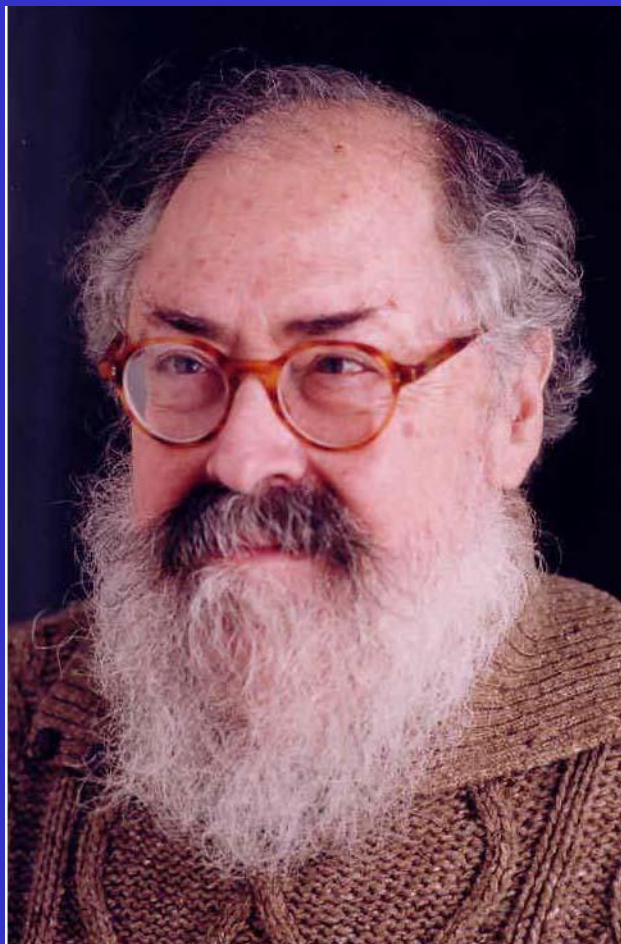


El barco chato de Newton y
la cuerda con pesas de
Gaudi
J.I. Díaz



**TROBADA EN HONOR DE
CARLES PERELLÓ**
Monestir de Saint Cugat del Vallès,
16 de noviembre de 2002



Septiembre 1976, Málaga

**XII Reunión Anual de Matemáticos
Españoles,**

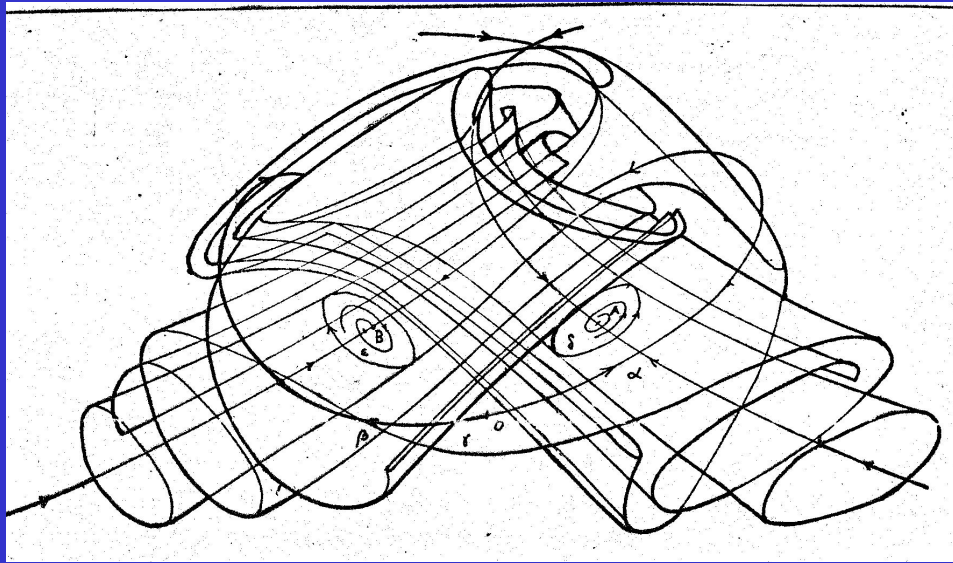
*Soluciones periódicas de
ecuaciones diferenciales de tipo
neutro con parámetro pequeño*

Sección de Ecuaciones Funcionales:
Carpintero (Salamanca), Guzmán,
Perelló y yo.

Mayo 1978, El Escorial

I CEDYA Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones

Turbulencia y atractores complicados



28 al 31 de Mayo de 1979

II CEDYA, Valldoreix

(organizado por C.Perelló y C.Simó),

VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Barcelona, Junio 1980

Propuesta como Profesor Excepcional, 1981-82,

Universitat Autònoma, Junio de 1982, Cristina, Oposición de

Jaume Llibre, Comisión de Cátedra, Girona, 199?, “viaje mexicano”,....

XVIII CEDYA

Universitat Rovira I Virgili

15-19 septiembre de 2003

Dos divertimentos *recientes* sobre el Cálculo de Variaciones:

El barco chato de Newton: M. Comte (Paris VI)-J.I.D.

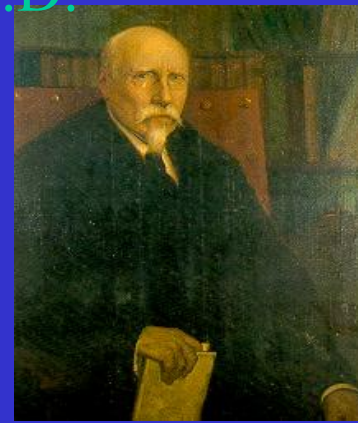
La cuerda con pesas de Gaudi: M. Chipot (Zurich)-J.I.D.

Desarrollo del C. de V. en nuestro país

Benito Bails (1730-1797), 1772 (inquisición)

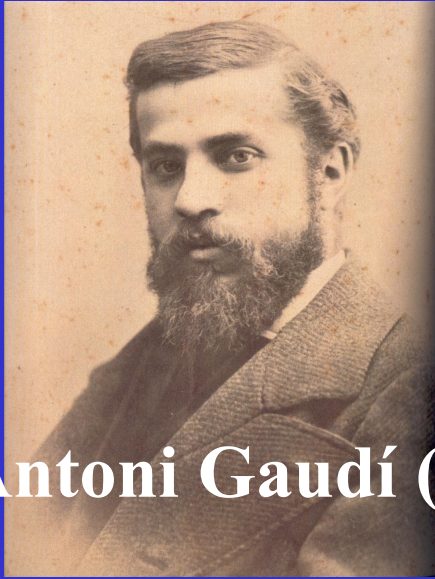
José Echeagaray Eizaguirre (1833-1915), 1858.

E. Terradas (1883-1950): “Sur le mouvement d’un fil” (*Cambridge Univ. Press*, 2, 250-255, 1912).



Esteban Terradas e Illa (1883-1950)

La cuerda con pesas de Gaudí



Antoni Gaudí (1825-1926)

Iglesia de la Colonia Güell



Modelos antifuniculares

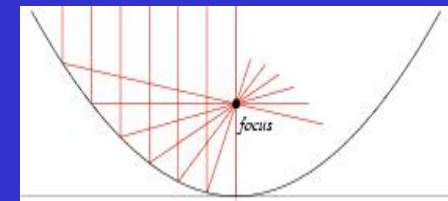
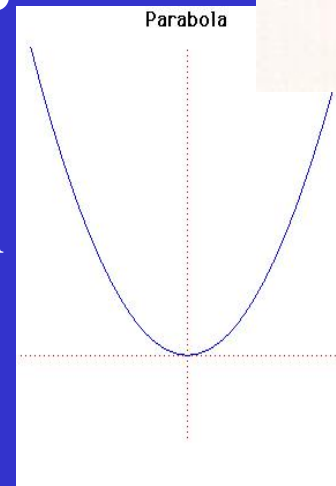
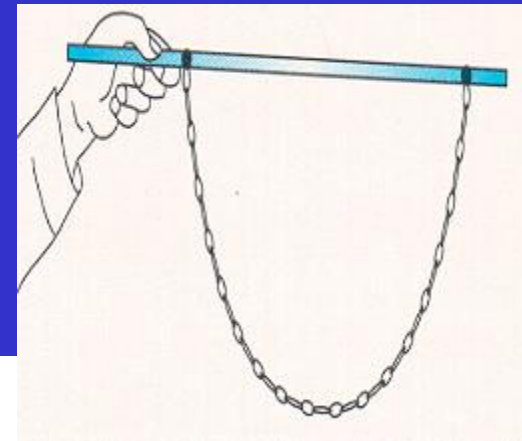
“La catenaria”:

Leonardo da Vinci (1452-1519) 1490,

En 1669, Jungius puso en tela de juicio la afirmación de Galileo Galilei (1562-1642): parábola

Huygens primero en utilizar el termino de catenaria (carta a Leibniz en 1690)

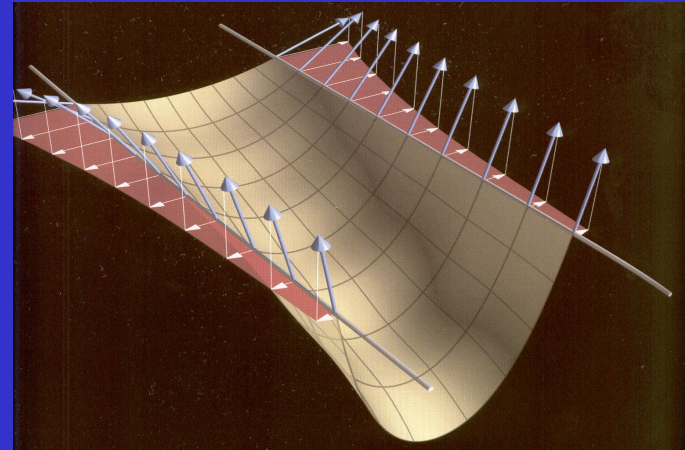
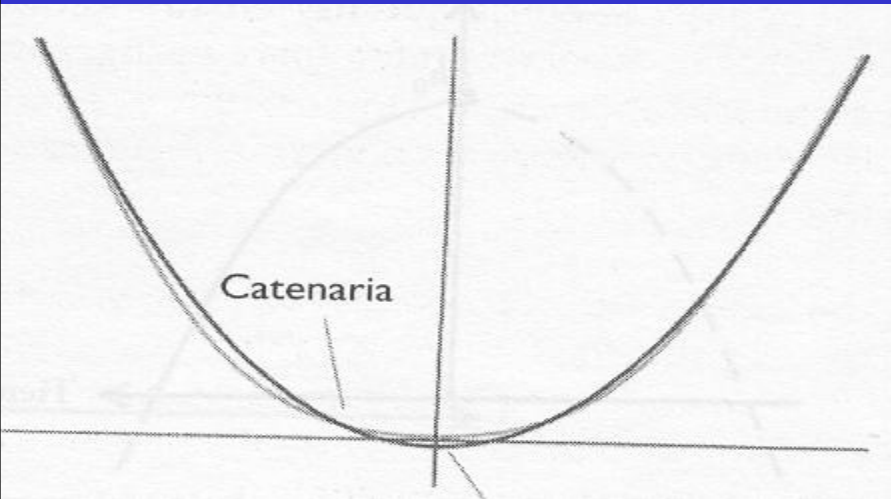
La ecuación fue obtenida por Leibniz, Huygens, y Johann Bernoulli en 1691 en respuesta a un problema de Jakob Bernoulli.



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a \cosh(x/a)$$

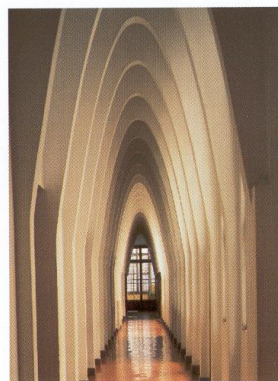
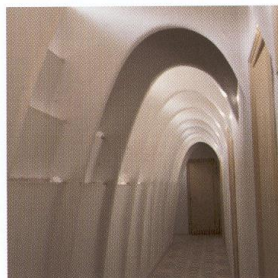
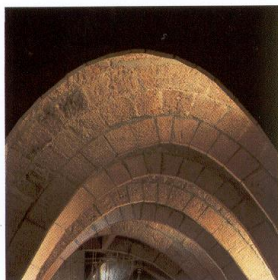
La sutileza de las matemáticas



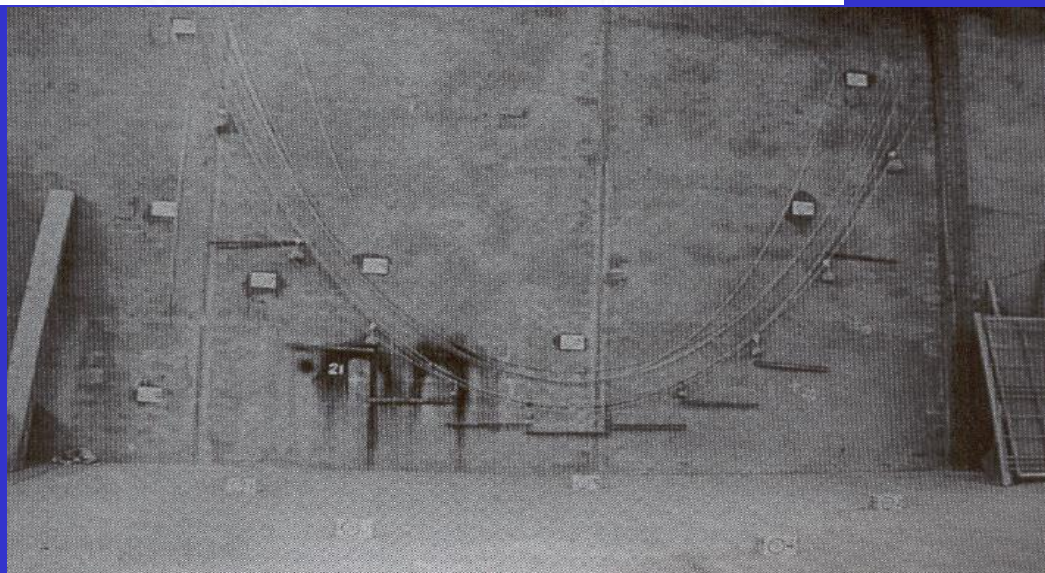
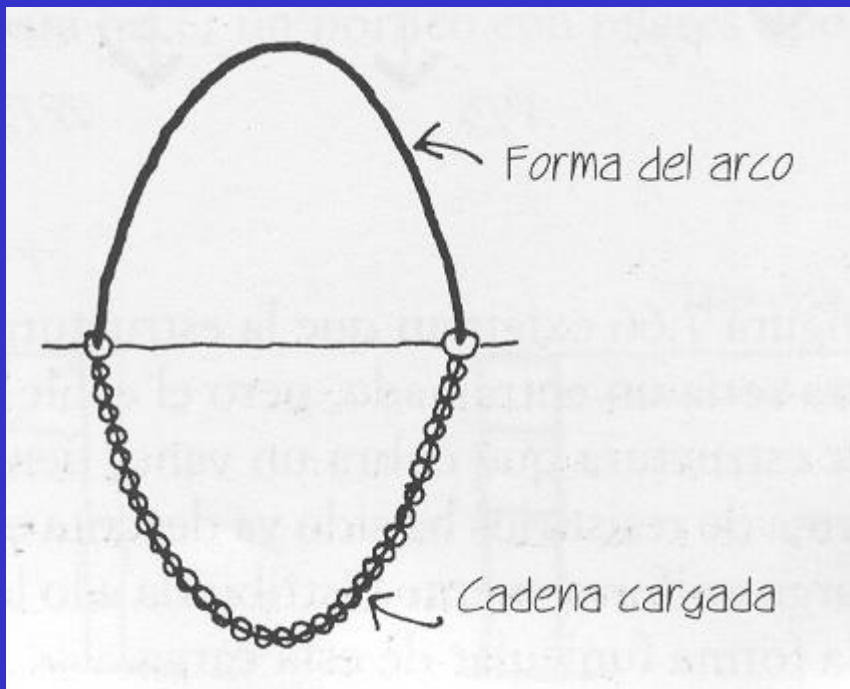
Catenarias y Bifurcación



La Catenaria como Arco



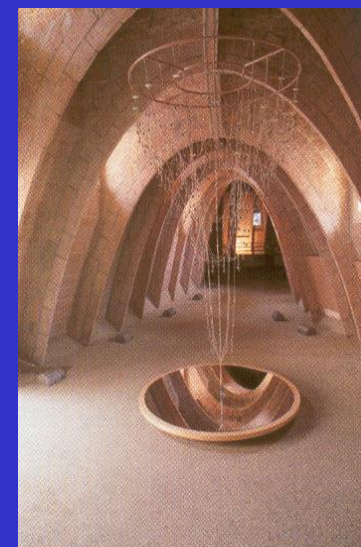
Arcos catenarios de las casas Milà y Batlló y del colegio de las Teresianas



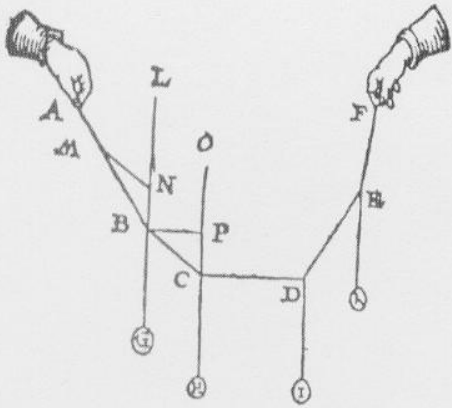
Robert Hooke (1675)

G. Polini (1748)

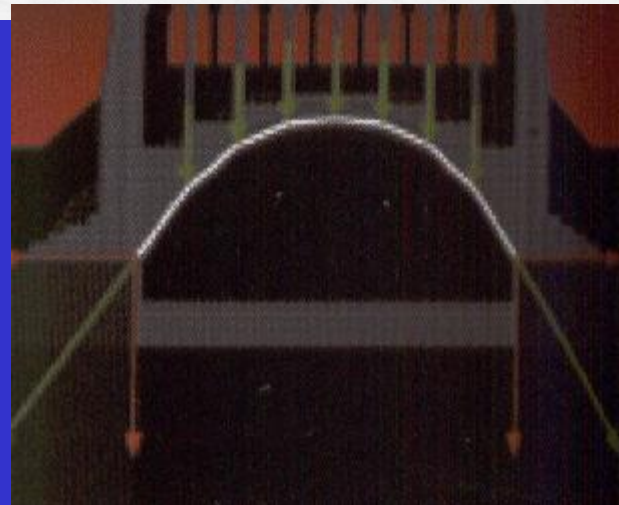
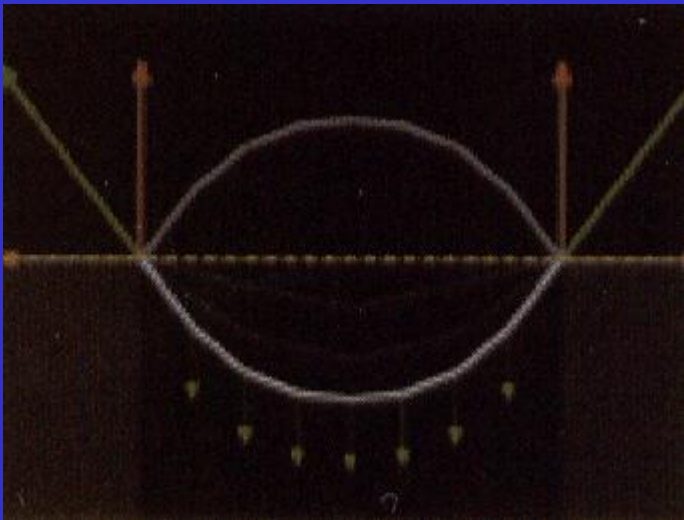
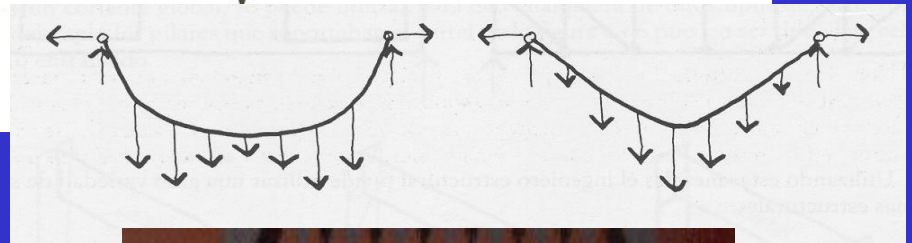
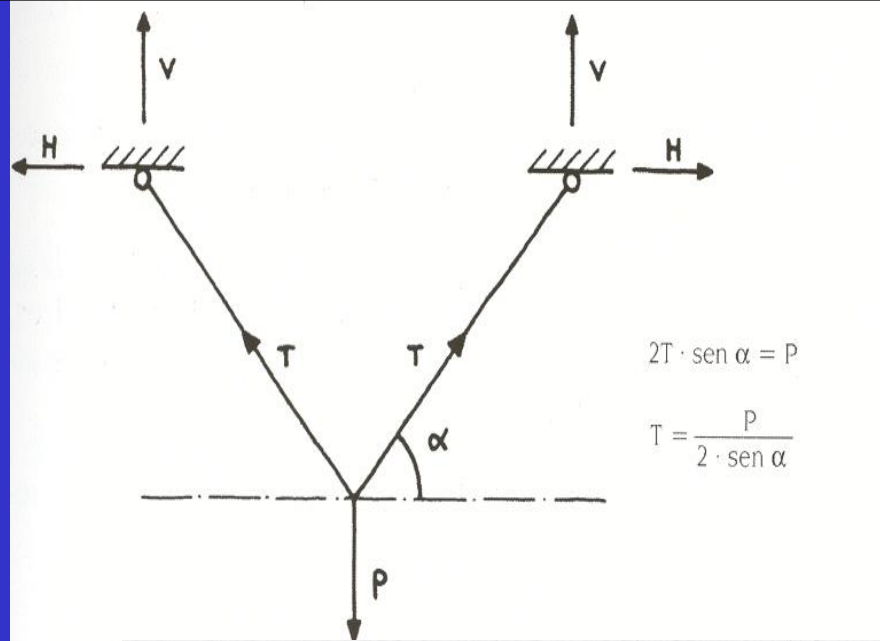
San Pedro de Roma



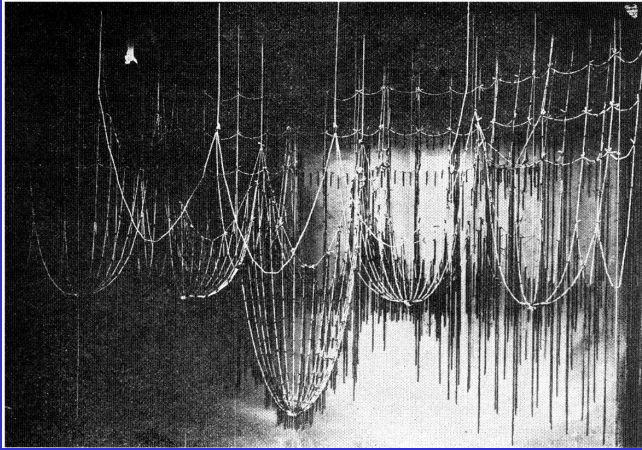
Traslación de arcos catenarios de la Casa Milà. Modelo catenario del Espai Gaudí



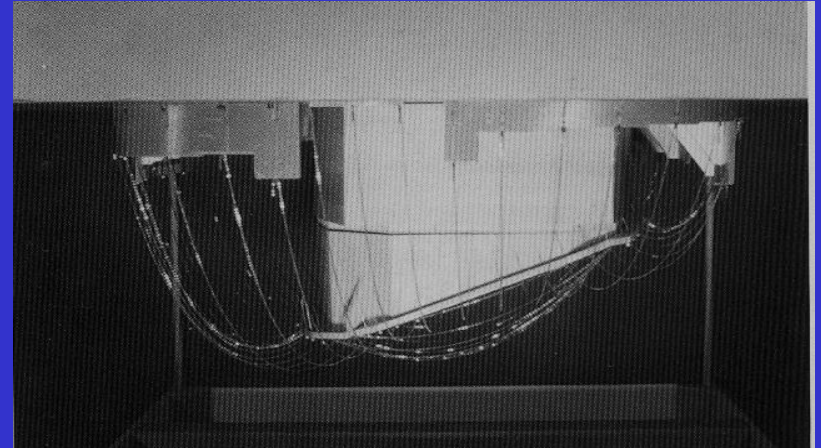
Representación funicular de Sterin
(siglo XVII)



Algunas otras maquetas anti-funiculares



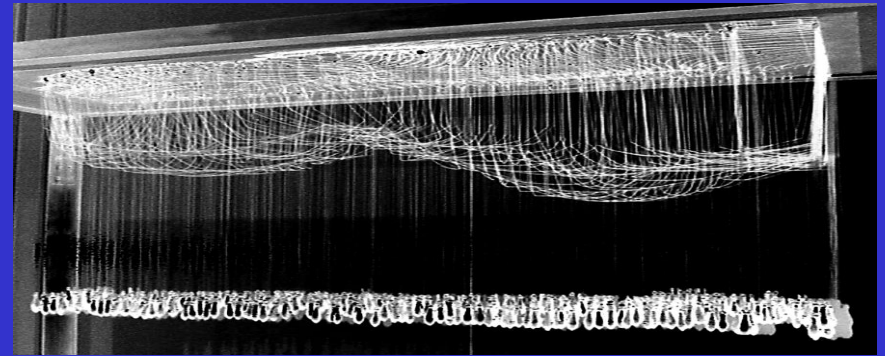
Primer estereofunicaluar
de Gaudi



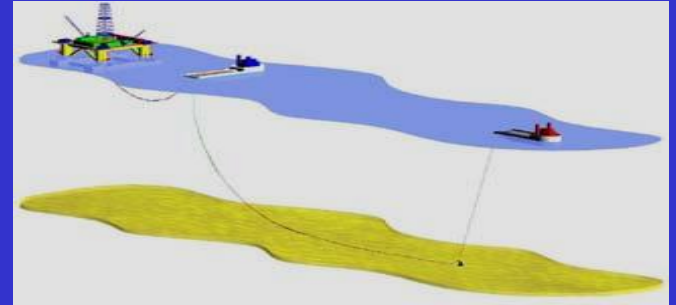
Suntory Pavilion,
Expo'85, Tsukuba, Japan
Arquitecto: Keizo Sataka



REISER+UMEMOTO

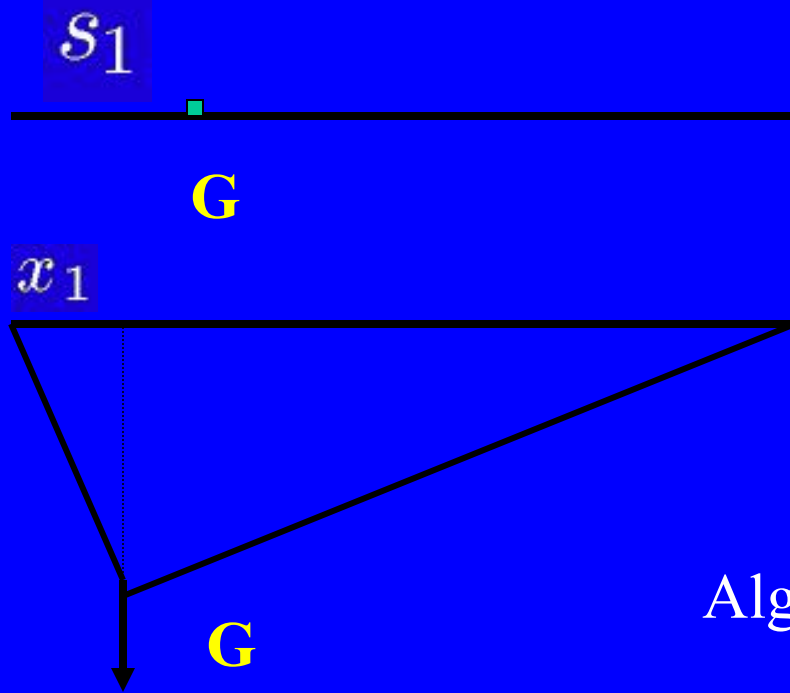


El problema matemático



Otras aplicaciones





$$\Omega = (0, 1)$$

Hilo elástico de peso despreciable frente a G

Algunas referencias previas

- M. Irving: *Cable Structures*, Dover, 1981, Massachusetts,
- P. Villagio: *Mathematical models for elastic structures*, Cambridge Univ. Press, 1997,
- S. S. Antman: *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, 1995, New York,

$$\text{Min}_{(u \in H_0^1(\Omega), x_1 \in (0,1))} \int_{\Omega} \varphi(u_x) dx - Gu(x_1)$$

$$\int_0^{x_1} \varphi(u_x) dx = s_1 \int_0^1 \varphi(u_x) dx$$

$$\varphi(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$$

$$\varphi(\xi) = 1 + \frac{\xi^2}{2} \text{ si } \xi \text{ suficientemente pequeño}$$

$$\int_{\Omega} \varphi(u_x) dx - Gu(x_1) = |\Omega| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2 dx - Gu(x_1)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_1} u_x^2 dx + x_1 = s_1 + \frac{s_1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx$$

$$C_{x_1} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \frac{1}{2} \int_0^{x_1} u_x^2 dx = (s_1 - x_1) + \frac{s_1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx\}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_1} u_x^2 dx - Gu(x_1) = J(u, x_1)$$

Hallar $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $x_1^* \in (0, 1)$ tal que

$$(P) \begin{cases} u_0 \in C_{x_1^*} \\ J(u_0, x_1^*) \leq J(u, x_1) \quad \forall (u, x_1), u \in C_{x_1} \end{cases}$$

u_0, x_1^* solución \Rightarrow



$$\begin{cases} u_0 \in H_0^1(\Omega) \\ -u_0'' = G\delta_{x_1} \end{cases}$$

$$h = u(x_1)$$

$$\frac{h}{x_1} + \frac{h}{1-x_1} = G \Leftrightarrow h = Gx_1(1-x_1)$$

$$u, u_0 \in C_{x_1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^{x_1} u_x^2 dx = (s_1 - x_1) + \frac{s_1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} G^2 x_1 (1-x_1)^2 = (s_1 - x_1) + \frac{s_1}{2} G^2 x_1 (1-x_1) \end{aligned}$$

El barco *chato* de Newton

Newton, I., 1685. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London

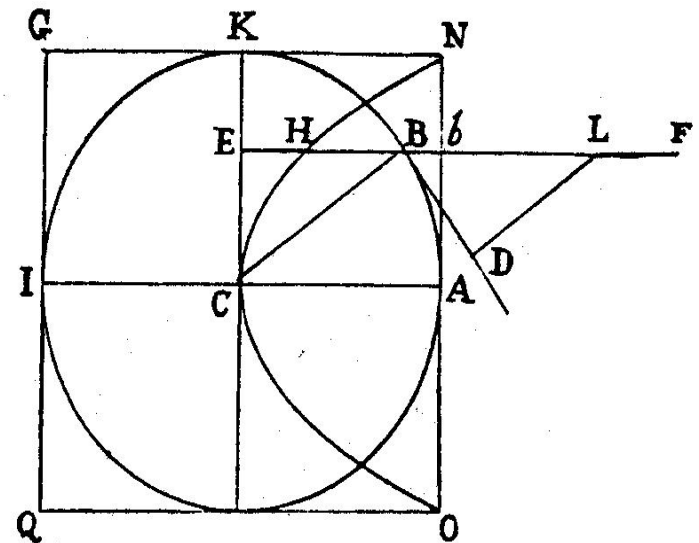
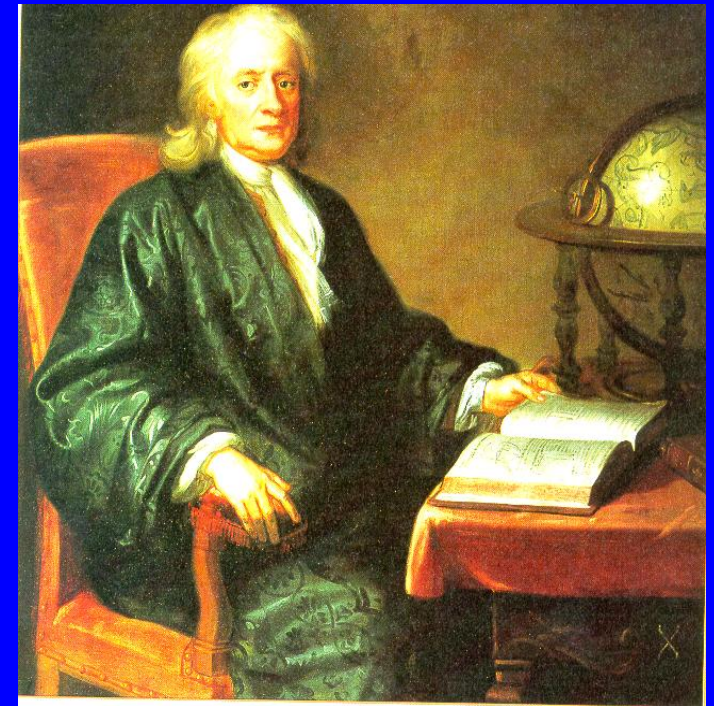
¿cuál es el cuerpo de revolución que ofrece menor resistencia al movimiento?

Sir Isaac Newton (1642-1727)

Proposition XXXIV (Book II):

Esfera, cono, caso de un perfil de revolución general. Método geométrico

“it may be of use in the building of ships”



“A rare medium of very small quiescent particles...freely disposed at equal distances from one other”

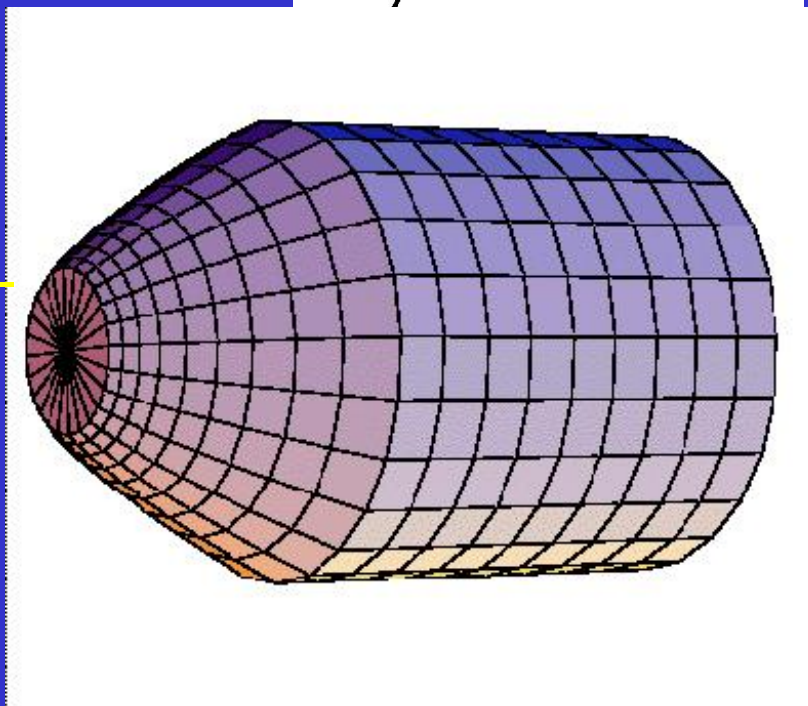
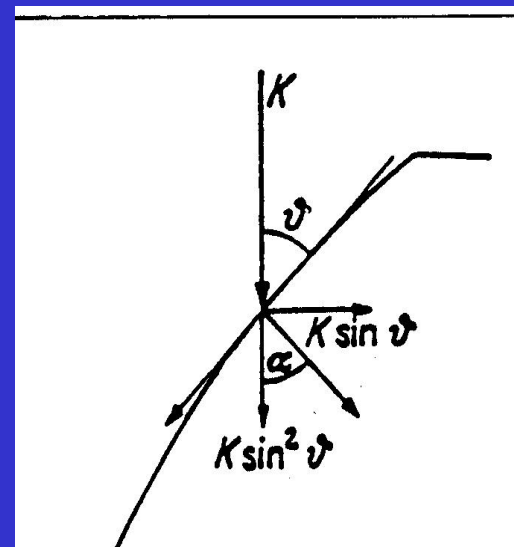
Resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad

Solución óptima: especie de cono truncado (*barco chato*)

Sin detalles (no más de una página): larga historia

H.H. Goldsine: *A History of the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 1980.

Version detallada de Newton (requerimiento de D. Gregory en 1691)



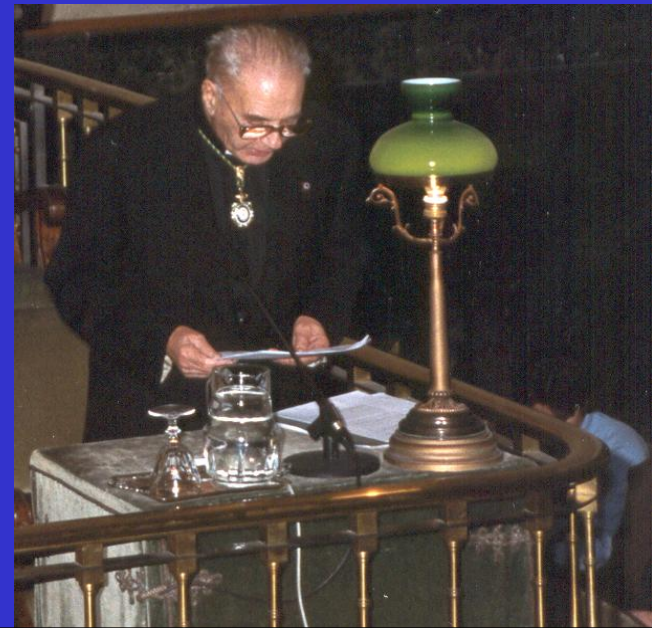
Importancia de la “buena” traducción:

Detalles en la versión inglesa: A. Motte, 1729.

Asuntes en la versión castellana (con notas de Eloy Rada García. Alianza, Madrid. 1987).

Un ejemplo de traducción de gran calidad:

Euler, L., *Método de máximos y mínimos*, Selección del Methodus (1744), con introducción, notas y apéndices a cargo de **Alberto Dou**. Publ. de la Univ. Autónoma de Barcelona. 1993 (mención a Carles Perelló)



Análisis del problema: Legendre (1786), Bolza (1909),...

Dados $\Omega = B(0, 1)$ y $M > 0$, hallar

$\text{Min}_K F(u)$

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} dx$$

$K = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in H_0^1(\Omega), 0 \leq u(x) \leq M, u \text{ cóncava}\}$

Extensión (Comte-D.: tratamiento de imágenes, transición de fases, elasticidad no lineal,...

j cóncava en $[0, a)$, convexa en $[a, +\infty)$,

$j(r) \rightarrow 0$, si $r \rightarrow +\infty$

$$F(u) = \int_{\Omega} j(|\nabla u|) dx$$

Problema relajado (Ekeland -Temam 1974):

$$F^*(u) = \int_{\Omega} j^*(|\nabla u|) dx$$

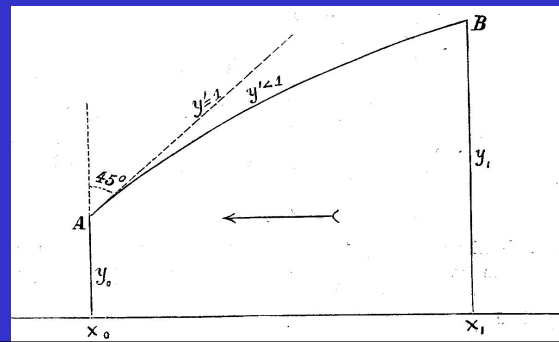
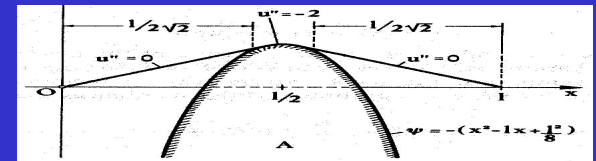
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\partial F^*(\nabla u)) + \beta(u) \ni 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

j^* convexa, $j^*(0) = j(0)$, $j^*(r) = j(r) \forall r \in [a, +\infty)$

Resultados (Comte-D): $\nabla u = \nabla u^* \notin (0, a)$

u^* solución del Pb sin relajar y $u^* \notin H^2(\Omega)$

Brezis (1972), Brezis-Kinderlherer (1979): Problema de obstáculo para campos coercitivos



$$|\nabla u(r_0)| > 0$$

