema de linealización (1960 y 1959 respectivamente)

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} e^{st}$$

con s escalar determinado por el sistema.



$$0 = \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_1 s^2 - m a \dot{\psi}_0 \frac{Q}{\Lambda} s - m(a(\dot{\psi}_0)^2 + g)(a - \frac{P}{\Lambda}) + (\dot{\psi}_0)^2(\lambda_2 - \lambda_3) & -\dot{\psi}_0(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - m a \frac{R}{\Lambda})s - m(a(\dot{\psi}_0)^2 + g)\frac{Q}{\Lambda} \\ \dot{\psi}_0(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 - m a \frac{P}{\Lambda})s + m(a(\dot{\psi}_0)^2 + g)\frac{R}{\Lambda} & \bar{\lambda}_3 s^2 + m a \dot{\psi}_0 \frac{Q}{\Lambda} s - m(a(\dot{\psi}_0)^2 + g)(a\varphi - \frac{R}{\Lambda}) + (\dot{\psi}_0)^2(\lambda_2 - \lambda_1) \end{vmatrix}$$

El criterio de Routh (1904) muestra que para que las partes reales de las raíces de un polinomio de cuarto grado (en s) sean negativas es **necesario** que los coeficientes de s^4 y s^3 sean positivos, lo que sucede si

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_3 > 0$$

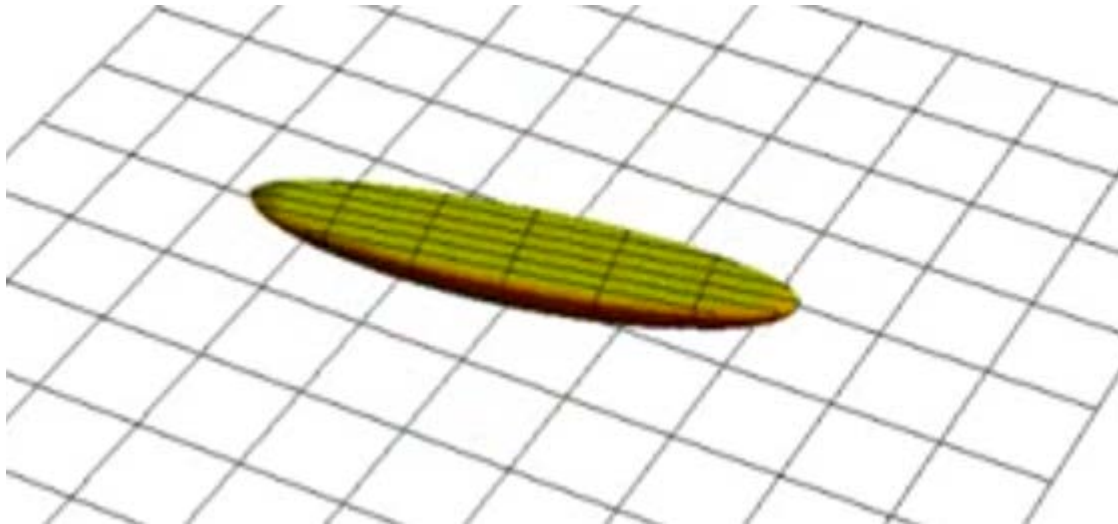
y

$$m a \dot{\psi}_0 \frac{Q}{\Lambda} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3) > 0$$

Esto muestra que hay un signo de $\dot{\psi}_0$ (y por tanto un sentido de rotación) para el que hay inestabilidad.

Mostrar la estabilidad del otro sentido de rotación requiere otras técnicas (función de Lyapunov,...).

Animación basada en el modelo matemático: realidad virtual



Rattleback Modeling with Mathematica.mp4

5. Sobre el Disco de Euler

The Rolling Motion of a Disk on a Horizontal Plane

Alexander J. McDonald

Princeton High School, Princeton, New Jersey 08540

Kirk T. McDonald

Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, New Jersey 08544

kirkmcd@princeton.edu

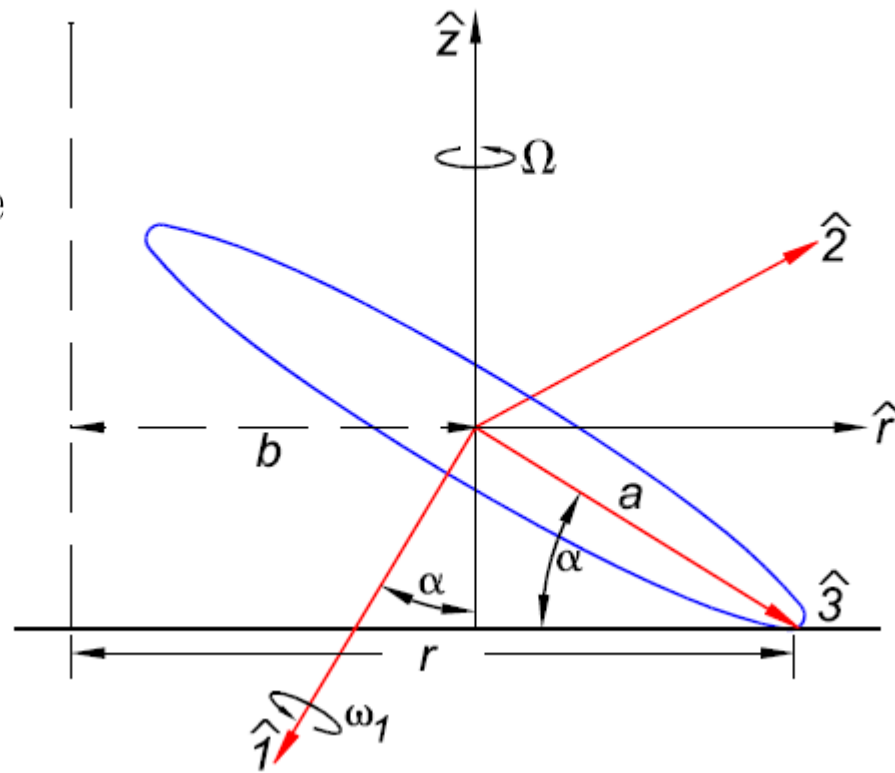
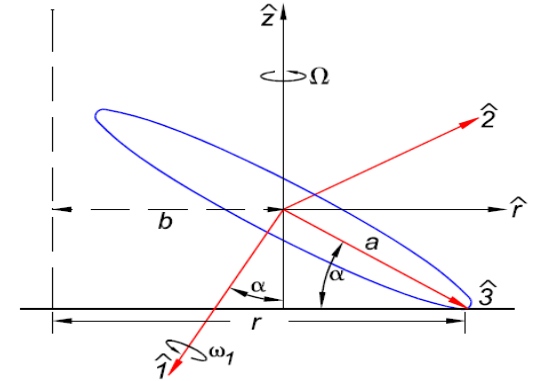


Figure 1: A disk of radius a rolls without slipping on a horizontal plane. The symmetry axis of the disk is called axis $\hat{1}$, and makes angle α to the \hat{z} axis, which is vertically upwards, with $0 \leq \alpha \leq \pi$. The line from the center of the disk to the point of contact with the plane is called axis $\hat{3}$, which makes angle α to the horizontal. The horizontal axis $\hat{2}$ is defined by $\hat{2} = \hat{3} \times \hat{1}$, and the horizontal axis \hat{r} is defined by $\hat{r} = \hat{2} \times \hat{z}$. The angular velocity of the disk about axis $\hat{1}$ is called ω_1 , and the angular velocity of the axes $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$ about the vertical is called Ω . The motion of the point of contact is instantaneously in a circle of radius r . The distance from the axis of this motion to the center of mass of the disk is labeled b .

In addition to the $\hat{\mathbf{z}}$ axis which is vertically upwards, we introduce a right-handed coordinate triad of unit vectors $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ related to the geometry of the disk, as shown in Fig. 1. Axis $\hat{\mathbf{1}}$ lies along the symmetry axis of the disk. Axis $\hat{\mathbf{3}}$ is directed from the center of the disk to the point of contact with the horizontal plane, and makes angle α to that plane. The vector from the center of the disk to the point of contact is then

$$\mathbf{a} = a \hat{\mathbf{3}}.$$



Axis $\hat{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{1}}$ lies in the plane of the disk, and also in the horizontal plane. The sense of axis $\hat{\mathbf{1}}$ is chosen so that the component ω_1 of the angular velocity vector $\boldsymbol{\omega}$ of the disk about this axis is positive. Consequently, axis $\hat{\mathbf{2}}$ points in the direction of the velocity of the point of contact. (For the special case where the point of contact does not move, $\omega_1 = 0$ and analysis is unaffected by the choice of direction of axis $\hat{\mathbf{1}}$.)

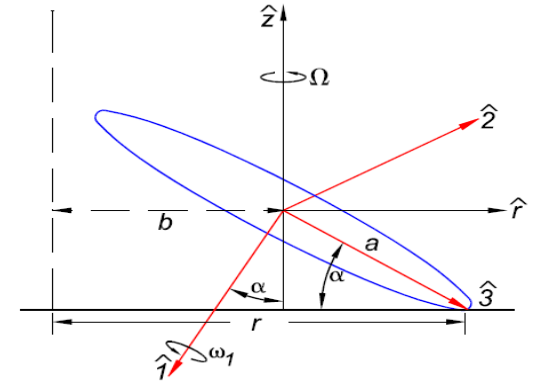
Before discussing the dynamics of the problem, a considerable amount can be deduced from kinematics. The total angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ can be thought of as composed of two parts,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{123} + \omega_{\text{rel}} \hat{\mathbf{1}}, \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\omega}_{123}$ is the angular velocity of the triad $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$, and $\omega_{\text{rel}} \hat{\mathbf{1}}$ is the angular velocity of the disk relative to that triad; the relative angular velocity can only have a component

along $\hat{\mathbf{1}}$ by definition. The angular velocity of the triad $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ has component $\dot{\alpha}$ about the horizontal axis $\hat{\mathbf{2}}$ (where the dot indicates differentiation defined to have component Ω about the vertical axis $\hat{\mathbf{z}}$. Since ω_{123} has no component along the (horizontal) axis $\hat{\mathbf{2}} \times \hat{\mathbf{z}} \equiv \hat{\mathbf{r}}$, the triad $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ can be written

$$\omega_{123} = \Omega \hat{\mathbf{z}} + \dot{\alpha} \hat{\mathbf{2}} = -\Omega \cos \alpha \hat{\mathbf{1}} + \dot{\alpha} \hat{\mathbf{2}} + \Omega \sin \alpha \hat{\mathbf{3}}$$



noting that

$$\hat{\mathbf{z}} = -\cos \alpha \hat{\mathbf{1}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{3}}, \quad (4)$$

as can be seen from Fig. 1. The time rates of change of the axes are therefore

$$\frac{d\hat{\mathbf{1}}}{dt} = \omega_{123} \times \hat{\mathbf{1}} = -\Omega \sin \alpha \hat{\mathbf{2}} - \dot{\alpha} \hat{\mathbf{3}}, \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{2}}}{dt} = \omega_{123} \times \hat{\mathbf{2}} = \Omega \sin \alpha \hat{\mathbf{1}} - \Omega \cos \alpha \hat{\mathbf{3}}, = -\Omega \hat{\mathbf{r}}, \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = \omega_{123} \times \hat{\mathbf{3}} = \dot{\alpha} \hat{\mathbf{1}} + \Omega \cos \alpha \hat{\mathbf{2}}, \quad (7)$$

where the rotating horizontal axis $\hat{\mathbf{r}}$ is related by

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{2}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\sin \alpha \hat{\mathbf{1}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{3}}, \quad (8)$$

whose time rate of change is

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \Omega \hat{\mathbf{2}}. \quad (9)$$

Combining eqs. (2) and (3) we write the total angular velocity vector as

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \dot{\alpha} \hat{\mathbf{2}} - \Omega \sin \alpha \hat{\mathbf{3}}, \quad (10)$$

where

$$\omega_1 = \omega_{\text{rel}} - \Omega \cos \alpha. \quad (11)$$

The (nonholonomic) constraint that the disk rolls without slipping relates the velocity of the center of mass to the angular velocity vector $\boldsymbol{\omega}$ of the disk. In particular, the instantaneous velocity of the point contact of the disk with the horizontal plane is zero,

$$\mathbf{v}_{\text{contact}} = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 0. \quad (12)$$

Hence,

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = a \hat{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{\omega} = -a\dot{\alpha} \hat{\mathbf{1}} + a\omega_1 \hat{\mathbf{2}}, \quad (13)$$

using eqs. (1) and (10).

Additional kinematic relations can be deduced by noting that the point of contact between the disk and the horizontal plane can always be considered as moving instantaneously in a circle whose radius vector we define as $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$ with $r \geq 0$, as shown in Fig. 1, and whose center is defined to have position $x_A \hat{\mathbf{x}} + y_A \hat{\mathbf{y}}$ where $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{y}}$ are fixed horizontal unit vectors in the lab frame. Then, the center of mass of the disk has position

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = x_A \hat{\mathbf{x}} + y_A \hat{\mathbf{y}} + r \hat{\mathbf{r}} - a \hat{\mathbf{3}}, \quad (14)$$

and

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = \dot{x}_A \hat{\mathbf{x}} + \dot{y}_A \hat{\mathbf{y}} + \dot{r} \hat{\mathbf{r}} - a\dot{\alpha} \hat{\mathbf{1}} + (r - a \cos \alpha)\Omega \hat{\mathbf{2}}. \quad (15)$$

In the special case of steady motion, $\dot{x}_A = \dot{y}_A = \dot{r} = \dot{\alpha} = 0$, eqs. (13) and (15) combine to give

$$\omega_1 = \frac{b}{a}\Omega, \quad (16)$$

where

$$b = r - a \cos \alpha \quad (17)$$

is the horizontal distance from the axis of the circular motion to the center of mass of the disk. Thus, for steady motion the “spin” angular velocity ω_1 is related to the “precession” angular velocity Ω according to eq. (16). While ω_1 is defined to be nonnegative, length b can be negative if Ω is negative as well.

Except for axis $\hat{\mathbf{1}}$, the rotating axes $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ are not body axes, but the inertia tensor \mathbf{I} (with components I_{ij}) is diagonal with respect to them in view of the symmetry of the disk. We write

$$I_{11} = 2kma^2, \quad I_{22} = kma^2 = I_{33}, \quad (18)$$

which holds for any thin, circularly symmetric disk according to the perpendicular axis theorem; $k = 1/2$ for a disk with mass m concentrated at the rim, $k = 1/4$ for a uniform disk, *etc.* The angular momentum \mathbf{L}_{cm} of the disk with respect to its center of mass can now be written as

$$\mathbf{L}_{\text{cm}} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = kma^2(2\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \dot{\alpha} \hat{\mathbf{2}} - \Omega \sin \alpha \hat{\mathbf{3}}). \quad (19)$$

Turning at last to the dynamics of the rolling disk, we suppose that the only forces on it are $-mg\hat{\mathbf{z}}$ due to gravity and \mathbf{F} at the point of contact with the horizontal plane. For now, we ignore rolling friction and friction due to the air surrounding the disk.

The equation of motion for the position \mathbf{r}_{cm} of the center of mass of the disk is then

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt^2} = \mathbf{F} - mg \hat{\mathbf{z}}. \quad (20)$$

The torque equation of motion for the angular momentum \mathbf{L}_{cm} about the center of mass is

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{cm}}}{dt} = \mathbf{N}_{\text{cm}} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \quad (21)$$

We eliminate the unknown force \mathbf{F} in eq. (21) via eqs. (1) and (20) to find

$$\frac{1}{ma} \frac{d\mathbf{L}_{\text{cm}}}{dt} + \frac{d^2 \mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt^2} \times \hat{\mathbf{3}} = g \hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (22)$$

This can be expanded using eqs. (4), (5)-(7), (13) and (19) to yield the $\hat{\mathbf{1}}$, $\hat{\mathbf{2}}$ and $\hat{\mathbf{3}}$ components of the equation of motion,

$$(2k + 1)\dot{\omega}_1 + \dot{\alpha}\Omega \sin \alpha = 0, \quad (23)$$

$$k\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + (2k + 1)\omega_1\Omega \sin \alpha - (k + 1)\ddot{\alpha} = \frac{g}{a} \cos \alpha, \quad (24)$$

$$\dot{\Omega} \sin \alpha + 2\dot{\alpha}\Omega \cos \alpha + 2\omega_1\dot{\alpha} = 0. \quad (25)$$

Besides the coordinates (x_A, y_A) of the center of motion, we can readily identify only one other constant of the motion, the total energy

$$\begin{aligned}
 E &= T + V = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + mgz \\
 &= \frac{ma^2}{2} \left[(2k + 1)\omega_1^2 + (k + 1)\dot{\alpha}^2 + k\Omega^2 \sin^2 \alpha + \frac{2g}{a} \sin \alpha \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

The time derivative of the energy is consistent with the equations of motion (23)-(25), but does not provide any independent information.

Friction at Very Small α

In practice, the motion of a spinning disk appears to cease rather abruptly for a small value of the angle α , corresponding to large precession angular velocity Ω . If the motion continued, the velocity Ωa of the point of contact would eventually exceed the speed of sound.

This suggests that air friction may play a role in the motion at very small α , as has been discussed recently by Moffatt [7, 8, 9].

When the rolling motion ceases, the disk seems to float for a moment, and then settle onto the horizontal surface. It appears that the upward contact force F_z vanished, and

the disk lost contact with the surface. From eqs. (13) and (20), we see that for small α , $F_z \approx mg + ma\ddot{\alpha}$. Since the height of the center of mass above the surface is $h \approx a\alpha$ for small α , we recognize that the disk loses contact with the surface when the center of mass is falling with acceleration g .

Moffatt invites us to relate the power P dissipated by friction to the rate of change dU/dt of total energy of the disk. For a disk moving with $b = 0$ at a small angle $\alpha(t)$,

$$U = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2 + mgh \approx \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{2}mag\alpha, \quad (72)$$

using eq. (38) and assuming that eq. (40) holds adiabatically. Then,

$$P = \frac{dU}{dt} \approx ma^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{3}{2}mag\dot{\alpha} \approx \frac{5}{2}mag\dot{\alpha}, \quad (73)$$

where the second approximation holds when $F_z \approx 0$ and $ma\ddot{\alpha} \approx mg$.

For the dissipation of energy we need a model. First, we consider rolling friction, taken to be the effect of inelastic collisions between the disk and the horizontal surface. For example, suppose the surface has small bumps with average spacing δ and average height $h = \epsilon\delta$. We also suppose that the disk dissipates energy $mgh = mg\epsilon\delta$ when passing over a bump. The time taken for the rotating disk to pass over a bump is $\delta/a\Omega$ (at small α), so the rate of dissipation of energy to rolling friction is

$$P = -\frac{mg\epsilon\delta}{\delta/a\Omega} = -\epsilon mag\Omega. \quad (74)$$

A generalized form of velocity-dependent friction could be written as

$$P = -\epsilon mag\Omega^\beta, \quad (75)$$

where the drag force varies with (angular) velocity as $\Omega^{\beta-1}$. A rolling frictional force proportional to the velocity of the contact point corresponds to $\beta = 2$; an air drag force proportional to the square of the velocity corresponds to $\beta = 3$. The model of Moffatt [7] emphasizes the viscous shear of the air between the disk and the supporting horizontal surface, and corresponds to $\beta = 4$. A revised version of Moffatt's model reportedly [9] corresponds to $\beta = 2.5$.

Equating the frictional power loss to the rate of change (73) of the energy of the disk, we find

$$\dot{\alpha} = -\frac{2\epsilon}{5}\Omega^\beta \approx -\frac{2\epsilon}{5} \left(\frac{g}{ak}\right)^{\beta/2} \frac{1}{\alpha^{\beta/2}}, \quad (76)$$

using $\Omega^2 \approx g/ak\alpha$ from eq. (31), which integrates to give

$$\alpha^{(\beta+2)/2} = \frac{\epsilon(\beta+2)}{5} \left(\frac{g}{ak}\right)^{\beta/2} (t_0 - t), \quad (77)$$

and

$$\alpha = \left(\frac{\epsilon(\beta+2)}{5}\right)^{2/(\beta+2)} \left(\frac{g}{ak}\right)^{\beta/(\beta+2)} (t_0 - t)^{2/(\beta+2)}. \quad (78)$$

In this model, the angular velocity Ω obeys

$$\Omega = \left(\frac{5g/\epsilon(\beta + 2)ak}{t_0 - t} \right)^{1/(\beta+2)} \equiv \left(\frac{C}{t_0 - t} \right)^{1/(\beta+2)}, \quad (79)$$

which exhibits what is called by Moffatt a “finite-time singularity” at time t_0 [7] for any value of β greater than -2 .

A premise of this analysis is that it will cease to hold when the disk loses contact with the surface, *i.e.*, when $F_z = 0$, at which time $\ddot{\alpha} = -g/a$, or equivalently $d^2(1/\Omega^2)/dt^2 = -k$. Taking the derivative of eq. (79), the maximum angular velocity is

$$\Omega_{\max} = \left(\frac{k(\beta + 2)^2}{2\beta} \right)^{1/2(\beta+1)} C^{1/(\beta+1)}, \quad (80)$$

which occurs at time t_{\max} given by

$$t_0 - t_{\max} = \left(\frac{2\beta}{k(\beta + 2)^2} \right)^{(\beta+2)/2(\beta+1)} C^{-1/(\beta+1)}. \quad (81)$$

In Moffatt’s model based on viscous drag of the air between the disc and the surface [7], $\beta = 4$,

$$\alpha = \left(\frac{2\pi\eta a}{m}(t_0 - t) \right)^{1/3}, \quad (82)$$

where $\eta = 1.8 \times 10^{-4}$ g-cm⁻¹-s is the viscosity of air, and

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{ak}} \left(\frac{m/2\pi\eta a}{t_0 - t} \right)^{1/6}. \quad (83)$$

This model is notable for having no free parameters.

The main distinguishing feature between the various models for friction is the different time dependences (79) for the angular velocity Ω as angle α decreases.

A recent report [8] indicates that the total times of spin of coins in vacuum and in air are similar, which suggests that air drag is not the dominant mechanism of energy dissipation. Such results do not preclude that air drag could be important for disks of better surface quality, and hence lower rolling friction, or that air drag becomes important only during the high-frequency motion as time t approaches t_0 .

To help determine whether any of the above models corresponds to the practical physics, we have performed an experiment using a Tangent Toy Euler's Disk [11]. The spinning disk was illuminated by a flashlight whose beam was reflected off the surface of the disk onto a phototransistor [16] whose output was recorded by a digital oscilloscope [17] at 5 kS/s. The record length of 50,000 samples permitted the last 10 seconds of the spin history of the disk to be recorded, as shown in Figs. 2-4.

The analysis of the data shown in Figs. 2-4 consisted of identifying the time t_i of the peak of cycle i of oscillation as the mean of the times of the rising and falling edges of the waveform at roughly one half the peak height. The average angular frequency for each cycle was calculated as $\Omega_i = 2\pi/(t_{i+1} - t_i)$, as shown in Fig. 5, and the rate of change of angular frequency was calculated as $d\Omega_i/dt = 2(\Omega_{i+1} - \Omega_i)/(t_{i+2} - t_i)$. The angular frequency of the last analyzable cycle was $\Omega_{\max} = 680$ Hz.

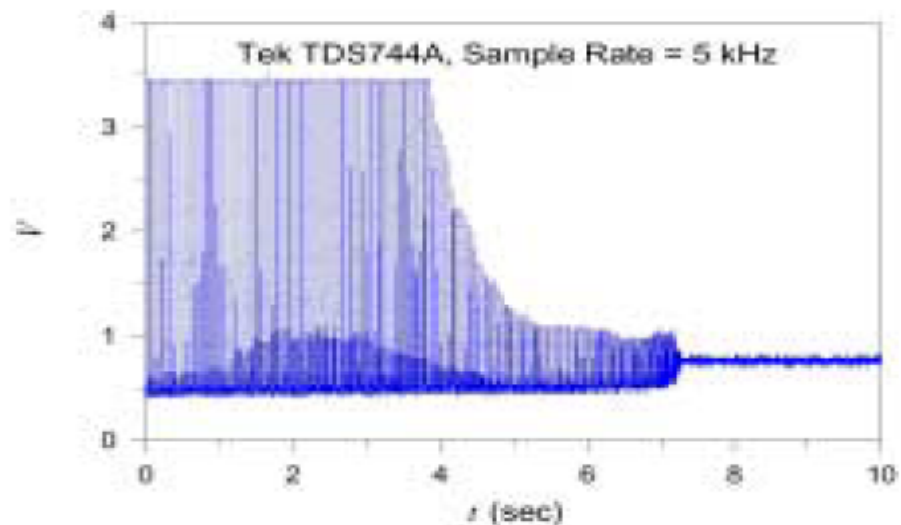


Figure 2: A 10-s record at 5 kS/s of the spinning of a Tangent Toy Euler's Disk [11] as observed by a phototransistor that detected light reflected off the disk.

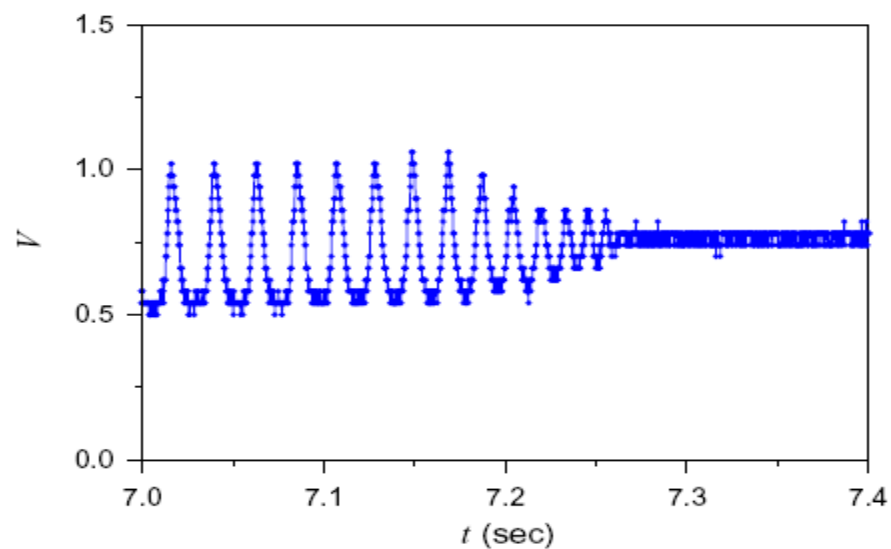


Figure 3: The last 0.25 s of the history of the spinning disk shown in Fig. 2.

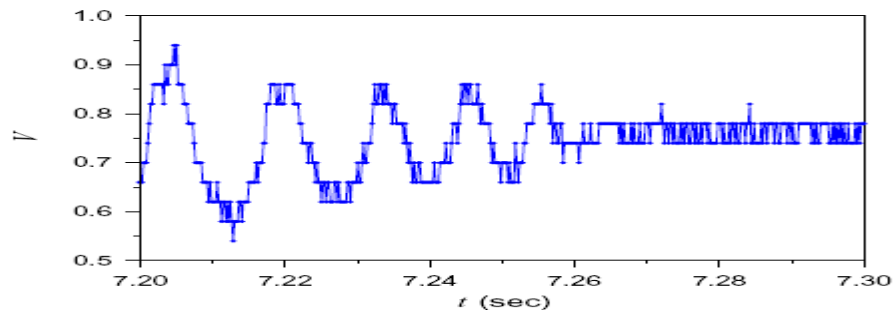


Figure 4: The last 0.06 s of the history of the spinning disk shown in Figs. 2 and 3.

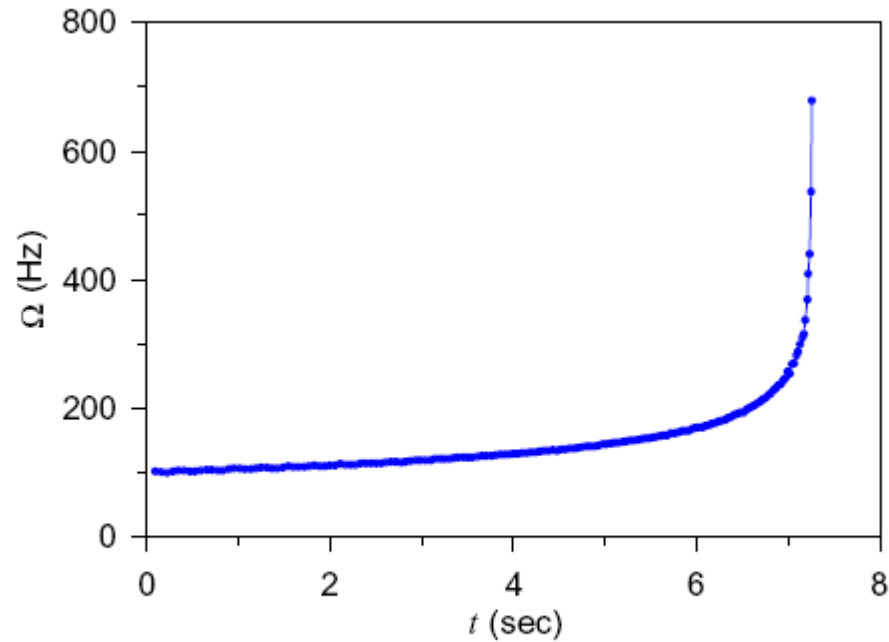


Figure 5: Ω vs. t deduced from the data shown in Figs. 2-4.

The data can be conveniently compared to the result (79) in the form

$$\frac{1}{\Omega} = \left(\frac{t_0 - t}{C} \right)^{1/(\beta+2)} \quad (84)$$

via a log-log plot of $1/\Omega$ vs. $t_0 - t$, given an hypothesis as to t_0 . Inspection of Fig. 4 suggests that t_0 is in the range 7.26-7.28 s for our data sample. Figures 6 and 7 show plots of $1/\Omega$ vs. $t_0 - t$ for $t_0 = 7.26$ and 7.28 s, respectively. The straight lines are not fits to the data, but illustrate the behavior expected according to eq. (79) for various values of parameter β .

A larger value of t_0 has the effect of lowering the apparent value of parameter β for the last few cycles of the motion. Figure 4 suggests that t_0 could hardly be less than 7.26 s, for which case a value of $\beta = 2$ would fit the entire data sample rather well.

In view of the uncertainty in assigning a value to the time t_0 , it is interesting to ask at what time t does the time remaining equal exactly one period of the motion, *i.e.*, when does $t_0 - t = 2\pi/\Omega(t)$? For $\beta = 2$, the answer from eq. (79) is when $\Omega = (C/2\pi)^{1/3}$. From Fig. 6 we estimate that $C^{-1/4} = 0.0055$, and hence $\Omega \approx 560$ Hz when the remaining time of the motion is $2\pi/\Omega = 0.011$ s. Recall that the last cycle analyzable in our data sample yielded a value of 680 Hz for Ω . The preceding analysis tells us that time t_0 cannot be more than about 0.01 s after the last observable peak in the data, which suggests that t_0 is closer to 7.26 than to 7.28 s, and that Fig. 6 is the relevant representation of the experiment.

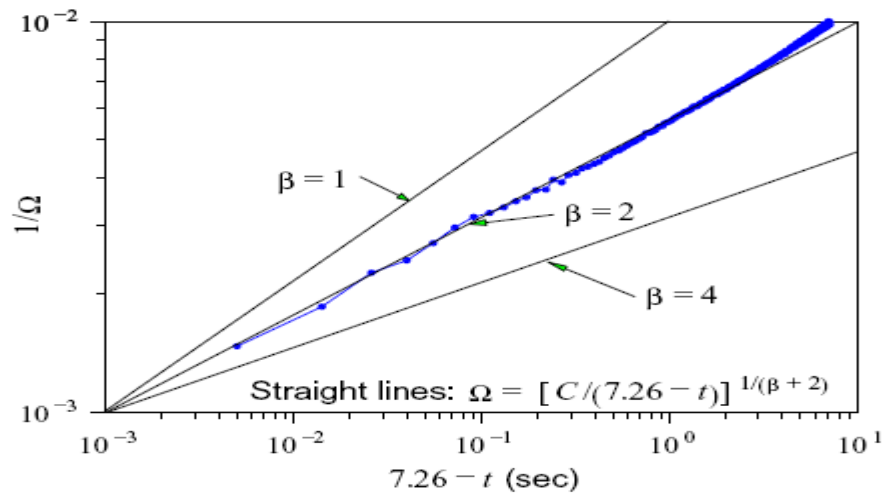


Figure 6: $1/\Omega$ vs. $t_0 - t$ for $t_0 = 7.26$ s, using the data shown in Figs. 2-4. The straight lines illustrate the behavior expected according to eq. (79) for various values of parameter β .

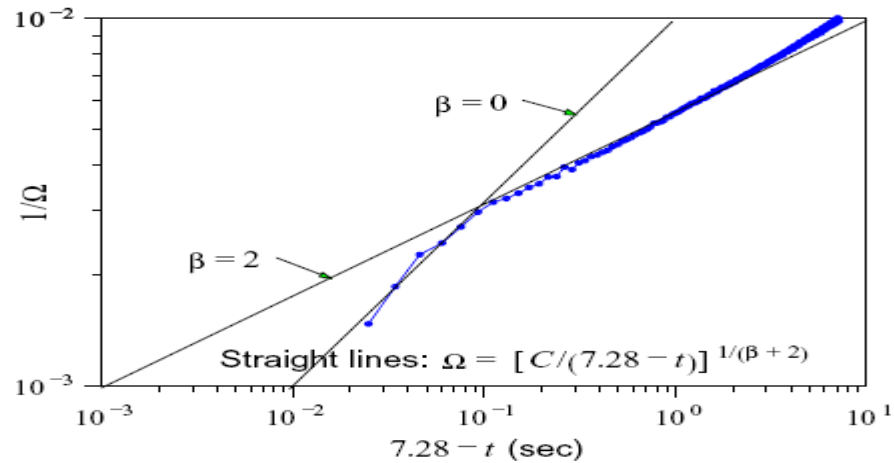


Figure 7: $1/\Omega$ vs. $t_0 - t$ for $t_0 = 7.28$ s, using the data shown in Figs. 2-4.

For $\beta = 2$, the spinning disk is predicted by eq. (81) to lose contact with the horizontal surface when $t_0 - t = C^{-1/3} = 0.001$ s for $C^{-1/4} = 0.0055$. The instantaneous angular frequency at that time is predicted by eq. (80) to be $\Omega = C^{1/3} = 1030$ Hz. These values are, of course, beyond those for the last analyzable cycle in the data.

The question as to the value of t_0 can be avoided by noting [18] that the time derivative of eq. (79) yields the relation

$$\frac{d\Omega}{dt} \propto \Omega^{\beta+3}. \quad (85)$$

However, $d\Omega/dt$ must be calculated from differences of differences of the times of the peaks in the data, so is subject to greater uncertainty than is Ω . Figure 8 shows a log-log plot of $d\Omega/dt$ vs. Ω together with straight lines illustrating the expected behavior for various values of β . Again, $\beta = 2$ is a consistent description of the entire data sample. The value of $\beta = 0$ suggested by Fig. 7 based on $t_0 = 7.28$ s is quite inconsistent with Fig. 8.

The results of our experiment on the time history of the motion of a spinning disk are not definitive, but are rather consistent with the dissipated power being proportional to the square of the velocity of the point of contact, and hence the dissipative force varying linearly with velocity. Our experiment cannot determine whether during the 0.01 s beyond the last

full cycle of the motion an additional dissipative mechanism such as air friction with power loss proportional to the fourth power of the velocity [7] became important.

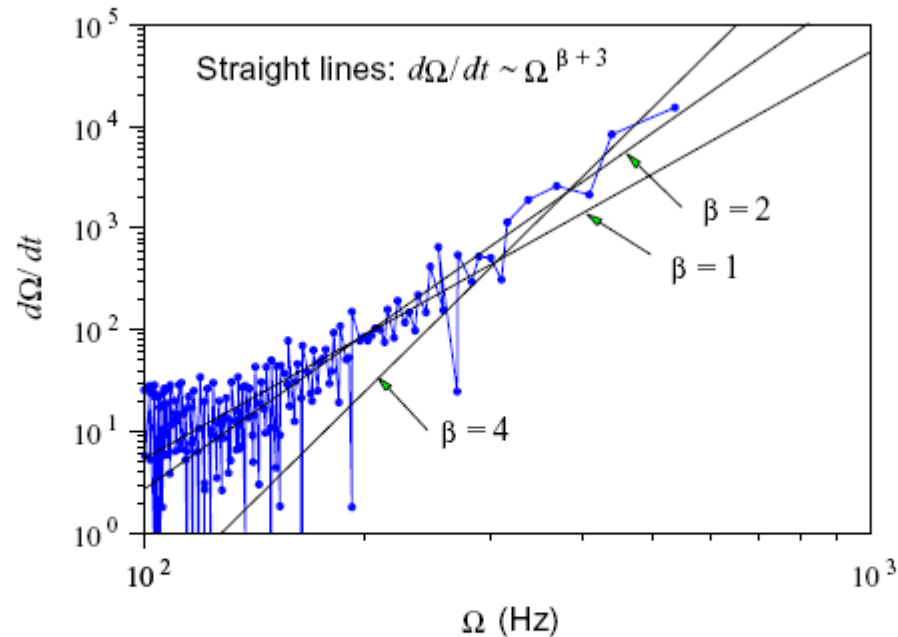
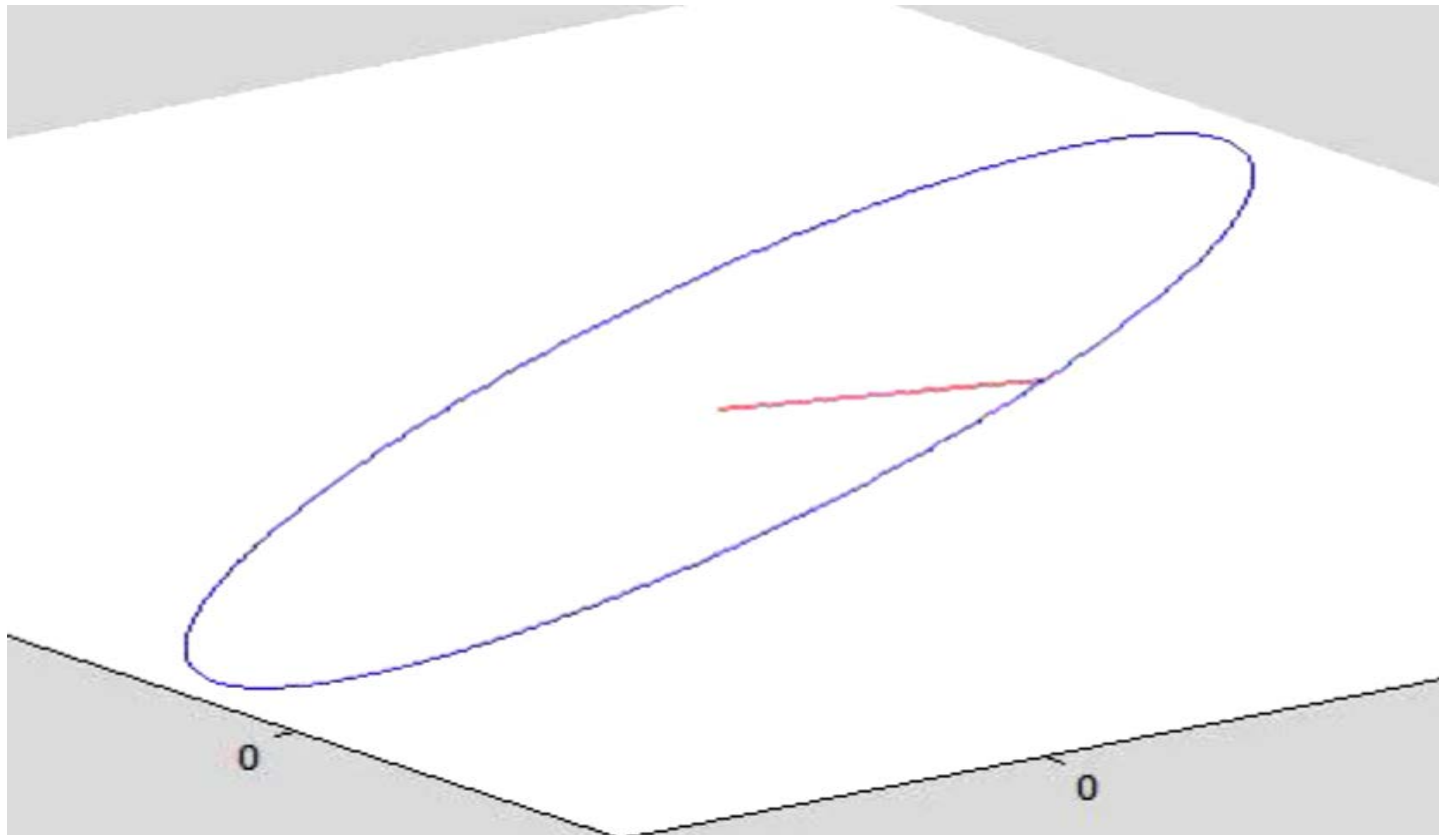


Figure 8: $d\Omega/dt$ vs. Ω for the data shown in Figs. 2-4. The straight lines illustrate the behavior expected according to eq. (85) for various values of parameter β .

- [1] E.J. Routh, *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, 6th ed. (Macmillan, London, 1905; reprinted by Dover Publications, New York, 1955).
- [2] H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1920), p. 156.
- [3] H.T., *Note on the Theory of the Spinning Top*, Camb. Math. J. **1**, 42-44 (1839). A reprint edition of this journal, published in 1845 under the supervision of W. Thomson, includes an index that identifies the author of this paper as Archibald Smith, who was the first editor of the Camb. Math. J. (T. Crilly, private communication). This paper is alluded to in ref. 1 of [6].
- [4] J.H. Jellett, *A Treatise on the Theory of Friction* (Hodges, Foster and Co., Dublin; Macmillan, London 1872), Chap. VIII, Sec. I.
- [5] E.G. Gallop, *On the Rise of a Spinning Top*, Trans. Camb. Phil. Soc. **19**, 356-373 (1904).
- [6] C.G. Gray and B.G. Nickel, *Constants of the motion for nonslipping tippe tops and other tops with round pegs*, Am. J. Phys. **68**, 821-828 (2000),
http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/mechanics/gray_ajp_68_821_00.pdf
- [7] H.K. Moffatt, *Euler's disk and its finite-time singularity*, Nature **404**, 833-834 (2000),
http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/mechanics/moffatt_nature_404_833_00.pdf

- [8] G. van den Engh, P. Nelson, J. Roach, *Numismatic gyrations*, Nature **408**, 540 (2000), http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/mechanics/engh-moffat_nature_408_540_00.pdf
- [9] H.K. Moffatt, *Moffatt replies*, Nature **408**, 540 (2000).
- [10] E.A. Milne, *Vectorial Mechanics* (Interscience Publishers, New York, 1948).
- [11] J. Bendik, *The Official Euler's Disk Website*, <http://www.eulersdisk.com/>
Tangent Toy Co., P.O. Box 436, Sausalito, CA 94966, <http://www.tangenttoy.com/>
- [12] K.T. McDonald, *Circular Orbits Inside the Globe of Death*,
<http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/sphereofdeath.pdf>
- [13] Some websites featuring the Globe of Death are
<http://www.globeofdeath.com/home.html>
"The Urias" at <http://www.ringling.com/bios/>
<http://www.sciencejoywagon.com/physicszone/lesson/03circ/sphear/sphear.htm>
- [14] M.G. Olsson, *Coin Spinning On a Table*, Am. J. Phys. **40**, 1543-1545 (1972).
- [15] Panasonic Model PVDV910D, Matsushita Electric Corporation of America, One Panasonic Way, Secaucus, NJ 07094, <http://www.panasonic.com/>
- [16] Model 253, Taos Inc., Plano, TX 75074,
<http://www.taosinc.com/pdf/TSL253.pdf>
- [17] Model TDS744A, Tektronix Inc., Beaverton, OR 97077,
<http://www.tektronix.com/>
- [18] A. Chatterjee, private communication. He performed (unpublished) experiments in which a 20-cm-diameter disk was photographed with a high-speed camera, yielding measurements of angle α and time t for each cycle. A plot of $d\alpha/dt$ vs. Ω suggested that β was considerably less than 4.



Disc spinning in Matlab..mp4

6. Algunas Investigaciones matemáticas conectadas con la "industria":

6. 1. Cohetes espaciales



NATIONAL AERONAUTICS
AND SPACE ADMINISTRATION

+ Text Only Site
+ Non-Flash Version
+ Contact Glenn

FIND IT @ NASA :

+ GO

+ ABOUT NASA

+ NEWS & EVENTS

+ MULTIMEDIA

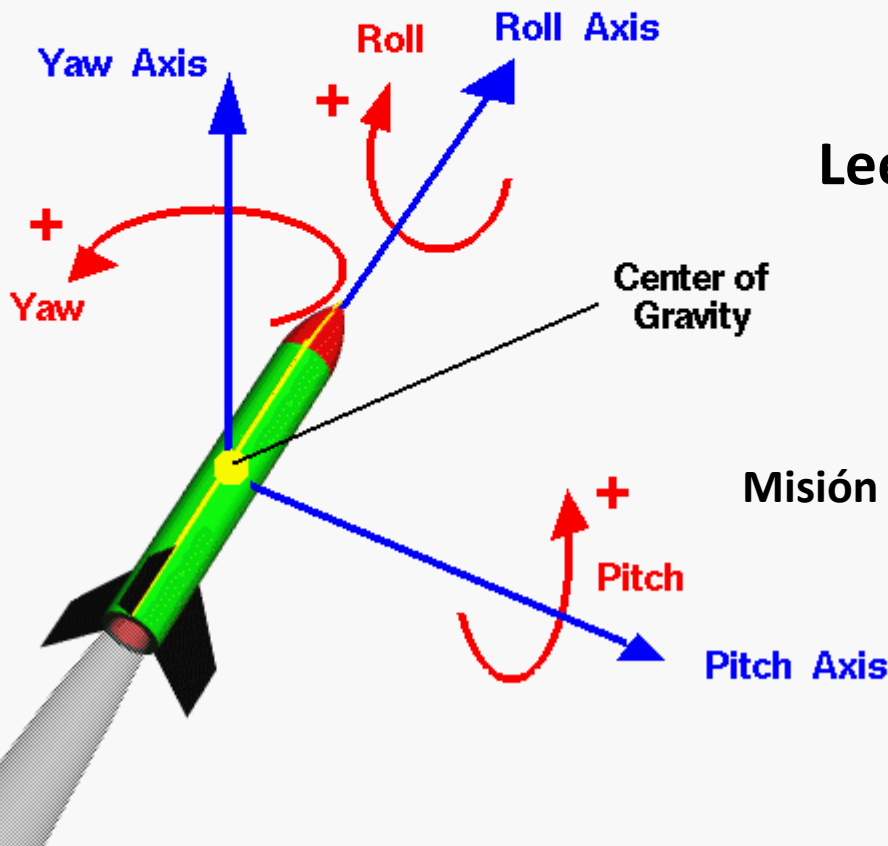
+ MISSIONS

+ MY NASA

+ WORK FOR NASA



Rocket Rotations Body Axes



Lee-Markus, SIAM, 1989

Misión Rosetta El PAÍS, 4 de junio 2014

Un problema inverso emergente en el estudio de
los movimientos con rotaciones intrínsecas no
coaxiales de un disco

Gabriel Barceló ⁽¹⁾, Jesus Ildefonso Díaz ⁽²⁾ y Ángel Manuel Ramos ⁽²⁾

⁽¹⁾ Advanced Dynamics

⁽²⁾ Departamento de Matemática Aplcada de la UCM

January 27, 2007

Departamento de Matemática Aplicada

Un problema inverso emergente en el estudio de los movimientos con rotaciones intrínsecas no coaxiales de un disco

Gabriel Barceló, Advanced Dynamics, S.A.

Jesús Ildefonso Díaz

Ángel Manuel Ramos

} Universidad Complutense de Madrid

Sevilla, 24 de septiembre de 2007

1 Motivación de ADSA

Profundización en el estudio de los fenómenos de
Rotación y Orbitación
del sólido rígido

➤ De acuerdo con la Mecánica Clásica:

- Si a un sólido con movimiento de rotación se le aplica un par de fuerzas externas, éstas causaran una nueva rotación en el sólido que se sumará vectorialmente a la ya existente, pero que **no modificará la trayectoria del centro de masa** del sólido.
- En otras palabras, **si no se aplica una fuerza neta al centro de masas del sólido, éste no modificará su trayectoria**, ni siquiera si se le aplica un par de fuerzas externas. De hecho, se modificará únicamente su giro intrínseco, como resultado de la suma vectorial de la rotación inicial y de la rotación producida por el par.

➤ **De acuerdo con la Teoría de Interacciones Dinámicas de ADSA (y en contradicción con la Mecánica Clásica):**

Puede existir correlación entre rotación y orbitación.

Si un cuerpo con momento angular intrínseco y velocidad de traslación es sometido a un par no coincidente de fuerzas, éste modificará la trayectoria de traslación.

En caso de que el par fuese constante, se generará una órbita cerrada (**sin ser necesaria la acción de una fuerza central**)

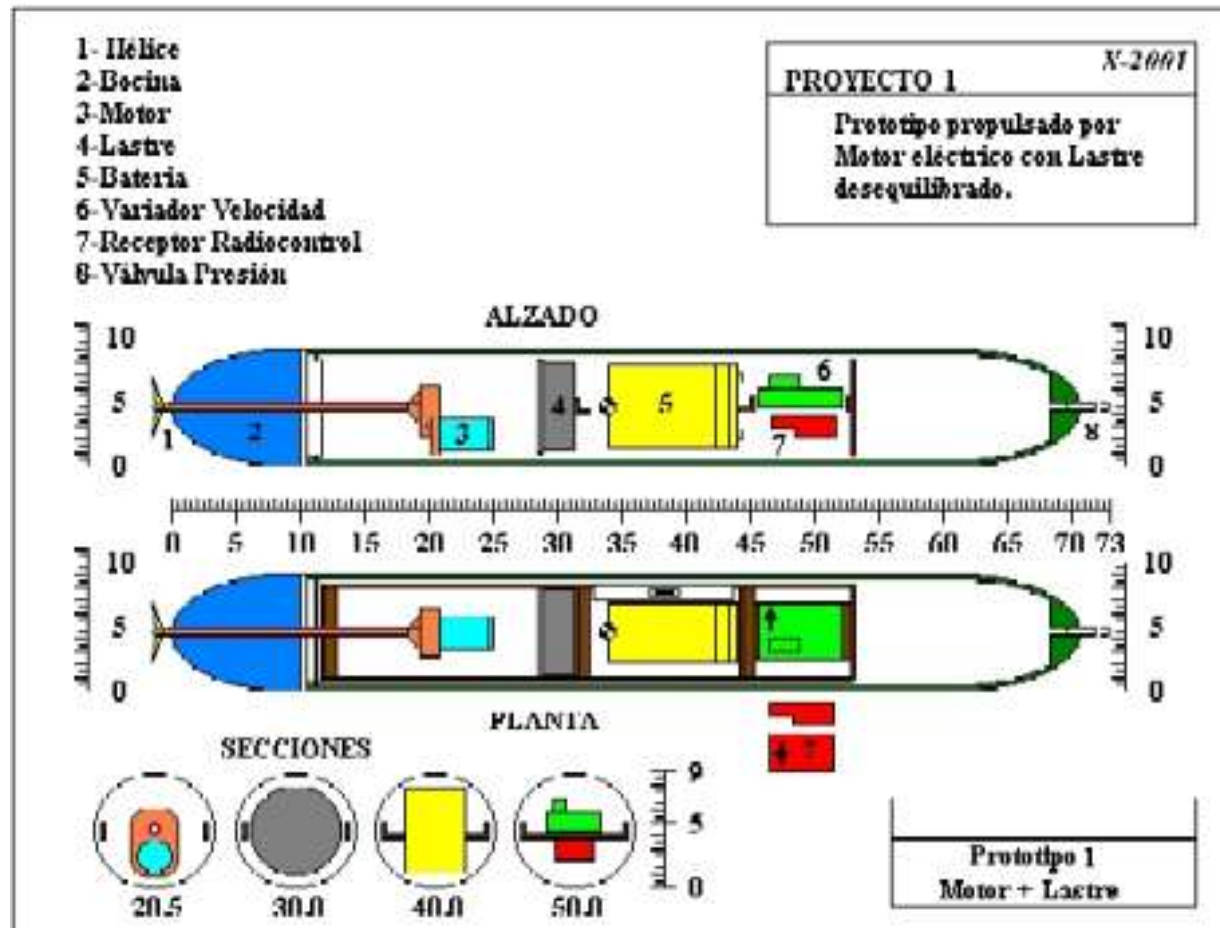
1 Motivación de ADSA

Conclusión de ADSA: hay indicios de que pueda demostrarse la siguiente *Conjetura*

Cuando se producen simultáneamente una rotación intrínseca y un movimiento orbital, podría ser debido a que **existen interacciones dinámicas generadas por un par que actúa sobre el cuerpo dotado de rotación intrínseca sin que resulte requisito necesario la existencia de una fuerza central**, aunque el movimiento resultante sería semejante al que describiría un cuerpo sometido a fuerza central.

Experimentos de ADSA:

“Submarino sin timón”



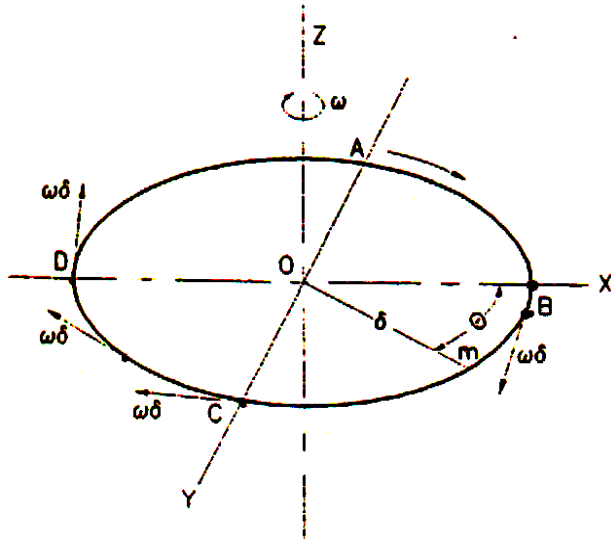
Experimentos de ADSA:

Submarino
sin timón



Pb inverso en Rotaciones Intrínsecas

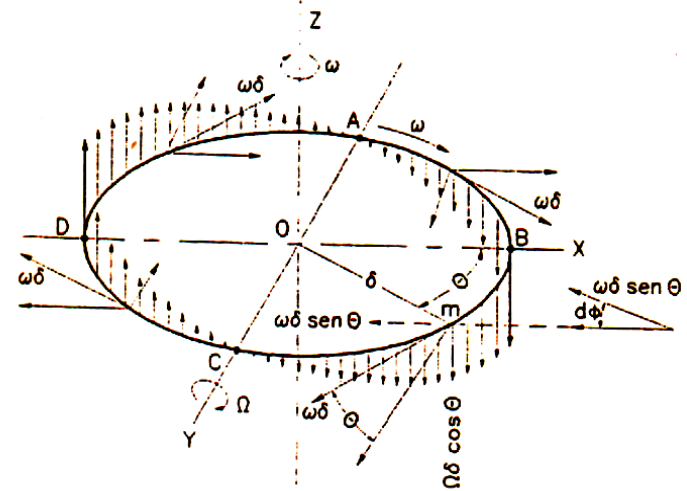
Disco homogéneo de masa m , radio r y anchura despreciable



Disco de simetría axial en rotación propia

Velocidad tangencial constante debida a la rotación

$$V = \omega \cdot \delta$$



Disco tras añadir una rotación no coaxial con la rotación propia

A la anterior velocidad tangencial constante se añade ahora una velocidad variable según la posición de la partícula

$$V_z = \Omega \cdot \delta \cdot \cos \theta$$

Problema planteado por ADSA.

Analizar si la descripción de velocidades anteriores era compatible con las ecuaciones de algún movimiento del sólido rígido

Formalización matemática del problema:

$\mathbf{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ Sistema de referencia inercial

$\bar{\mathbf{R}}(t) = \{O(t); \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\}$ Sistema de referencia solidario al sólido
tal que $\bar{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{R}$

Punto arbitrario en $t = 0$: $(x, y, z) = \delta(\cos(\mu), \text{sen}(\mu), 0) = \delta \cos(\mu) \mathbf{e}_1 + \delta \text{sen}(\mu) \mathbf{e}_2$

Trayectoria del punto arbitrario: $(x(t), y(t), z(t)) = \delta \cos(\mu) \hat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta \text{sen}(\mu) \hat{\mathbf{e}}_2(t)$

2 Descripción del problema

Velocidad en el punto arbitrario: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$

$$\mathbf{V}_1 = \omega \delta \left(-\text{sen}(\mu) \hat{\mathbf{e}}_1(t) + \text{cos}(\mu) \hat{\mathbf{e}}_2(t) \right) \text{ (giro intrínseco)}$$

$$\mathbf{V}_2 = \Omega \delta \left(\text{cos}(\mu + \omega t) \hat{\mathbf{e}}_3(t) \right) \text{ (nuevo giro)}$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_{\hat{\mathbf{O}}}(t) \text{ (velocidad de } \hat{\mathbf{O}}(t))$$

Problema:

¿Es la velocidad \mathbf{V} compatible con las ecuaciones de algún movimiento del sólido rígido?

Descripción de grados de libertad del movimiento:

Es bien conocido que para determinar el movimiento del sólido rígido basta con **6 grados de libertad**

Por ejemplo: 3 coordenadas de $\hat{O}(t)$ respecto de R

3 ángulos de Euler (orientan $\hat{R}(t)$ respecto de R)

(otra muchas posibilidades son válidas)

Buscaremos coordenadas de $\hat{R}(t) = \{O(t); \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t)\}$ respecto de R

Razón:

12 grados de libertad (> 6) pero formulación más robusta que en otros casos

3 Resolución del problema

Ecuaciones consideradas

Sin necesidad de tener en cuenta $\widehat{\mathbf{O}}(t)$ por el momento, se tiene que

$$(*) \begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt}(t) = \hat{w}_3(t)\hat{\mathbf{e}}_2(t) - \hat{w}_2(t)\hat{\mathbf{e}}_3(t) \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{dt}(t) = -\hat{w}_3(t)\hat{\mathbf{e}}_1(t) + \hat{w}_1(t)\hat{\mathbf{e}}_3(t) \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt}(t) = \hat{w}_2(t)\hat{\mathbf{e}}_1(t) - \hat{w}_1(t)\hat{\mathbf{e}}_2(t) \end{cases}$$

donde $\widehat{\mathbf{w}}(t) = (\hat{w}_1(t), \hat{w}_2(t), \hat{w}_3(t))$ es la velocidad angular.

9 ecuaciones y 12 incógnitas $(\widehat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$.

Ecuaciones consideradas

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt}(t) = A(\widehat{\mathbf{w}}(t))\mathbf{E}(t),$$

donde $\mathbf{E} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^9$ es $\mathbf{E}(t) = (\hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t))^T$,

$$A(\widehat{\mathbf{w}}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{w}_3(t)I & -\hat{w}_2(t)I \\ -\hat{w}_3(t)I & 0 & \hat{w}_1(t)I \\ \hat{w}_2(t)I & -\hat{w}_1(t)I & 0 \end{pmatrix}$$

e $I, 0$ son las matrices identidad y nula 3×3 .

Teorema: Dada $\hat{\mathbf{w}}$ continua arbitraria, la solución \mathbf{E} de la ecuación anterior verifica que $\{\hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\}$ es una base ortonormal para todo $t \geq 0$.

Descripción de velocidades: Fórmula de Coriolis Poisson

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t) + \hat{\mathbf{w}}(t) \times \hat{\mathbf{r}}_P(t) = \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t) + \sum_{i=1}^3 x_{P,i} \hat{\mathbf{w}}(t) \times \hat{\mathbf{e}}_i(t)$$

Según hemos visto $\hat{\mathbf{r}}_P(t) = \delta \cos(\mu) \hat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta \sin(\mu) \hat{\mathbf{e}}_2(t)$ ($\delta \in \mathbb{R}$, $\mu \in [0, 2\pi)$)

Por tanto

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mathbf{V}_1}_{-\omega \delta \sin(\mu) \hat{\mathbf{e}}_1(t) + \omega \delta \cos(\mu) \hat{\mathbf{e}}_2(t)} + \underbrace{\mathbf{V}_2}_{\Omega \delta \cos(\mu + \omega t) \hat{\mathbf{e}}_3(t)} = \mathbf{v}_P(t) - \underbrace{\mathbf{V}_3}_{\mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t)} = \\ & -\delta \sin(\mu) \hat{\mathbf{w}}_3(t) \hat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta \cos(\mu) \hat{\mathbf{w}}_3(t) \hat{\mathbf{e}}_2(t) + \delta \left(\sin(\mu) \hat{\mathbf{w}}_1(t) - \cos(\mu) \hat{\mathbf{w}}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_3(t), \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$, $\delta \in [0, r]$, $\mu \in [0, 2\pi)$.

Utilizando que $\text{sen}(\mu)$ y $\text{cos}(\mu)$ son l.i. como funciones de μ :

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \hat{w}_3(t)\hat{e}_{11}(t) - \hat{w}_1(t)\hat{e}_{31}(t) = \hat{w}e_{11}(t) + \Omega \text{sen}(wt)\hat{e}_{31}(t) \\ \hat{w}_3(t)\hat{e}_{12}(t) - \hat{w}_1(t)\hat{e}_{32}(t) = \hat{w}e_{12}(t) + \Omega \text{sen}(wt)\hat{e}_{32}(t) \\ \hat{w}_3(t)\hat{e}_{13}(t) - \hat{w}_1(t)\hat{e}_{33}(t) = \hat{w}e_{13}(t) + \Omega \text{sen}(wt)\hat{e}_{33}(t) \\ \hat{w}_3(t)\hat{e}_{21}(t) - \hat{w}_2(t)\hat{e}_{31}(t) = \hat{w}e_{11}(t) + \Omega \text{sen}(wt)\hat{e}_{31}(t) \\ \hat{w}_3(t)\hat{e}_{22}(t) - \hat{w}_2(t)\hat{e}_{32}(t) = \hat{w}e_{12}(t) + \Omega \text{sen}(wt)\hat{e}_{32}(t) \\ \hat{w}_3(t)\hat{e}_{23}(t) - \hat{w}_2(t)\hat{e}_{33}(t) = \hat{w}e_{13}(t) + \Omega \text{sen}(wt)\hat{e}_{33}(t) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow 9 (*) + 6(**) = 15$ ecuaciones y 12 incógnitas

Problema inverso: ¿existe $(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ solución de las 15 ecuaciones?.

Teorema: $\hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)$ conocidos $\Rightarrow \exists !$ sol. $\hat{\mathbf{w}}(t)$ de (**)

Observación: Se prueba que, para cada t , las 6 ecuaciones de (**) se pueden reducir a 3 ecuaciones, pero pueden ser distintas para cada t .

9 (*) + 3 (**) = 12 ecuaciones y 12 incógnitas

¡Esto tiene mejor pinta!

Condiciones iniciales:

$\mathbf{E}(0) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)^T \rightarrow$ Base inercial

\Rightarrow Introduciendo este dato en (**): $\hat{\mathbf{w}}(0) = (0, -\Omega, \mathbf{w})^T$.

Existencia de solución vía un algoritmo iterativo:

Vamos a construir $\{\mathbf{E}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, T]: \mathbb{R}^9)$ y $\{\hat{\mathbf{w}}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, T]: \mathbb{R}^3)$ t.q.

converjan a una solución $\mathbf{E}, \hat{\mathbf{w}}$ de las ecuaciones anteriores.

$$\mathbf{E}^0(t) \equiv \mathbf{E}(0) \text{ y } \hat{\mathbf{w}}^0(t) \equiv \hat{\mathbf{w}}(0)$$

Cálculo de \mathbf{E}^i y $\widehat{\mathbf{w}}^i$:

$\mathbf{E}^i(t)$: sol. de (*) para $\widehat{\mathbf{w}}(t) \equiv \widehat{\mathbf{w}}^{i-1}(t) \rightarrow \mathbf{E}^i(t) = \exp\left(\int_0^T A(\widehat{\mathbf{w}}^{i-1}(s))ds\right)\mathbf{E}(0)$

Resolviendo (**) con $\mathbf{E}^i(t) \rightarrow \widehat{\mathbf{w}}^i(t)$

Teorema: $\exists \mathbf{E}(t)$ y $\widehat{\mathbf{w}}(t)$ solución de (*)+(**) tales que

$$\mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E} \text{ en } C([0, T]: \mathbb{R}^9)$$

$$\widehat{\mathbf{w}}^n \rightarrow \widehat{\mathbf{w}} \text{ en } C([0, T]: \mathbb{R}^3).$$

Conclusión:

La descripción de velocidades propuesta es compatible con las ecuaciones del movimiento del sólido rígido

4 Simulación numérica

Test numérico:

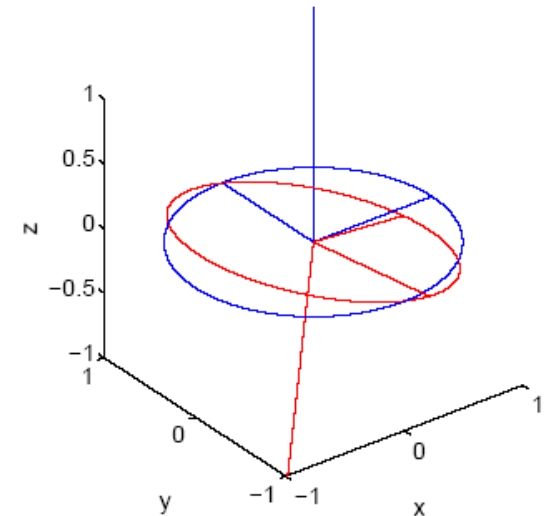
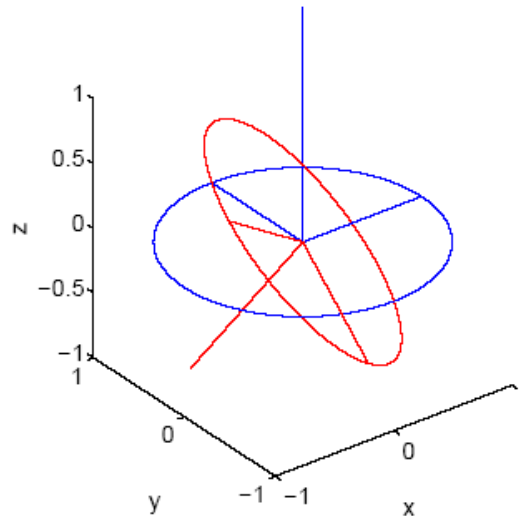
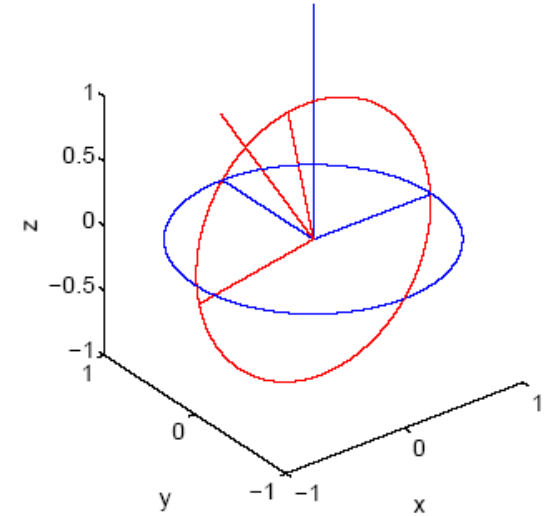
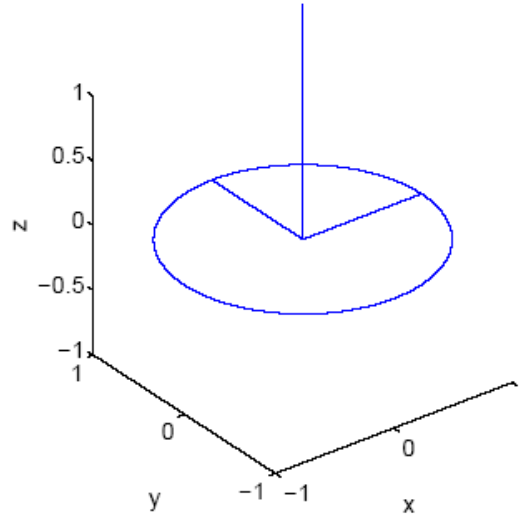
$$\Omega = 1, w = 1 \text{ y } T = 10$$

+ aproximación numérica

para calcular $\mathbf{E}^n, \mathbf{w}^n$

Disco en instantes

$t = 0, t = 1, t = 2$ y $t = 3$.



6.3. Un fenómeno similar al del disco de Euler: Proceso de maduración de Ostwald.

El estudio de la precipitación de cristales es un tema central en Ingeniería Química que ha atraído la atención de especialistas de muchas disciplinas (**incluida la Matemática**), sobre todo después de los trabajos pioneros del Premio Nobel, en 1909, de F.W. Ostwald.



Friedrich Wilhelm **Ostwald** (1853-1932)

* Riga (Imperio ruso, hoy capital de Letonia), familia de alemanes del Báltico.

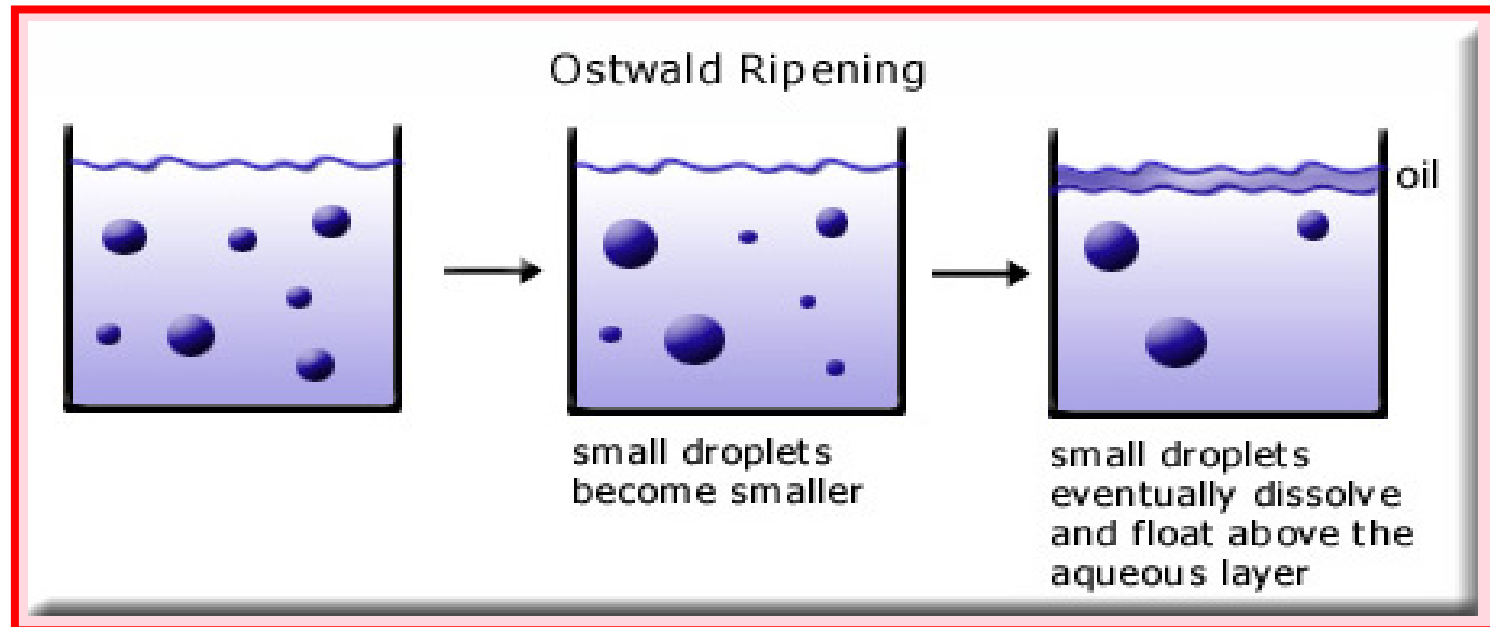
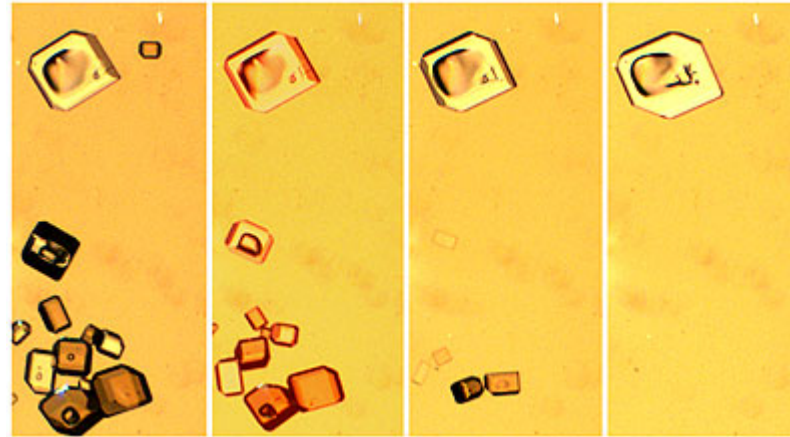
* Universidad de Dorpat (hoy *Universidad de Tartu*), hasta 1881.

* Instituto Politécnico de Riga (1881-1887)

* Universidad de Leipzig (1887-jubilación 1906) profesor de química-física.

Pintor, escritor, filósofo, defensor del esperanto, ...

La llamada *maduración de Ostwald* en cristalizadores reactivos (persistencia de un único tamaño de cristal a medida que avanza el tiempo en soluciones que inicialmente contienen cristales de muchos otros tamaños).



Ejemplos cotidianos

- re-cristalización del agua en el helado (textura arenosa, crujiente: cristales de hielo más grandes crecen a expensas de los más pequeños en el helado, creando así una textura más gruesa),...
- gastronomía: emulsiones,...
- geología: megacristales de feldespato (ortoclasa),...
- química: los cristales más pequeños actúan como combustible para el crecimiento de grandes cristales. síntesis de solución de los puntos cuánticos, análisis gravimétrico,...
- fabricación de películas de fotografía,...

Varios modelos matemáticos pueden ser introducidos a este respecto.

N.S. Tavaré, Simulation of Ostwald Ripening in a Reactive Batch Crystallizer, *AlChE J.* 33, (1985), 152-156.

L. Ratke and P.W. Voorhees, Growth and Coarsening: Ostwald Ripening in Material Processing. Springer. Berlin. 2002

A. Friedman, B. Ou and D.S. Ross, Crystal Precipitation with Discrete Initial Data, *J. Math. Anal. Appl.* 137, (1989), 576-590.

J.I. Díaz, R. Gómez, Measure-valued solutions to a nonlocal conservation law arising in crystal precipitation, *CEDyA*, 2008.

Modelo matemático simplificado: el número de cristales, es fijo.

Como veremos; ***sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.***

Un modelo más realista lleva a un problema en *ecuaciones en derivadas parciales de primer orden* (de tipo hiperbólico, no lineales y no locales) en los que la solución viene dado por deltas de Dirac (peores que funciones discontinuas): ***matemática muy sofisticada, más allá de lo inicialmente esperado.***

Dinámica muy opuesta a la de la reacción B-Z:

el proceso de maduración de Ostwald termina (se alcanza el equilibrio) casi totalmente o de hecho completamente en un tiempo finito (y no sólo asintóticamente cuando $t \rightarrow +\infty$).

Para simplificar el modelo, se supone que todos los granos son cubos de arista L , que tan sólo difieren en su tamaño y que hay un número finito (aunque quizás muy alto) granos de un mismo tamaño L .

De hecho, para obtener la precipitación, la concentración $c(t)$ debe ser mayor que otra cantidad diferente c_L ($c_L > c^*$) que también depende de la talla L del grano, y que viene dada por la relación de Gibbs-Thomson,

$$c_L = c^* e^{\Gamma/L}$$

donde Γ es una cantidad física que depende de la forma de los cristales, en las propiedades de su material, y de la temperatura (que aquí se supone fija).

Si $c(t) > c_L$, el material abandona la solución y se deposita en los cristales caracterizados por L , pero si $c(t) < c_L$ el material se disuelve. Será útil

$$L^*(t) = \frac{\Gamma}{\log \frac{c(t)}{c^*}}.$$

Como es habitual en Ingeniería Química, cada cristal (para cada valor de L) se disolverá o crecerá de acuerdo a una ley semi-empírica, que aquí se supone dada por la ley de dinámica cinética

$$\frac{dL}{dt}(t) = G(L(t), c(t)) \quad (1)$$

siendo

$$G(L(t), c(t)) = \begin{cases} k_{\gamma}(c(t) - c^*e^{\Gamma/L(t)})^{\gamma} & \text{si } L(t) > L^*(t), \\ -k_{\delta}(c^*e^{\Gamma/L(t)} - c(t))^{\delta} & \text{si } L(t) < L^*(t), \end{cases} \quad (2)$$

para ciertos exponentes $\gamma > 0$ and $\delta > 0$ (con frecuencia $\gamma \geq 1$ y $\delta \geq 1$).

Mencionemos que es bien conocido (véase, por ejemplo Aris (1975) que en muchas reacciones químicas exponentes $\gamma \in (0, 1)$ y $\delta \in (0, 1)$. El resto de parámetros, k_{γ} , k_{δ} , Γ y c^* , se suponen positivos.

Por tanto,

si $c(t) > c_L$ (o, equivalentemente, $L(t) > L^*(t)$)

entonces $\frac{dL}{dt}(t) > 0$, i.e. el cristal crece,

si $c(t) < c_L$ (o, equivalentemente, $L(t) < L^*(t)$)

entonces $\frac{dL}{dt}(t) < 0$, i.e. el cristal disminuye.

Suponemos que inicialmente hay N tamaños diferentes de cristales $L = x_j^*$, en numero de μ_j^* por unidad de volumen. Supongamos $0 < x_1^* < x_2^* < \dots < x_N^*$.

EL NÚMERO μ_j^* NO VARIA CON t (diferencia con Lotka-Volterra):
SÓLO SU TAMAÑO $x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_N(t)$,

La ley (1) la podemos re-escribir cómo

$$\frac{dx_j}{dt}(t) = G(x_j(t), c(t)). \quad (3)$$

Por tanto, la concentración del soluto $c(t)$, en el instante t , será de la forma

$$c(t) := c_0 + \rho k_v \sum_{j=1}^N \mu_j^* (x_j^*)^3 - \rho k_v \sum_{j=1}^N \mu_j^* (x_j(t))^3,$$

donde c_0 denota la concentración inicial, k_v es un parámetro geométrico que relaciona, en general, L^3 con el volumen del cristal (en el caso de cubos, $k_v = 1$), y ρ es la densidad másica de la fase sólida.

Sustituyendo $c(t)$ en (3), se obtiene un sistema auto-contenido de ecuaciones diferenciales (en el que ahora no aparece $c(t)$)

$$\frac{dx_j}{dt}(t) = G_j(x_1(t), \dots, x_N(t)), \quad j = 1, \dots, N.$$

Recordemos que las condiciones iniciales son $x_j(0) = x_j^*$. Es útil introducir la notación

$$\mu_j := \rho k_v \mu_j^*, \quad \text{y} \quad \hat{c}_0 := c_0 + \rho k_v \sum_{j=1}^N \mu_j^* (x_j^*)^3.$$

Pequeños parámetros

Valores típicos de las constantes son $c^* = 4 \times 10^{-6} \text{ kmol / m}^3$, $\Gamma = 4 \times 10^{-9} \text{ m}$, $\rho = 6473 \text{ kg / m}^3$, $k_\gamma = k_\delta = 5 \times 10^{-2}$, y $c_0 = 1.05c^*$, $x^* = 10^{-7} \text{ m}$ or 10^{-8} m and $\mu = 10^{19}$ or 10^{16} ([Tavare 1985]).

Cristales de un único tamaño

Es aconsejable analizar la dinámica cuando solo hay μ cristales de un único tamaño x^* . Por tanto, $N = 1$ y así

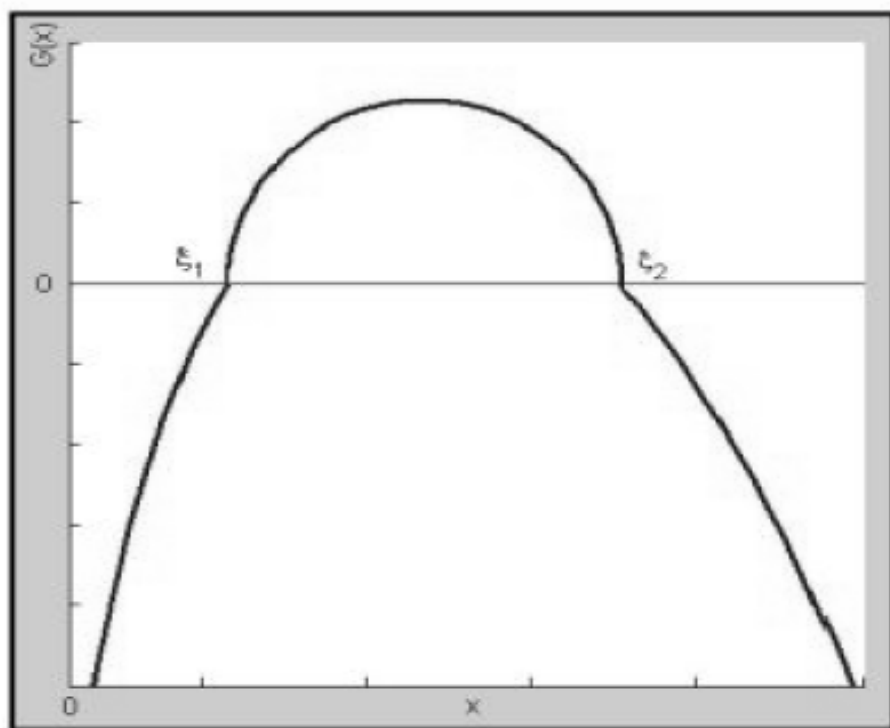
$$\frac{dx}{dt}(t) = G(x(t)), \quad (4)$$

$$G(x) = \begin{cases} k_\gamma(\hat{c}_0 - \mu x^3 - c^* e^{\Gamma/x})^\gamma & \text{si } \hat{c}_0 - \mu x^3 > c^* e^{\Gamma/x}, \\ -k_\delta(c^* e^{\Gamma/x} - (\hat{c}_0 - \mu x^3))^\delta & \text{si } \hat{c}_0 - \mu x^3 < c^* e^{\Gamma/x}. \end{cases} \quad (5)$$

Los valores de x en los que G cambia de signo juegan un papel crucial. Vienen dados por la ecuación trascendente

$$\mu x^3 + c^* e^{\Gamma/x} = \hat{c}_0. \quad (6)$$

Lema 1. *A lo sumo existen dos raíces positivas $\tilde{\zeta}_1$ y $\tilde{\zeta}_2$ (con $\tilde{\zeta}_1 \leq \tilde{\zeta}_2$) de (6).*



El caso interesante es cuando (6) tiene dos raíces positivas

Teorema 1. i) Si $x^* = \zeta_2$ entonces la solución de (4) es $x(t) = x^*$. Si $x^* = \zeta_1$ entonces $x(t) = x^*$ es una solución de (4) (que, de hecho, es la única si $\gamma \geq 1$ y $\delta \geq 1$).

ii) Si $x^* > \zeta_2$ entonces $x(t)$ es estrictamente decreciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \zeta_2$ (con $x(t) = \zeta_2$ después de un tiempo finito si $\delta \in (0, 1)$).

ii) Si $x^* \in (\zeta_1, \zeta_2)$ entonces $x(t)$ es estrictamente creciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \zeta_2$ (con $x(t) = \zeta_2$ después de un tiempo finito si $\gamma \in (0, 1)$).

iii) Si $x^* \in (0, \zeta_1)$ entonces $x(t)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, t_0]$ y después $x(t_0) = 0$ con $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dx}{dt}(t) = -\infty$.

Método de Leibniz

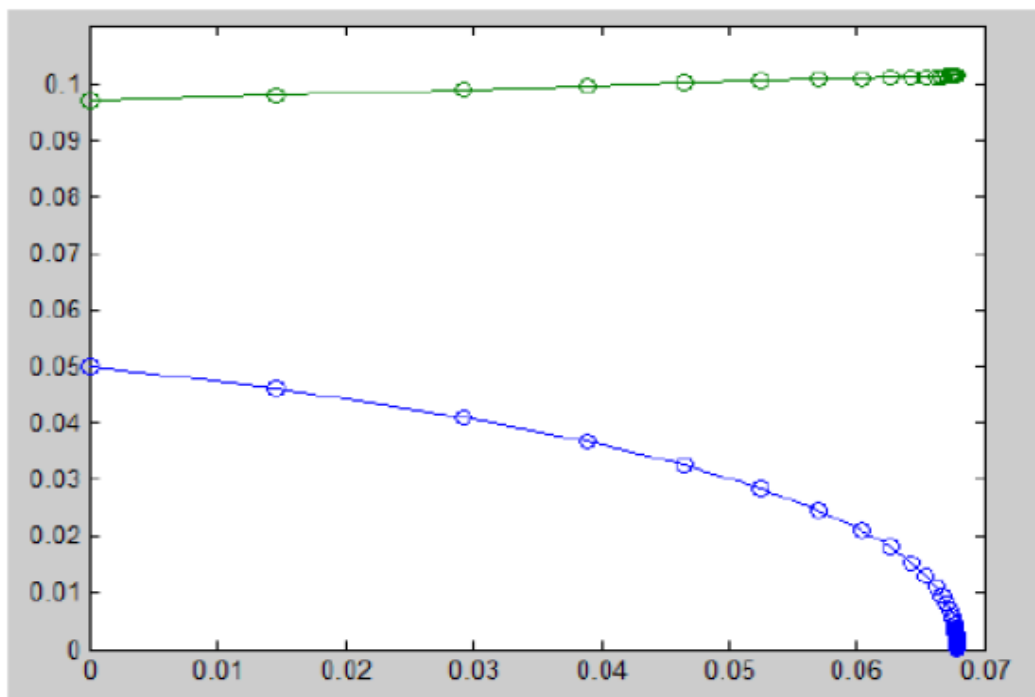
$$t_0 = \int_0^{x^*} \frac{ds}{G(s)}.$$

Cristales de varios tamaños

Supongamos ahora que hay cristales de N tamaños diferentes.
Suponemos que la concentración inicial es mayor que la crítica

$$c_0 > c^*.$$

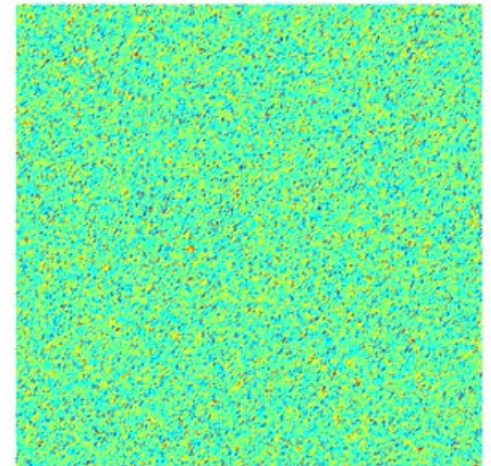
Teorema 2. *Todos los cristales excepto a lo sumo $x_N(t)$ se disuelven en un tiempo finito.*



Simulación numérica



phase-field-modeling-simulation-for-ostwald-ripening-480.flv



Realidad virtual

Diseño y control en el crecimiento de nuevos cristales,...

Algunas Investigaciones matemáticas conectadas con la “industria”: 6. 3. Un comportamiento similar en MEMS

Modelos matemáticos de sistemas micro-electro-mecánicos y nano-electro-mecánicos (MEMS and NEMS).

John A. Pelesko and David H. Bernstein. Modeling MEMS and NEMS (2002)

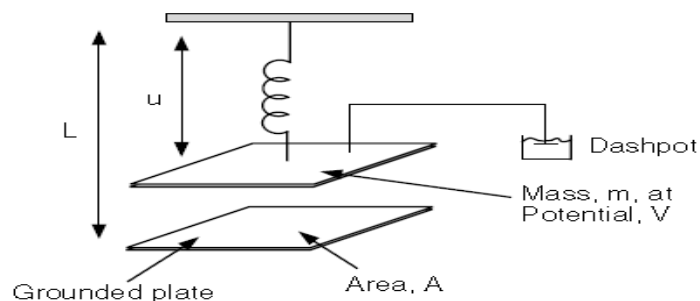


FIGURE 7.6: Sketch of the electrostatically actuated damped mass-spring system.

$$\frac{dv}{dt} + v = \frac{\lambda}{(1-v)^2},$$

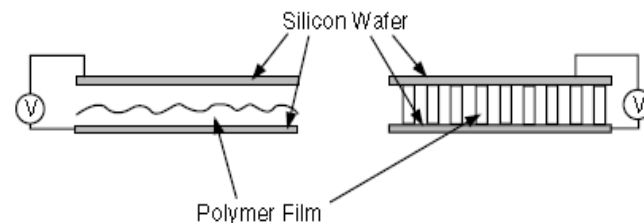


FIGURE 9.3: The basic nanoscale photocopy machine. The figure on the left shows the onset of the instability. The figure on the right shows the developed instability

Quenching phenomenon of singular parabolic problems with L^1 initial data.

Anh Nguyen Dao¹, Jesús Ildefonso Díaz^{1, 2}, and Paul Sauvy²

**Gracias por su
atención**