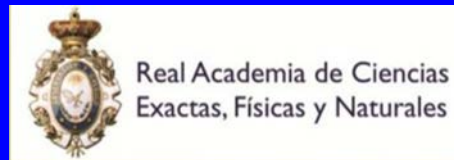


Modelos simples ante el Cambio Global Climático: *un punto de encuentro multidisciplinar*

J.I. Díaz



XXII PROGRAMA DE PROMOCIÓN DE LA CULTURA CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA 2019/20

Real Academia de Historia y Arte de San Quirce
Calle Capuchinos Alta, 4 y 6
40001 Segovia

2 de marzo de 2020



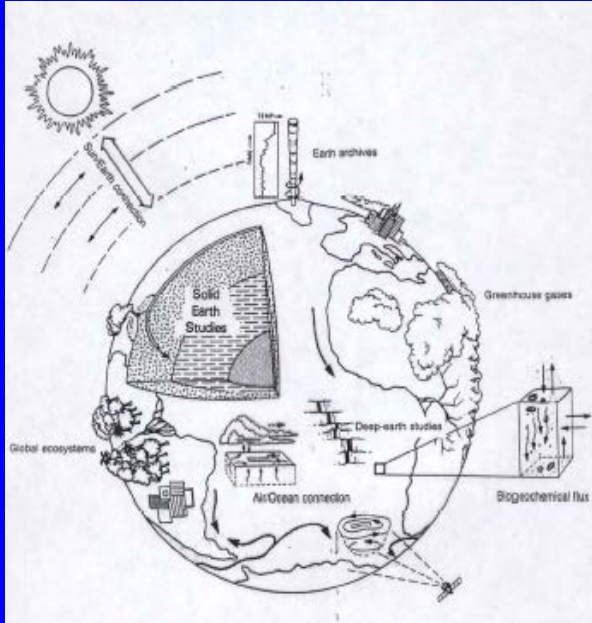
¡APOYA A LA CIENCIA! ÚNETE A NOSOTROS. *Hazte amigo*

Plan de la conferencia

1. Introducción
 - 1.1. Interdisciplinariedad
 - 1.2. Necesidad de actuar
2. Matemáticas y Clima
 - 2.1. Antecedentes pioneros
 - 2.2. Muy diferentes modelos: meteorología /climatología
3. Modelos climáticos sencillos de Balance de Energía Radiativa
 - 3.1. Energías, tipos, unidades
 - 3.2. Energía de Radiación: ondas electromagnéticas
 - 3.3. Modelo cero-dimensional. Constante solar y co-albedo. Gases de efecto invernadero: emisividad. Multiplicidad de soluciones de equilibrio
 - 3.4. Modelo uni-dimensional: latitud
 - 3.5. Acoplamientos con océanos y casquetes polares. Volcanes: términos estocásticos
4. Actuar: Teoría de Control
 - 4.1. Obstrucción obstrucción ante radiación Stefan-Boltzmann
 - 4.2. Control como suma de pequeñas acciones: Homogeneización

Cambio Climático: ¿nueva religión? No se trata de una cuestión de *religiosidad*; es una **cuestión de valores** (uno se siente parte de un movimiento social, ciudadano, que trata de introducir en nuestra escala de valores cosas que antes no se tenían en consideración, como el respeto al planeta y a nuestro entorno medio-ambiental más cercano)

1.1. Inter-disciplinariedad



"Un día, un científico del **Panel Intergubernamental del Cambio Climático** (formado por más de 2.000 expertos) me contó una historia que me parece que viene muy al caso. Me dijo que cuando el panel empezó a reunirse, hace ya unos 20 años, había en el grupo un *anciano científico japonés* que en una de las reuniones intervino y dijo;

"los científicos hemos constatado que existe un problema de emisiones, pero no lo podemos resolver. Puesto que el CO2 lo producen las máquinas, tendremos que llamar a los ingenieros. Estos, a su vez, dirán que existe la tecnología necesaria para solucionar el problema, pero que cuesta dinero, así que se llamará a los economistas.

Los economistas harán sus cálculos y dirán que, para conseguirlo, habrá que cambiar nuestro actual modelo social basado en el transporte, el derroche energético... así que se llamará a los sociólogos.

Éstos, a su vez, dirán que es un problema de escala de valores que ellos no pueden resolver, así que se acudirá a los filósofos para que nos digan qué valores deberíamos poner nuestro empeño e interés".

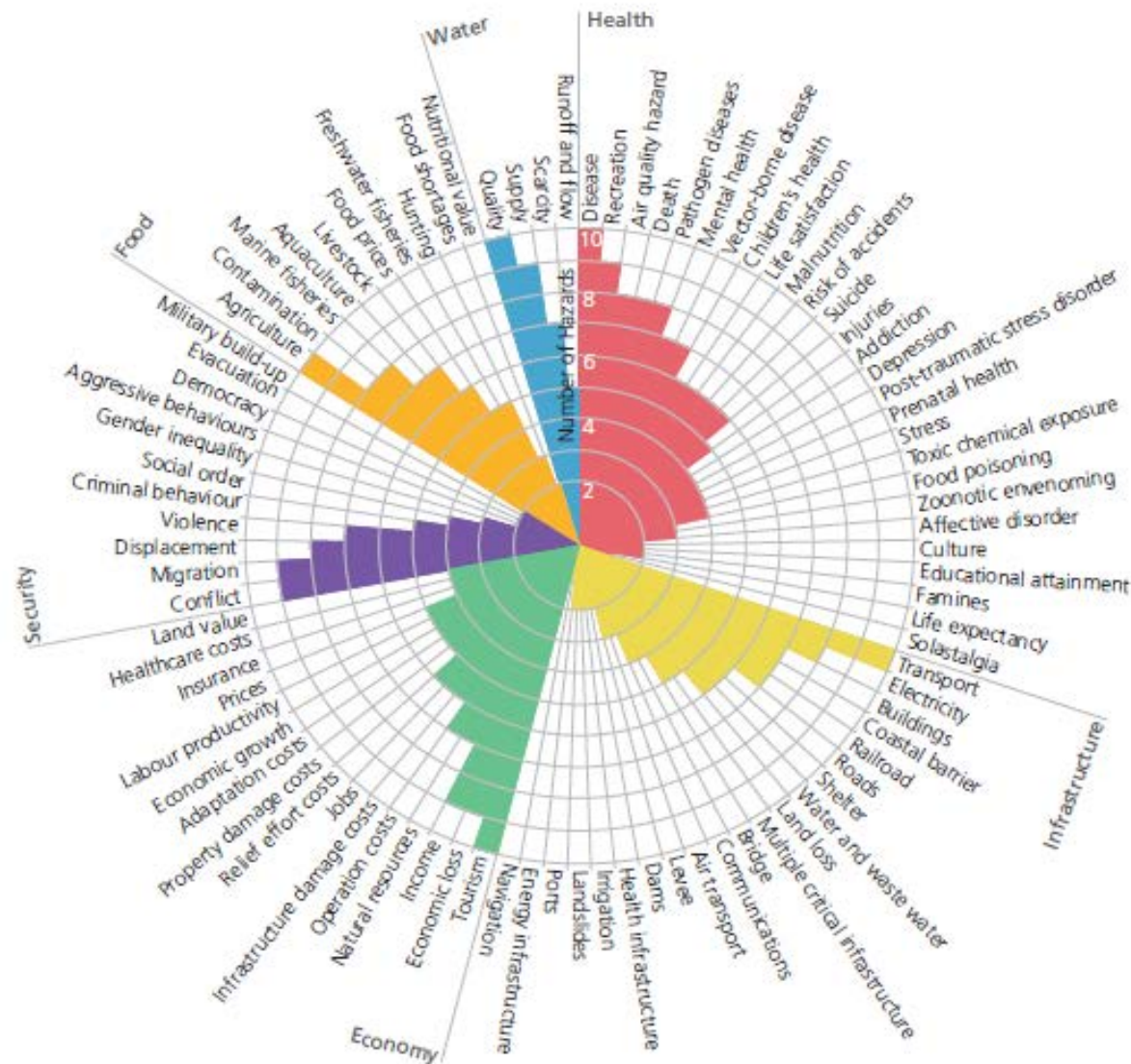


Figure 3.1 Observed effects on humanity from climate hazards. Hazards included warming, heatwaves, precipitation, drought, floods, fire, storms, sea-level rise and changes in natural land cover and ocean chemistry. Six different aspects of human systems are shown (health, food, water, infrastructure, economy and security), with their subcategories for which effects were observed. The heights of the bars indicate the number of hazards implicated in the impacts. Reprinted by permission from Springer Nature, *Nature Climate Change, Broad threat to humanity from cumulative climate hazards intensified by greenhouse gas emissions*, Mora et al., © 2018.

Sequías / Desertización

(comparación periodo 1961-1990 con proyecciones de futuro para el 2050)

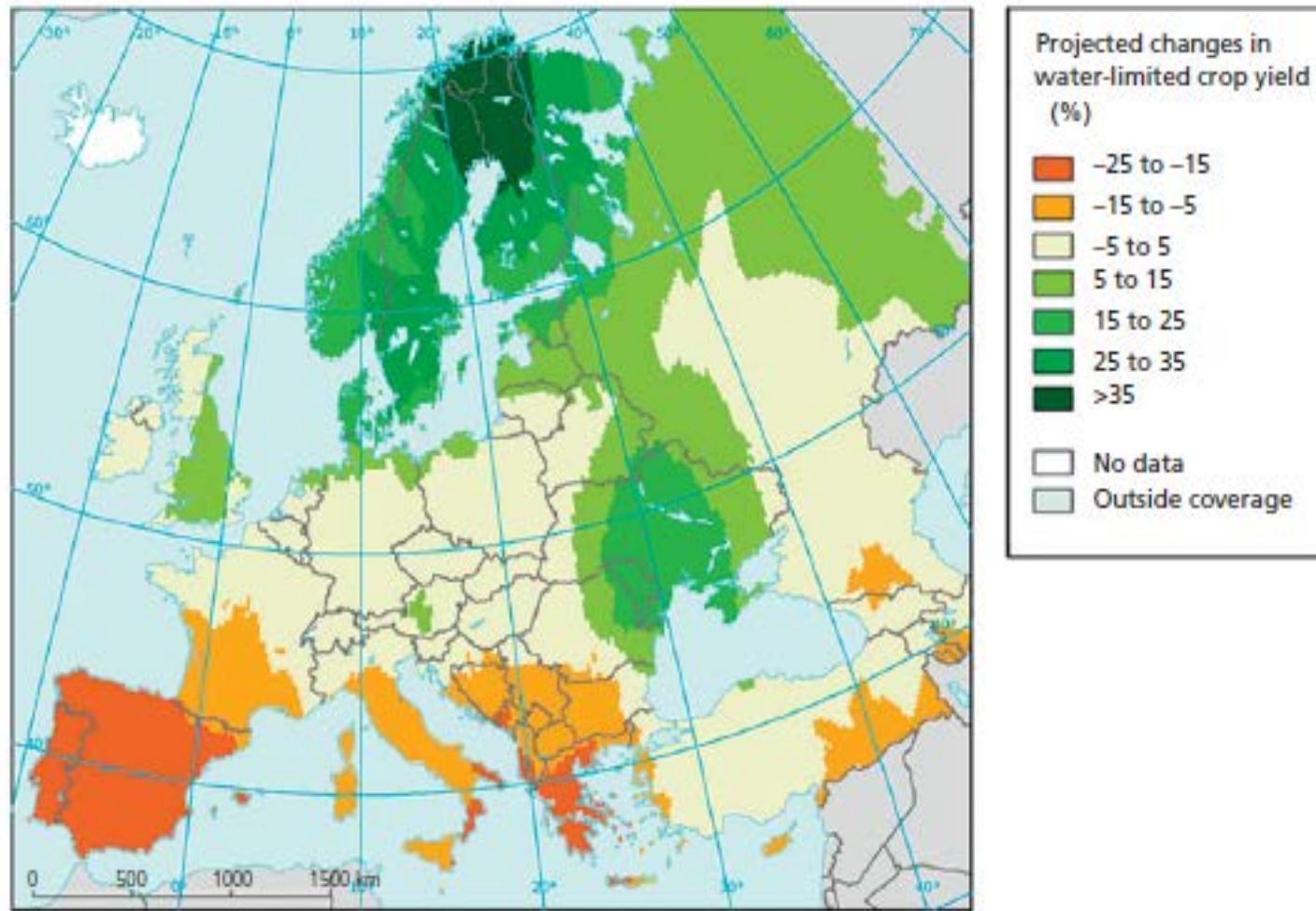
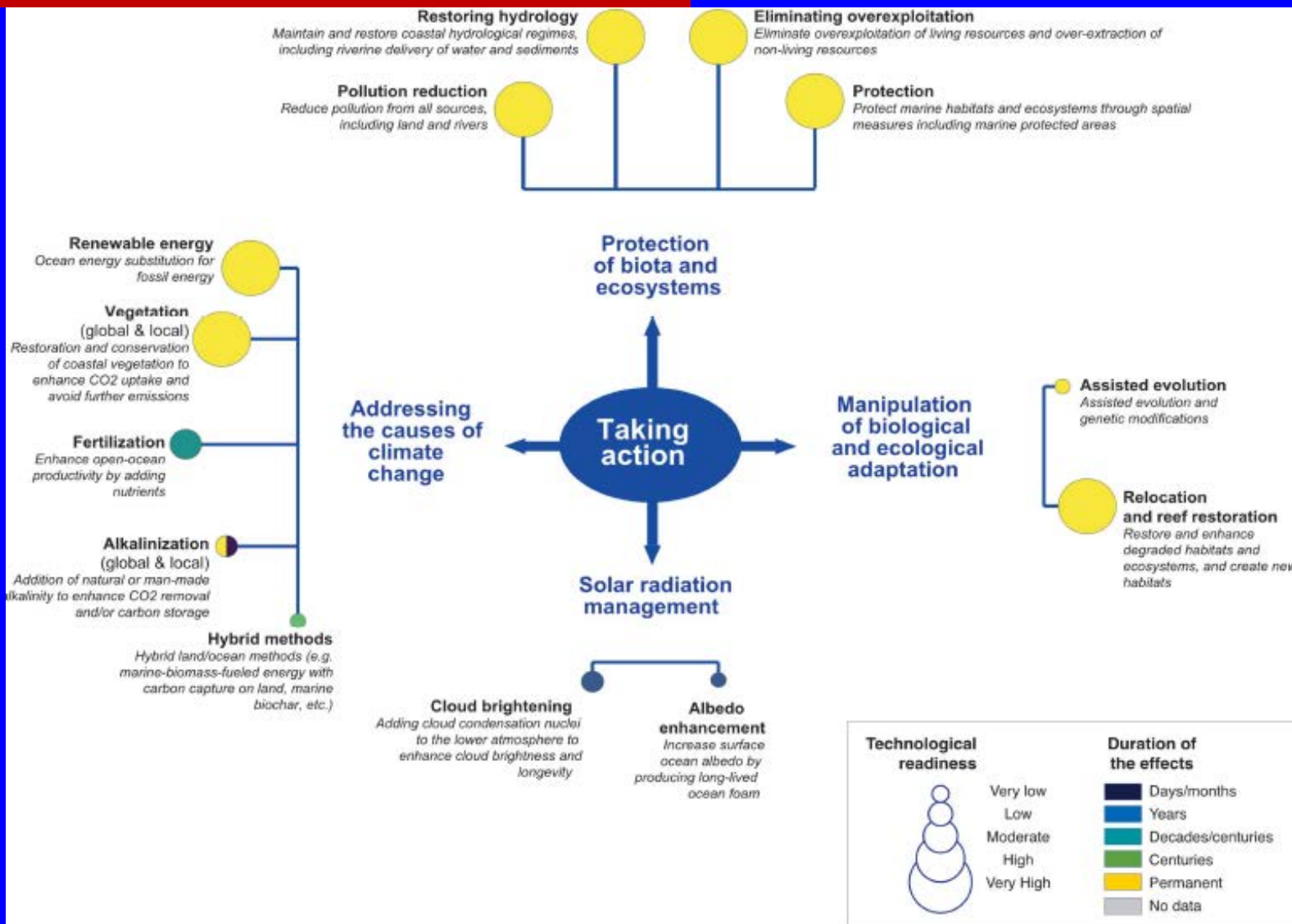


Figure 3.5 Projected changes in water-limited crop yield. Source: EEA 2017a, using data from Ciscar et al. (2011) and Iglesias et al. (2012). This map compares relative changes for the 2050s with the period 1961–1990 for a medium–high climate change scenario. The simulation assumes that the irrigated area remains constant: the results combine the impacts on the key crops wheat, maize and soybean, weighted by their current distribution.

1.2. Necesidad de actuar



1 NO POVERTY



2 ZERO HUNGER



3 GOOD HEALTH AND WELL-BEING



4 QUALITY EDUCATION



5 GENDER EQUALITY



6 CLEAN WATER AND SANITATION



7 AFFORDABLE AND CLEAN ENERGY



8 DECENT WORK AND ECONOMIC GROWTH



9 INDUSTRY, INNOVATION AND INFRASTRUCTURE



10 REDUCED INEQUALITIES



11 SUSTAINABLE CITIES AND COMMUNITIES



12 RESPONSIBLE CONSUMPTION AND PRODUCTION



13 CLIMATE ACTION



14 LIFE BELOW WATER



15 LIFE ON LAND



16 PEACE, JUSTICE AND STRONG INSTITUTIONS



17 PARTNERSHIPS FOR THE GOALS



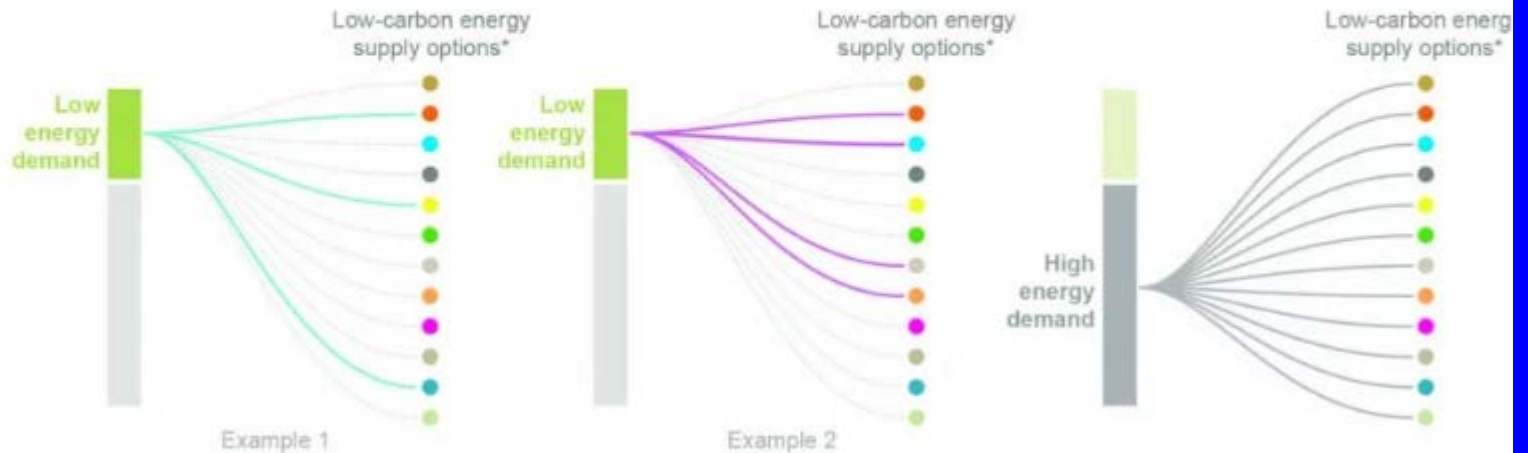
SUSTAINABLE DEVELOPMENT GOALS

FAQ2.2: Energy demand and supply in 1.5°C world

Lower energy demand could allow for greater flexibility in how we structure our energy system.

Low energy demand allows more choice about which low-carbon energy supply options to use to limit warming to 1.5°C.

With **high energy demand**, there is less flexibility as virtually all available options would need to be considered.

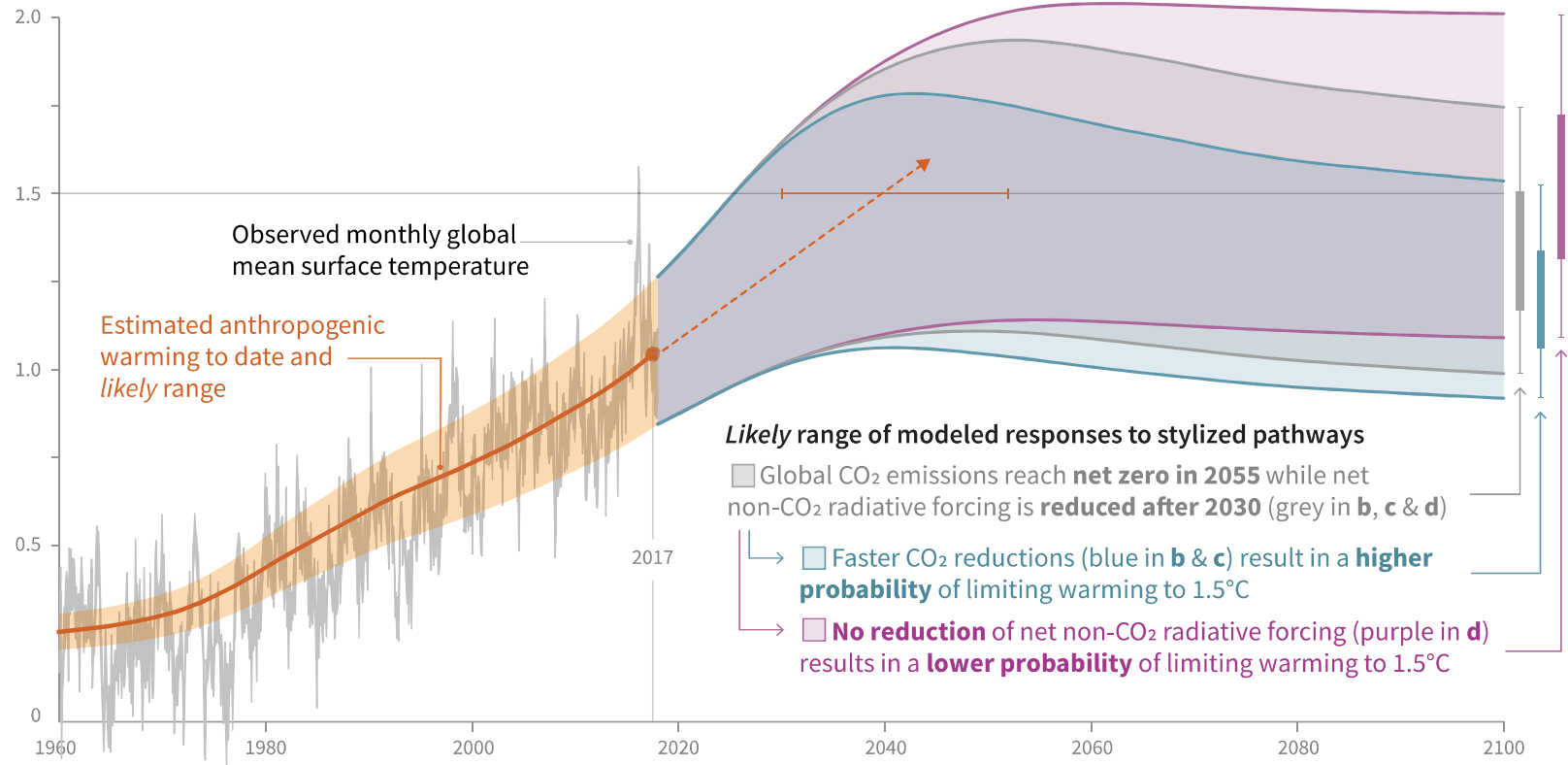


* Options include renewable energy (such as bioenergy, hydro, wind and solar), nuclear and the use of carbon dioxide removal techniques

Las emisiones acumulativas de CO2 y otros GEI determinan la posibilidad de reducir el aumento de la temperatura global a 1.5 °C

a) Observed global temperature change and modeled responses to stylized anthropogenic emission and forcing pathways

Global warming relative to 1850-1900 (°C)



(IPCC SR15 2018, SPM 1)

2. Matemáticas y Clima

2.1. Antecedentes pioneros



(1824)

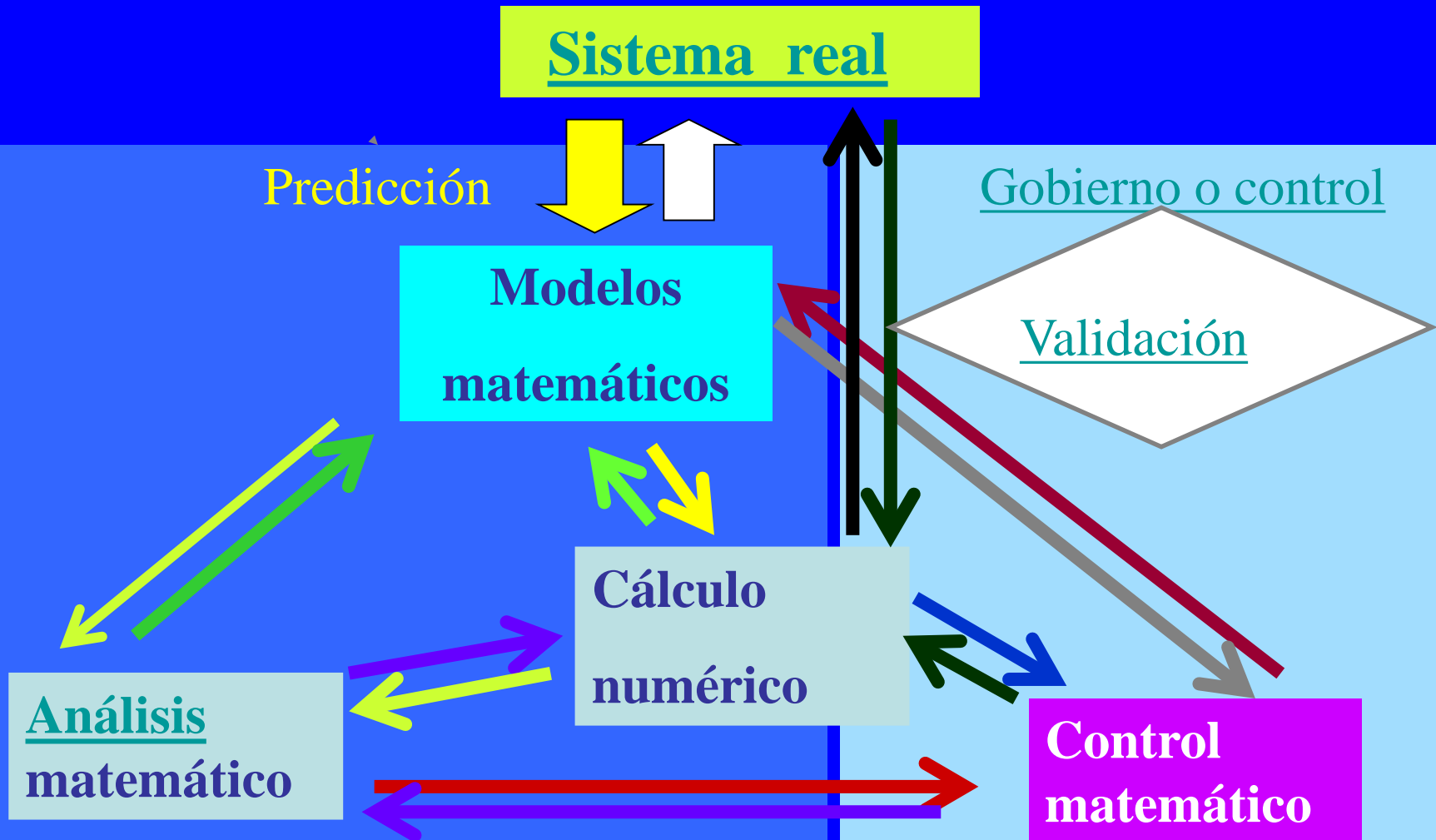
El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el calor medio a lo largo de varios siglos ...

Joseph Fourier

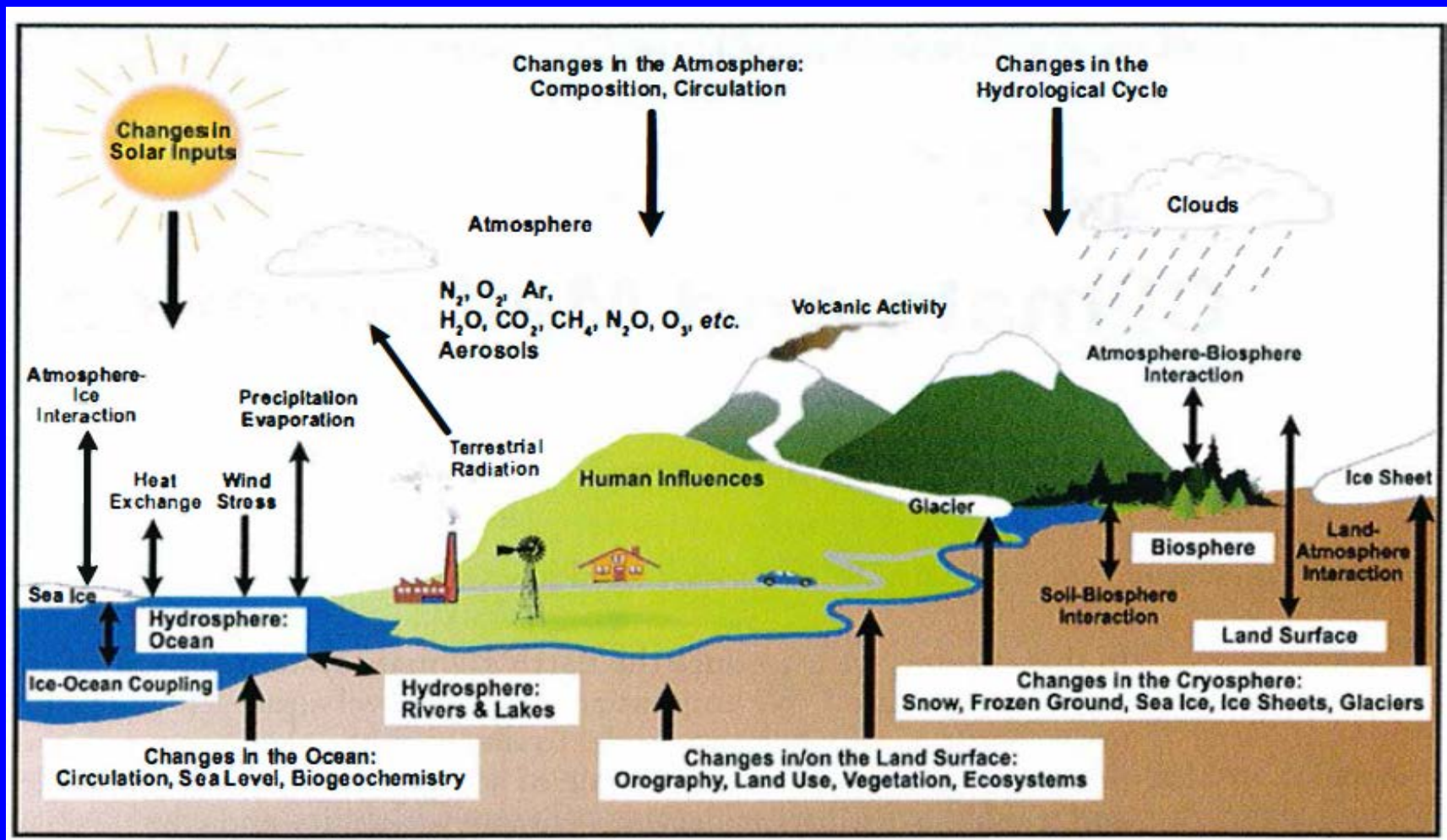
(1768-1830)

2.2. Muy diferentes modelos: meteorología /climatología

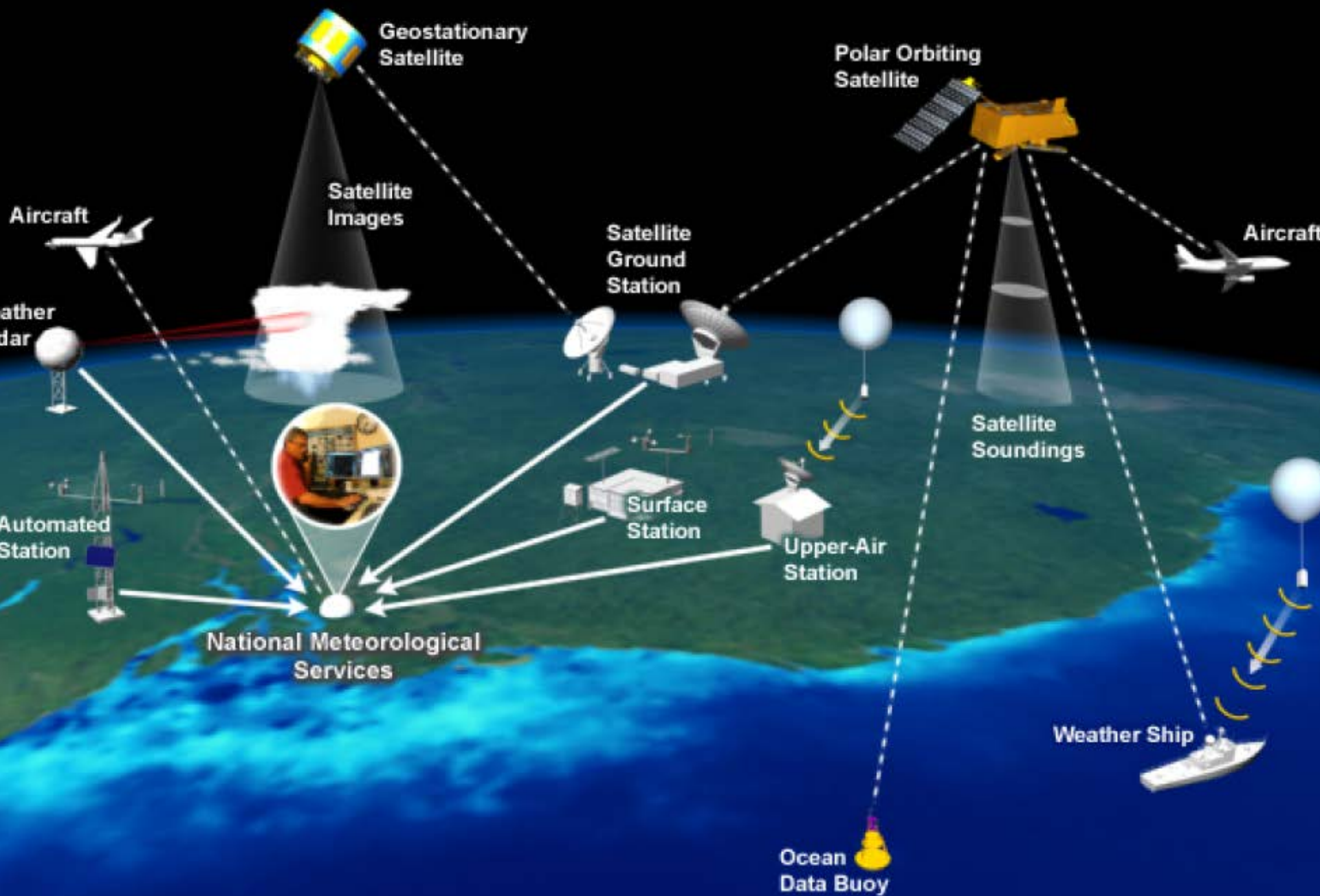
La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



El problema real = CLIMA: componentes externos e internos del sistema climático



The Global Observing System



Escalas temporales y espaciales: Jerarquía de Modelos Climatología / Meteorología

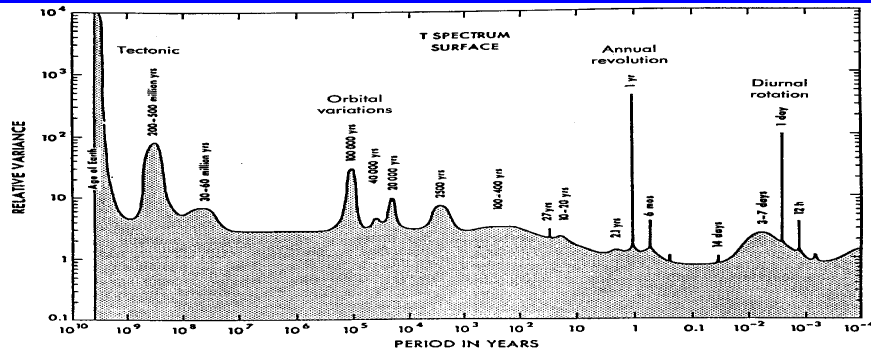
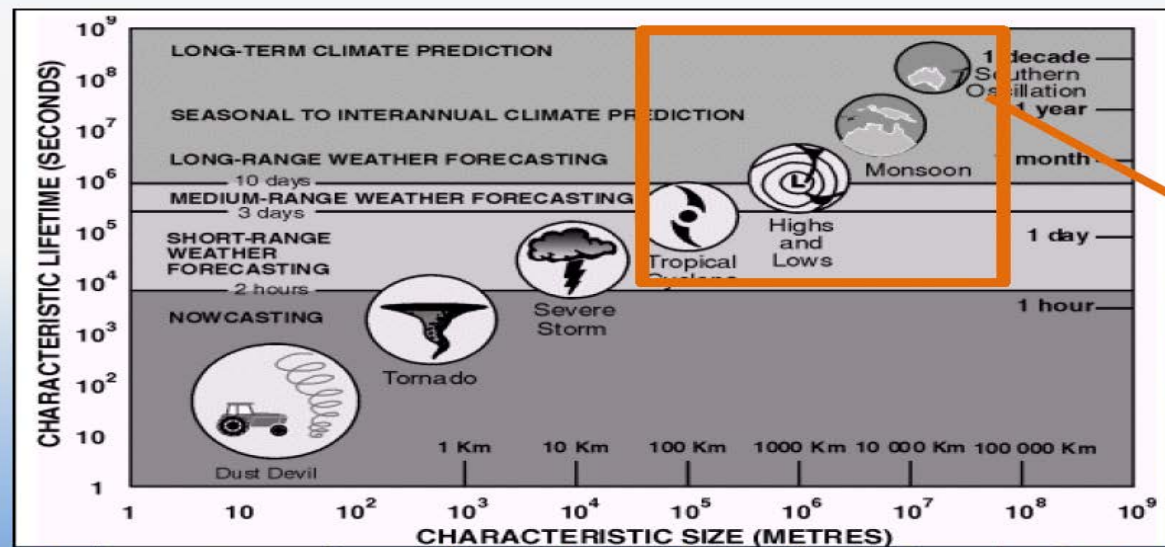


Fig. 2. Tentative spectrum of climatic variations. Estimate of relative variance of climate over all periods of variation. A background level of variability, deriving from internal stochastic mechanisms and correlation, appears to increase in amplitude toward shorter periods, due to external high degree of predictability (adapted from [source]).

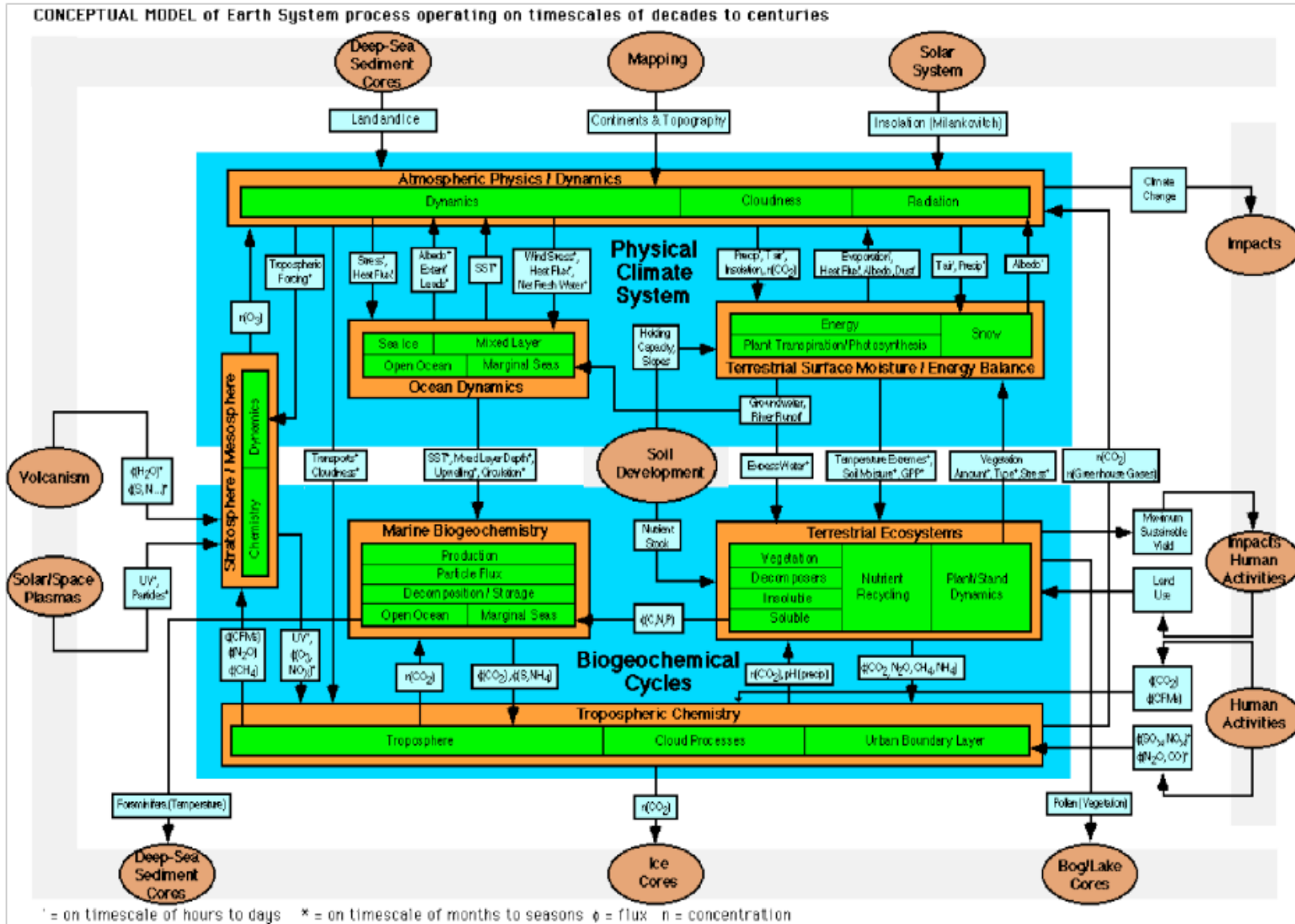
Espectro de variaciones climáticas



Escala a similar



Horrendograma de acoplamientos entre los componentes principales del clima



* = on timescale of hours to days * = on timescale of months to seasons ϕ = flux n = concentration

(a) Bretherton horrendogram

Modelos globales / locales.

Modelos globales de Balance de Energía.

Clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider,1992)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

Predicción del tiempo
meteorológico

Modelos climáticos

Pronóstico

Modelos realistas

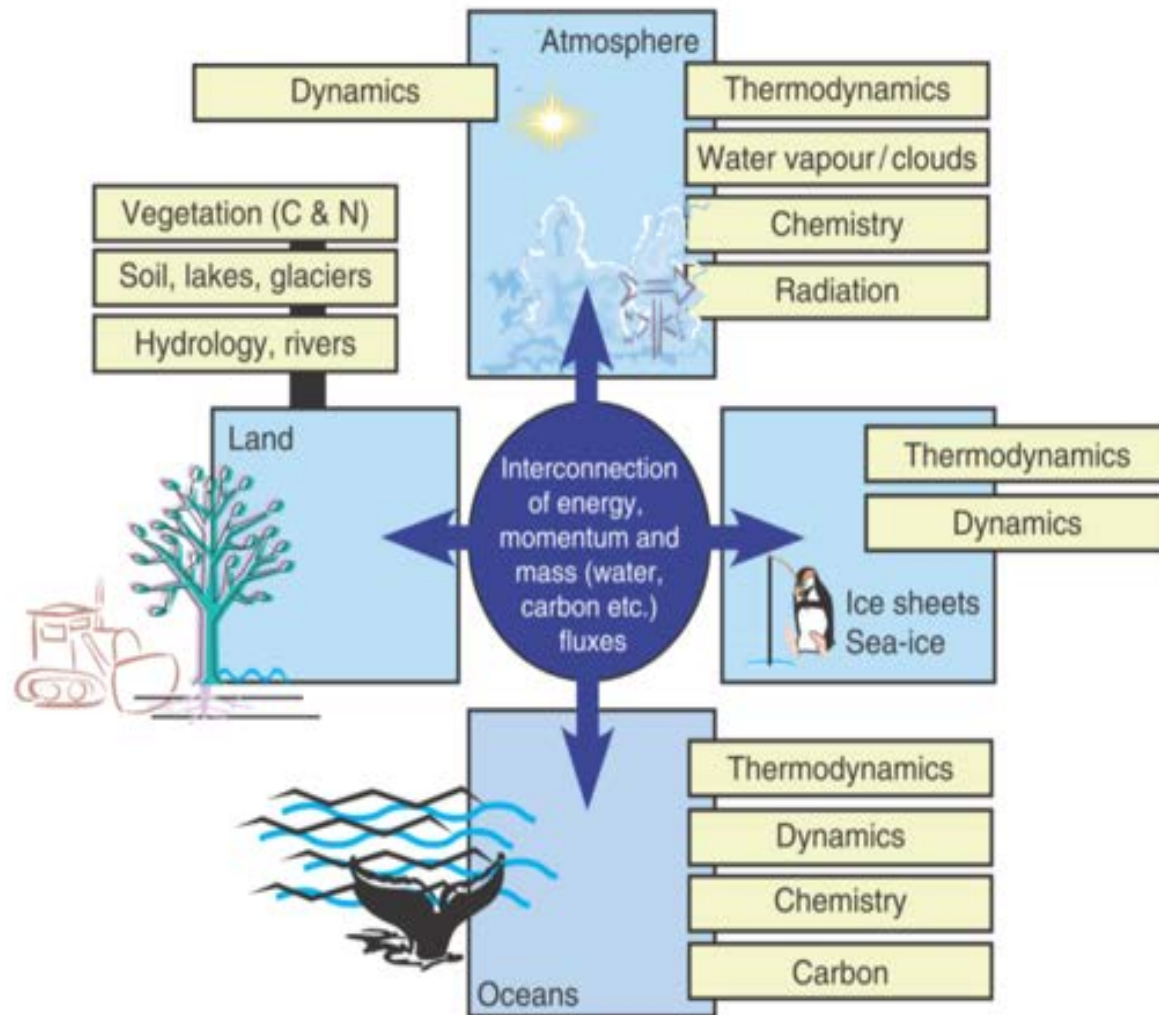
Métodos computacionales

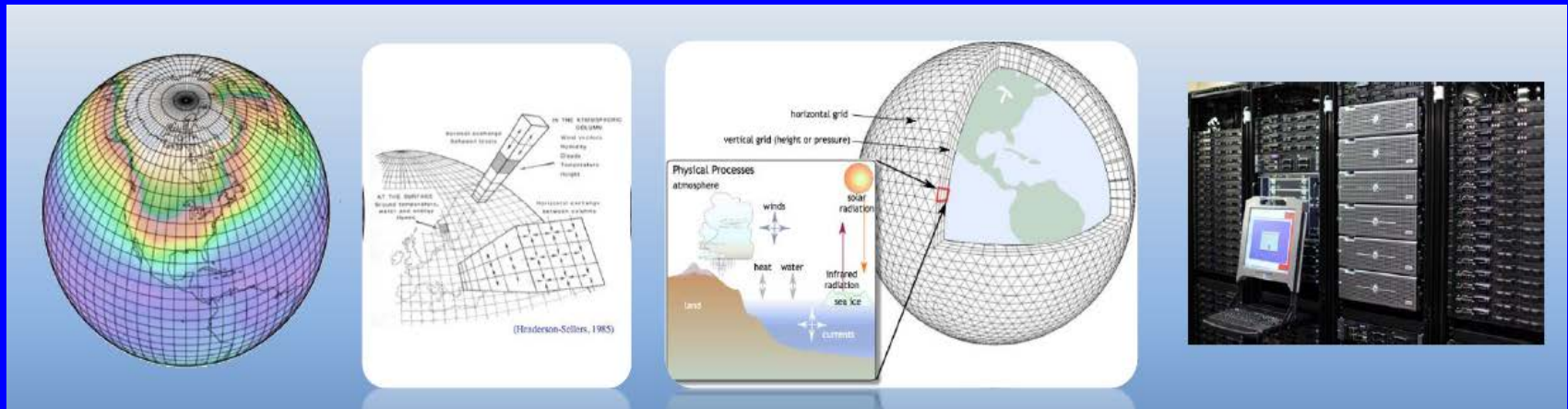
Diagnóstico

Modelos simplificados

Métodos cualitativos

Ecuaciones primitivas de la atmósfera y del océano



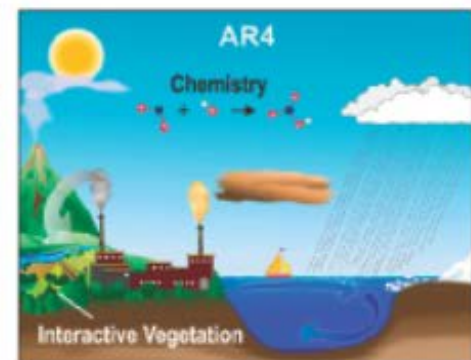
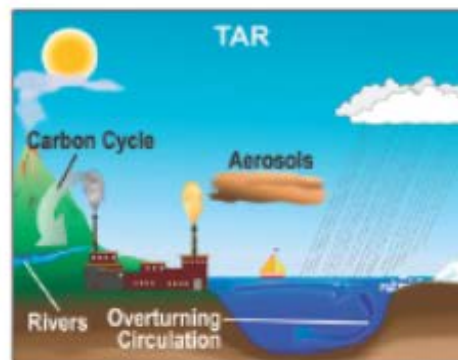
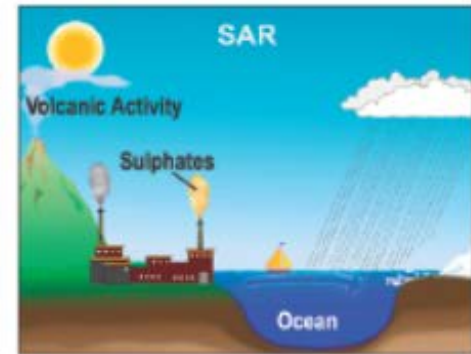
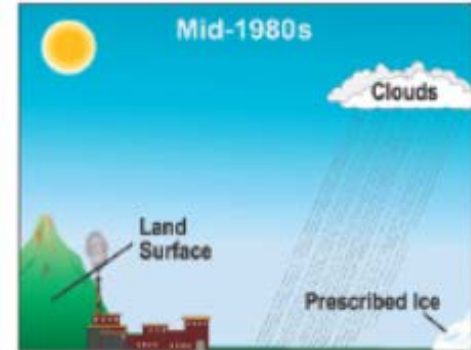
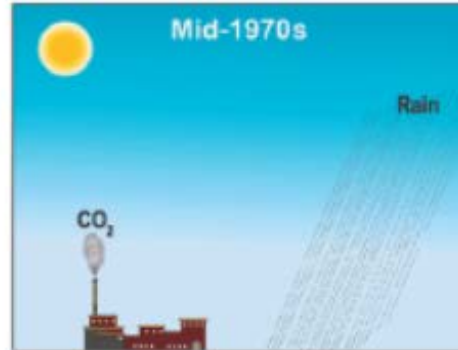
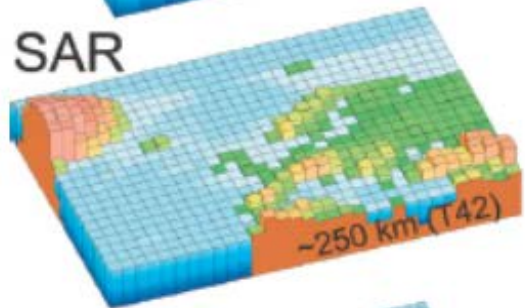
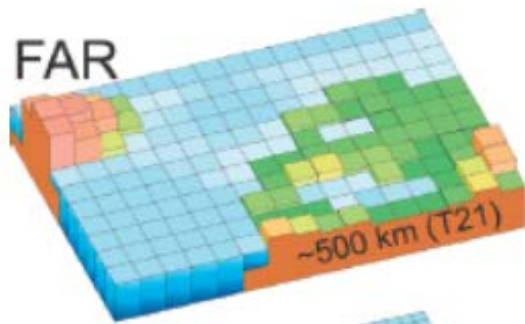


Discretización espacial: modelos computacionales

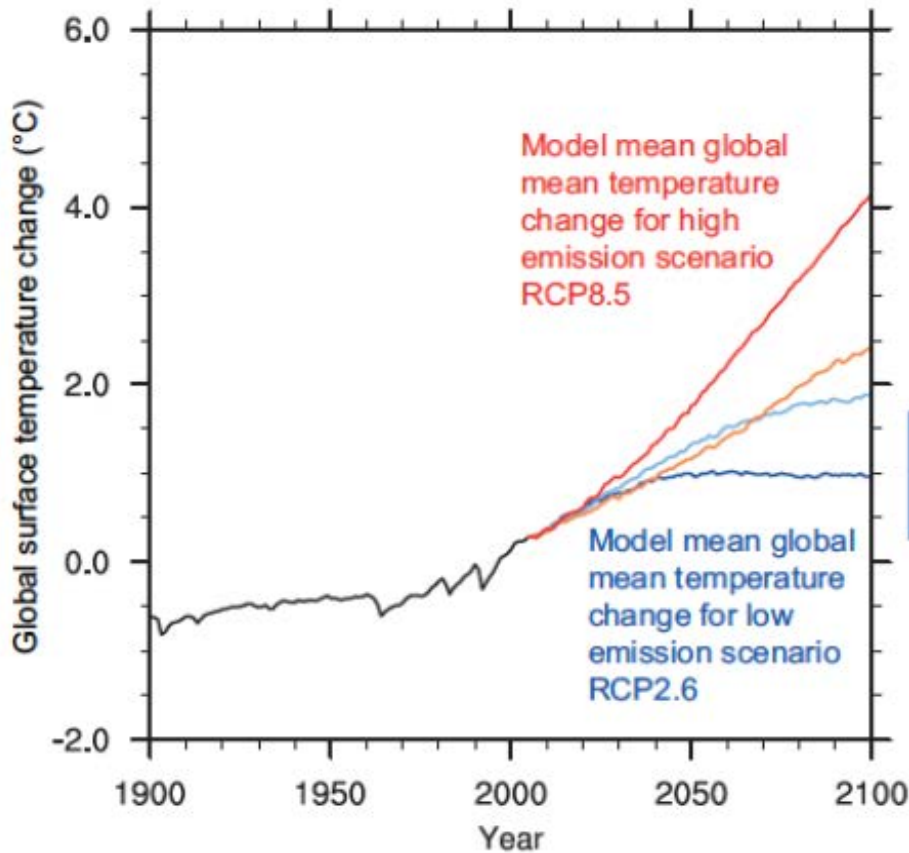
Numerosos matemáticos, puros y aplicados, han trabajado juntos por varios siglos después de que las ecuaciones de movimiento de los fluidos fueran formuladas inicialmente por L. Euler y después por Navier y Stokes.

En el primero décadas del siglo XX un reconocido por matemático y meteorólogo L. F. Richardson ya estableció que los movimientos atmosféricos (y el clima) están gobernados por un conjunto de ecuaciones basadas en las leyes de la Mecánica de Newton (conservación de los momentos lineales y angulares , junto a las ecuaciones de la conservación de la masa y de la energía interna. L. F. Richardson intentó “resolverlas” mediante métodos numéricos y cálculos a mano entre numerosas personas coordinadas

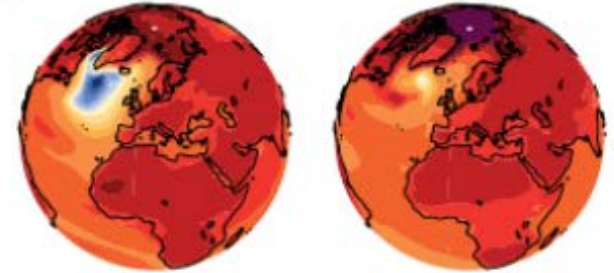
The World in Global Climate Models



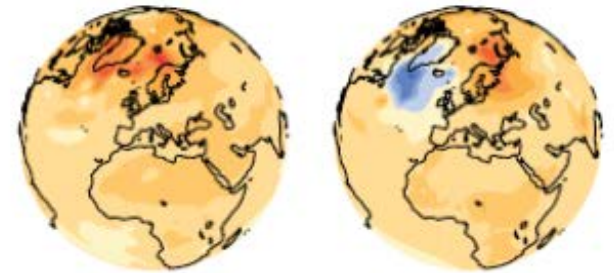
Evolución de los modelos climáticos en los primeros cuatro *Informes de evaluación del IPCC*: desde principios de la década de 1990 hasta mediados de la década de 2000 (IPCC, 2007).



Possible temperature responses in 2081-2100 to high emission scenario RCP8.5



Possible temperature responses in 2081-2100 to low emission scenario RCP2.6



3. Modelos climáticos sencillos de Balance de Energía Radiativo

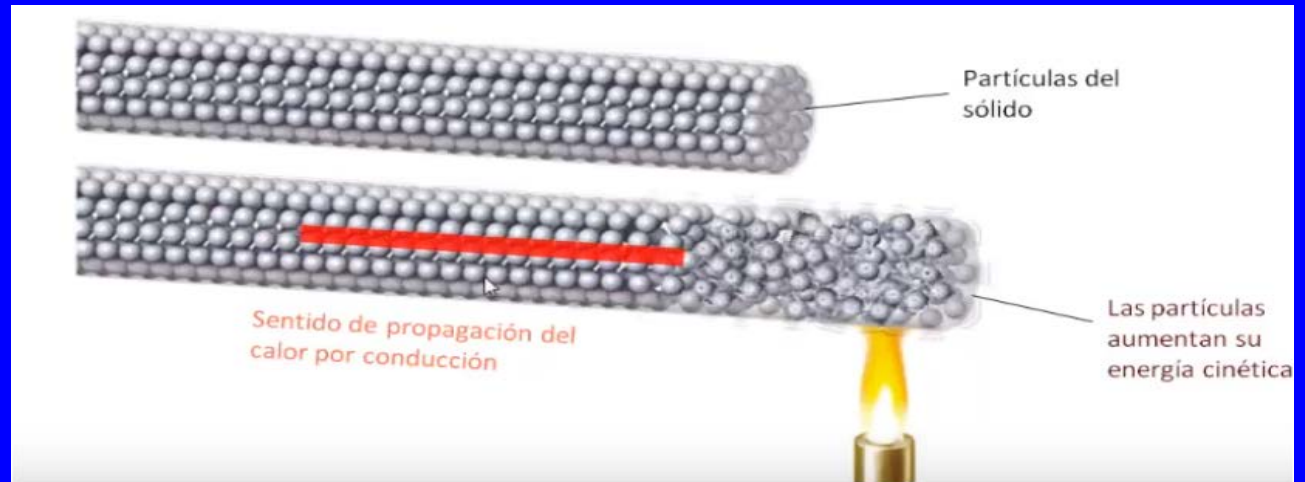
3.1. Energías, tipos, unidades

3.2. Energía de Radiación: ondas electromagnéticas

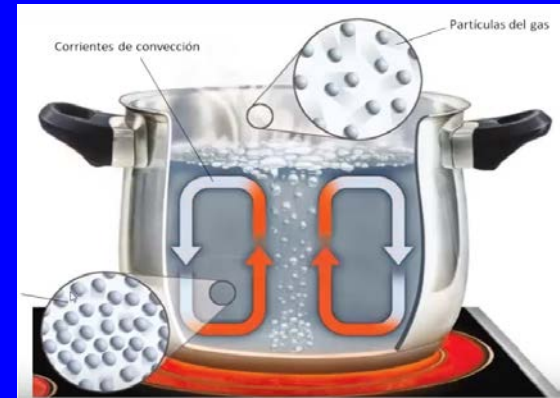
Aclaremos algunos conceptos básicos:

Tres tipos diferentes de conducción del calor:

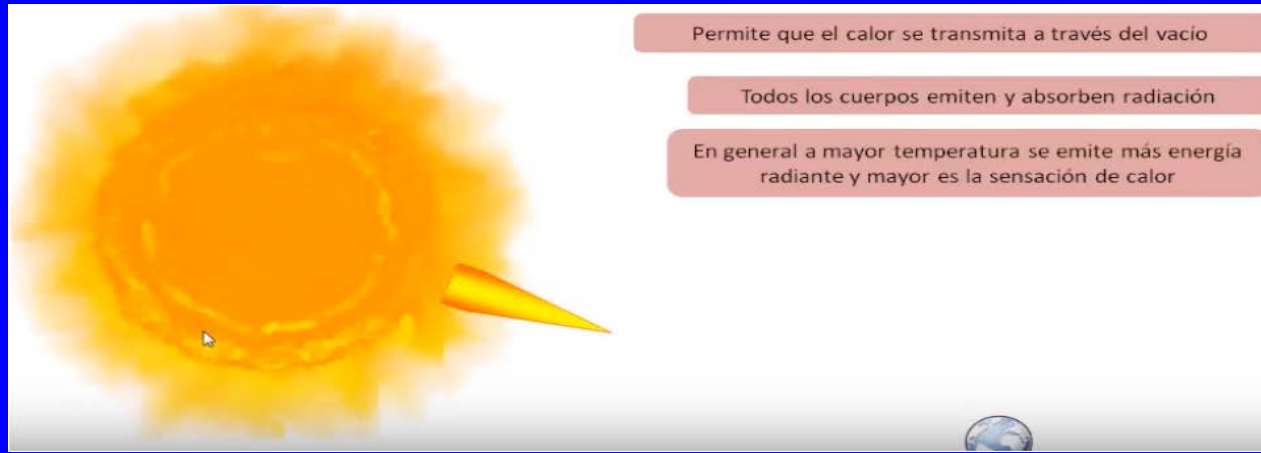
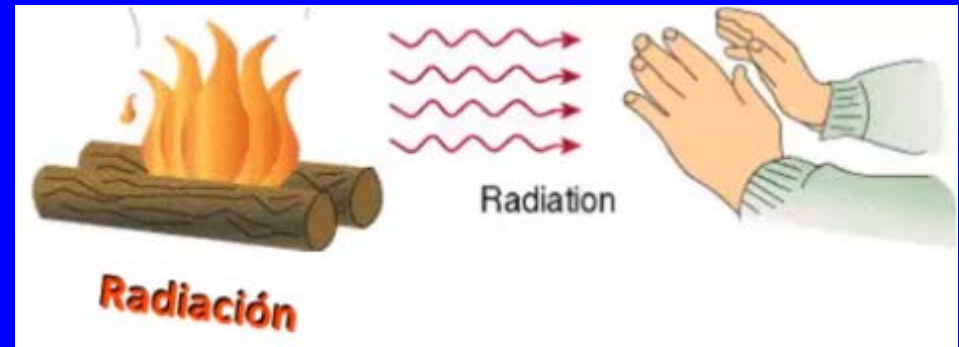
Propagación del calor en sólidos: **conducción**



Propagación del calor en medios continuos: **convección**



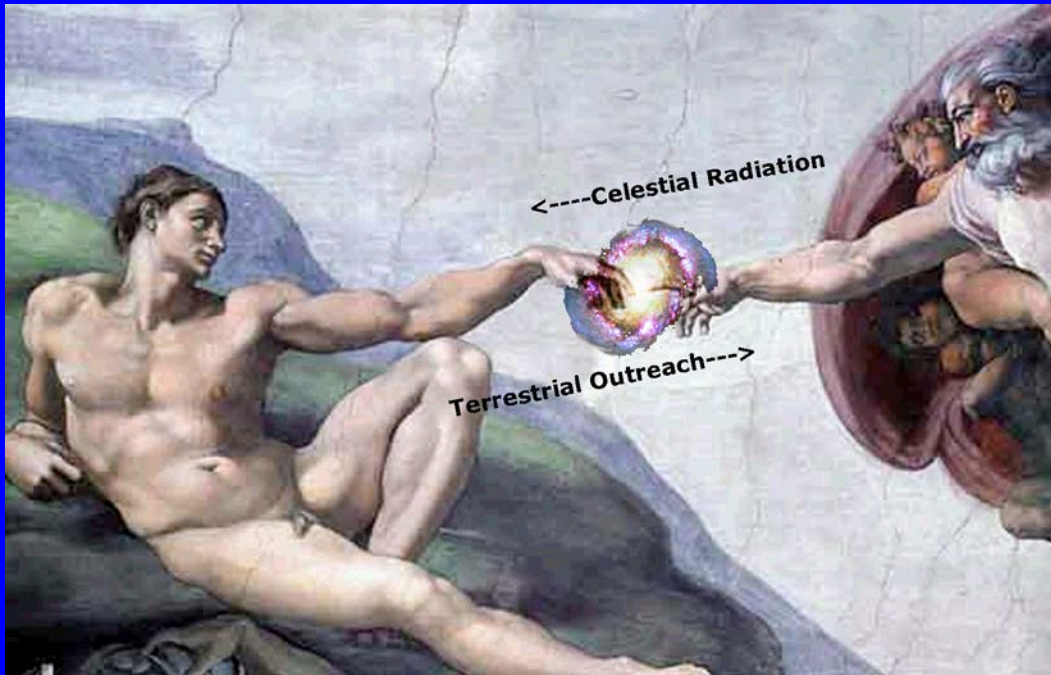
Propagación del calor por ondas electromagnéticas: **radiación**



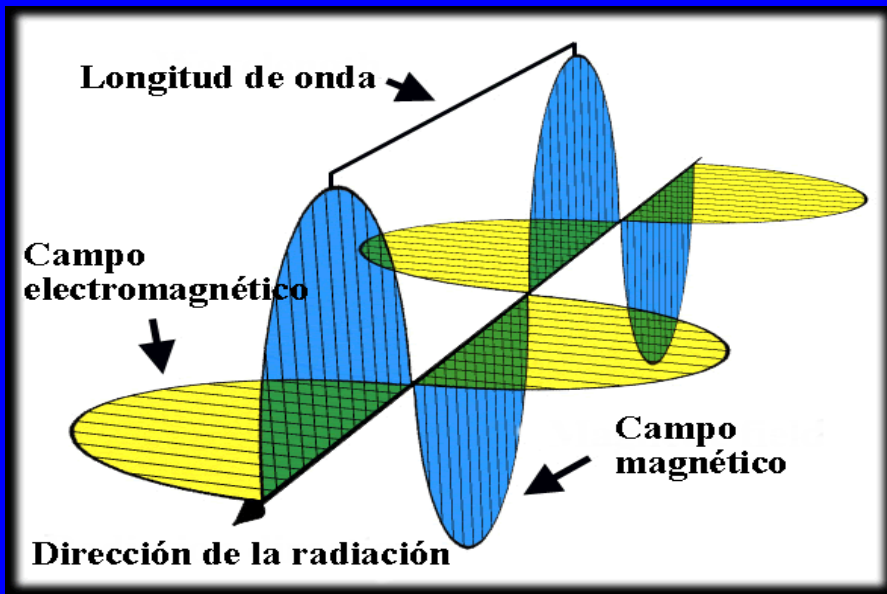
Presencia simultánea de los tres tipos de propagación



El sistema climático de la Tierra recibe prácticamente toda su energía del Sol. Esta energía viene en forma de **radiación electromagnética, que se origina desde el Sol.**



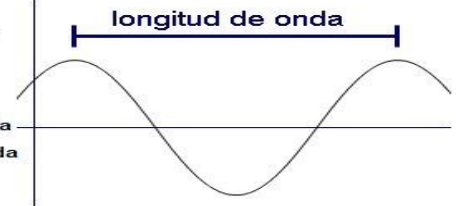
Recordemos algo sobre las ondas electromagnéticas: en especial el concepto de **longitud de onda** y como las ondas **transportan energía**



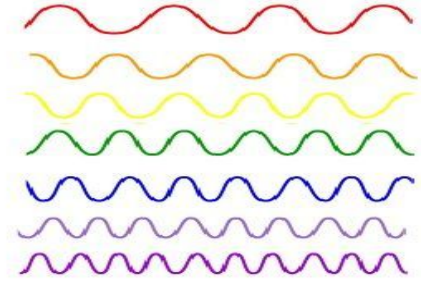
$$\lambda = 1/f$$

$$f = 1/\lambda$$

λ = Longitud de Onda
 f = Frecuencia de la Onda



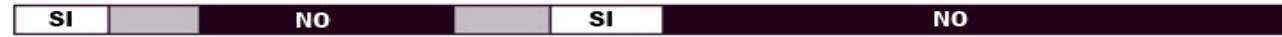
- Onda Luz Roja
- Onda Luz Naranja
- Onda Luz Amarilla
- Onda Luz Verde
- Onda Luz Azul
- Onda Luz Añil
- Onda Luz Violeta



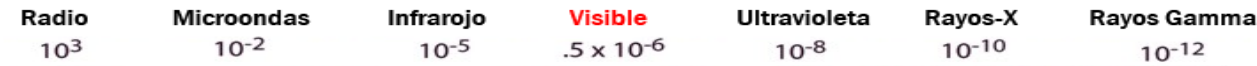
La Onda de la Luz Puede Tener Diferentes Longitudes de Onda.
 El color de la Luz depende de la Longitud de su Onda

El Espectro Electromagnético

¿Penetra la atmósfera terrestre?



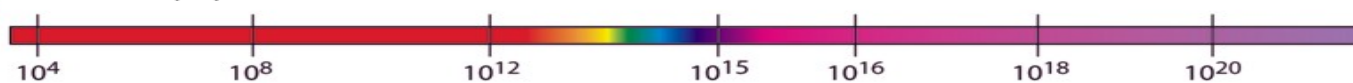
Longitud de onda (metros)



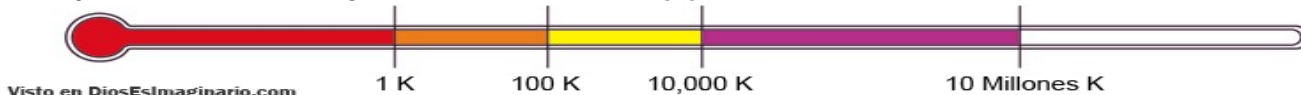
Del tamaño de...



Frecuencia (Hz)



Temperatura de los cuerpos emitiendo la onda (K)

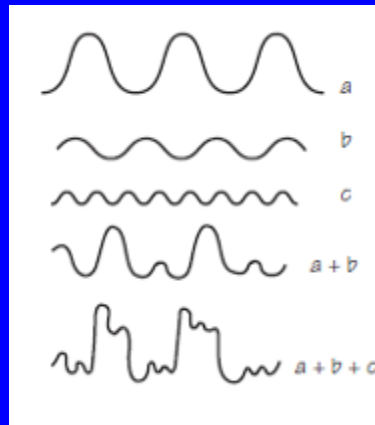


Visto en DiosEImaginario.com

Velocidad de la luz c en el vacío.

En otros medios valor inferior a c (refracción)

Suma (superposición) de ondas



Parte de la energía se elimina por absorción en la fotosfera solar, pero una buena parte del espectro de energía solar llega a la atmósfera de la Tierra similar a la de **un cuerpo negro ideal a una temperatura de 5.780 K.**

La diferente absorción por los gases de la atmósfera le da al espectro solar (sobre la superficie de la Tierra) unos perfiles más irregulares

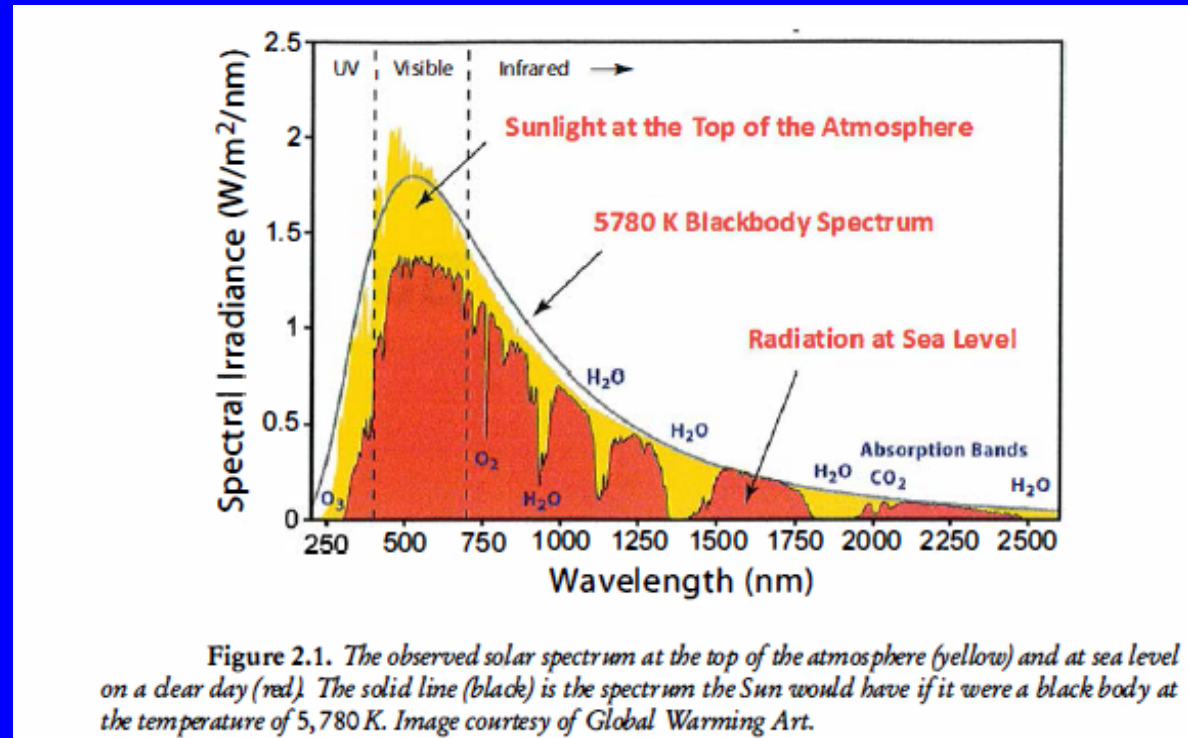
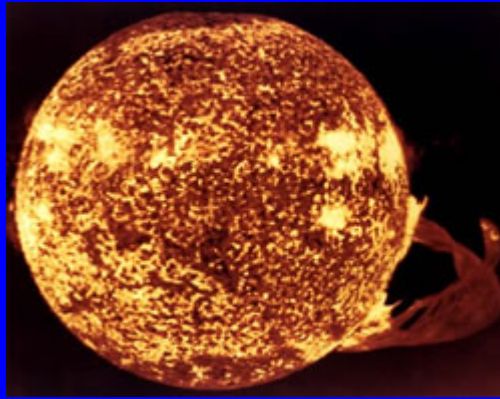


Figure 2.1. The observed solar spectrum at the top of the atmosphere (yellow) and at sea level on a clear day (red). The solid line (black) is the spectrum the Sun would have if it were a black body at the temperature of 5,780 K. Image courtesy of Global Warming Art.

La energía solar que incide anualmente sobre toda la superficie terrestre supone unas **diez mil veces la demanda de energía de la población mundial.**



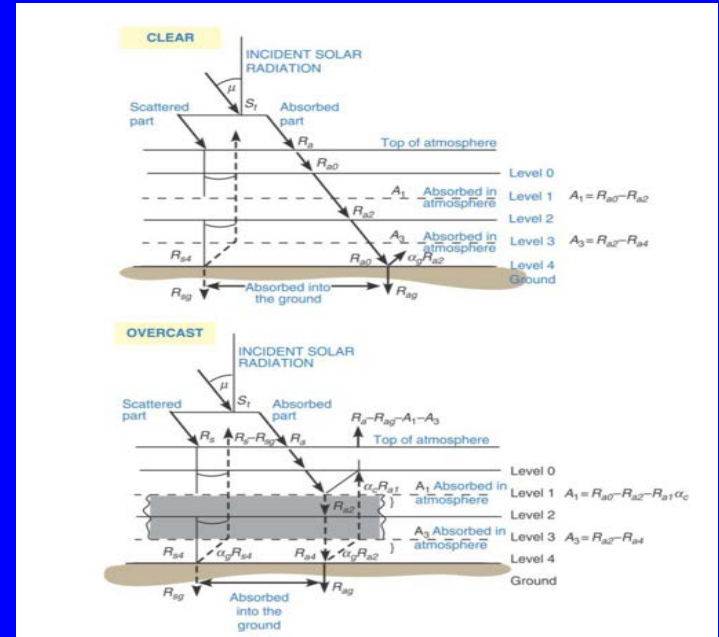
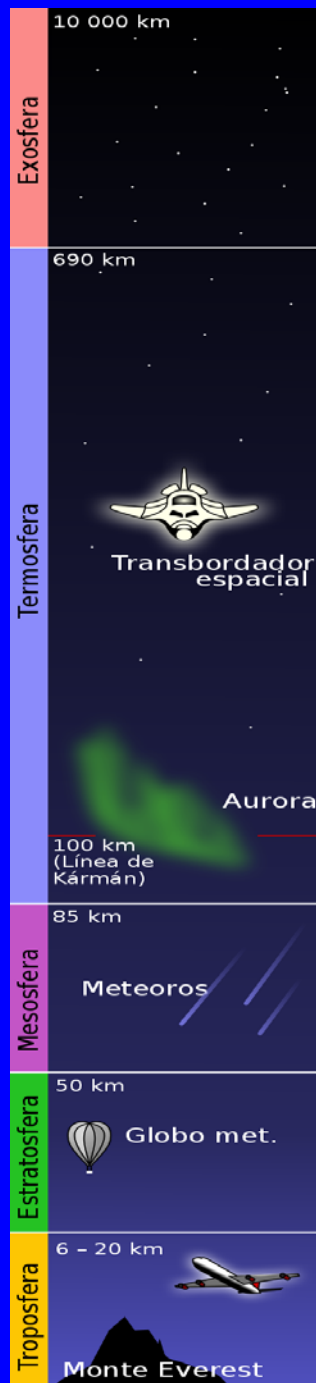
En el interior del Sol, los núcleos atómicos de hidrógeno se fusionan bajo una presión enorme, dando lugar a núcleos atómicos de helio. Durante este proceso, parte de la masa atómica se transforma en energía térmica que, en consecuencia, provoca temperaturas de millones de grados en el interior del astro. La temperatura de la superficie del Sol es de aproximadamente 6.000 °C.

De esta manera, el Sol funciona como un reactor de fusión. Cada segundo se convierten 700 millones de toneladas de hidrógeno en cenizas de helio. En el proceso se liberan 5 millones de toneladas de energía pura; por lo cual el Sol cada vez se vuelve más ligero. Actúa de manera continua y segura desde hace **5.000 millones de años** y, según las estimaciones de los astrónomos, seguirá suministrando energía otros tantos.

Radiación intermedia muy compleja



Capas de la atmósfera

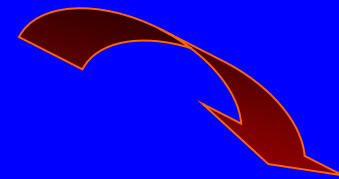


Promedios simplificadores

$\sim 342 \text{ W m}^{-2}$

30%

49%



Energía de radiación electromagnética

El **Electromagnetismo** clásico y la **Mecánica Cuántica** ofrecen descripciones diferentes de la radiación electromagnética.

En el electromagnetismo clásico la radiación es un campo oscilante que se propaga desde la fuente emisora, mientras que en la mecánica cuántica la radiación es interpretada en términos de partículas (**fotones**) emitidas por una fuente. Esas dos descripciones, sin embargo, son complementarias y para situaciones macroscópicas no son cualitativamente diferentes.

La energía electromagnética es la **cantidad de energía almacenada en una región** del espacio que podemos atribuir a la presencia de un campo electromagnético, y que se expresará en función de las intensidades del campo magnético y campo eléctrico.

En un punto del espacio la densidad de energía electromagnética depende de una suma de dos términos proporcionales al cuadrado de las intensidades del campo.

En unidades del sistema internacional viene dado por:

$$E_{em} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) dV$$

Conservación de la energía (en caso de pequeñas aceleraciones de las cargas)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) + \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (E_{em} + E_{cin}) = 0$$

¡¡ Luego se mide en las mismas unidades que la energía cinética !!

En el caso de una onda electromagnética la energía electromagnética puede calcularse a partir del cuadrado de la amplitud de esa onda electromagnética.

¿En que unidades se mide la energía de radiación electromagnética?

$$[\text{Energía}] = [\text{Fuerza} \cdot \text{Velocidad}] = [\text{Trabajo}] = [\text{Potencia} \cdot \text{Tiempo}] = MLT^{-2}$$

Unidad de energía en el S.I. el Julio (Joule) ($1 \text{Kg} \cdot m^2 / s^2$)

Unidad de potencia en el S.I. el Watio (1 Julio/segundo)

Algunos valores característicos:

- Bombillas de 60 w (9 w si son LED)
- Una taladrador funcionando 1 segundo (600 watios)

$$1 \text{ Kilowatio hora (medida de energía)} = 3,6 \text{ mega-Julios} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

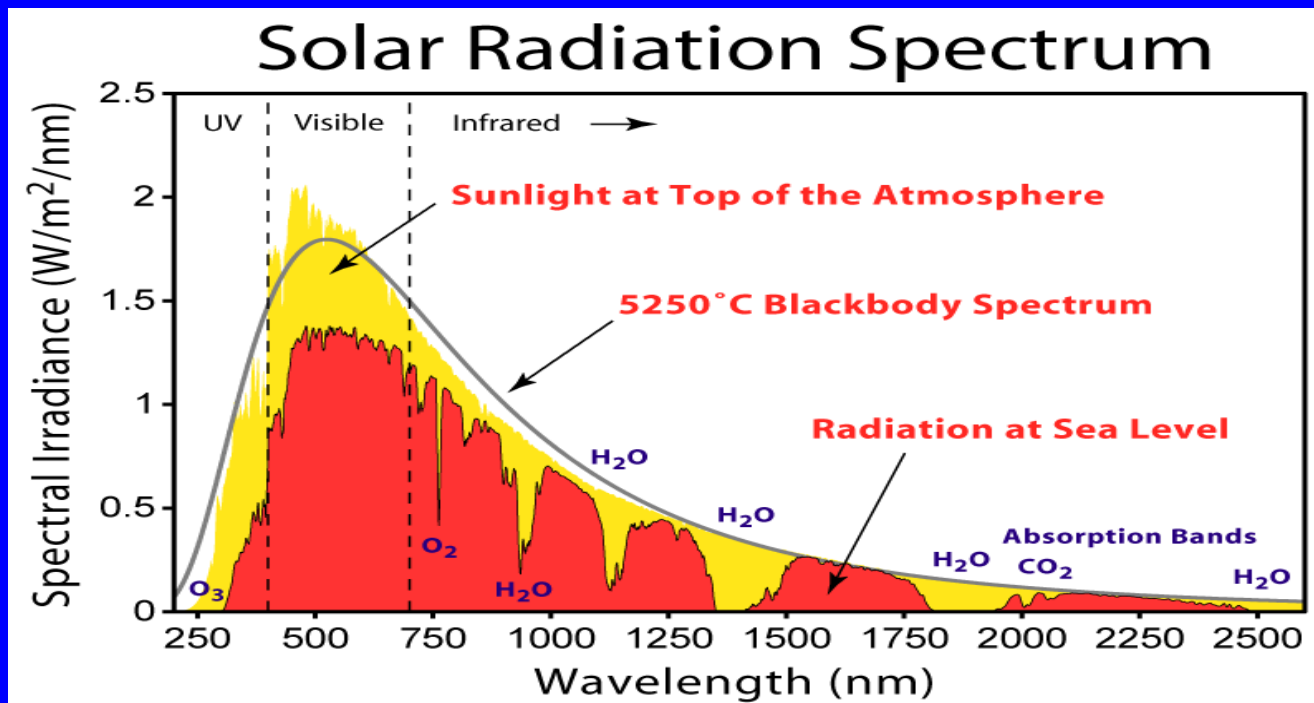
La potencia radiante del sol en el límite exterior de la atmósfera terrestre, a una distancia de unos 150 millones de kilómetros, corresponde a aproximadamente **1360 W/m²**. Este valor se denomina **Constante Solar S_0** .

La **radiación solar** es el conjunto de radiaciones electromagnéticas emitidas por el Sol. El Sol es una estrella que se encuentra a una temperatura media de 5778 K (5505°Celsius) en cuyo interior tienen lugar una serie de reacciones de fusión nuclear que producen una pérdida de masa que se transforma en energía. Esta energía liberada del Sol se transmite al exterior mediante la radiación solar. El Sol se comporta prácticamente como un cuerpo negro, el cual emite energía siguiendo la ley de Planck a la temperatura ya citada.

La radiación solar se distribuye desde el infrarrojo hasta el ultravioleta.

No toda la radiación alcanza la superficie de la Tierra, porque las ondas ultravioletas más cortas son absorbidas por los gases de la atmósfera.

La magnitud que mide la radiación solar que llega a la Tierra es la irradiancia, que mide la potencia que por unidad de superficie alcanza a la Tierra. Su unidad es el W/m^2 .



La **irradiancia** es la magnitud utilizada para describir la potencia incidente por unidad de superficie de todo tipo de radiación electromagnética.

La irradiancia representa el flujo de energía asociado a la radiación electromagnética en la dirección perpendicular a su dirección de propagación.

Dado que los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética oscilan con la frecuencia de la onda, la magnitud del **vector de Poynting**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

cambia en el tiempo.

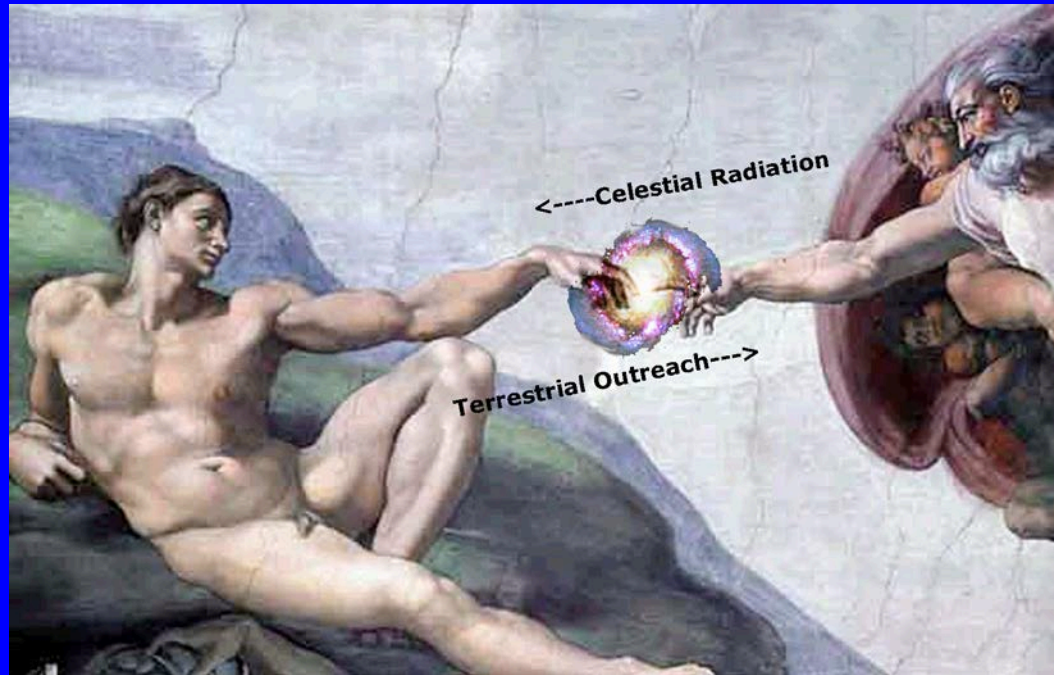
El promedio del vector de Poynting sobre un período muy superior al periodo de la onda es llamado irradiancia, I

$$I = \langle S \rangle_T$$



Earth Radiation Budget Satellite

Satélite (ESA) *Ingenio* (CDTI),...



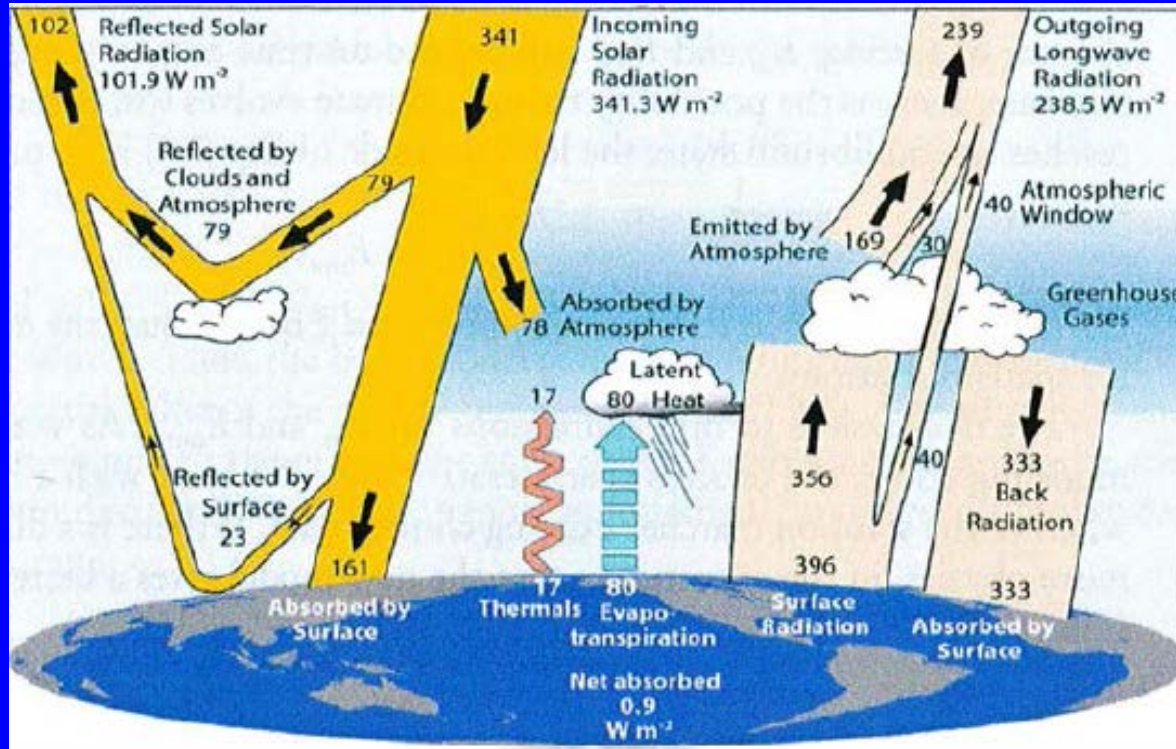
Los cambios en el sistema climático se deben alteraciones del equilibrio radiativo.

Causas potenciales:

1. Variaciones en la radiación solar entrante
2. Variaciones en la radiación solar reflejada.
3. Cambios en la radiación terrestre fuera de la atmósfera (por ejemplo, CO₂, CH₄, N₂O, H₂Ov)

Balance de energía radiativa

(principios generales)



R_a

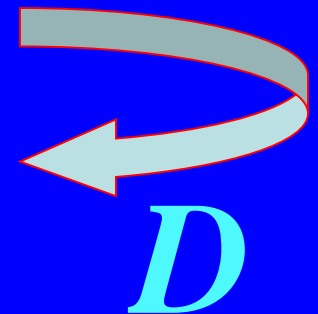
Albedo

R_e

Efecto invernadero

Primer Principio de la termodinámica

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + D$$



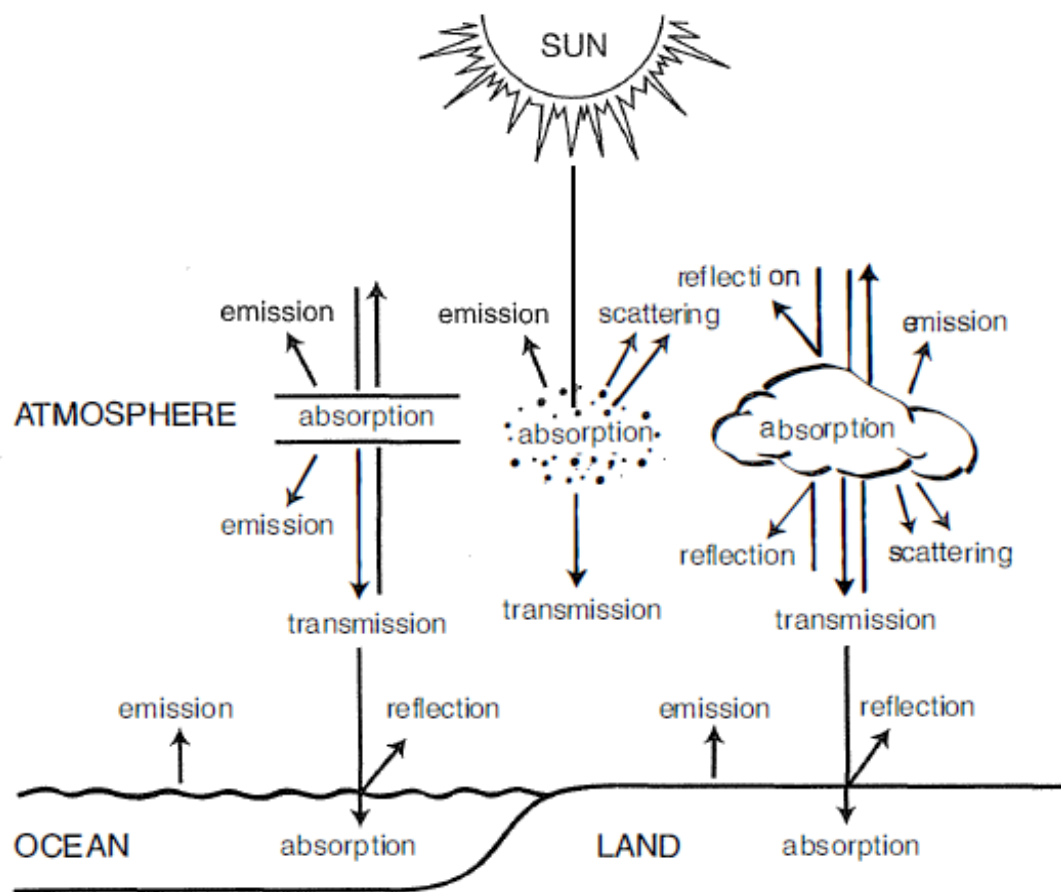
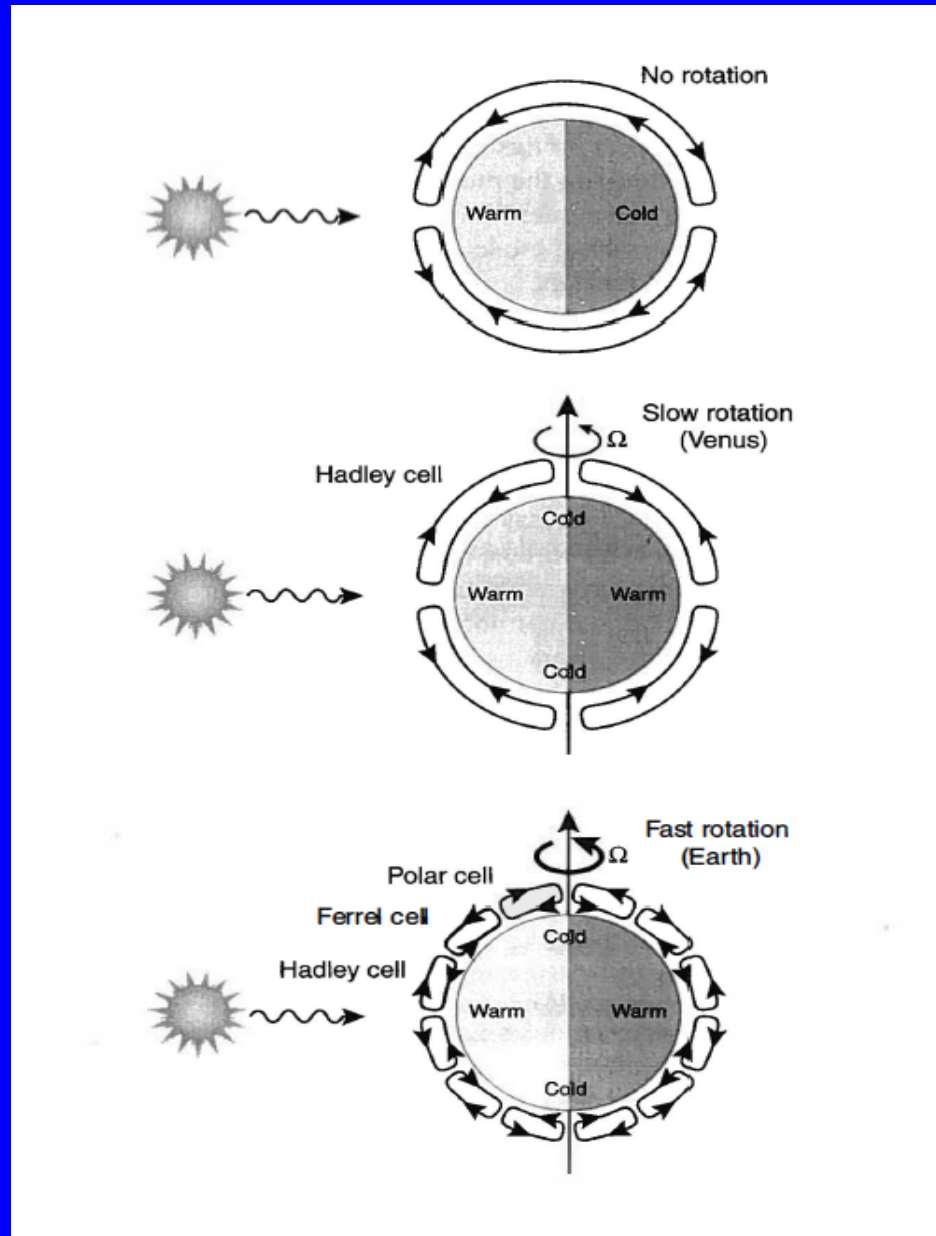


Fig. 6.4 Transmission, absorption, emission, and scattering of radiation takes place in each element of the climate system. To build a realistic climate model, we have to decide which of these radiative transfer processes are the most important under a given set of circumstances, and which can be neglected. Then we need fast, accurate schemes for devised for calculating the rate at which energy is transferred within the atmosphere.

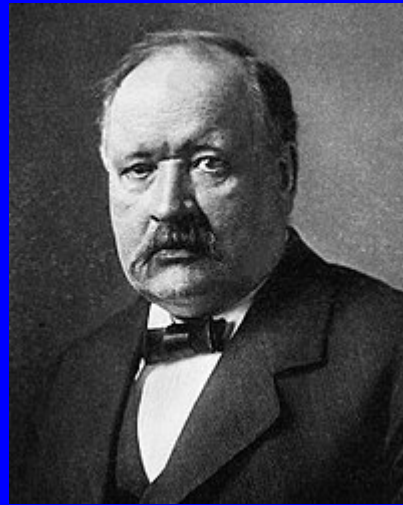
Acoplamiento difusión-rotación

(pero escala
anual...)



S. Arrhenius (1896), ...

(1859 - 1927)



En 1896 Svante Arrhenius calculó el efecto de la duplicación del dióxido de carbono atmosférico obteniendo como resultado un incremento de la temperatura de superficie de 5-6 grados Celsius.

Anders Celsius definió su escala en 1742 considerando las temperaturas de ebullición y de congelación del agua, asignándoles originalmente los valores 0 °C y 100 °C, respectivamente, más tarde Jean-Pierre Christin (1743)³⁴ y Carlos Linneo (1745)⁵ invirtieron ambos. Y se llegó a la temperatura en grados centígrados

William Thomson (luego Lord Kelvin) definió en 1848 su escala absoluta de temperatura en términos del grado Celsius.

En la actualidad el grado Celsius se define a partir del kelvin del siguiente modo:

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$$

W.D. Sellers (1969),



(1928-2014)

M.I. Budyko (1969),...

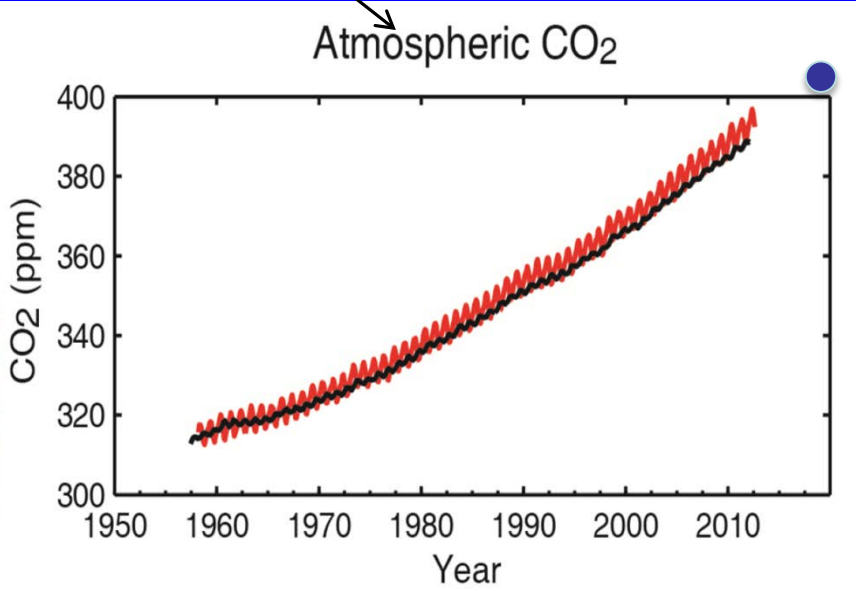
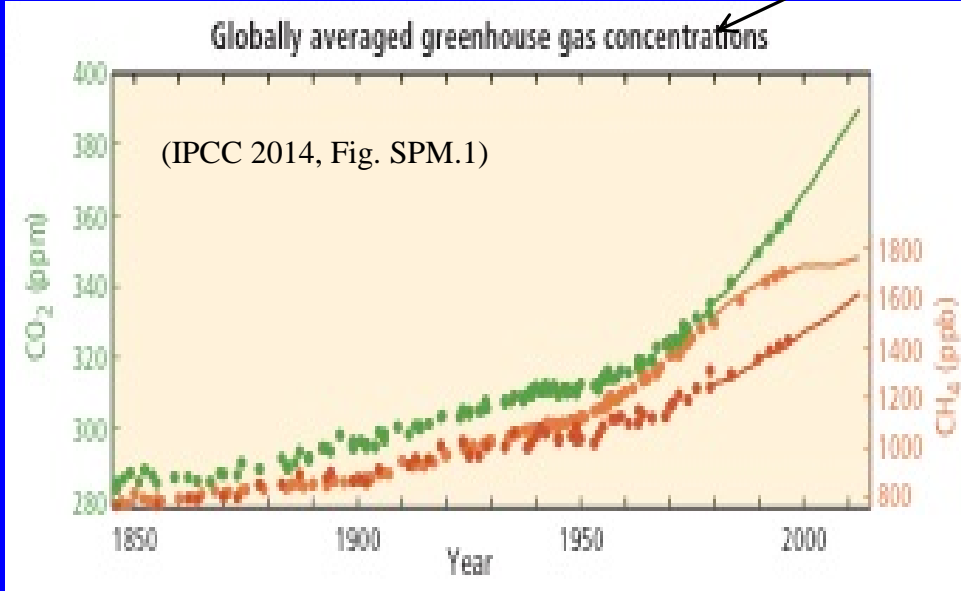
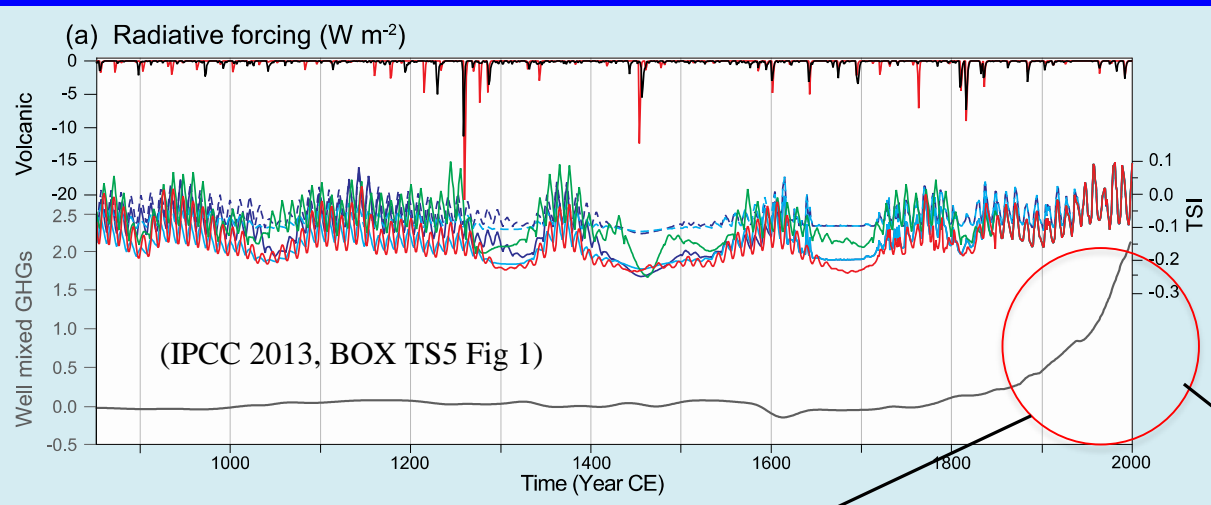


(1920 - 2001)

Factores de forzamiento radiativo Naturales y de origen humano

Las concentraciones de CO₂ superan los valores de los últimos 800 ka

$\Delta[\text{CO}_2] \sim 40\%$ desde niveles preindustriales



(IPCC 2013, Fig. SPM.4)

Causas de los cambios en el sistema climático

El balance radiativo total es positivo y ha llevado a una absorción de energía por parte del sistema climático.

La mayor contribución: el incremento de [CO₂] desde 1750

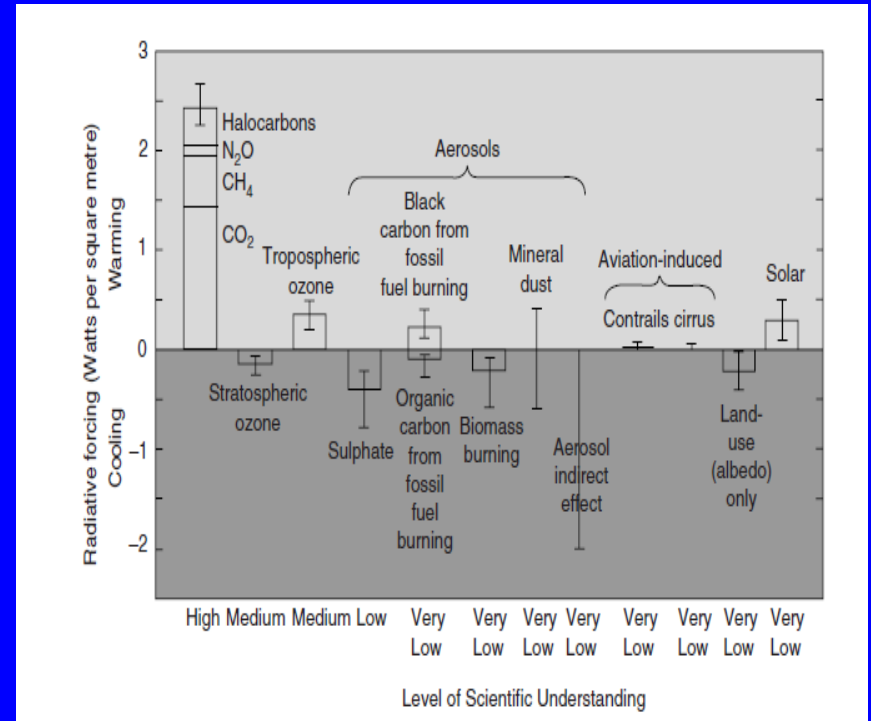
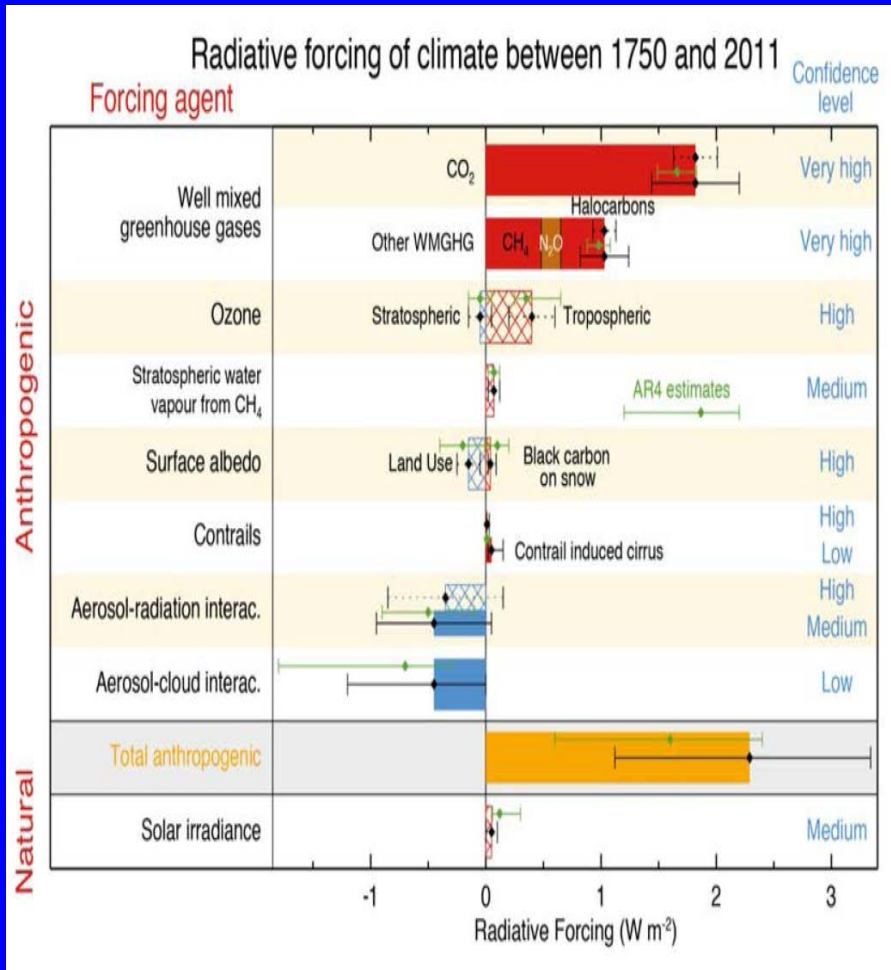
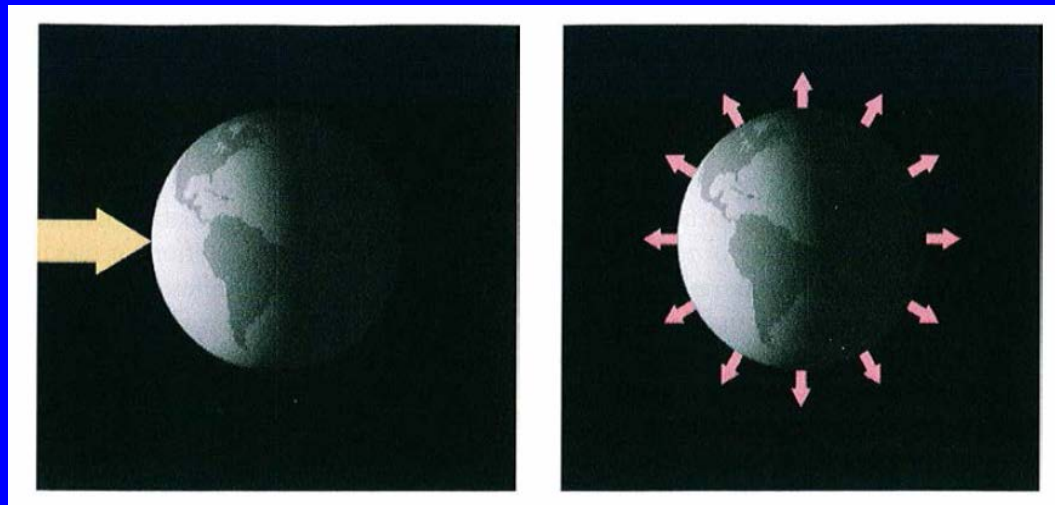


FIG. 1.1. The global mean radiative forcing of the climate system for the year 2000, relative to 1750. (Source: IPCC 2001)

-Boucher et al., IPCC, 2013: Ch7-
 -Myhre et al., IPCC, 2013: Ch8-

3.3. Modelo cero-dimensional. Constante solar y co-albedo. Gases de efecto invernadero: emisividad. Multiplicidad de soluciones de equilibrio



Representación conceptual del sistema climático de la Tierra: energía radiante solar *entrante* (radiación de onda corta) y radiación saliente (radiación de onda larga).

Ignoremos las diferencias en la composición de la atmósfera, así como diferencias entre continentes y océanos, topografía y todas las demás características locales: el estado de todo el sistema mediante una sola variable, es decir, la **media global temperatura superficial** $T(t)$ promediada en una franja superficie / atmósfera

La energía necesaria para elevar la temperatura en un grado Celsius (un kelvin) es conocida como la **capacidad calorífica del sistema** C .

Se mide comúnmente en Watios·año por m^{-2} y su valor depende del tipo de superficie terrestre en consideración.

Aproximadamente $C \approx 0,55$ Watios·año por m^{-2} para columnas suelo sólido / atmósfera
y

aproximadamente $C \approx 90$ Watios·año por m^{-2} para columnas de océano / atmósfera

Tomemos un único valor promediado $C > 0$

Supongamos una variación de la temperatura promediada en un pequeño periodo de tiempo

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \Delta T$$

Si A es el área de la superficie terrestre, la energía requerida para ello será $AC\Delta T$

Como el Sol es la única fuente de energía, esa energía debe coincidir con el balance entre la radiación de energía recibida solar y la radiación emitida por la Tierra en ese tiempo

$$AC\Delta T = A(R_a - R_e)\Delta t$$

Dividiendo por A y pasando al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$

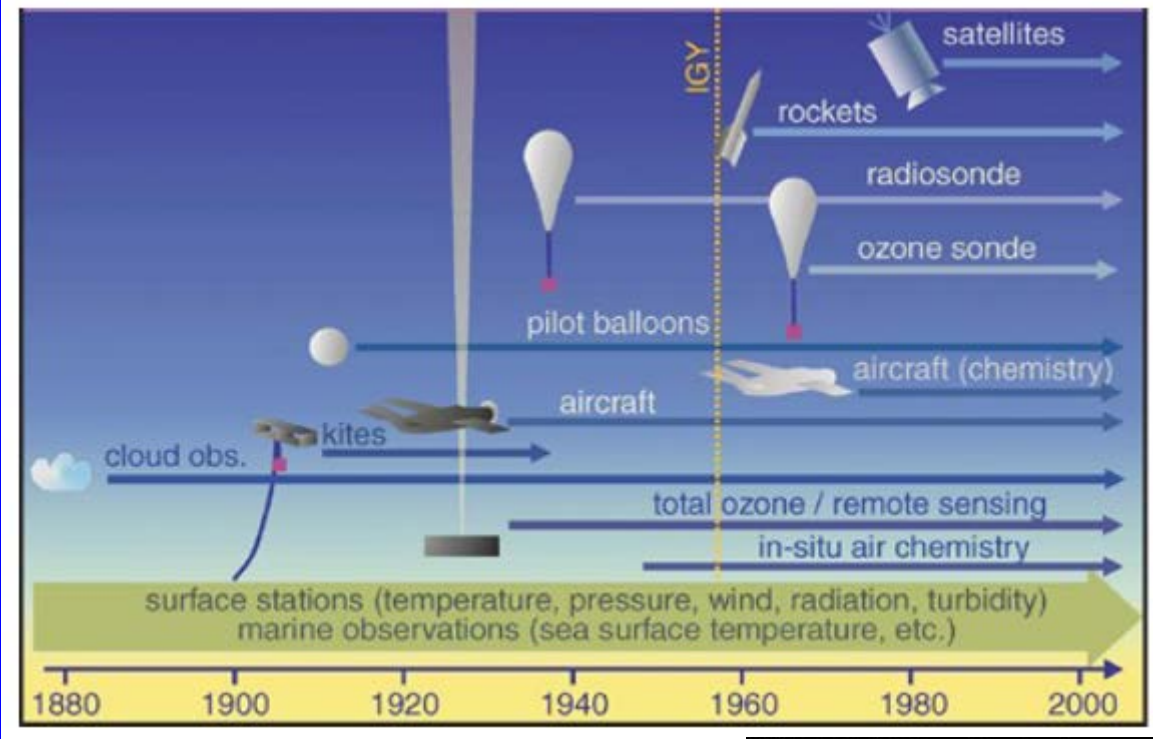
$$C \frac{dT}{dt} = (R_a - R_e)$$

Leyes constitutivas (o de estado)

Vista desde el Sol, la Tierra es un disco plano cuyo radio es igual al radio de la Tierra, R y cuya superficie es πR^2 . Por tanto, la cantidad de energía solar que llega a la Tierra por unidad de tiempo es $\pi R^2 S_0$, donde S_0 es la constante solar.

Una fracción de esta energía se refleja nuevamente en el espacio antes de llegar a la superficie de la Tierra; esta fracción **albedo (planetario)** y se denota por α

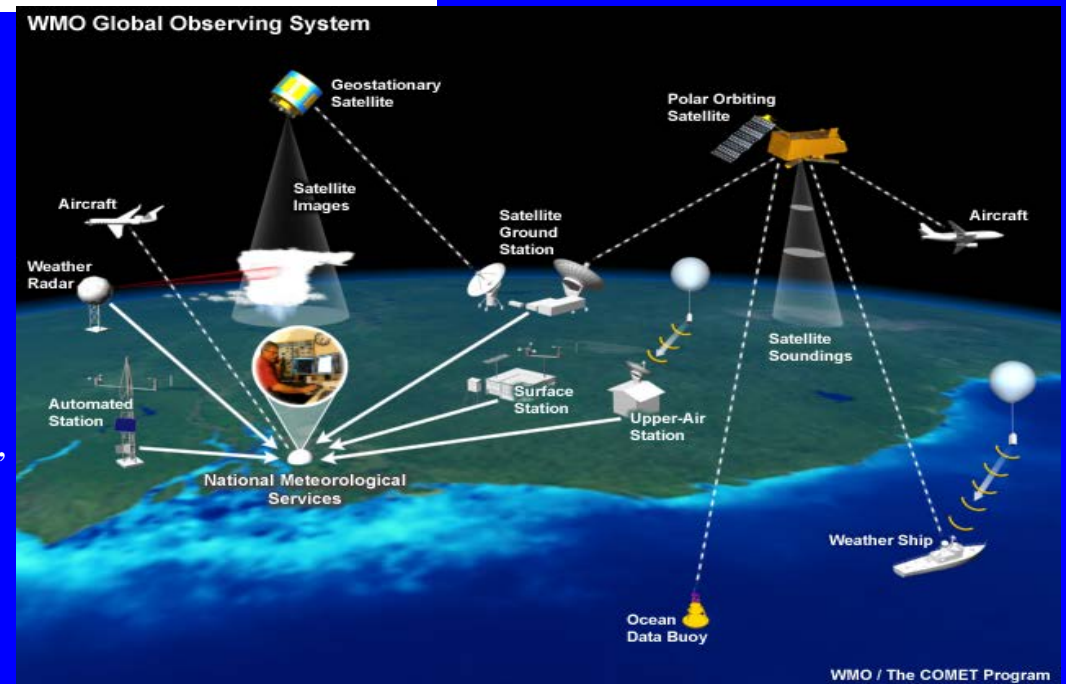
El albedo planetario es un promedio del albedo local, promediado en toda la superficie: es una cantidad muy variable que depende de muchos factores locales, como como la capa de nubes, la composición de la atmósfera de la Tierra (en particular, la presencia de aerosoles), **la presencia de hielo en la superficie de la Tierra**, etc.



Earth Radiation Budget Satellite

Evolución de la red de observación de datos meteorológicos y climáticos.

Instrumentos y plataformas que comprenden la World Meteorological Organization's (WMO's), Global Observing System (GOS).



La fracción restante $(1 - \alpha)$ (llamada **co-albedo**) de la radiación solar entrante llega a la superficie de la Tierra.

Por tanto, la cantidad de energía solar que alcanza la superficie de la Tierra por unidad de tiempo es

$$(1 - \alpha)\pi R^2 S_0$$

Esta energía se distribuye uniformemente sobre la superficie de la Tierra, que es $4\pi R^2$.

Por tanto, la cantidad de energía solar que se absorbe por metro cuadrado de superficie de la Tierra, por unidad de tiempo, es

$$R_a = \frac{(1 - \alpha)\pi R^2 S_0}{4\pi R^2} = \frac{1}{4}(1 - \alpha)S_0 = Q\beta$$

donde

$$Q = \frac{1}{4}S_0 \quad \text{y} \quad \beta = (1 - \alpha).$$

Con respecto a la radiación electro-magnética emitida por la Tierra (en el régimen infrarrojo, e.d. longitudes de onda muy largas).

Depende de la propia temperatura superficial de la Tierra.

Para empezar, hagamos la hipótesis de que la Tierra irradia como un “cuerpo negro” ideal.

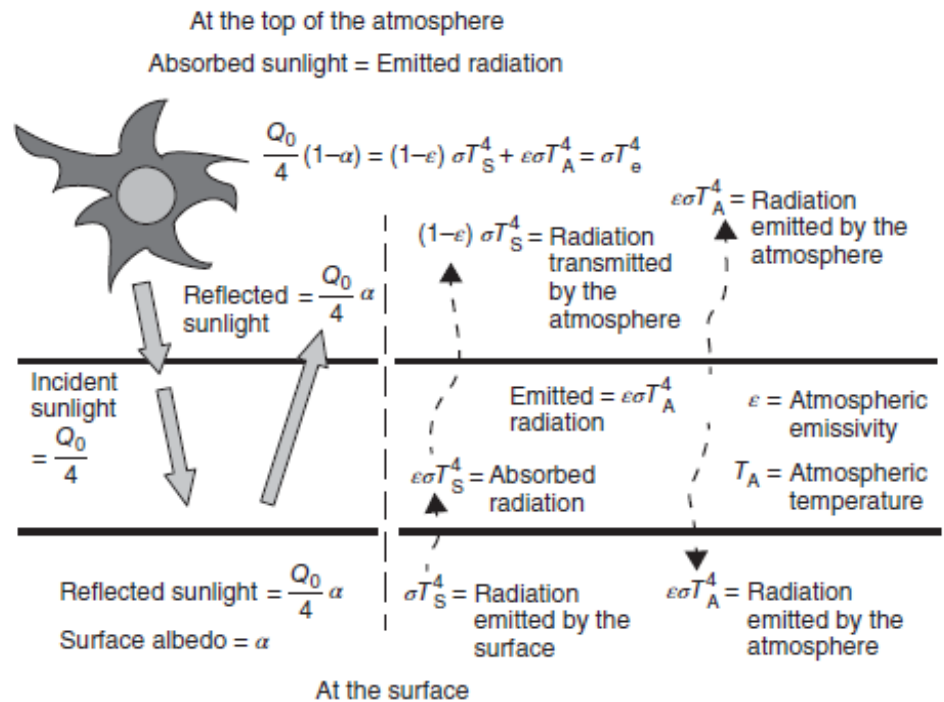
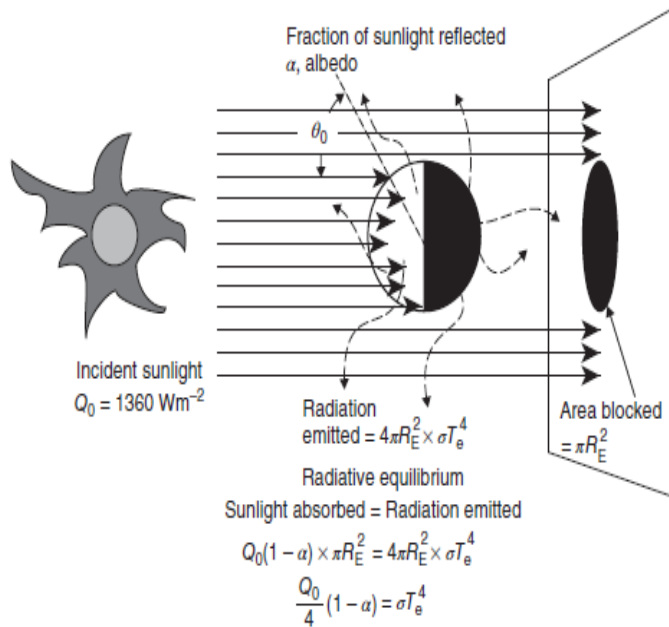
Por **Ley de Stefan-Boltzmann**,

Luego, la cantidad promedio de energía irradiada por unidad de área por unidad de tiempo sigue la ley Stefan-Boltzmann,

$$R_e = \sigma T^4 \quad (T \text{ en } ^\circ \text{ Kelvin})$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ } \text{wm}^{-2} \text{K}^{-4}$$

Ahora, la ecuación diferencial ordinarias se convierte en



Absorbed sunlight + Radiation emitted by the atmosphere and absorbed by the surface = Radiation emitted by the surface

$$\frac{Q_0}{4} (1 - \alpha) + \epsilon \sigma T_A^4 = \sigma T_S^4$$

$$C \frac{dT}{dt} = Q\beta - \sigma T^4$$

En el equilibrio, cuando $t \rightarrow +\infty$

$$0 = Q\beta - \sigma T^4$$

Que da como solución estacionaria, al suponer $\beta = 0.70$ y $S_0 = 1.368 \text{ Wm}^{-2}$ (e. d. $Q = 342 \text{ Wm}^{-2}$)

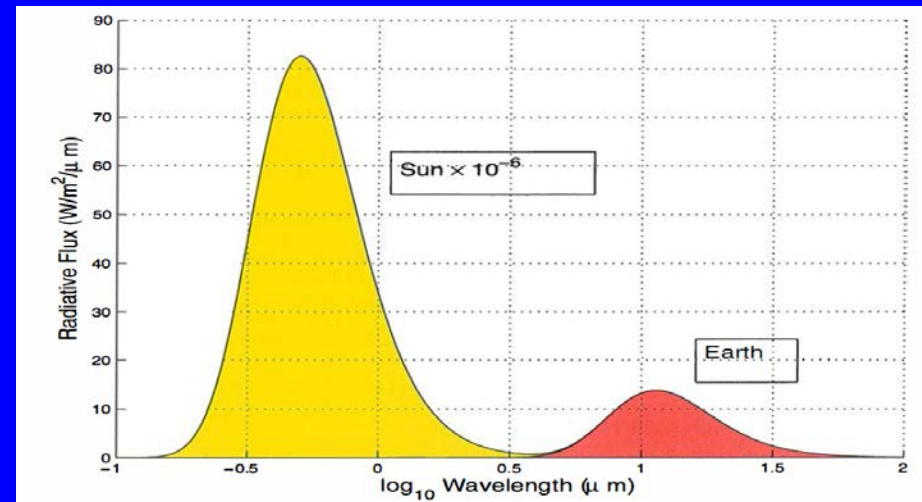
$$T = 254,8 \text{ }^\circ\text{K} = -18,35 \text{ }^\circ\text{C}$$

El valor real de la temperatura de la superficie es $287,7 \text{ }^\circ\text{K}$ ($=14,55 \text{ }^\circ\text{C}$).

Una buena parte de la diferencia puede atribuirse al **efecto invernadero** de la atmósfera de la Tierra: el efecto de gases como dióxido de carbono (CO_2), vapor de agua y metano, y aerosoles (gotas de agua, polvo partículas, etc.).

Rectificación por el efecto invernadero

Dado que el Sol y la Tierra tienen temperaturas de emisión que difieren en un orden de magnitud, sus espectros apenas se superponen



El espectro de emisión de la Tierra se encuentra completamente en el régimen de infrarrojo lejano (longitudes de onda superiores a $5 \mu\text{m}$). Debido a sus propiedades químicas, los gases de efecto invernadero aumentan la **opacidad de la atmósfera** en el infrarrojo (longitud de onda larga),

por lo que afectan la cantidad R_e pero no a R_a .

Como consecuencia, el promedio global de la temperatura aumenta.

Para mantener un equilibrio energético, de alguna manera debemos compensar este aumento de la temperatura.

La forma más sencilla de hacerlo es reduciendo la expresión R_e

para por un factor ϵ , donde $0 < \epsilon < 1$ denominado **emisividad**

(Aquí vemos un ejemplo de lo que en la ciencia del clima se conoce como **parametrización**).

Por lo tanto, la ecuación del balance de energía se modifica

$$0 = Q\beta - \epsilon\sigma T^4$$

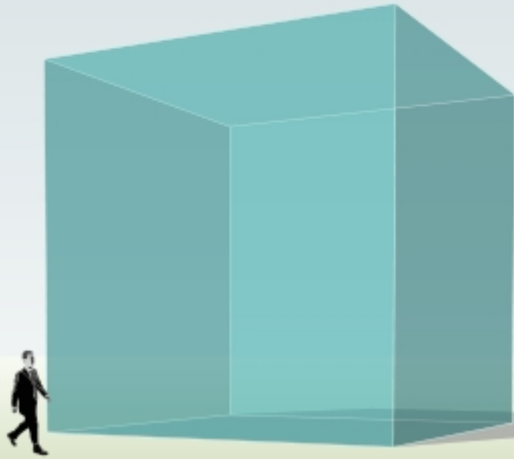
y despejando se obtiene la temperatura de equilibrio

$$T^* = \left(\frac{\beta Q}{\epsilon\sigma} \right)^{1/4}$$

Dando los valores de antes y haciendo $\epsilon=0,62$ se obtiene el valor promediado actual **14,55 °C**.

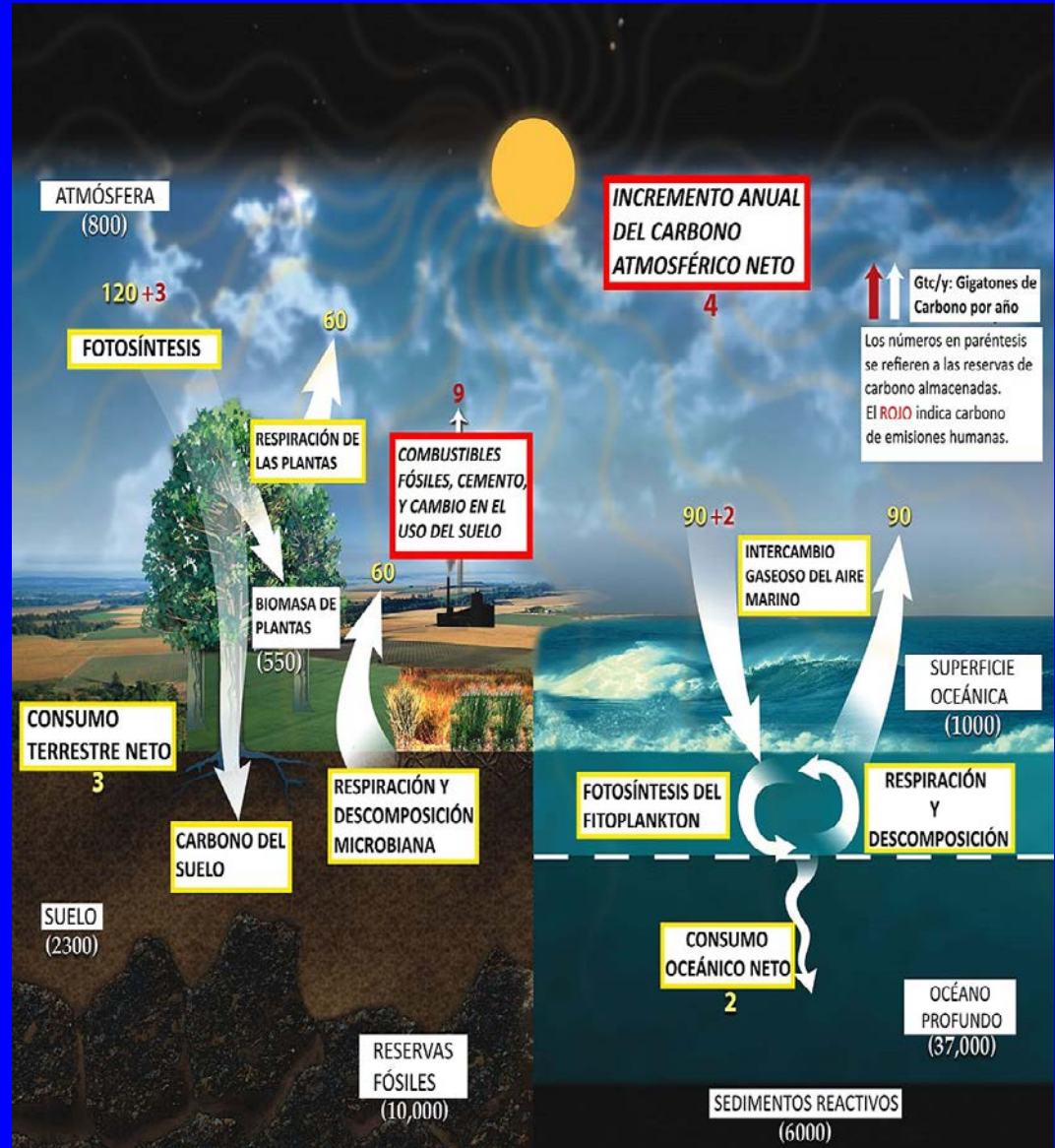
El efecto invernadero corresponde pues a una reducción de la radiación terrestre del 38%

1000 kg of CO₂ *i*



A CARBON VISUALS VISUALISATION

1 tonelada de CO₂

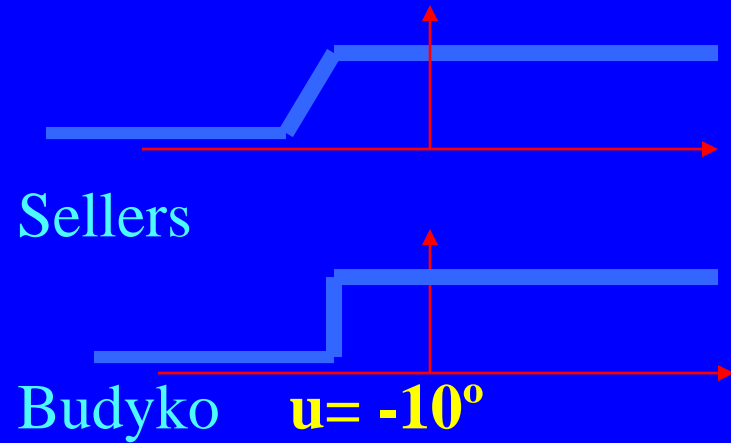


Ciclo del carbono ???

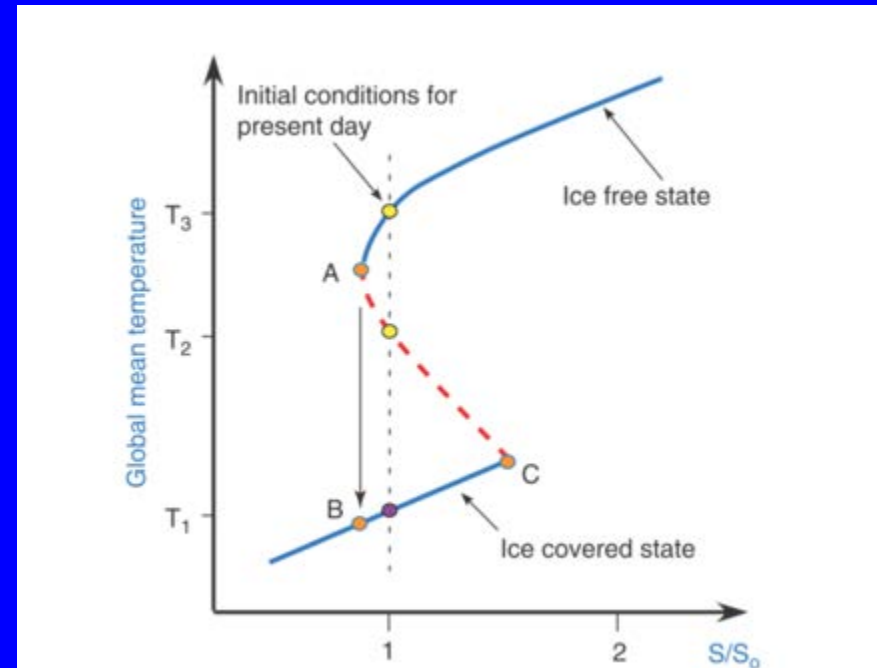
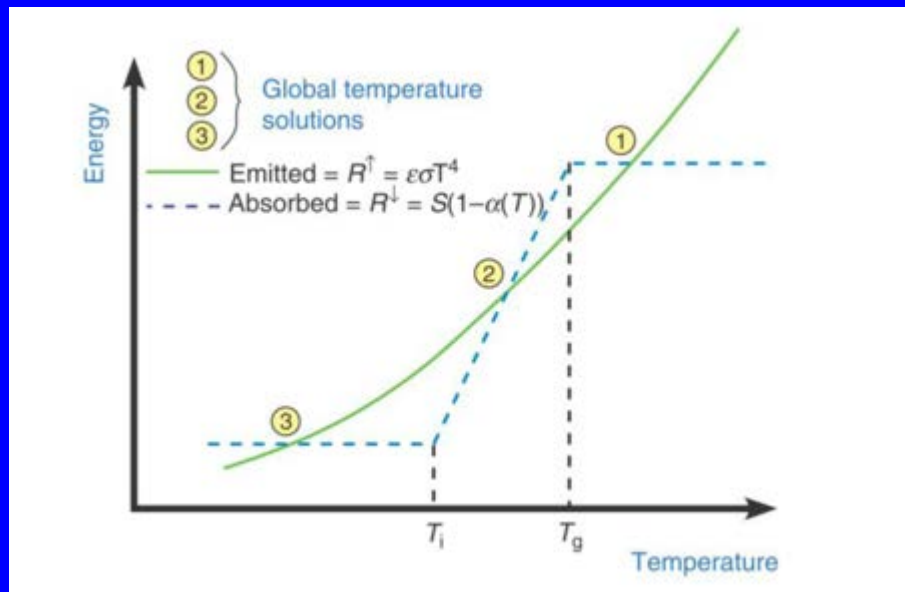
Multiples equilibrios para una función co-albedo no constante

$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ co-albedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 & \text{si } u \ll -10 \\ 0.71 & \text{si } u \gg -10 \end{cases}$$



Casos de tres soluciones de equilibrio en función de la constante solar



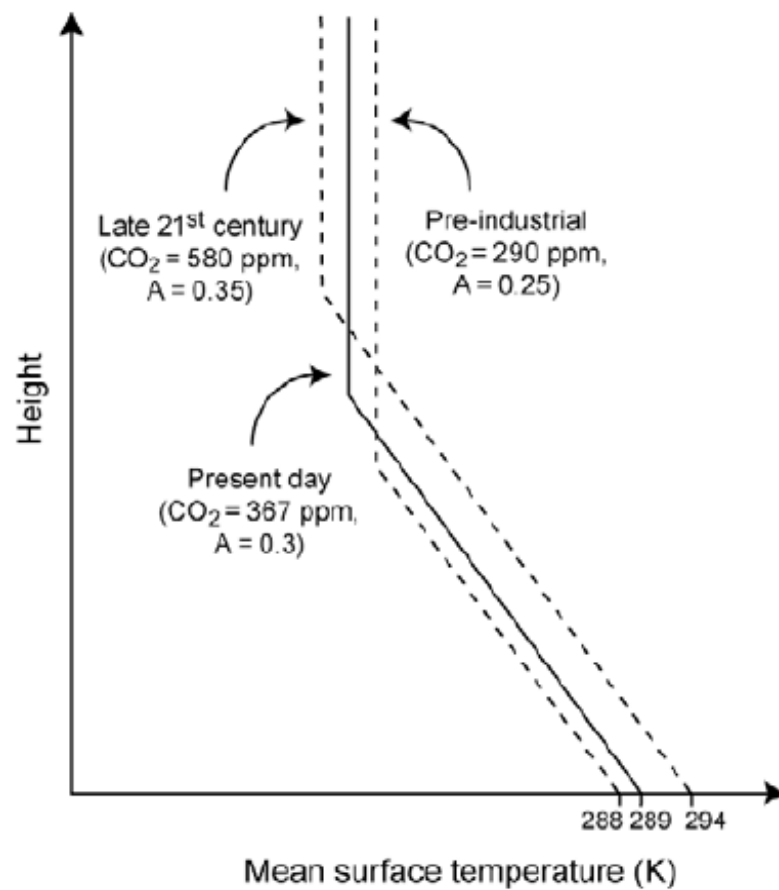


FIG. 11.2. Simple greenhouse models for the present (solid line) and pre-industrial and late-twenty-first century Earth, as discussed in the text.

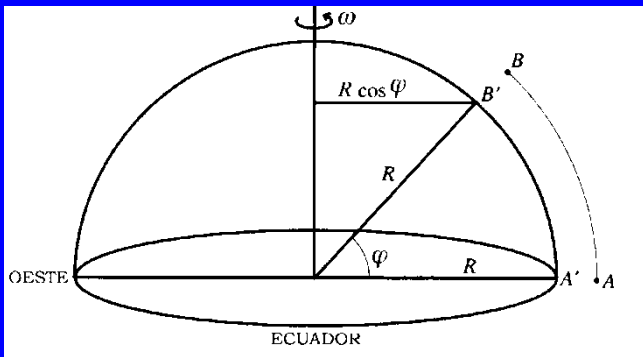
3.4. Modelo uni-dimensional: latitud

Pegas al modelo de balance de energía global (MBE):

- las latitudes más bajas reciben en promedio más energía del Sol que las más altas (en cada hemisferio),
- las regiones polares están cubiertas de nieve y hielo y tienen un albedo más alto que la región ecuatorial.

MBE unidimensional (Temperatura constante en la misma latitud)

Jerarquía de modelos: el operador de difusión D

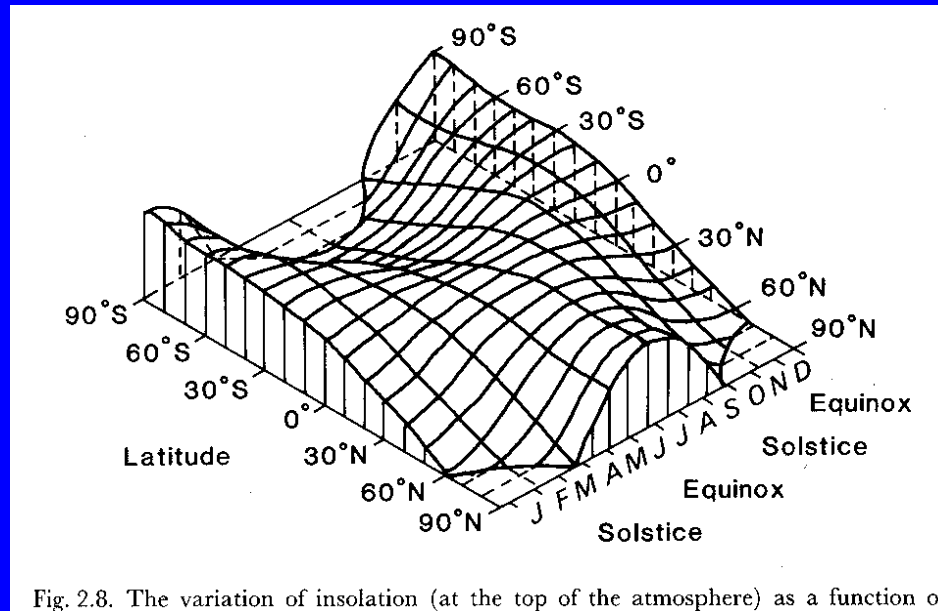


$$D = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$x = \cos \varphi$$

Regreso a modelos simplificados: *Leyes de estado*

$$R_a = QS(x)\beta(u)$$



Distribucion espacial (promediada anualmente) de la función insolación $S(x)$

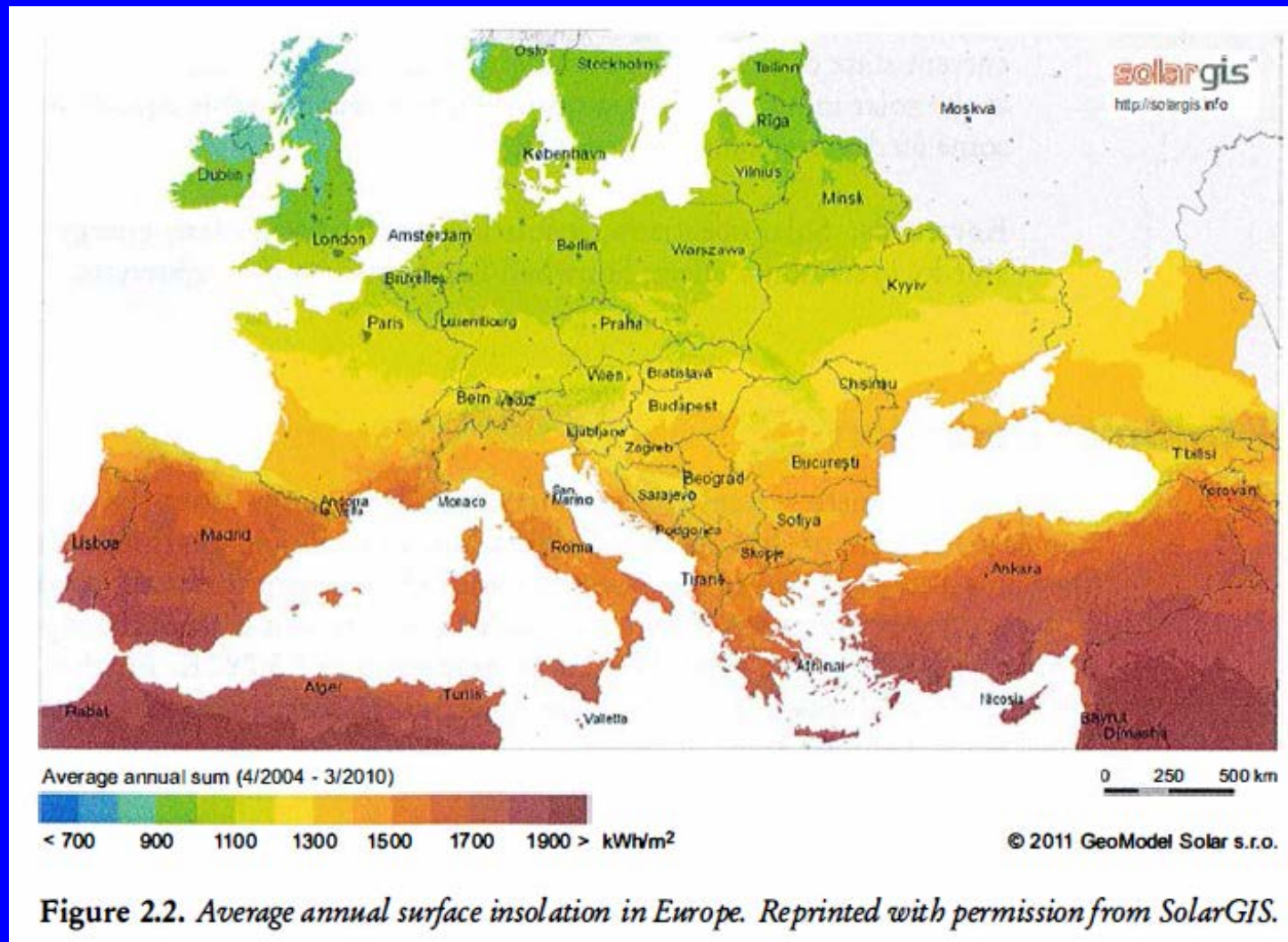


Figure 2.2. Average annual surface insolation in Europe. Reprinted with permission from SolarGIS.

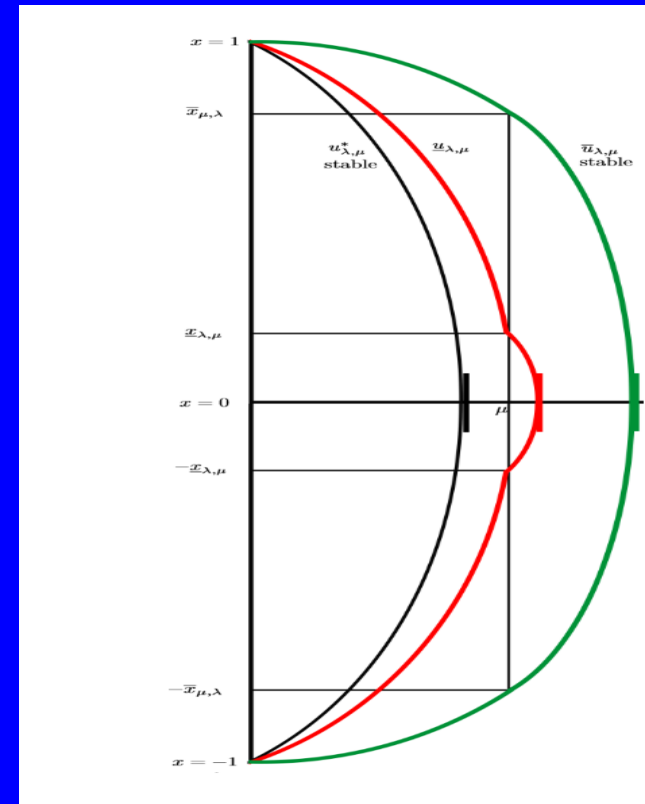
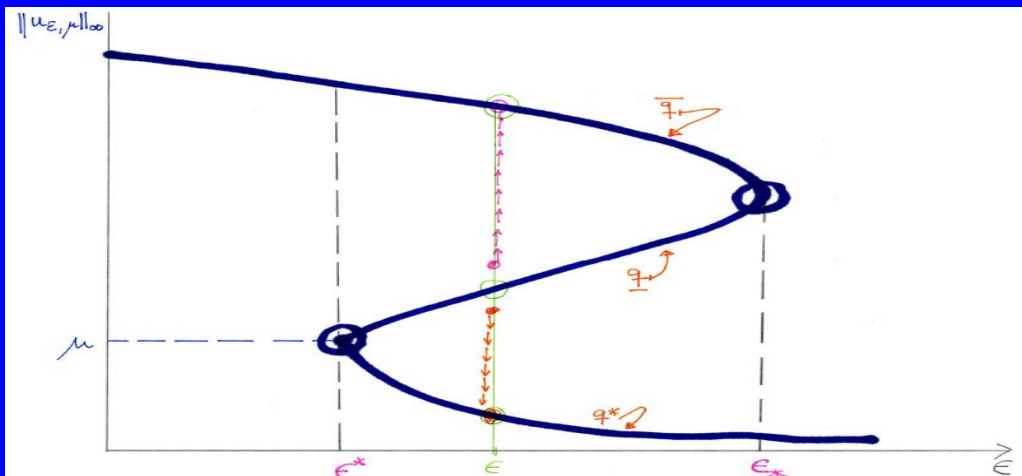
$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) + R_e(x, u) + \text{div}(k(x)\nabla u)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

Diagramas de bifurcación mucho más complicados

D. Arcoya, J. I. Díaz, L. Tello. *S-Shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in Climatology.*
Journal of Differential Equations, 1998

S. Bensid and J.I. Díaz, *On the exact number of monotone solutions of a simplified Budyko climate model and their different stability.*
Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2019)



Bifurcación respecto
la emisividad en el
efecto invernadero

Difusión bidimensional

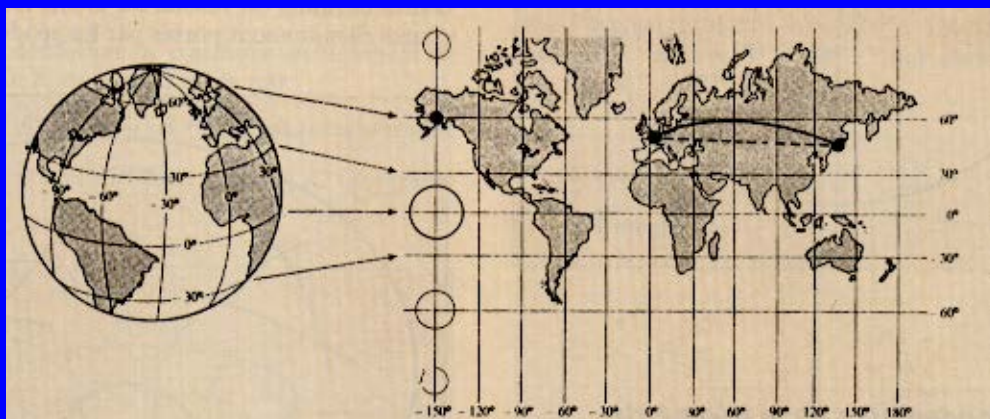
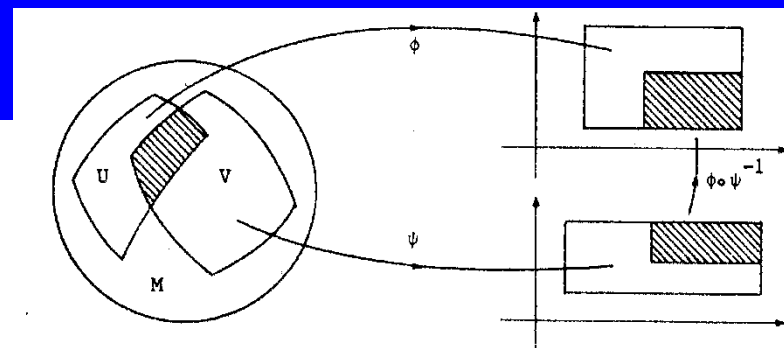
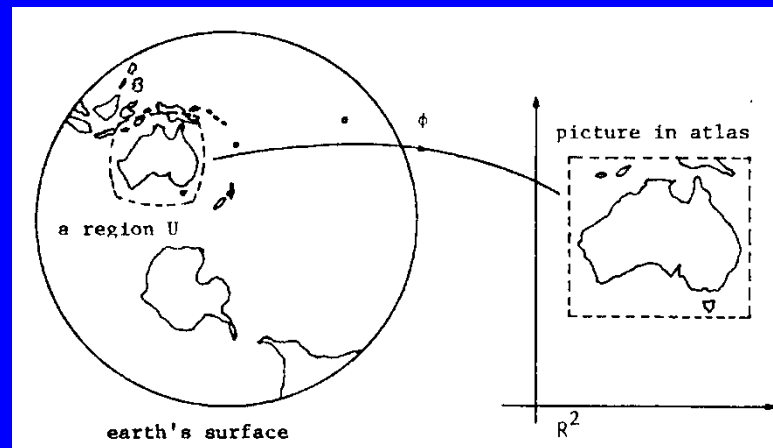
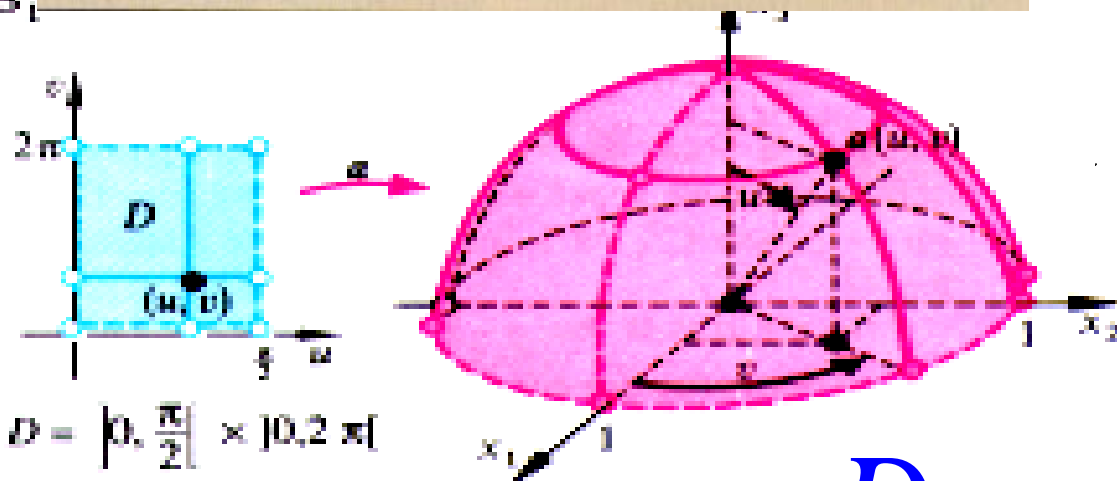


Figure 10 Projection de Mercator : $(\varphi, \theta) \rightarrow (u = \varphi, v = \log(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})))$



B₁



$$D = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] 0, 2\pi \right[$$

$\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ déf. par $(u, v) \mapsto \alpha$

$$\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$D = \operatorname{div}(k(x) \nabla u)$$

Aproximación numérica

R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, L. Tello,
*Mathematical and Numerical Analysis of a Nonlinear Diffusive
Climate Energy Balance Model.*
Mathematical and Computer Modelling, 2008.

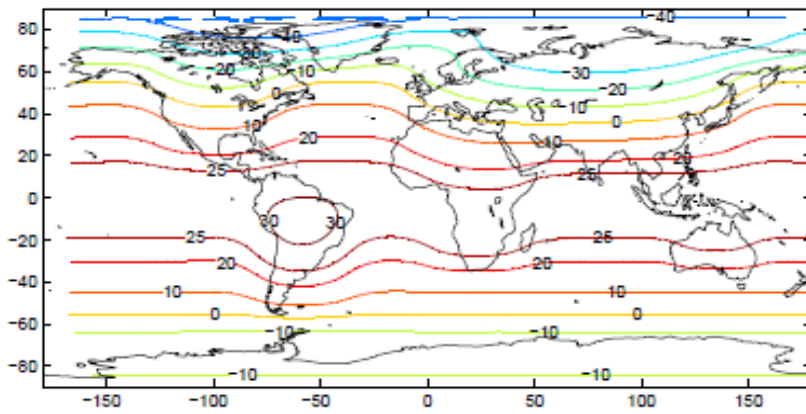
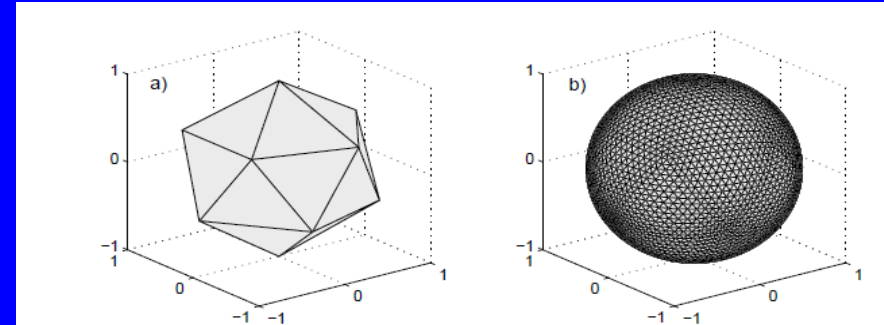


Figure 3: Distribution of January average temperature.

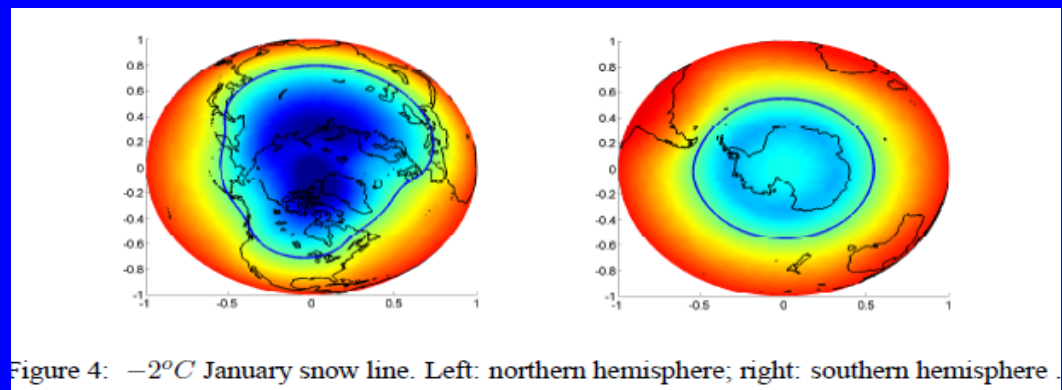
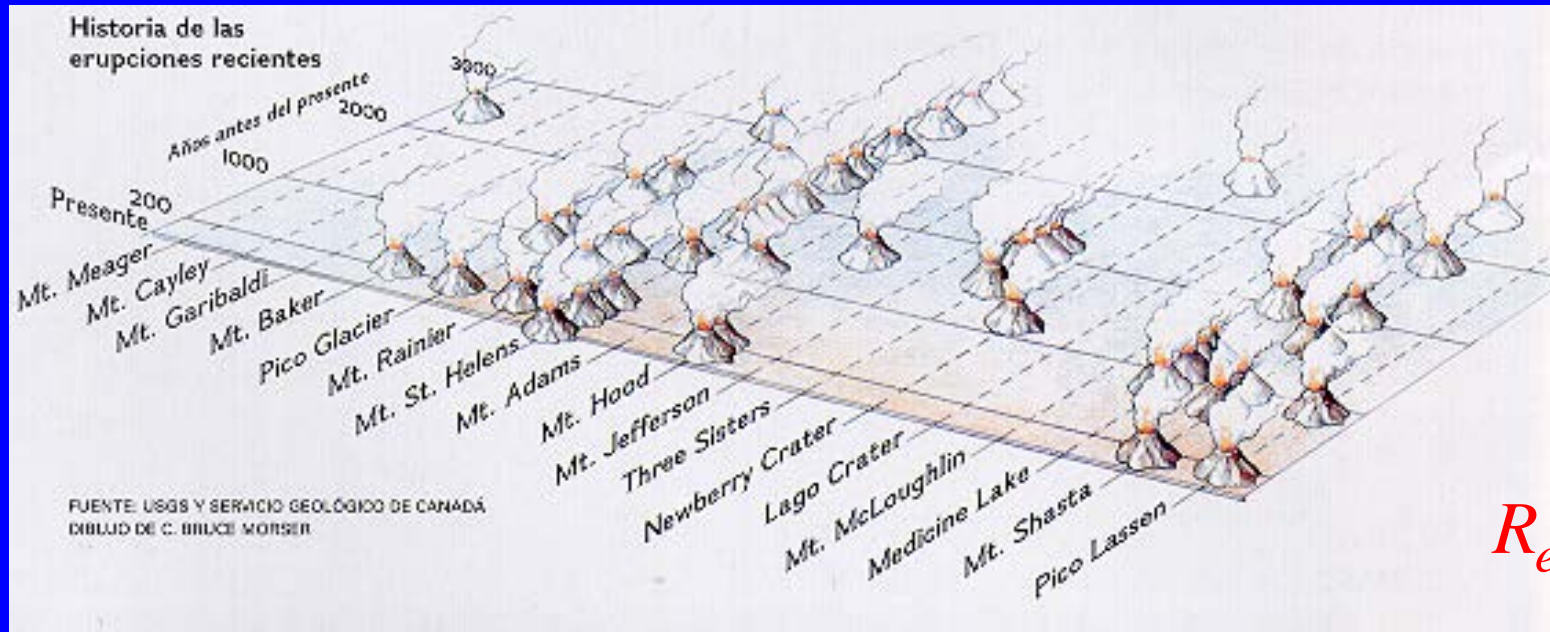


Figure 4: -2°C January snow line. Left: northern hemisphere; right: southern hemisphere.

Modelos más complejos:

- Términos de retardo (promedios,...)
- Acoplamiento con las ecuaciones de de la energía interna del océano profundo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la dinámica de grandes masas de hielo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la Mecánica Celeste
- Acoplamiento con las ecuaciones del manto como medio visco-elástico
- Acoplamiento con modelos para la biosfera

Modelos estocásticos :Volcanes



$$R_e(x, u)$$

**Término
estocástico
(Ruido blanco)**

**Cahalan-North,
1982**

Acoplamiento MBE con océanos profundos

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY A MATHEMATICAL, PHYSICAL & ENGINEERING SCIENCES

Multiple solutions and numerical analysis to the dynamic and stationary models coupling a delayed energy balance model involving latent heat and discontinuous albedo with a deep ocean

J. I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello

Proc. R. Soc. A 2014 470, 20140376, published 27 August 2014

COMPARISON OF RESULTS WITH AND WITHOUT LATENT HEAT

Una “demostración rigurosa” de la conclusión estrella del informe del IPCC www.climatechange2013.org/report/

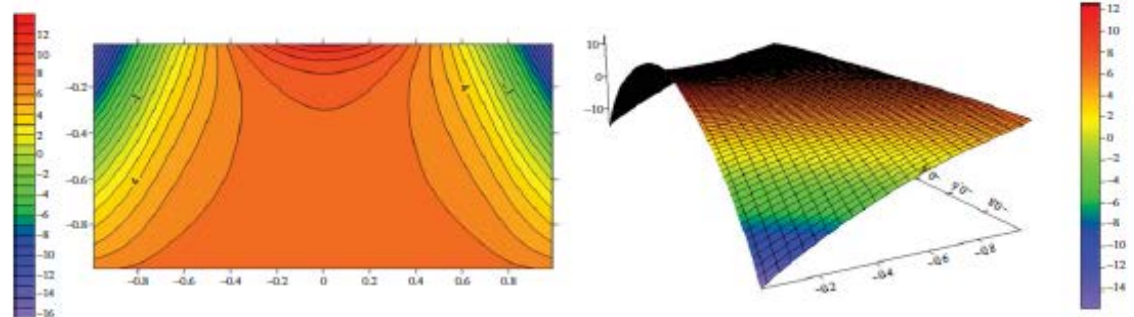


Figure 1. Temperature without latent heat ($\gamma(u) = u$) and $t = 5$. (Online version in colour.)

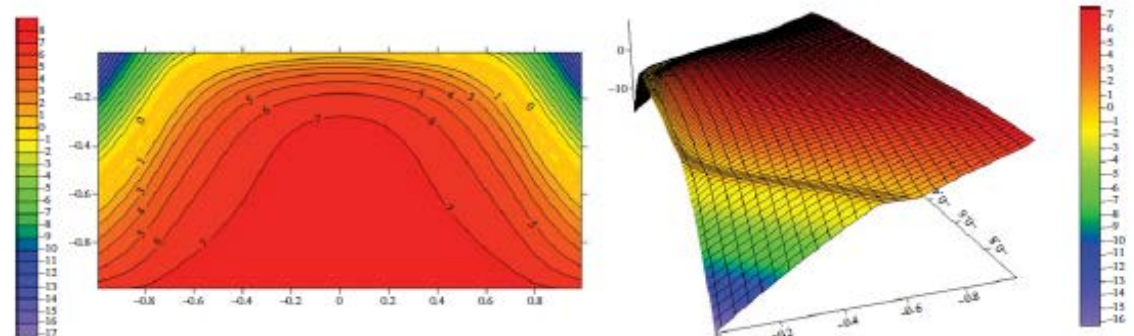
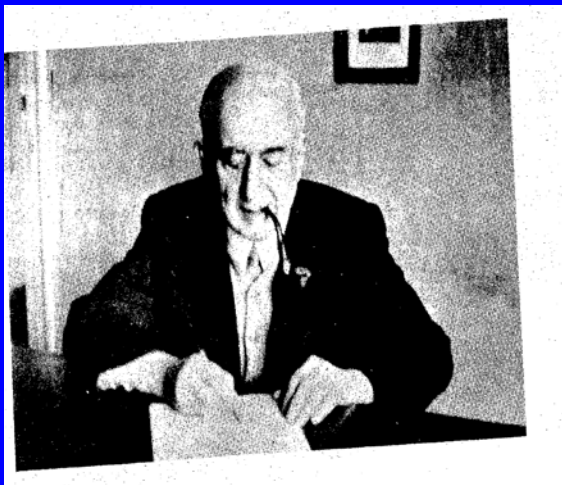


Figure 2. Temperature with latent heat and $t = 5$. (Online version in colour.)



Teoría de las Glaciaciones de Milankovitch (1879-1958)

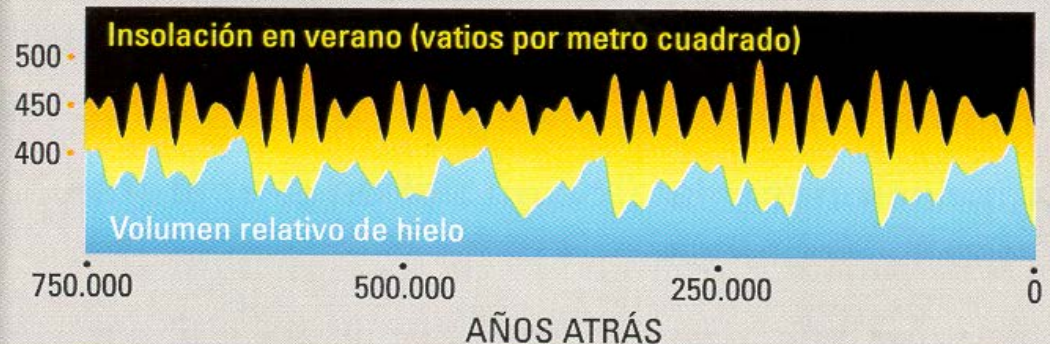
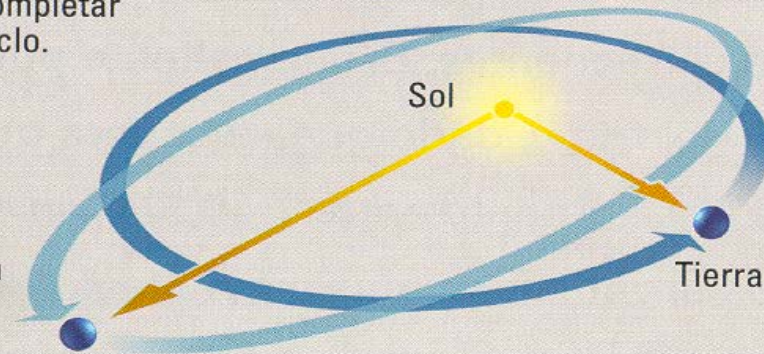
- *irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,
- *cálculo de tablas de gran precisión.
- *estimaciones globales sobre la evolución de lo que él llamó *el clima matemático*

CICLOS DE MILANKOVITCH



Una oscilación como de peonza del eje de la Tierra crea un ciclo de 23.000 años.

Las variaciones en la órbita de la Tierra alrededor del Sol siguen un ciclo de 100.000 años.

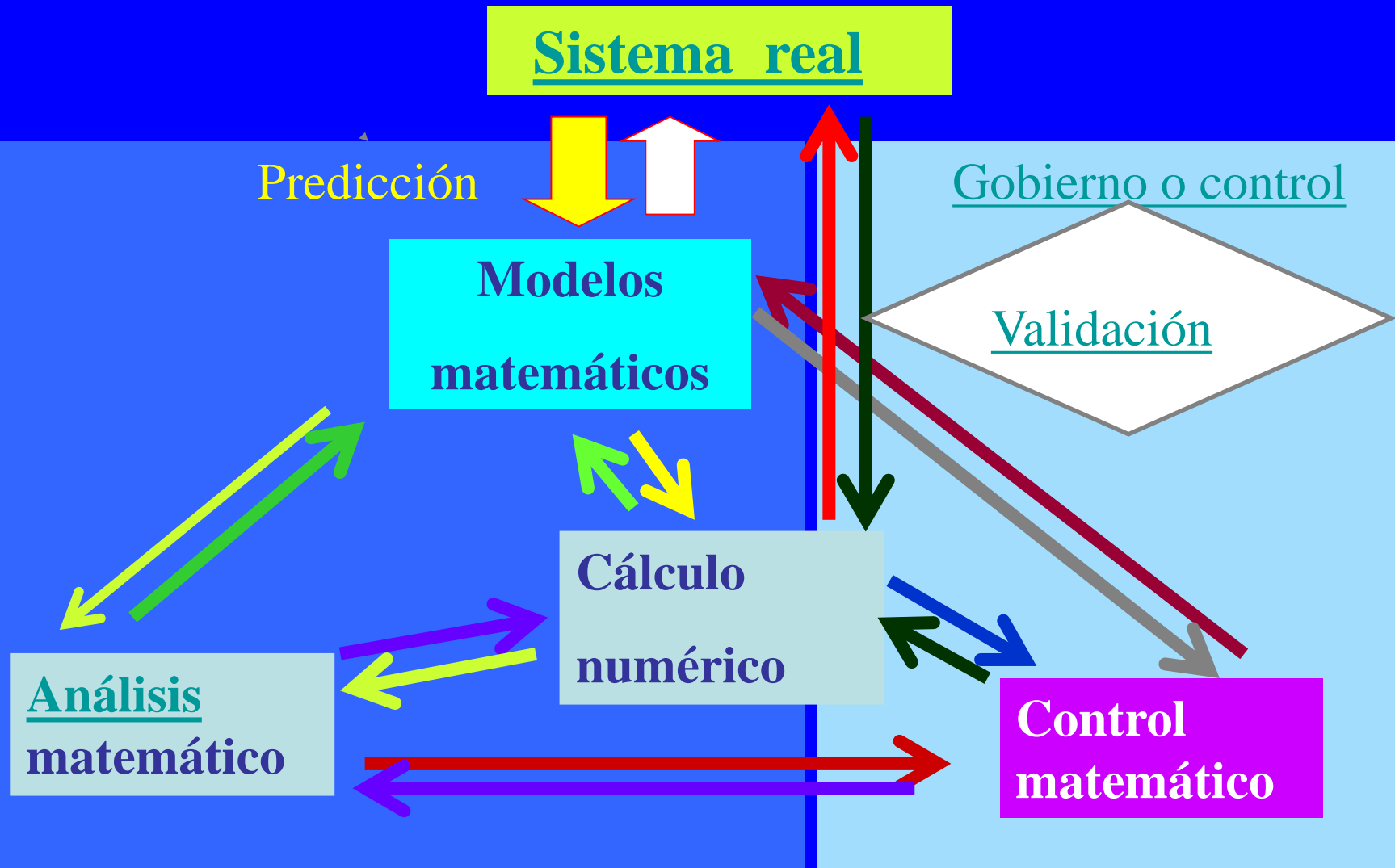


4. Actuar: Teoría de control



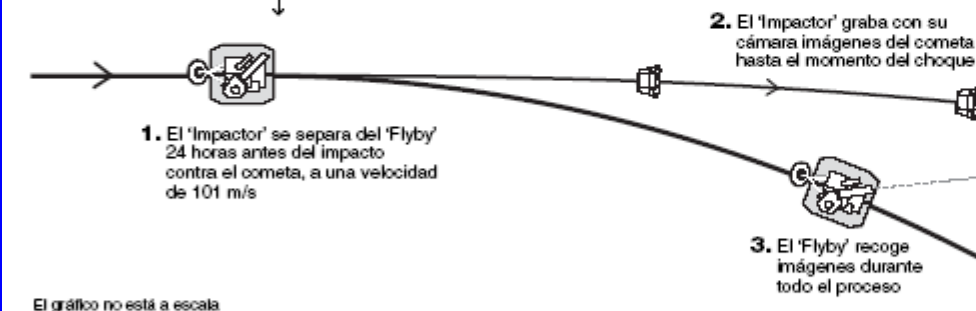
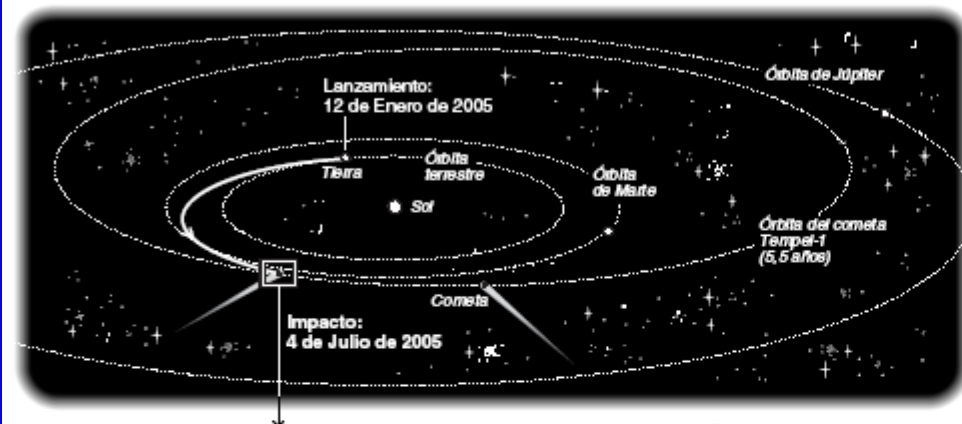
Roma 1555

La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



Misión 'Deep Impact'

Hoy comienza la misión de la NASA que estudiará la composición del núcleo del cometa Tempel 1 al estrellar contra él un proyectil de 370 kg a una velocidad relativa de 10,2 km/s.



El gráfico no está a escala

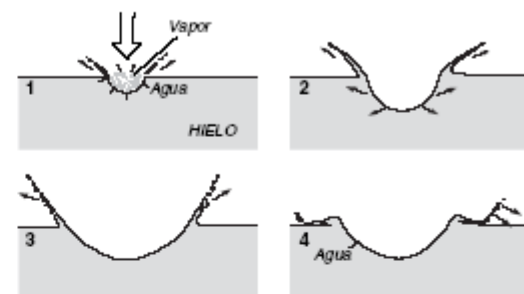
Impacto profundo

M. R. E., Madrid
Hacer un agujero en un cometa a unos 130 millones de kilómetros de la Tierra es el objetivo de la sonda que la NASA tiene previsto lanzar hoy desde Cabo Cañaveral, en Florida. Con el nombre de

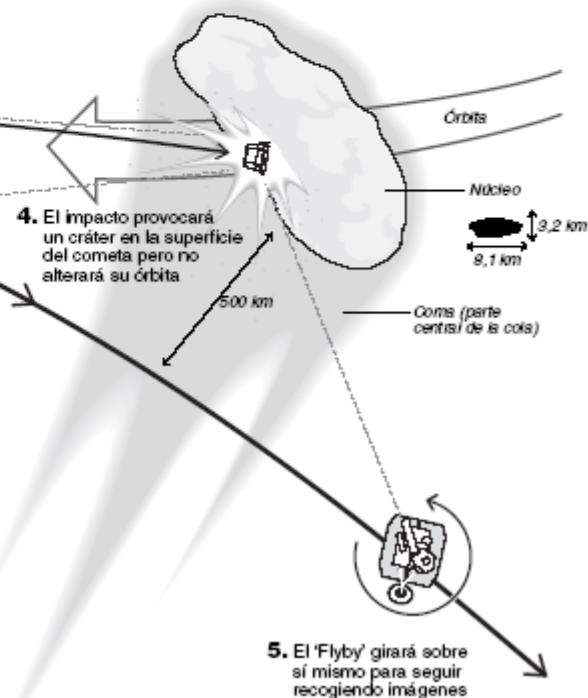
EE UU lanza hoy la nave 'Deep Impact', que estrellará un proyectil contra el cometa Tempel 1 para descubrir sus misterios

proyectil hará un cráter relativamente poco profundo pero espectacular, como un estadio de béisbol". Sin embargo, explica Yeomans, si el cometa es una bola dura de hielo, el cráter será más profundo pero no tan gran-

■ SECUENCIA DEL IMPACTO

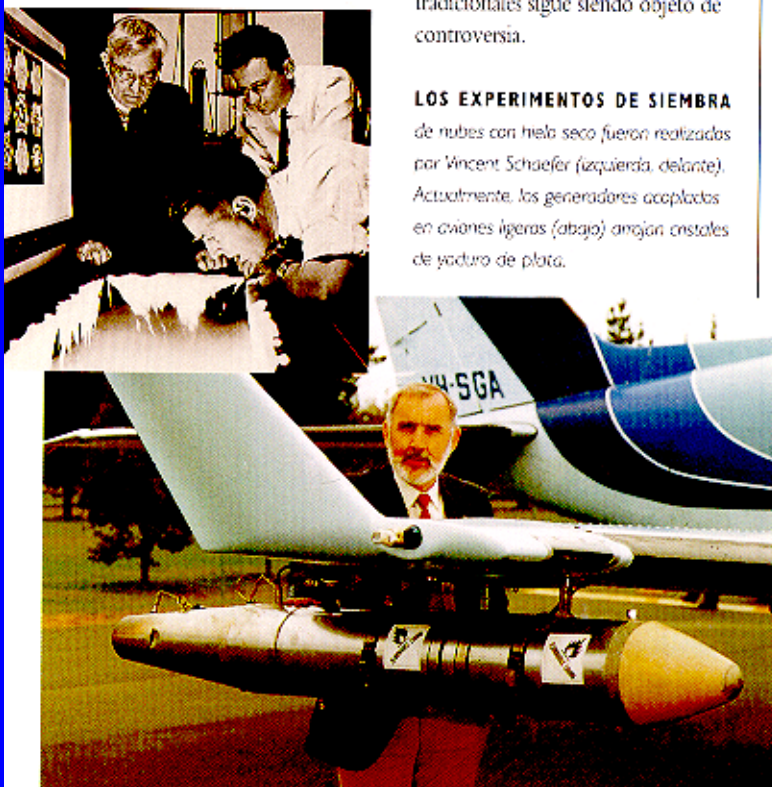


La profundidad y diámetro del cráter aportarán datos sobre la composición y dureza del núcleo, información hasta ahora no comprobados.



Ejemplos de acciones sobre el medio ambiente.

Acciones locales. Siembra de nubes



tradicional sigue siendo objeto de controversia.

LOS EXPERIMENTOS DE SIEMBRA

de nubes con hielo seco fueron realizadas por Vincent Schaefer (izquierda, delante). Actualmente, los generadores acoplados en aviones ligeros (abajo) arrojan cristales de yoduro de plata.

EL PAÍS, jueves 13 de mayo de 1999

DEPORTES

El Parma se corona sin rival

El **Marsella** se rinde al primer contratiempo y acaba goleado en la final de la **Copa de la UEFA**

MARSELLA	0
PARMA	3

Olimpico de Marsella: Porato; Blondeu, Issa, Blanc, Domoraud, Da Silva (Camara, m. 46); Brando, Bravo, Gourvenec, Pires; y Maurice.

Parma: Buffon; Thuram, Sensi, Cannavaro; Fuser, Dino Baggio, Boghossian, Vanoli; Verón (Fiore, m. 76); Chiesa (Balbo, m. 72) y Crespo.

Goles: 0-1. M. 26. Blanc cabecea pillado hacia su portero, Hernán Crespo adivina la cesión, se anticipa y bate a Porato por arriba.

0-2. M. 36. Vanoli ajusta un cabezazo al palo izquierdo tras un centro preciso de Fuser.

0-3. M. 55. Verón centra desde la derecha, Crespo deja pasar el balón y Chiesa fusila a la escuadra.

Árbitro: Dallas (Escocia). Mostró tarjeta amarilla a Blondeau.

65.000 espectadores en el estadio Luzhnikí de Moscú. Final de la Copa de la UEFA. Campeón, el Parma.

JOSÉ MIGUÉLEZ
No es el Parma un equipo voraz, de esos que siempre quieren más y más. Por eso la final de Moscú concluyó en 3-0. Simplemente en 3-0. La superioridad italiana fue mucho más grande que el resultado. Pero se sintió tan seguro, tan dueño de



Los jugadores del Parma celebran el triunfo con la Copa de la UEFA. / REUTERS

El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes

Siembra: hielo seco, humo de yoduro de plata.,.,



10:37 LST-16,100'



11:12 LST-14,250'
26 min. después de la inseminación



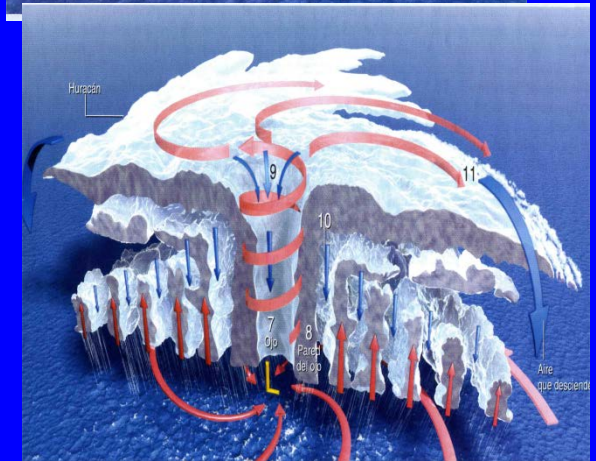
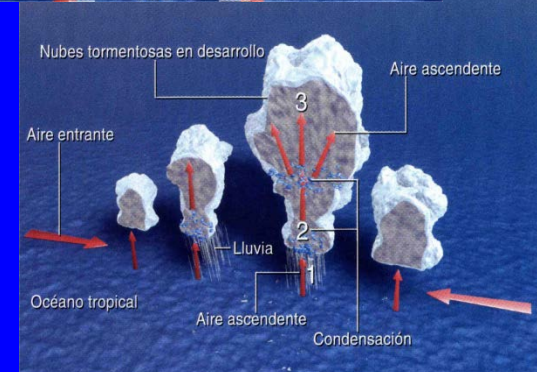
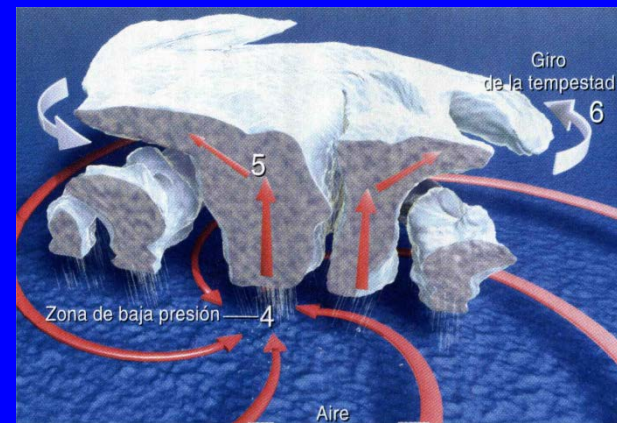
11:20 LST-16,100'
34 min. después de la inseminación



11:31 LST-16,200'
45 min. después de la inseminación

1972:
Cambrige,
EE.UU.

Visión optimista (quizá en exceso)



ACTUACIONES SOBRE LOS HURACANES

Las simulaciones informáticas de los huracanes indican que ciertas variaciones en la precipitación, evaporación y temperatura del aire podrían alterar la trayectoria de la tempestad o debilitar sus vientos. La actuación podría tomar varias formas: una siembra aérea de nubes, sobre objetivos meticulosamente seleccionados, con yoduro de plata u otros materiales inductores de precipitación podría servir para privar a la violenta pared del ojo del huracán —la característica fundamental de una gran tempestad tropical— del agua que necesita para crecer e intensificarse (*izquierda*). Se podría distribuir aceite biodegradable sobre la superficie del mar en la tra-

yectoria del huracán para reducir la evaporación, que es la fuente de la energía de una tempestad (*centro*). Futuras estaciones orbitales de producción de electricidad mediante energía solar, que quizá recurran a grandes espejos para focalizar los rayos del sol y a paneles de células fotovoltaicas para cosechar esa energía y transferirla a la Tierra, emitirían microondas, sintonizadas de manera que las absorbiesen las moléculas de vapor de agua de la tempestad o sus alrededores (*derecha*). Las microondas harían vibrar las moléculas de agua y calentarían así el aire circundante. El huracán se debilitaría entonces o se movería en la dirección deseada.



Avión que siembra nubes

Materiales que inducen precipitación

Huracán

Trayectoria del huracán

Capa flotante de aceite biodegradable

Evaporación reducida

Vapor de agua sobrecalentado

Estación orbital productora de energía

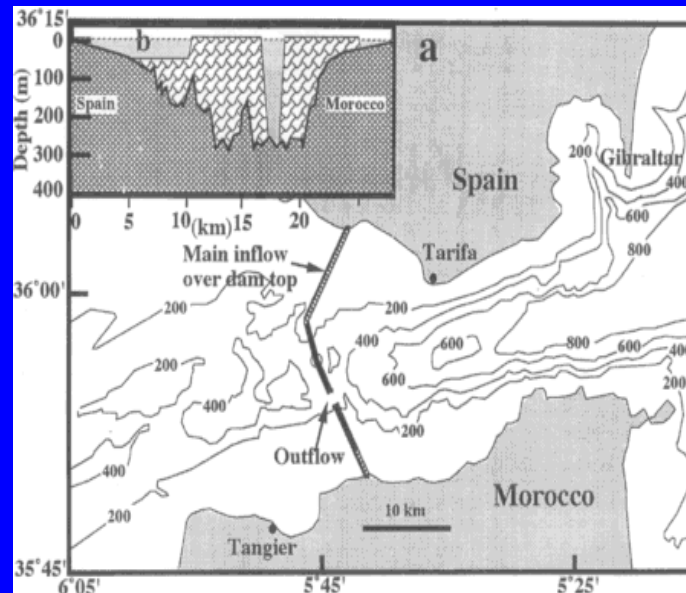
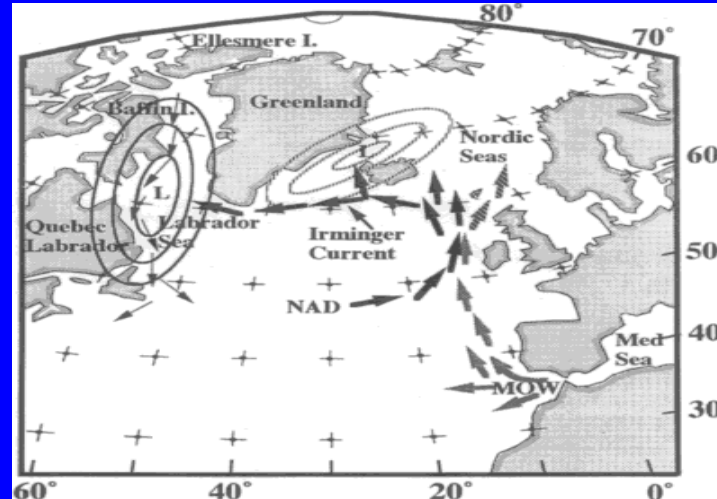


Acciones globales

¿Diques en Gibraltar?

R.G. Thomson

American
Geophysical
Union, 1997



Milankovitch insolation at 25°N decreases

African monsoons weaken, Nile discharge diminishes

Mediterranean hydrologic deficit increases

Mediterranean salinity rises, Outflow at Gibraltar increases

Outflow water upwelling off Scotland increases

Warm surface water diverted to Labrador Sea, cold upwelling water enters Nordic Seas

Warmer Labrador Sea, greater advection of moisture into Canada

Canadian ice-sheet growth begins as Nordic Seas and Europe cool

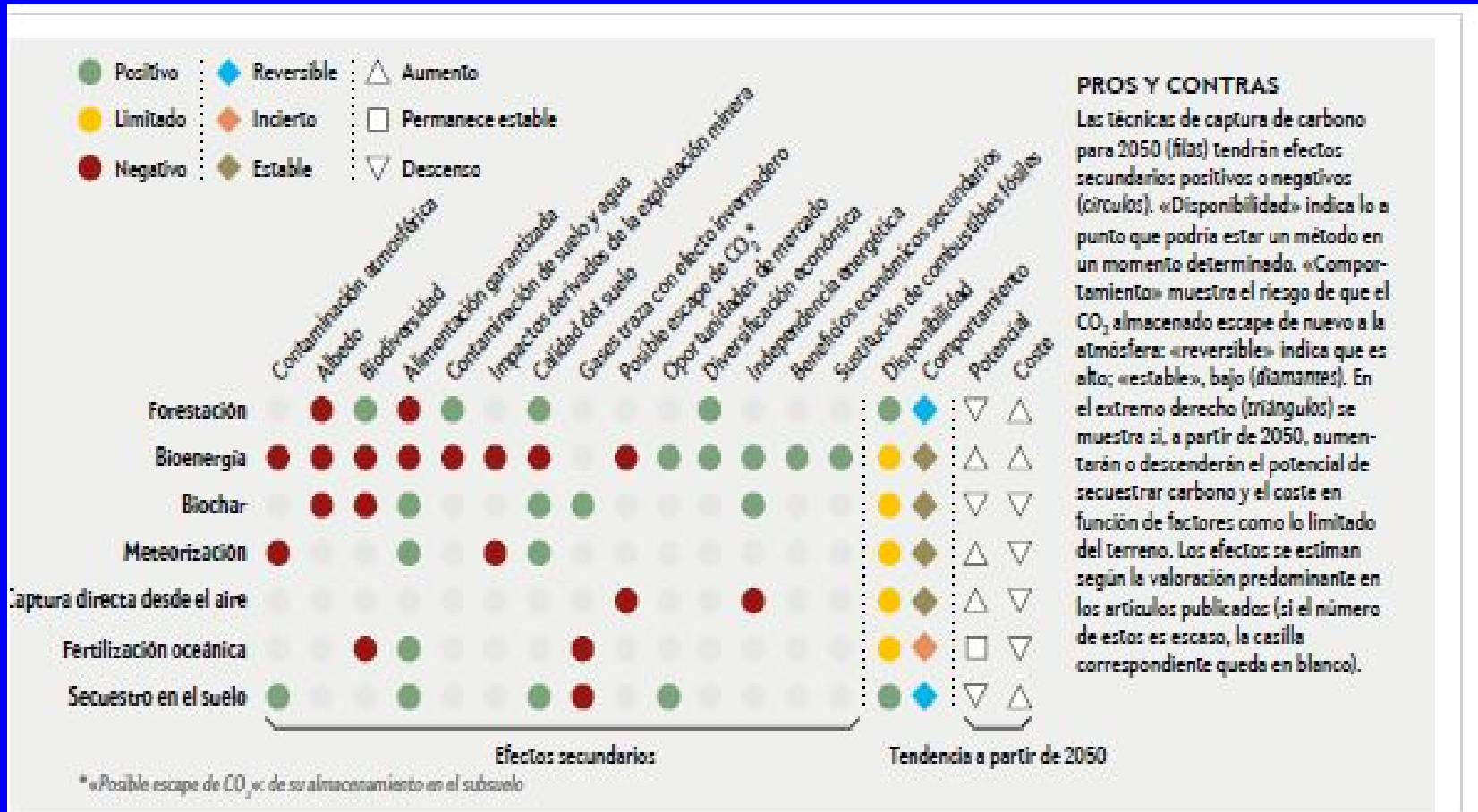
Geoingeniería: controversia

J. von Neumann (1955): Modificación artificial del albedo



The screenshot shows the EL PAÍS.com website interface. At the top, the logo 'EL PAÍS.com' is followed by 'Sociedad' and the date 'Jueves, 15/11/2007, 00:26 h'. A navigation bar includes links for 'Inicio', 'Internacional', 'España', 'Deportes', 'Economía', 'Tecnología', 'Cultura', 'Gente y TV', 'Sociedad', 'Opinión', 'Blogs', and 'Participa'. Below this, there are links for 'El Viajero', 'EPS', 'Domingo', 'Salud', 'Futuro', and 'Educación'. A section titled 'AVANCE' offers a PDF of the newspaper's cover for Thursday, November 15. The main article is titled 'Repulsa mundial a un intento de sembrar de hierro el océano' with a subtitle 'Una empresa de EE UU pretende fertilizar el agua marina para absorber CO 2'. The author is listed as 'MARÍA JOSÉ VIÑAS - Santa Cruz - 14/11/2007'.

Captura de CO₂ ...



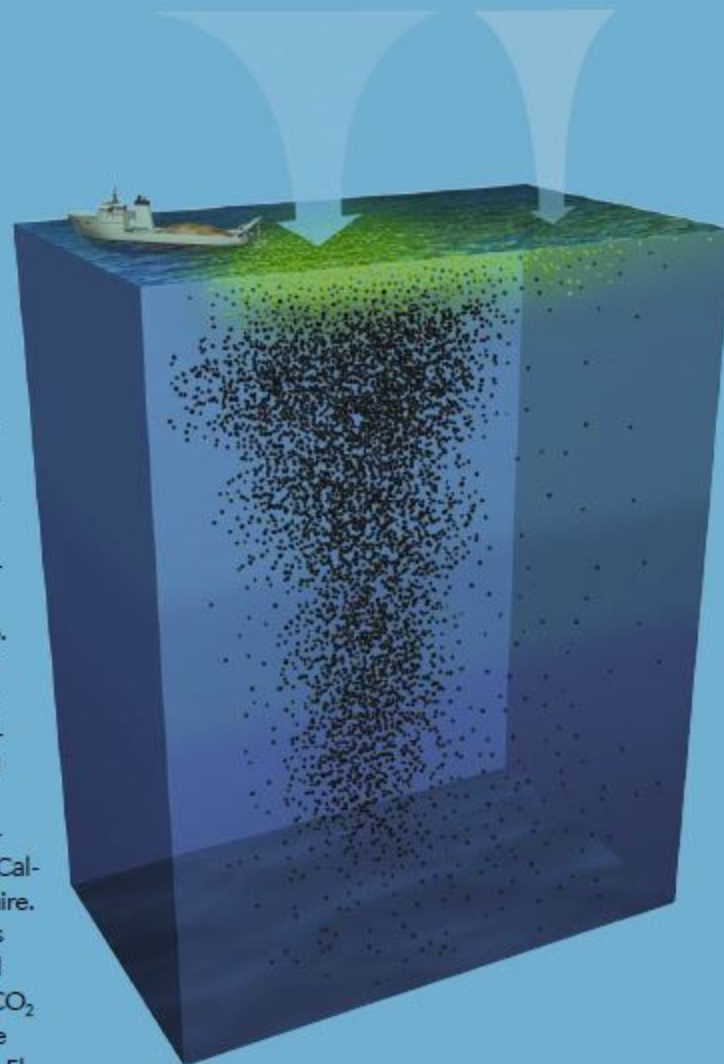
Pros y contras_Ultimo recurso (invest y Ciencia)

Confinamiento del carbono

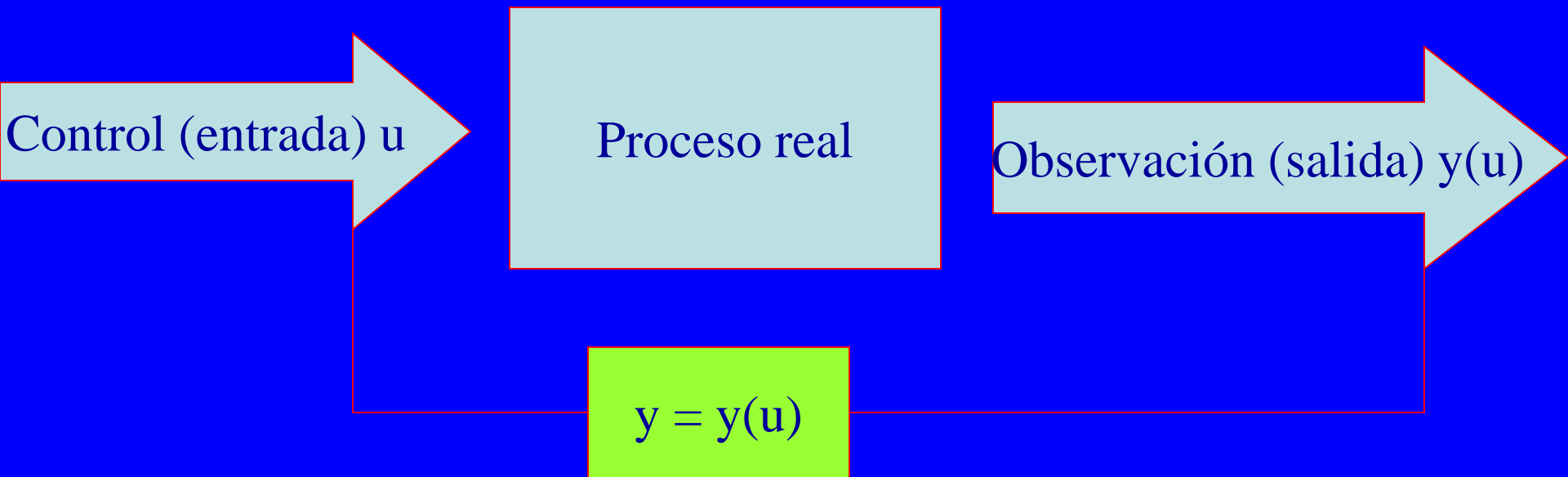
Una forma de extraer el carbono de la atmósfera consiste en aumentar el crecimiento del plancton, por ejemplo inyectando hierro, un micronutriente, en las partes del mar donde haya poco. La floración de nuevo plancton atraería el dióxido de carbono (CO_2) del aire. Lo que se desconoce, tras una docena de pruebas de la fertilización férrica, es la cantidad de carbono captado por la materia orgánica que permanecería fuera de la atmósfera o cuáles son los efectos colaterales que tal manipulación tendría sobre el ecosistema marino.

Otro mecanismo, propuesto más recientemente por Kurt Zenz House y sus colaboradores, de la Universidad de Harvard, consiste en hacer que el agua del mar sea más alcalina. House propone descomponer la sal —el cloruro sódico— del mar para que el cloro y el sodio reaccionen con el agua marina y se creen hidróxido de sodio y ácido clorhídrico. El ácido se almacenaría en tierra y el hidróxido permanecería en el océano. Esto haría que se disolviera en el agua una cantidad mayor de CO_2 sin acidular más el océano. En última instancia, House afirma que el carbono acabaría en forma de carbonato cálcico en el fondo del mar. Pero la construcción de las plantas para el tratamiento del agua marina sería muy costosa; se necesitarían cien grandes plantas para absorber una décima parte del CO_2 generado al año por la humanidad.

Quizá la alternativa más prometedora es la concebida por Klaus S. Lackner, de la Universidad de Columbia, y David W. Keith, de la Universidad de Calgary en Alberta: construir depuradoras terrestres que capturen el CO_2 del aire. Lackner y su colaborador, Allen B. Wright, de Global Research Technologies (GRT), de Tucson, han elaborado un plástico, sujeto a patente, que atrapa el CO_2 atmosférico como un papel atrapamoscas. Cuando el plástico rico en CO_2 se enjuaga con vapor de agua se produce una corriente de CO_2 puro, que se podría soterrar, si no convertirse de nuevo en un hidrocarburo combustible. El gran inconveniente es, también en este caso, el coste, pero se podría empezar a pequeña escala: GRT se dispone a vender sus primeras unidades a los invernaderos en los dos próximos años porque emplean CO_2 para enriquecer la atmósfera de sus plantas.



Teoría de Control: planteamiento general



Objetivo: Encontrar el control u para que la observación $y(u)$ sea lo “mejor posible”

Óptimos en espacios de dimensión infinita

La componente económica. Cumbres Mundiales.

Teoría de juegos. Teoría de la decisión bajo incertidumbre

4.1. Matemáticamente: obstrucción ante radiación Stefan-Boltzmann

J. I. Díaz. Approximate controlability for some simple climate models.

En el libro *Environment, Economic and Their Mathematical Models* (J. I. Díaz y J.L.Lions eds.), Research Notes in Applied Mathematics No 35, Masson, Paris, 29-43, 1994.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + g(y) \in u\chi_\omega QS(x)\beta(y) + f(t, x), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{n}} = 0, & \text{en } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot), & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

abierto acotado Ω de \mathbb{R}^2

ω abierto acotado de Ω

$$u\chi_\omega(x) = \begin{cases} u, & \text{si } x \in \omega \\ 1, & \text{si } x \notin \omega \end{cases}$$

$$g(y) = \lambda |y|^{p-1} y, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad p > 1$$

“aproximadamente controlable”

$\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in L^2((0, T) \times \omega)$ tal que

$$\|y(T, \cdot; u_\epsilon) - y_d(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \epsilon$$

fenómeno de obstrucción

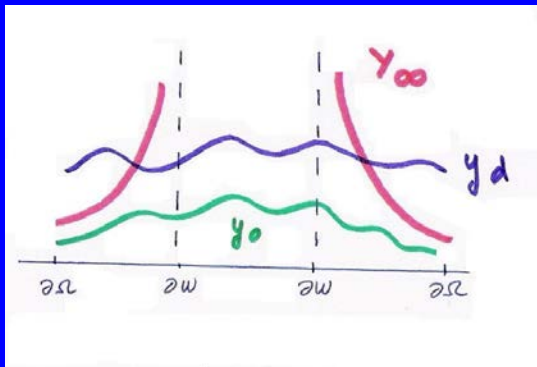
$$y_0 \in L^\infty(\Omega)$$

existe

$Y_\infty \in C([0, T] \times (\Omega - \bar{\omega}))$ tal que para todo $u \in L^2((0, T) \times \omega)$

$$|y(t, x; u)| \leq Y_\infty(t, x), \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times (\Omega - \bar{\omega})$$

$$\begin{cases} Y_\infty(t, x) = +\infty, & \forall (t, x) \in (0, T) \times \partial\omega, \\ \frac{\partial Y_\infty}{\partial \bar{n}}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

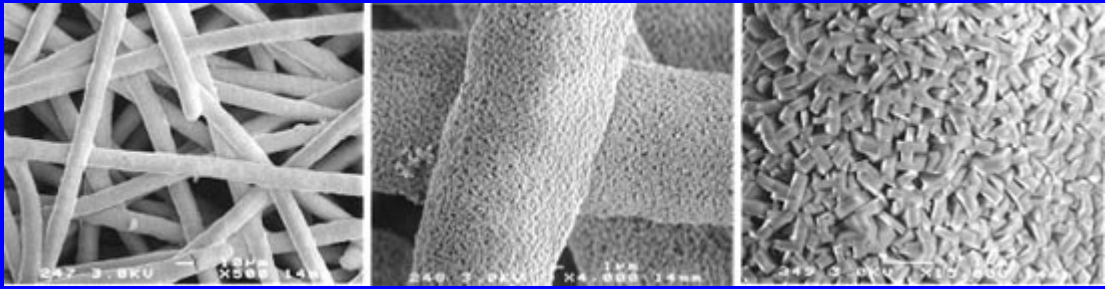
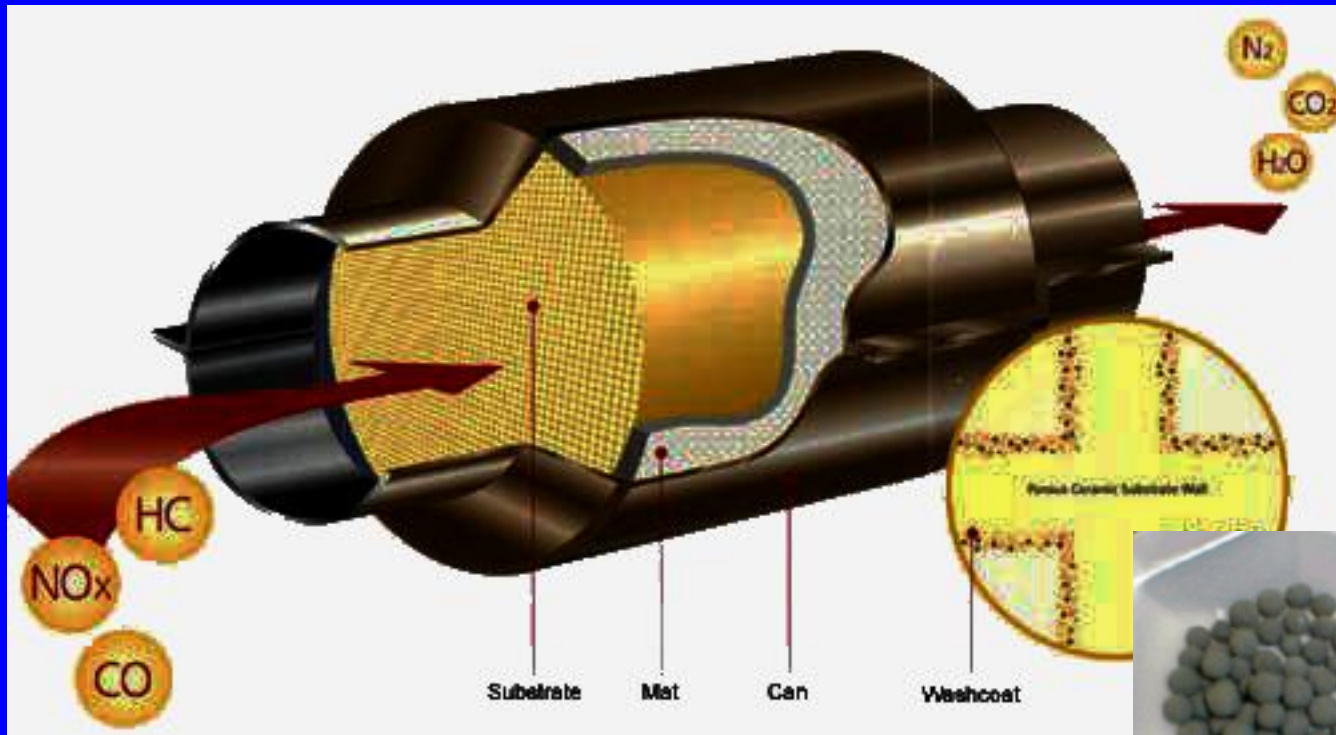


Cambios irreversibles

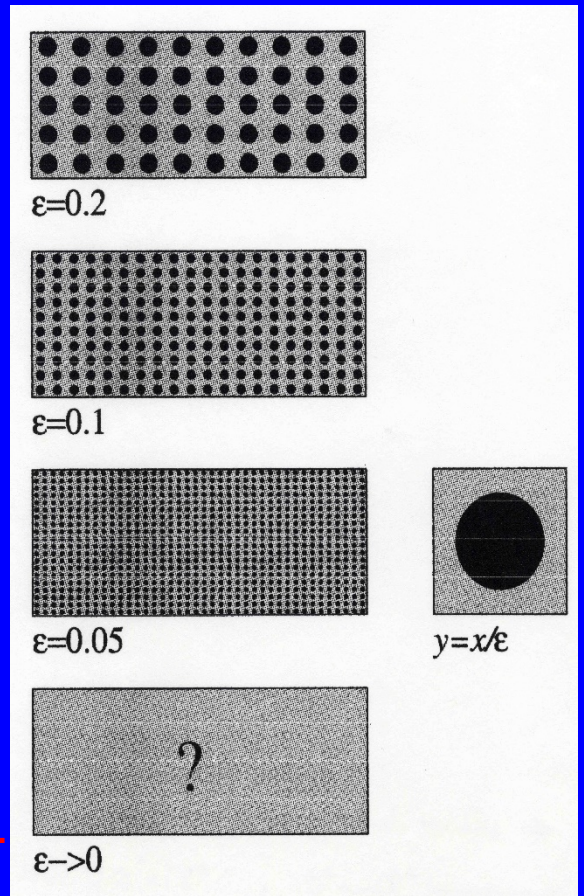
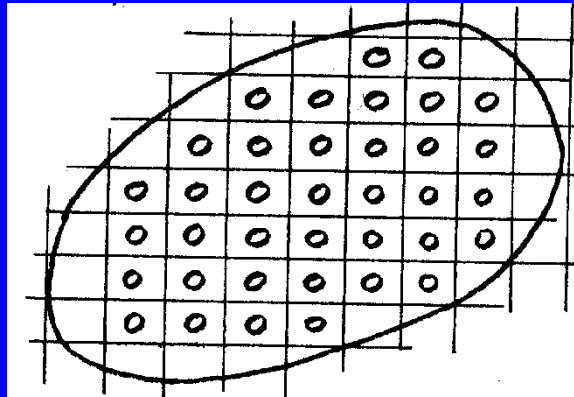
4.2. Control como suma de pequeñas acciones: Homogeneización

Control del comportamiento a escala macroscópica mediante la actuación de controles (forma de partículas) a escala microscópica

Piensa globalmente y actúa localmente



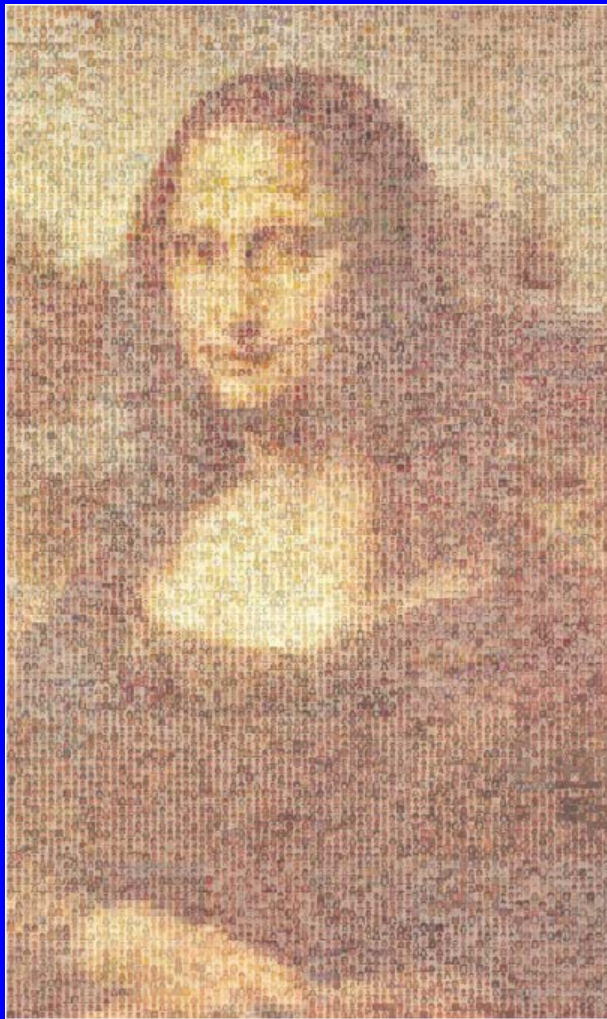
Homogeneización



Sánchez-Palencia, Bensoussan-Lions-Papanicolau,

Homogeneización (símil)





Gioconda Sapiens: El Rostro de la Humanidad.

Lisa Gherardini, aunque muchos me conocen como Madonna Lisa, Mona Lisa o, simplemente, como La Gioconda...

Museo del Hombre, Domus, A Coruña (Fundador del museo y diseñador del cuadro: Ramón Núñez)
Compuesta por 10.062 fotografías tipo carné, de personas procedentes de 110 países diferentes.
Obra de dos por tres metros.

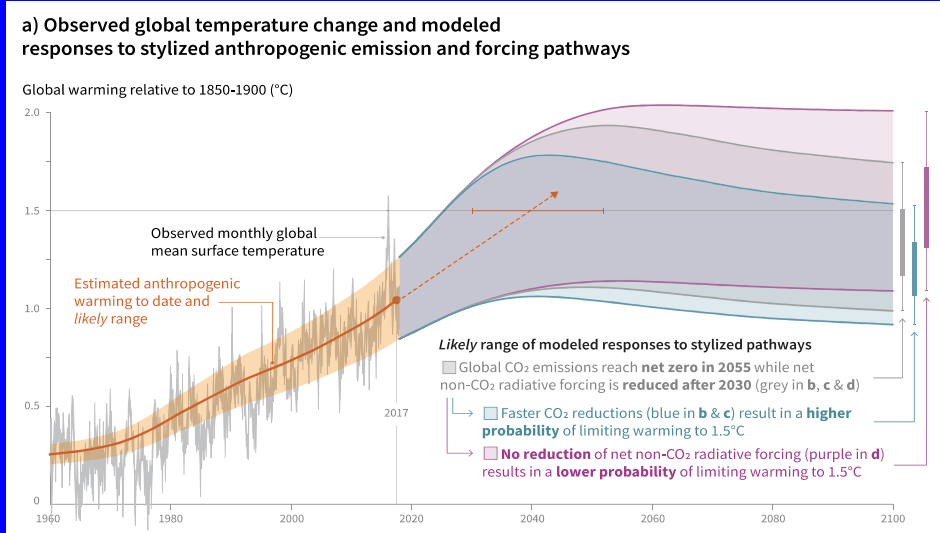


Ignacio Fernández Bayo

La voz de la Gioconda

Celeste Ediciones. Madrid, 1997 (ISBN 84-8211-112-4)

Matemáticas del siglo XXI



Problem 1

region of distributed control

$$\omega_E = \omega \cap \Omega_E$$

$$S \subset \subset \omega$$

$$S_E = S \cap \Omega_E$$

region of observability

period

Problem 2

Boundary controllability $\partial T_E^\omega = \omega \cap \partial T_E$ (en rojo)

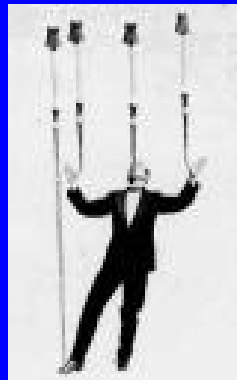
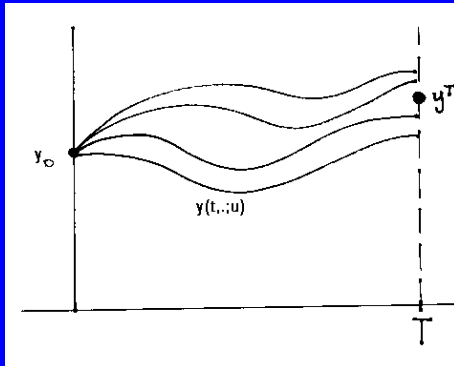
Boundary observation $\partial T_E^S = S \cap \partial T_E$ (en azul)

Problem 3

Boundary controls in $\partial T_E^\omega = \omega \cap \partial T_E$

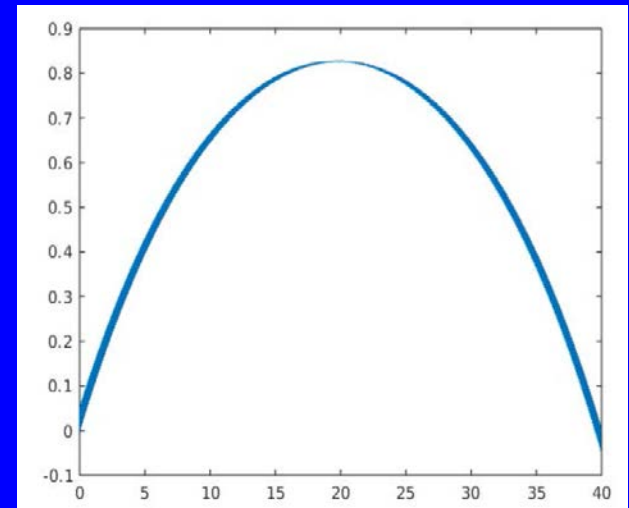
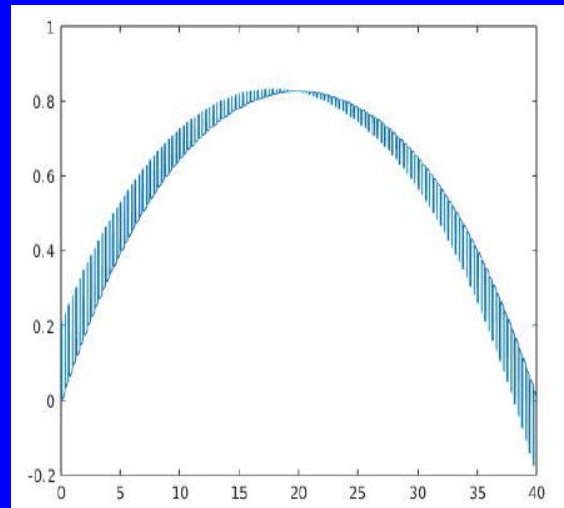
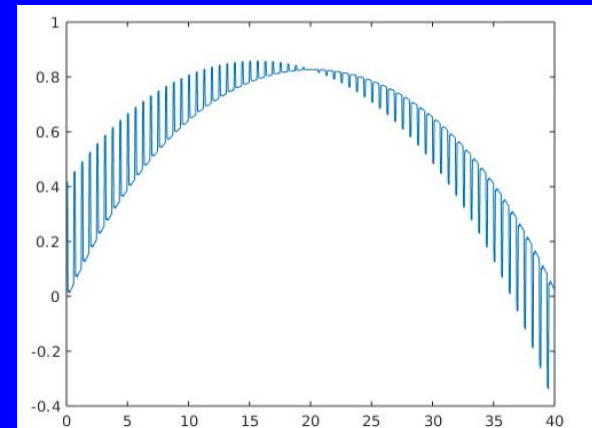
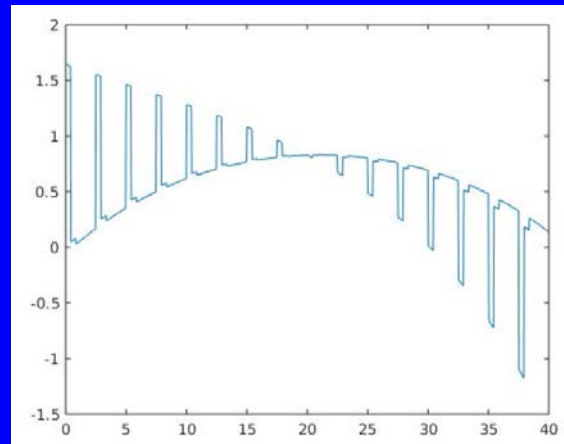
Final observation (in the parabolic problem) $\|y_E(\tau, \cdot) - y_d(\cdot)\|_{L^2(\Omega_E)} \leq \alpha$

* Control matemático (bordear lo imposible):



Posición inestable.

Oscilaciones
microscópicas
convergentes en
“sentido débil”



Díaz, Jesús Ildefonso / Gómez-Castro, David / Shaposhnikova, Tatiana A.

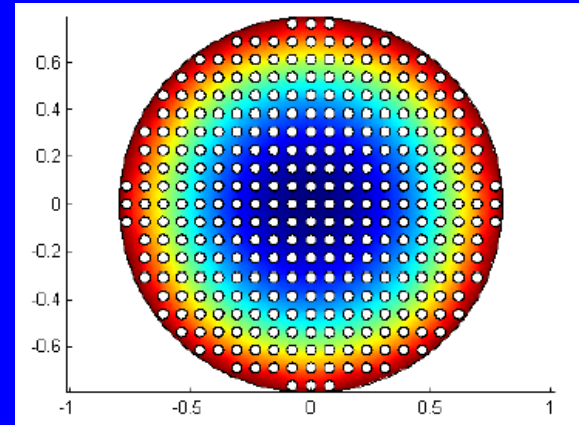
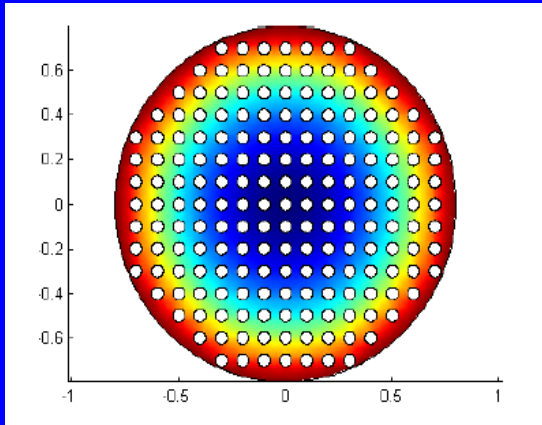
Nonlinear Reaction-Diffusion Processes for Nanocomposites (to be published February 2021)

ISBN: 978-3-11-064899-7

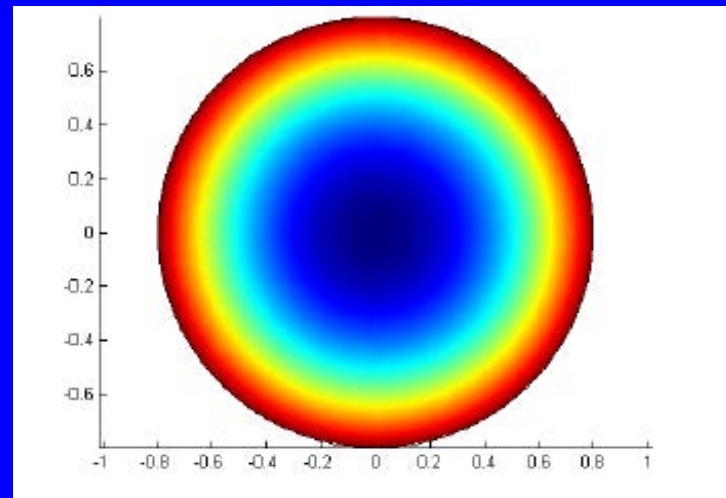
Product Type: Books

Format: eBook (PDF)

Also available as Hardcover, eBook (EPUB)

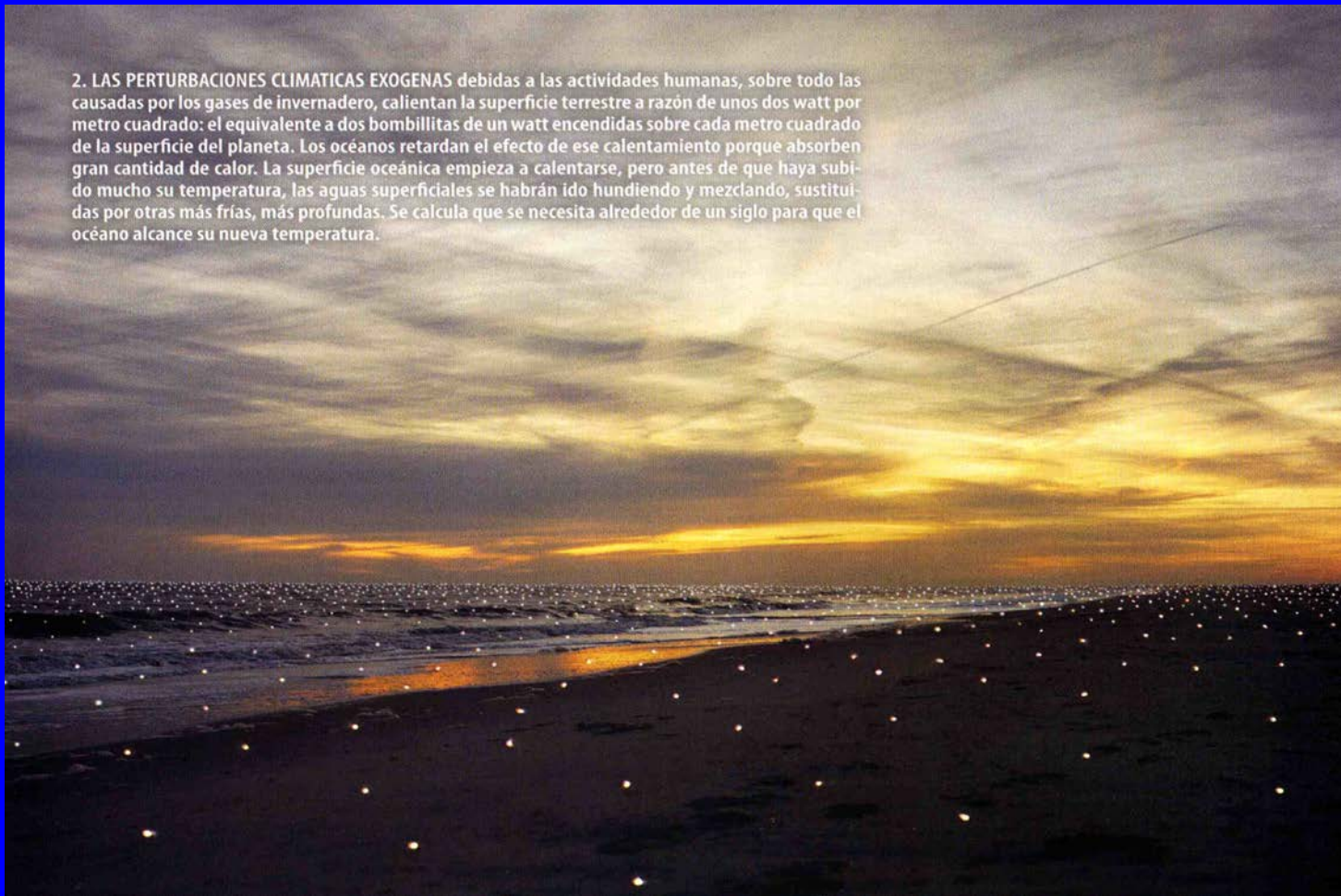


Resultado tras pasar al límite:
problema homogeneizado



Gracias por vuestra atención

2. LAS PERTURBACIONES CLIMATICAS EXOGENAS debidas a las actividades humanas, sobre todo las causadas por los gases de invernadero, calientan la superficie terrestre a razón de unos dos watt por metro cuadrado: el equivalente a dos bombillitas de un watt encendidas sobre cada metro cuadrado de la superficie del planeta. Los océanos retardan el efecto de ese calentamiento porque absorben gran cantidad de calor. La superficie oceánica empieza a calentarse, pero antes de que haya subido mucho su temperatura, las aguas superficiales se habrán ido hundiendo y mezclando, sustituidas por otras más frías, más profundas. Se calcula que se necesita alrededor de un siglo para que el océano alcance su nueva temperatura.



Let $\varphi_0^* := \varphi_0(z_0, \varphi_1^*)$ be the solution of homogenized adjoint equation associated with $\varphi_1 = \varphi_1^*$, where

$$\varphi_1^* = \operatorname{argmin} \left(\frac{\theta}{2} \int_{\omega} |\varphi_0|^2 dx + \alpha \sqrt{\theta} \|\varphi_1\|_{0,S} - \theta \int_S y_1 \varphi_1 ds \right).$$

Then the representation of the optimal control $v_n^*(z_0)$ in terms of this dual variable

Plan of the Appendix on Control and Critical size homogenization in the book Diaz-Gomez-Castro - Shaposhnikova

1. In the case of "big particles" $G_\varepsilon = \alpha_\varepsilon G_0$, $G_0 = B_1(0)$, $\alpha_\varepsilon \sim \varepsilon$, the Budyko-Sellers climate diffusive model

$$P(\Omega, w, y) \begin{cases} y_t - \Delta y + y^4 \ni Q\beta(y) + v\chi_w & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times (0, T) \\ y(0, x) = y_0(x) & \Omega \end{cases}$$

$$\beta(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Heaviside type

can be obtained as homogenized limit of a family of periodic problems

$$P(\Omega_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon) \begin{cases} y_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon = v_\varepsilon \chi_{w_\varepsilon} & \Omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \partial_{\text{ext}} \Omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n} + \varepsilon (y_\varepsilon^4 - \beta(y_\varepsilon)) = 0 & \partial_{\text{int}} \Omega_\varepsilon \times (0, T) \\ y_\varepsilon(0, x) = y_{0, \varepsilon}(x) & \Omega_0 \end{cases}$$

2. Problem $P(\Omega, w, v)$ is not (in general) approximate controllable (obstruction due to the superlinear absorption term y^4)

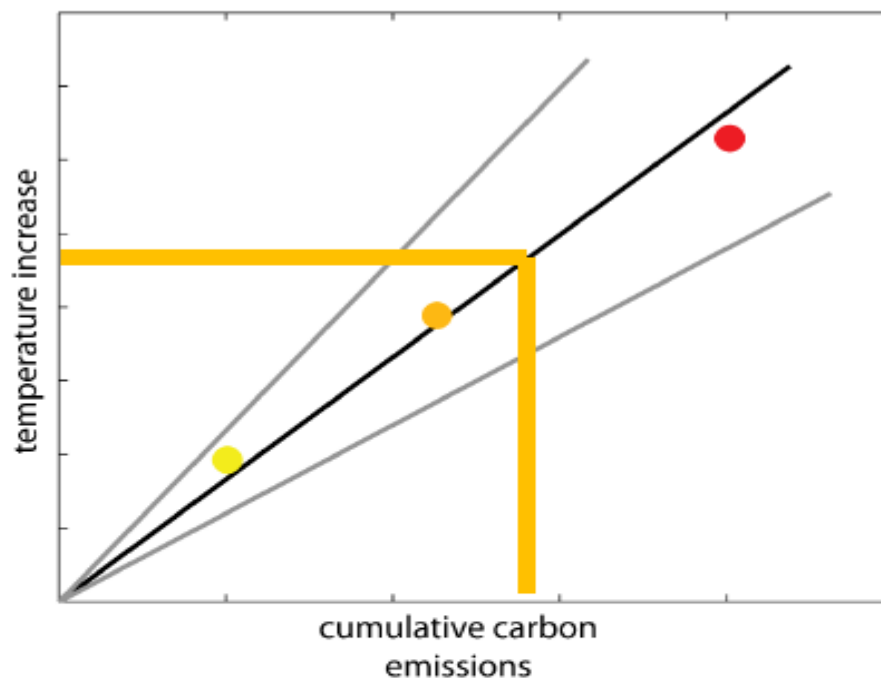
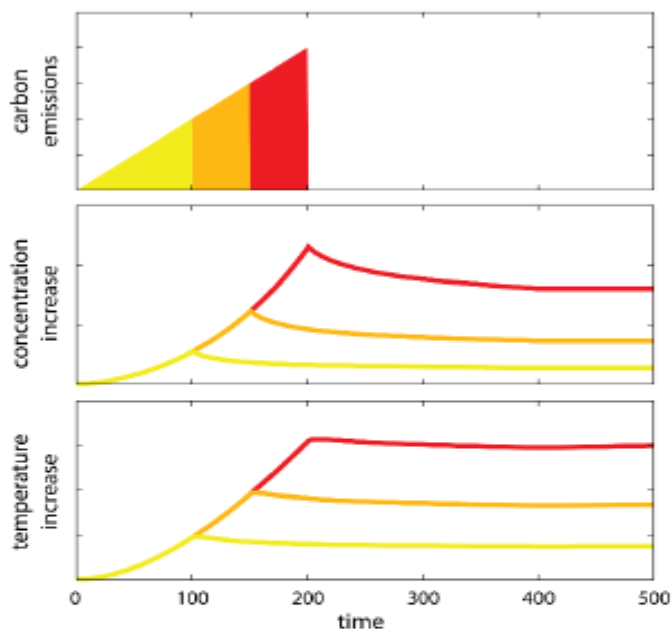
3. In the case of critical size particles $a_\varepsilon \sim c_0 \varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$ the homogenized problem $P(\Omega_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converges (weakly) to a better problem

$$BP(\Omega, w, v) \begin{cases} y_t - \Delta y + H(w) = v \chi_w & \text{with } H \text{ Lipschitz} \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{Continuous} \\ y(0, x) = y_0(x) \end{cases}$$

4. Problem $P(\tilde{\Omega}_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon)$ is approximate controllable (even for critical size particles).

5. The sequence of controls $\{\tilde{v}_\varepsilon\}$ converges (weakly) to a global control v in $L^2(\Omega)$ of the "better problem" $BP(\Omega, w, v)$ and, in fact, v is the "cheaper" control able to control the problem.

Cumulative carbon determines warming



- Peak warming is approximately proportional to cumulative (total) emissions.
- Transient climate response to cumulative carbon emissions $TCRE = \text{Warming per } 1000 \text{ PgC}$

$R_e = \sigma u^4$ Ley de Stefan-Boltzman Sellers

$R_e = A + Bu$ Ley de enfriamiento de Newton Budyko

Relación empírica, Depende de gases de invernadero, cambios antropogénicos,... (**variables internas**)

Modelo 0-dimensional $D=0$

$$c \frac{du}{dt} = Q\beta(u) - R_e(u)$$

Numerosos puntos de vista matemáticos para el clima

1. Introducción

1.a. Un artículo con bastantes citas:

A. 194. J. I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello, Multiple solutions and numerical analysis to the dynamic and stationary models coupling a delayed energy balance model involving latent heat and discontinuous albedo with a deep ocean. Proc. R. Soc. A. 2014 470 20140376; doi:10.1098/rspa.2014.0376 (published 27 August 2014) (PDF). **SESIÓN de L. TELLO**

1.b. Transparencias sobre promedios

2. Existencia de soluciones

2.a. Caso de evolución (transparencias)

2.b. Evolución con término estocástico:

A.163. J.I. Díaz, J.A. Langa, J. Valero, On the asymptotic behaviour of solutions of a stochastic energy balance climate model. Physica D, 238 (2009), 880-887. (PDF)

A.96. G. Díaz, J. I. Díaz. On a stochastic parabolic PDE arising in Climatology. Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem, 96, nº 1, 2002, 123-128. (PDF)

3. Unicidad y multiplicidad de soluciones

3.a. Caso del problema de evolución parabólico (transparencias)

3.b. Caso estacionario (transparencias)

4. Sobre la frontera libre

4.a Mushy region para $p > 2$ (trasnparencias)

4.b. Regularidad de la frontera libre. A.166. J.I. Díaz, S. Shmarev, Lagrangian approach to the study of level sets II: a quasilinear equation in climatology, *J. Math. Anal. Appl.* 352 (2009) 475–495 (PDF)

5. Problemas de control para modelos climáticos difusivos

J. I. Díaz. On the von Neumann problem and the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies for some environmental problems. *Rev. R. Acad. Cien.Serie A Matem.* 96, n° 3, 2002, 343-356. (PDF)

J. I. Díaz. Controllability and obstruction for some non linear parabolic problems in Climatology. En el libro *Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio-Ambientales* (C.Pares y A.Valle eds.) Universidad de Málaga, 43-58, 1994.(PDF)

J. I. Díaz. Approximate controlability for some simple climate models. En el libro *Environment, Economic and Their Mathematical Models* (J. I. Díaz y J.L.Lions eds.), *Research Notes in Applied Mathematics No 35*, Masson, Paris, 29-43, 1994. (PDF)

J. I. Díaz. Mathematical analysis of some diffusive energy balance models in Climatology. En el libro *Mathematics, Climate and Environment* (J. I. Díaz and J.L.Lions eds.), *Research Notes in Applied Mathematics n° 27*, Masson, Paris, 28-56, 1993. (PDF)

Un artículo reciente: G. Floridia, Approximate controllability for nonlinear degenerate parabolic problems with bilinear control , *Journal of Differential Equations* volume 257, issue 9, year 2014, pp. 3382 - 3422

6. Tratamiento numérico de modelos climáticos difusivos

J. I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello, Multiple solutions and numerical analysis to the dynamic and stationary models coupling a delayed energy balance model involving latent heat and discontinuous albedo with a deep ocean. *Proc. R. Soc. A.* 2014 470 20140376; doi:10.1098/rspa.2014.0376 (published 27 August 2014) (PDF)

A. Hidalgo, L. Tello. A Finite Volume Scheme for simulating the coupling between deep ocean and an atmospheric energy balance model. In the book *Modern Mathematical Tools and Techniques in Capturing Complexity*. Springer Series in Complexity, Springer, Berlin (2011) 239-255.

J.I. Díaz, S. Shmarev, Langragian approach to level sets: application to a free boundary problem arising in climatology, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 194, 2009, no.1, 75-103 (PDF)

R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, L. Tello, Mathematical and Numerical Analysis of a Nonlinear Diffusive Climate Energy Balance Model. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008. (PDF)

R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, P. Galán de Sastre , A finite element algorithm of a nonlinear diffusive climate energy balance model, *Pure and Applied Geophysics*, 165, nº 6, 2008, 1025-1048. (PDF)

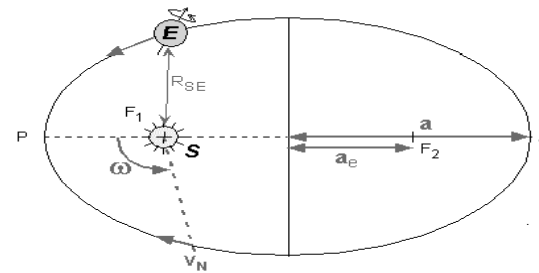
7. Bifurcación y estabilidad de soluciones estacionarias

S. Bensid, J.I. Díaz, Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 22 N 05, (2017) 1757-1778.

S. Bensid and J.I. Díaz, On the exact number of monotone solutions of a simplified Budyko climate model and their different stability, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 24, N 03, (2019), 1033-1047.

S. Bensid and J.I. Díaz, Existence, multiplicity and stability of solutions of quasilinear differential equation arising in climatology.

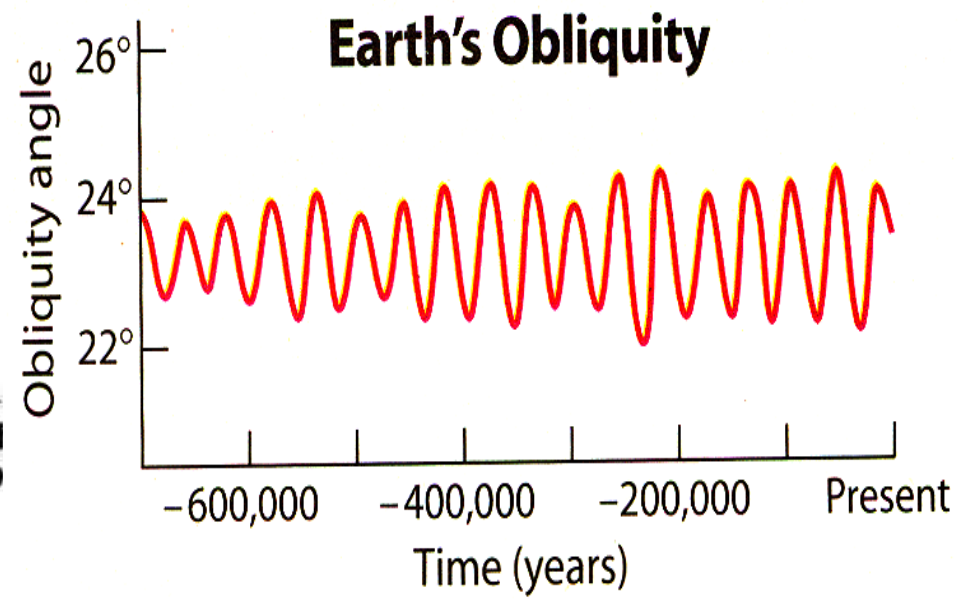
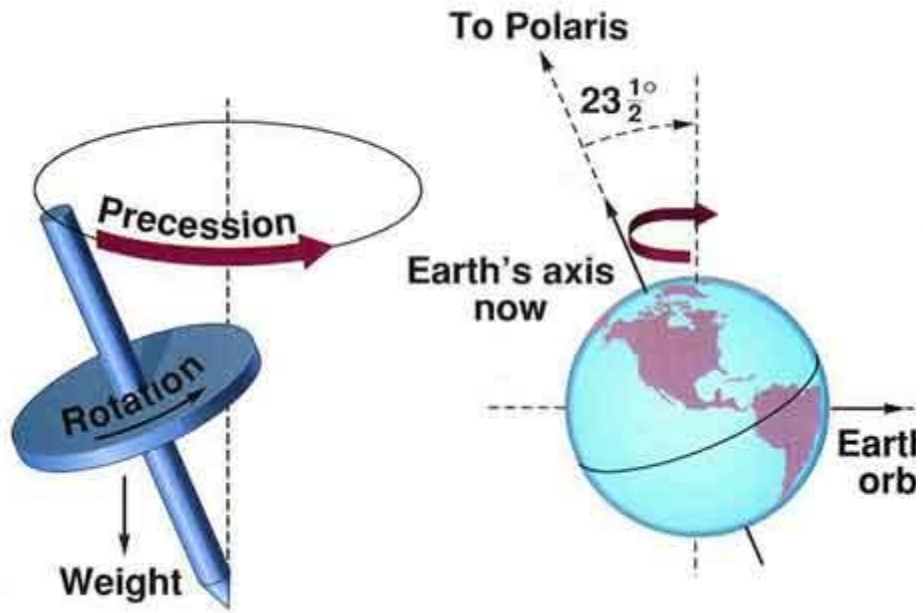
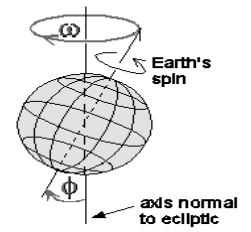
Earth - Sun Orbital Relationships



Legend:

- A aphelion - point of max R_{SE}
- P perihelion - point of min R_{SE}
- $F_{1,2}$ foci of elliptical orbit
- S Sun
- E Earth
- a semi-major axis
- a_e half-distance e between foci
- V_N vernal point (northern spring equinox)
- ω angle between P and V_N
- R_{SE} instantaneous Sun-Earth distance

Eccentricity: $e = \frac{a_e}{a} < 0.06$
 Tilt changes (nutation): $\phi = 22-24.5^\circ$
 Precession (wobble): $\omega = 0-360^\circ$



Super-ordenadores: Cálculo paralelo.



Lewis Fry Richardson

1881 – 1953

