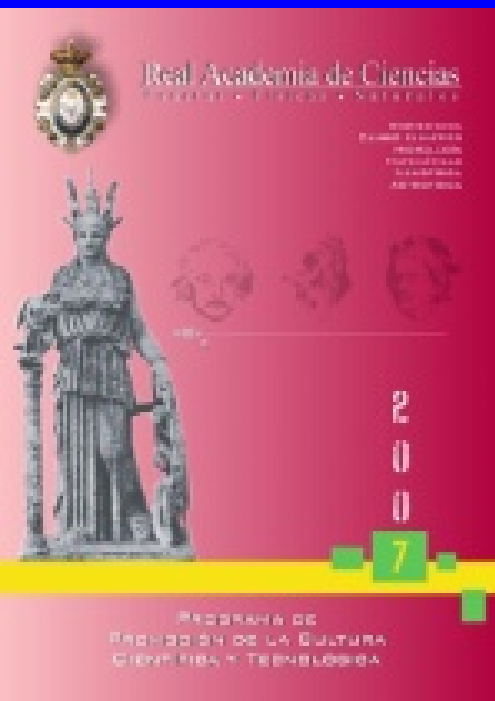


Matemáticas que sustentan columnas, puentes y rascacielos.

J.I. Díaz



Madrid, 5 de junio de 2008

Ciencia para todos

Programa patrocinado por:
Ministerio de Educación y Ciencia y Comunidad de Madrid

<http://racefyn.insde.es/>



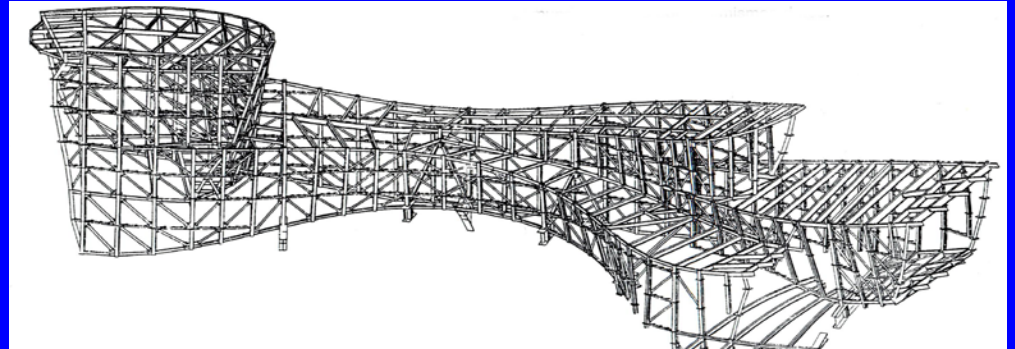
1. Introducción

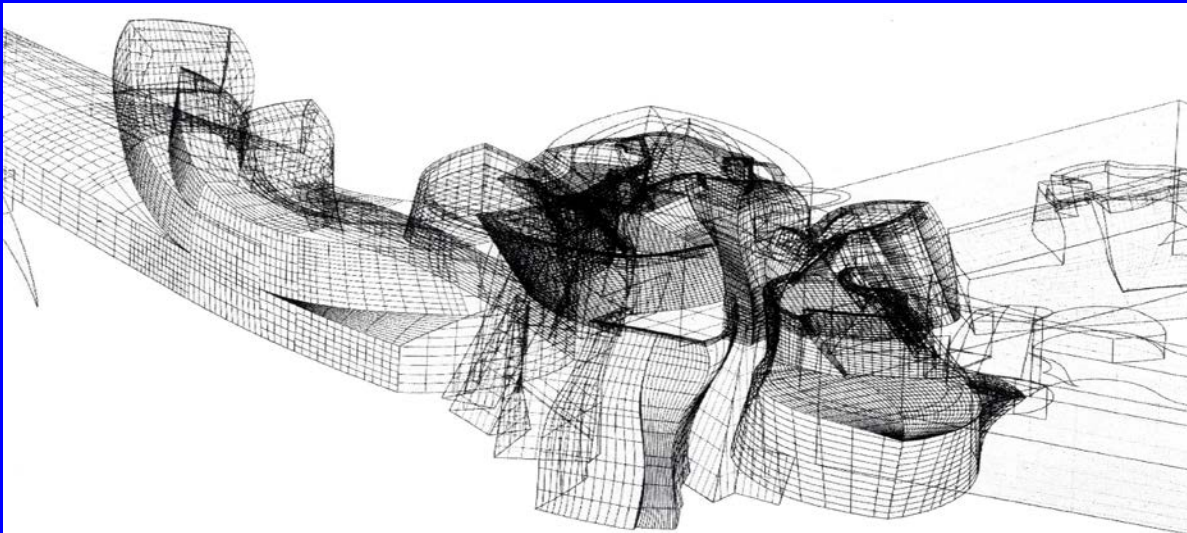
Detrás de las más atrevidas estructuras, desafiando la gravedad, retando a la indispensable robustez, aparentando una falsa inestabilidad, hay matemáticas ocultas cuya misión es pasar inadvertidas, ocultar el mérito técnico para resaltar la componente artística y creativa.



Museo Guggenheim, Bilbao, 1997

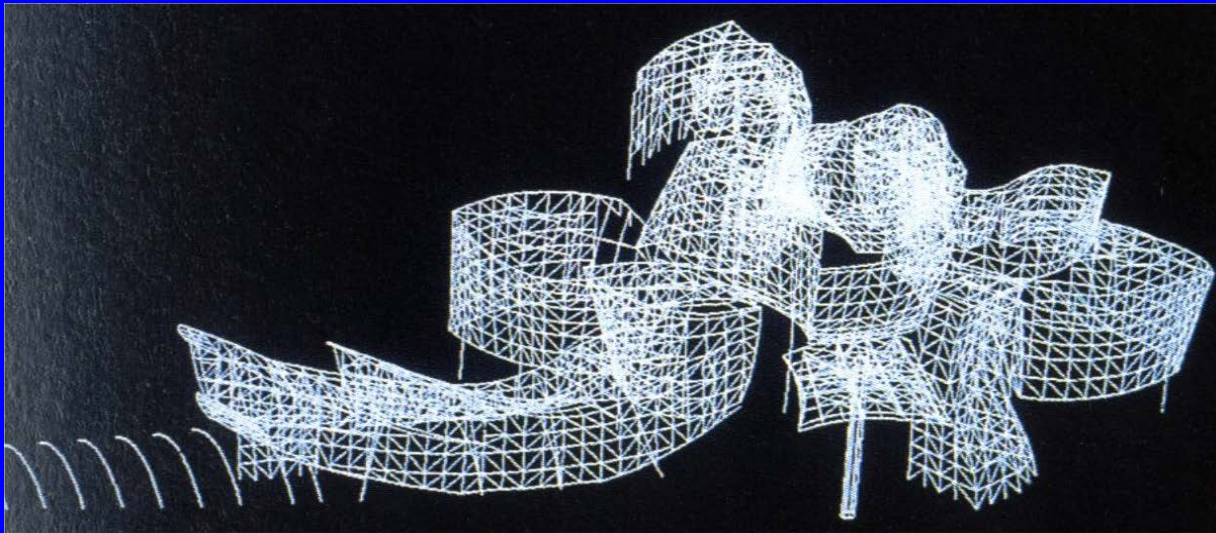
Arquitecto: Frank O. Gehry & Associates
Ingeniero: Skidmore Owings & Merrill





Programa CATIA del
INRIA (Francia), análisis
estructural en Chicago

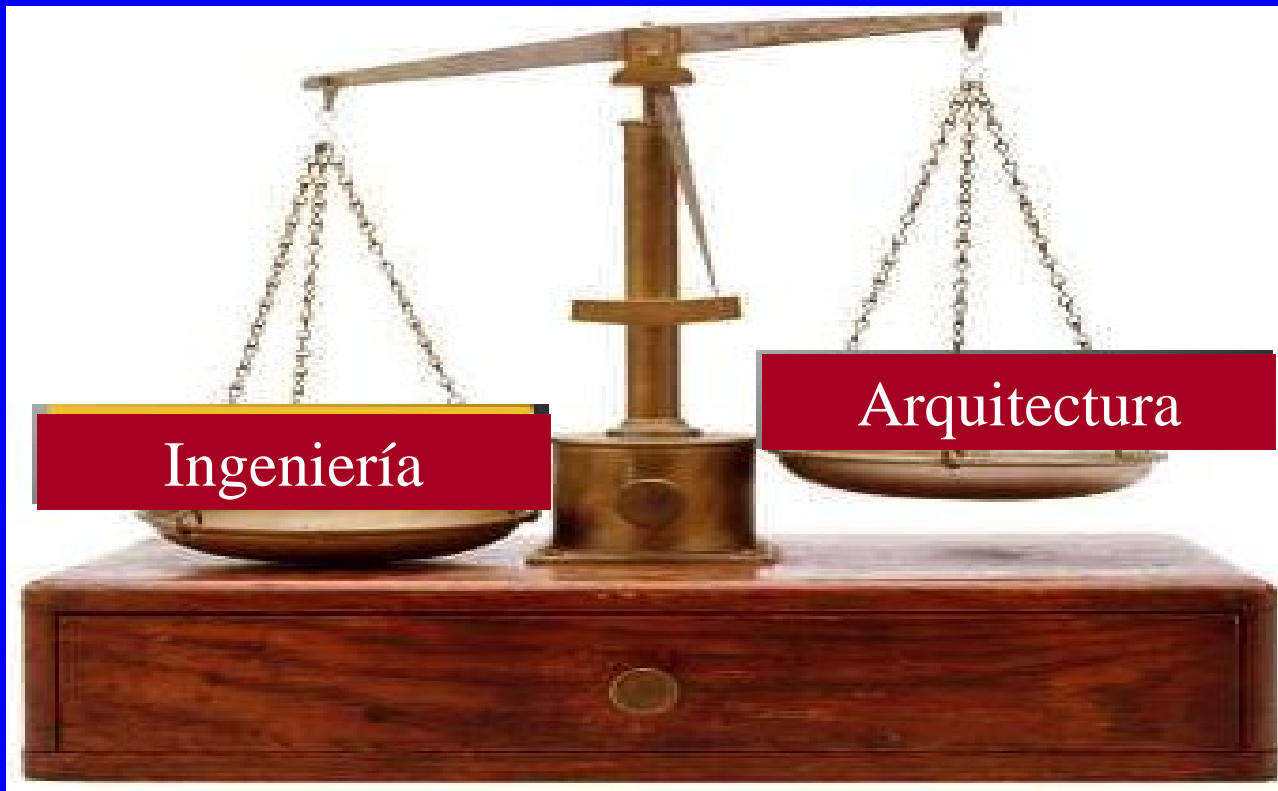
Mirage,
Boeing 777



Diseño y cálculo de
la estructura 3d:
diseño para corte y
ensamblaje de
elementos de titanio



Gustave Eiffel (de 1881 a 1882)



“Rival hermandad”: resolución de los *sueños* de los arquitectos

Matemáticas

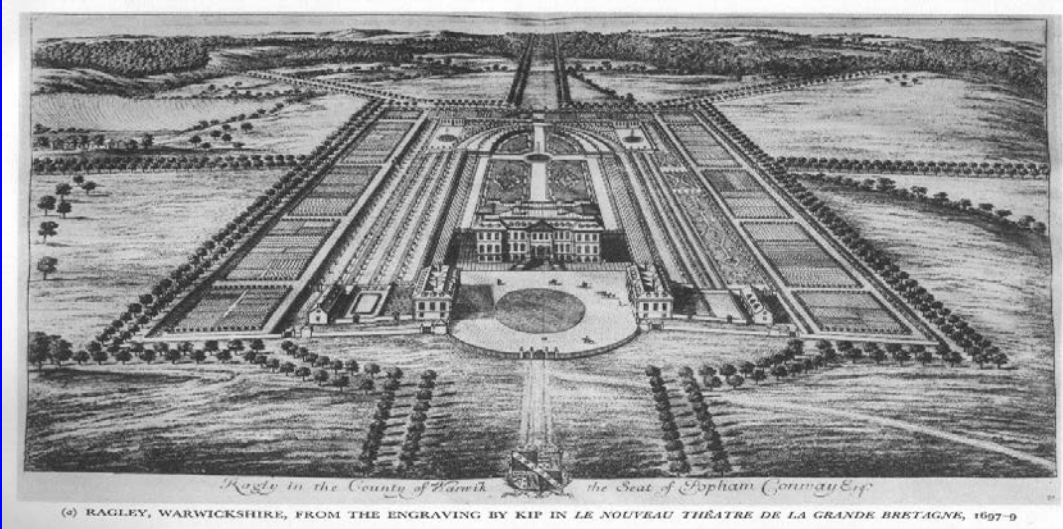
Arte

Interacciones

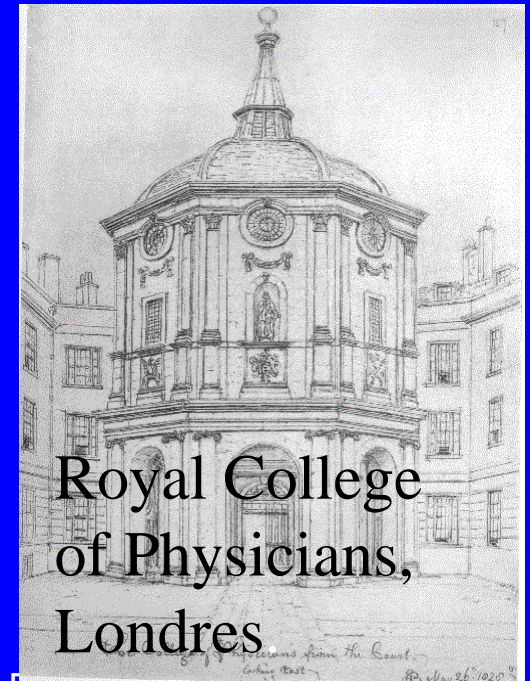


Robert Hooke (1635-1703)

**Willen Church,
Buckinghamshire**



Ragley Hall, Warwickshire

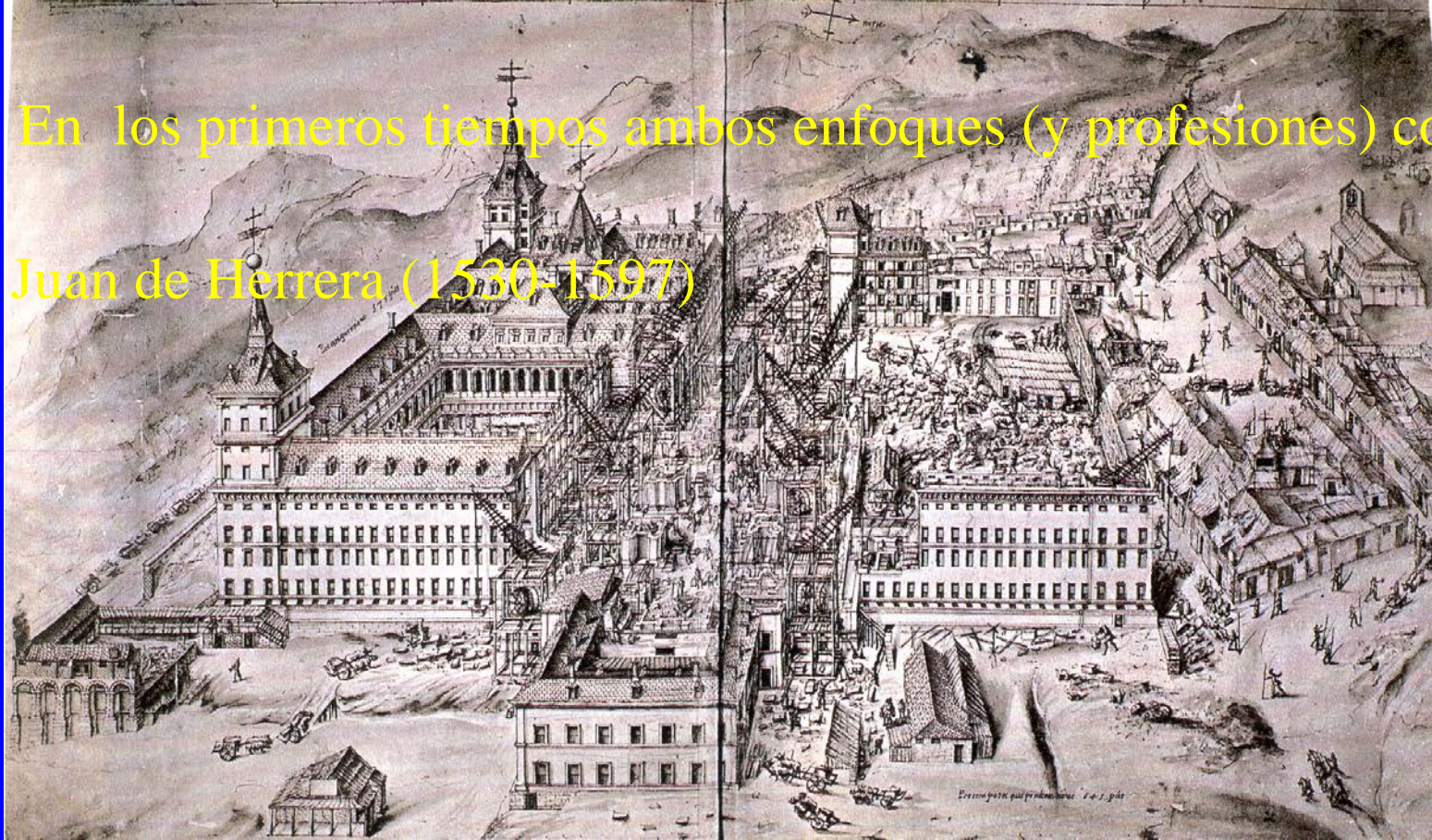


**Royal College
of Physicians,
Londres**



En los primeros tiempos ambos enfoques (y profesiones) coincidieron:

Juan de Herrera (1530-1597)



Visión unitaria de Geometría-Arquitectura-Máquinas

Arquitectura y machinas, 1563



La separación entre enfoques (y profesiones) comienza con la Ilustración



Leonhard Euler (1707-1783)

The Leonhard Euler Tercentenary - Basel 2007



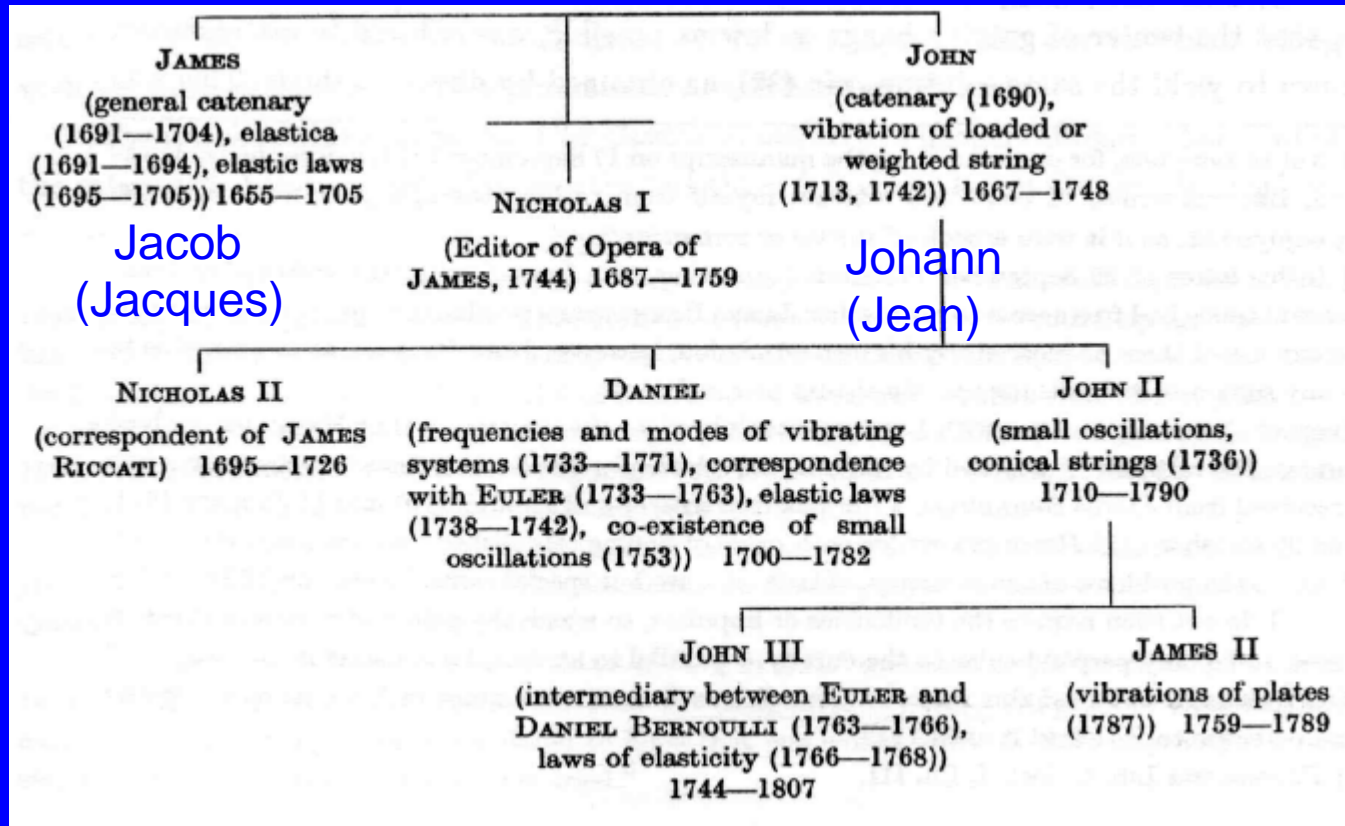
<http://www.euler-2007.ch>

Leonhardi Euleri Opera Omnia: a centenary project: *Andreas Kleinert and Martin Mattmüller in Newsletter of the European Mathematical Society, September 2007,*

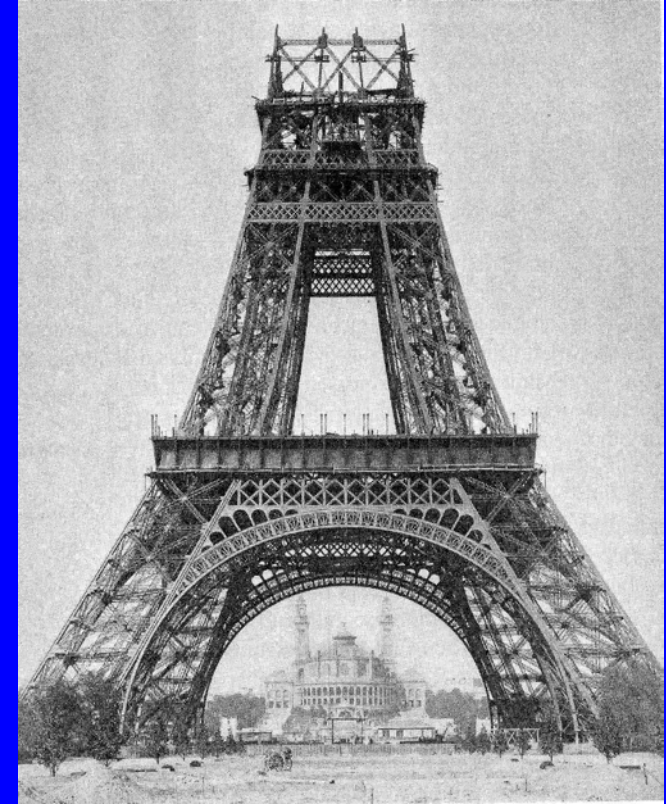
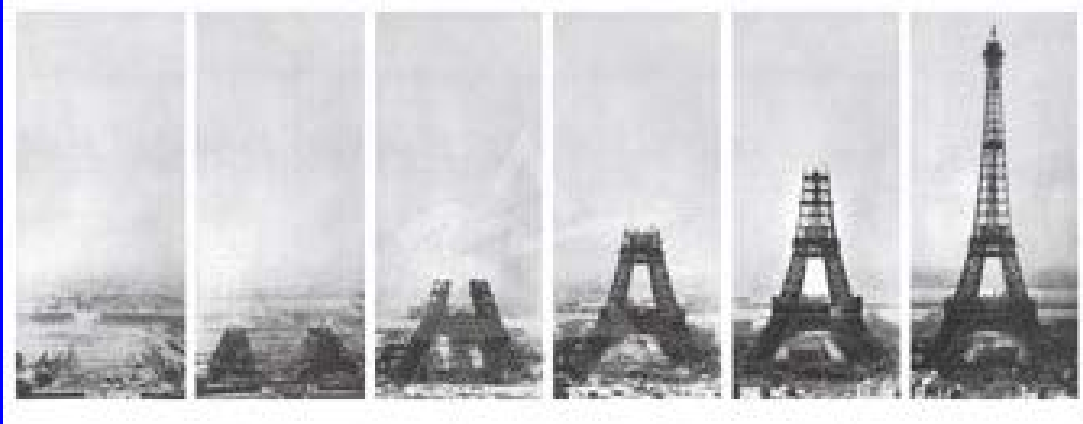


Shelf with *Opera Omnia* at Euler-Archiv Basel

Entre 1691 y 1748, la elasticidad es dominada por los “geómetras de Bassel” (la familia Bernoulli y Euler).



Nueva coincidencia: siglo XIX, nuevos materiales,... 1888



Activa colaboración en el XX

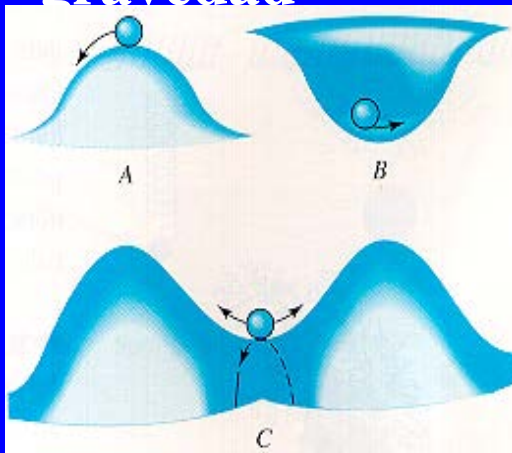


Opera de Sydney (1957/1973):
Jorn Utzon /Ove Arup

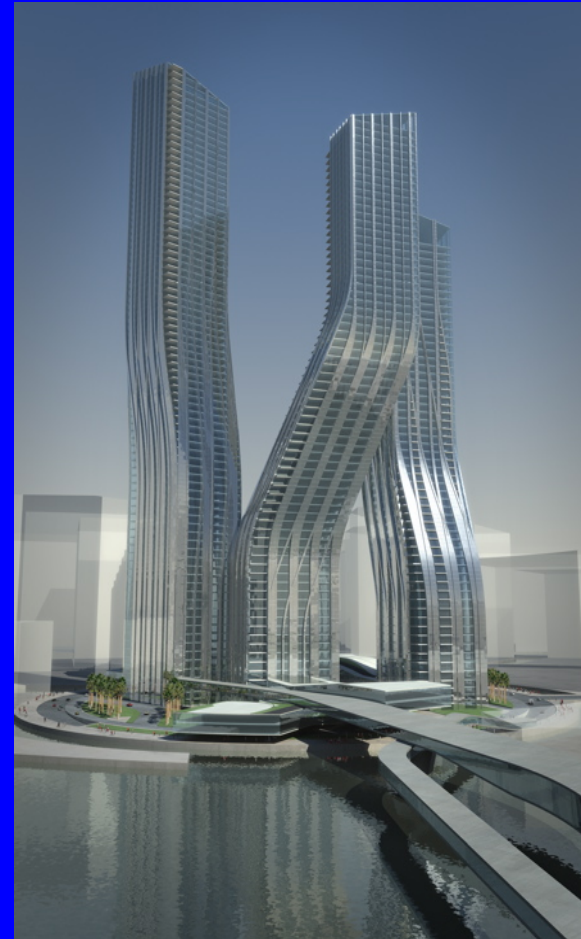


Ingeniería para las inestabilidades de arquitectos

Estado de equilibrio
de la cuerda vibrante
bajo la acción de la
gravedad



Estabilidad para tiempos
grandes



“Signing Towers” proyecto, Dubai,
Emiratos Árabes Unidos.

Zaha Hadid (premio Pritzker)



Enfoque matemático de la realidad: un símil



Giuseppe Arcimboldo,

Milán 1527-1593

- Sobrino de Felipe II
- Sucesor de Juanelo Turriano



El bibliotecario 1566



La primavera 1573

Grabación en pistas: por instrumentos

Plan del resto de la conferencia:

- 2. Matemáticas que sustentan columnas.
- 3. Matemáticas que sustentan puentes.
- 4. Matemáticas que sustentan rascacielos.
- 5. Tensegridades (*una visión complementaria a la de M. de Guzmán*).

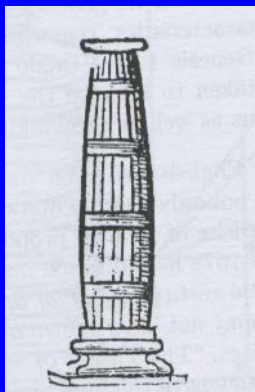




Estudios pioneros

Leonardo da Vinci (1452-1519)

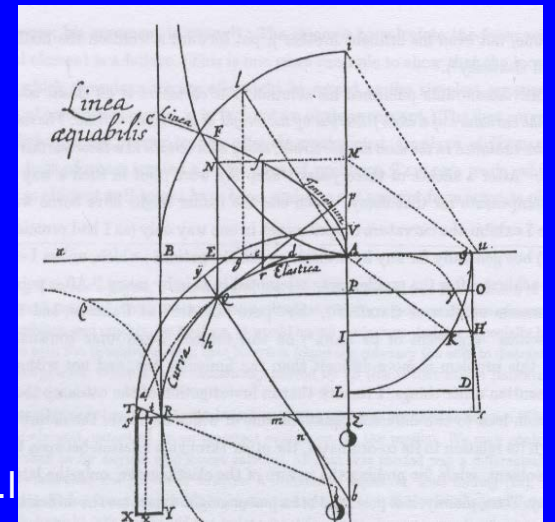
Galileo Galilei (1562-1642),
1638,



Ignace-Gaston Pardies

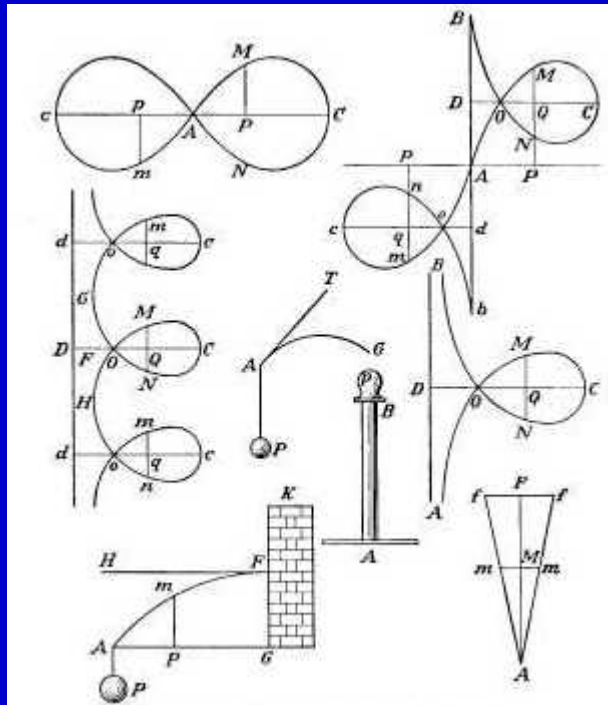
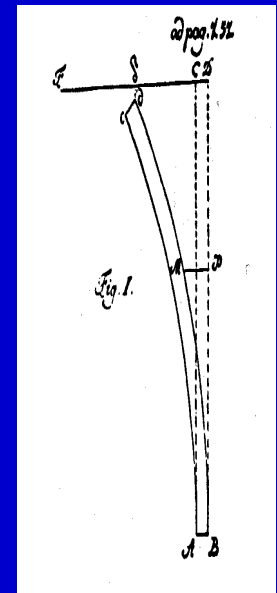
1673

Jacques Bernoulli (1654-1705),
1690



Jean Bernoulli (1667-1748):

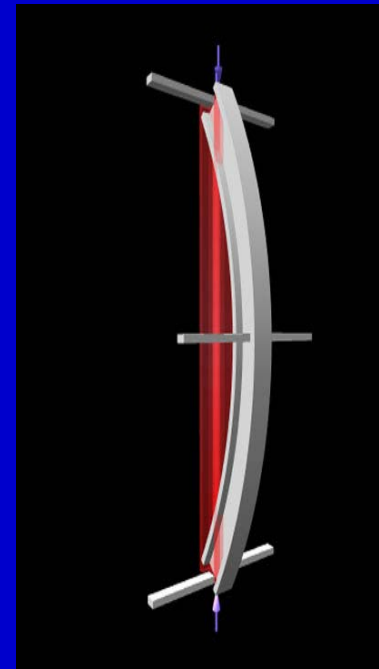
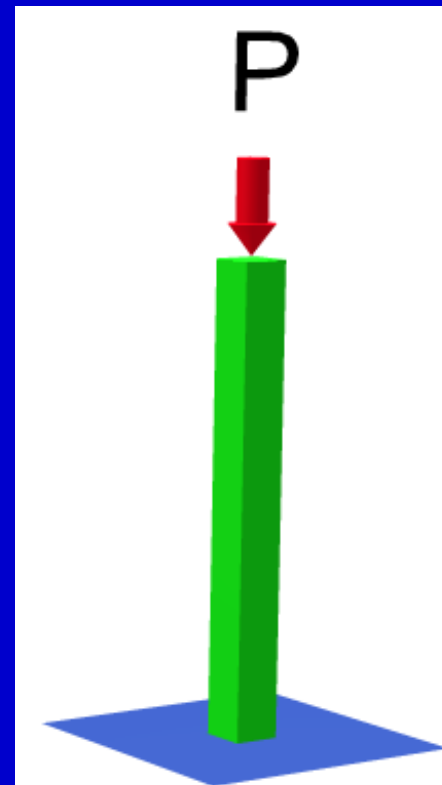
On the curvature of extensible strings
(1691, ..., 1742)

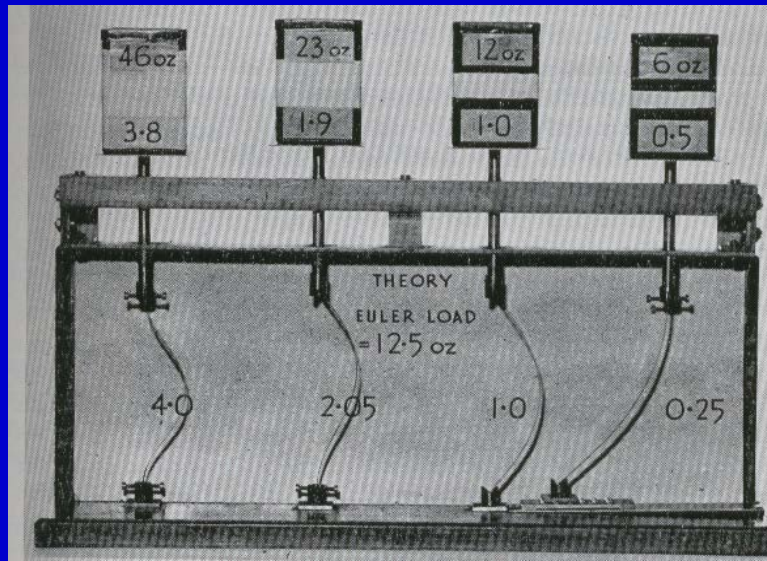


Euler, 1727

Modulo de extension

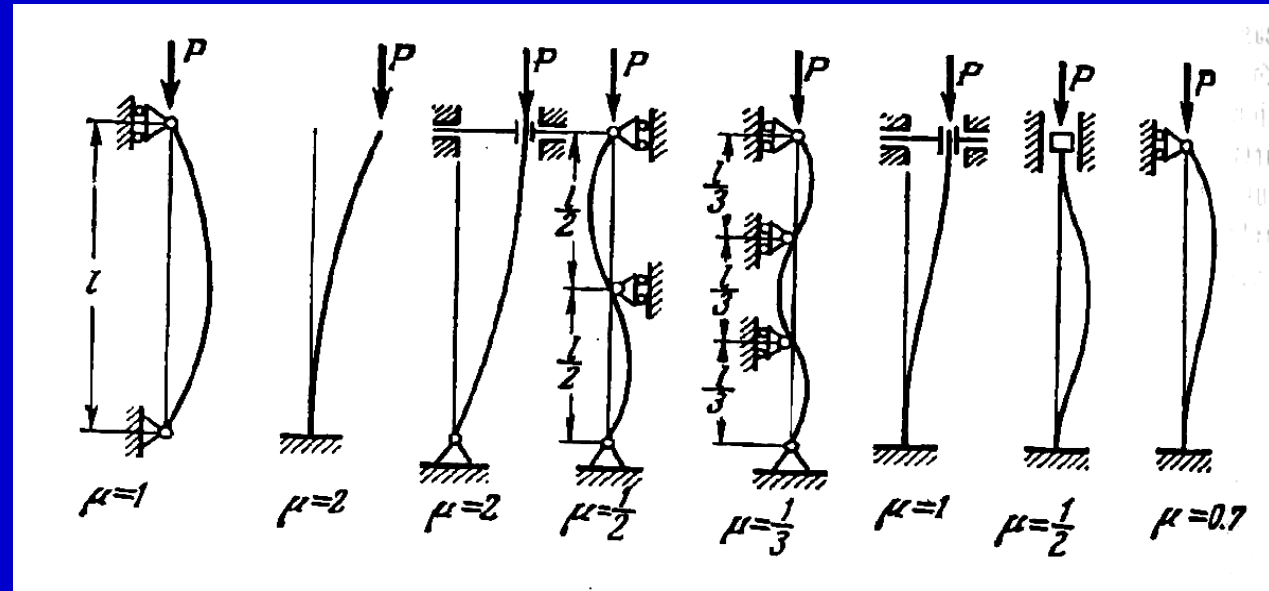
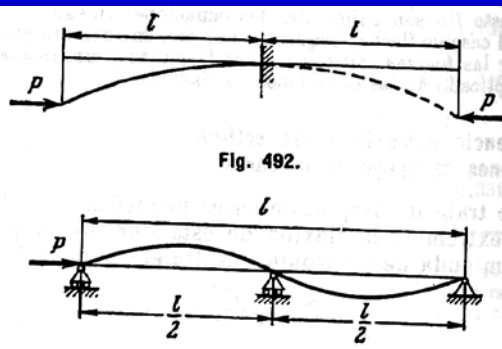
(modulo de Young)





Diferentes perfiles

Condiciones de contorno: longitud ficticia



$$EIy'' = -Py.$$

$$y'' + k^2y = 0,$$

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \operatorname{cos} kz.$$

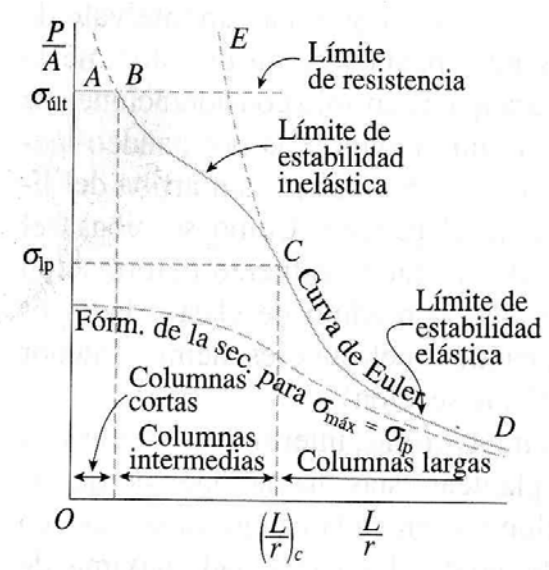
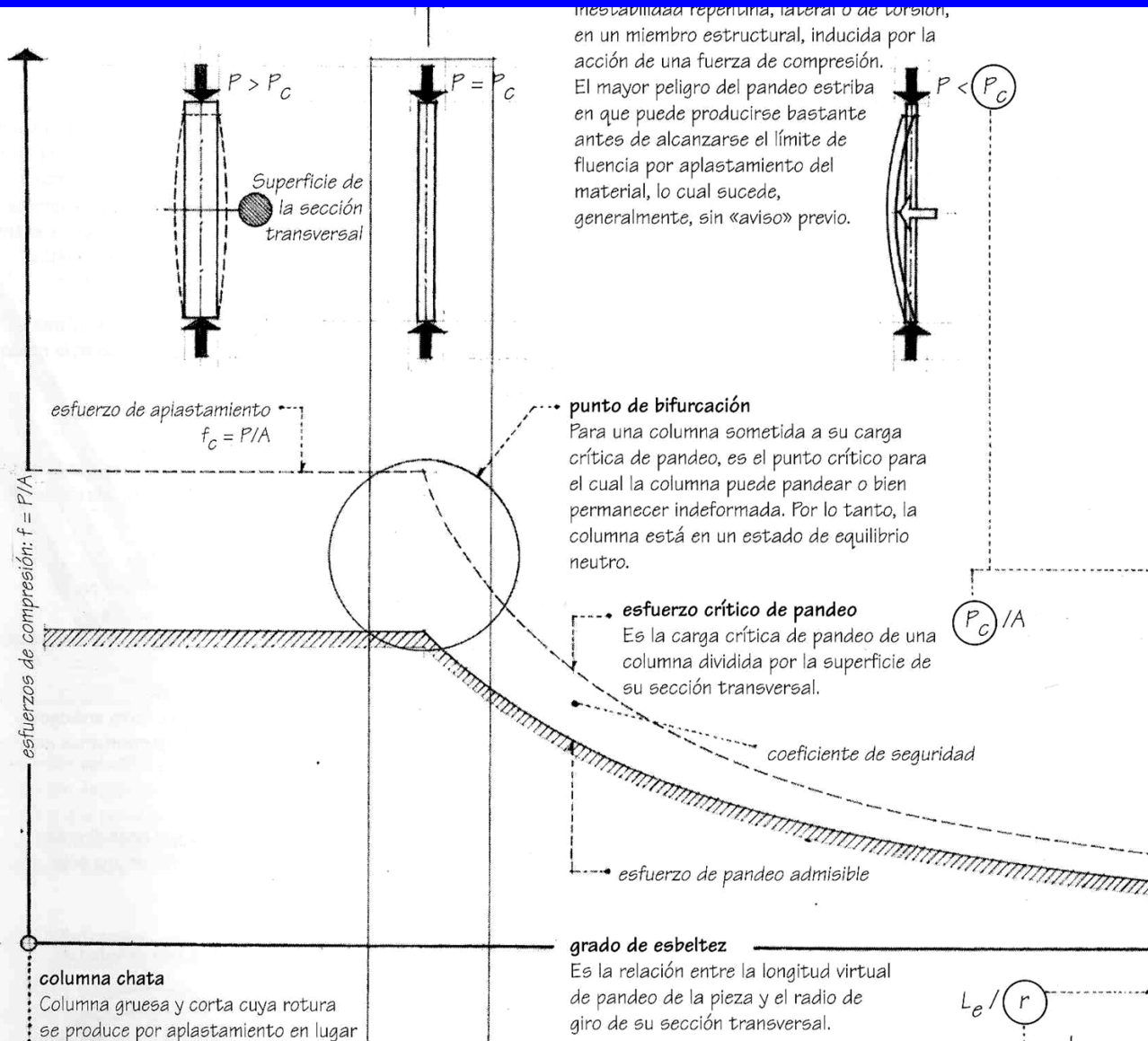
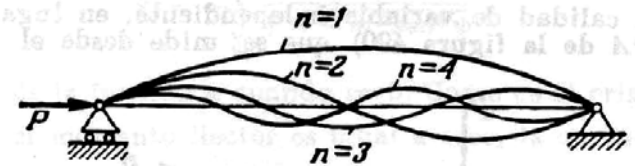
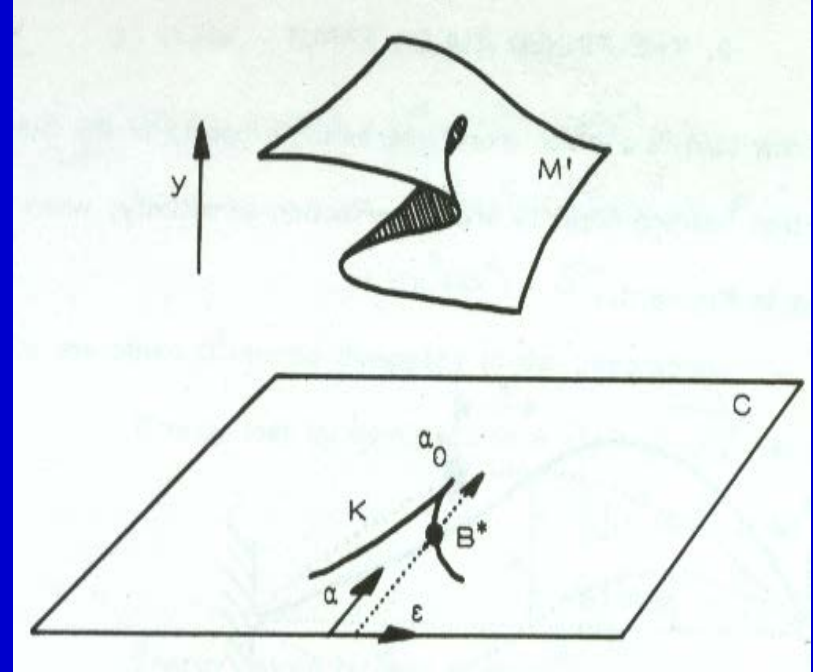
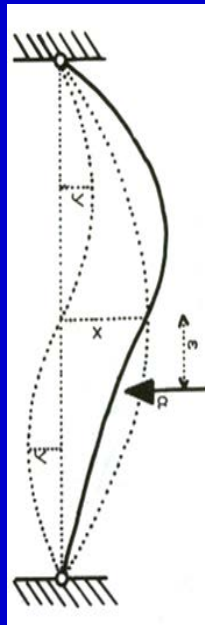


Figura 11-29 Diagrama del esfuerzo de compresión promedio P/A versus relación de esbeltez L/r .

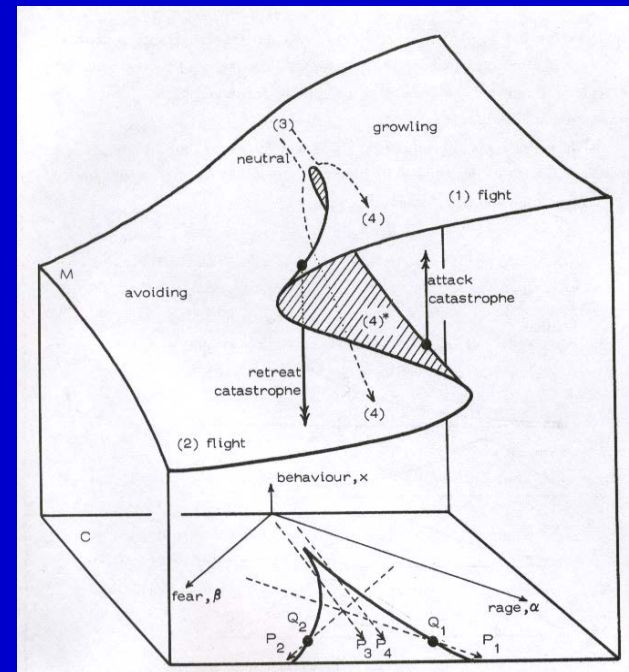
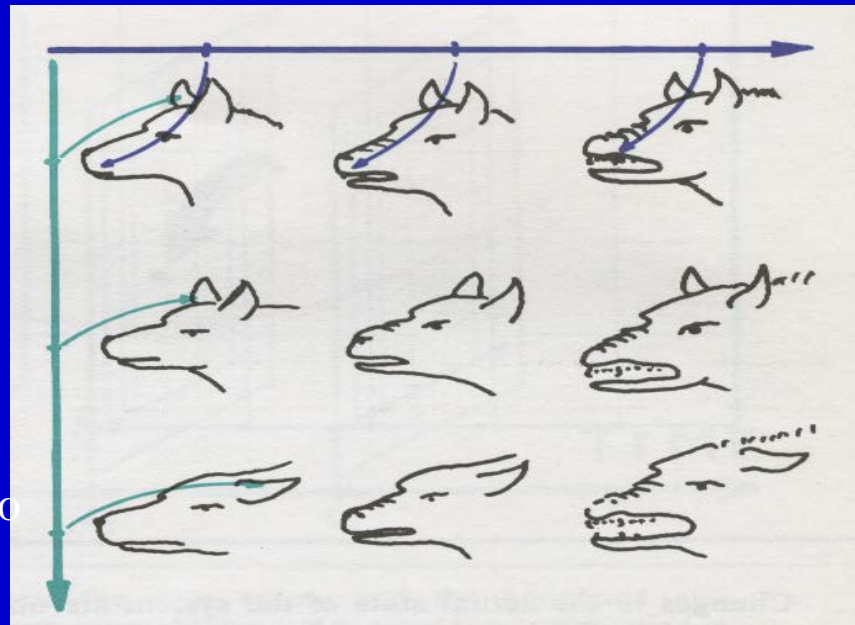


Catastrophe Theory, E. C. Zeeman:
Selected papers 1972-1977

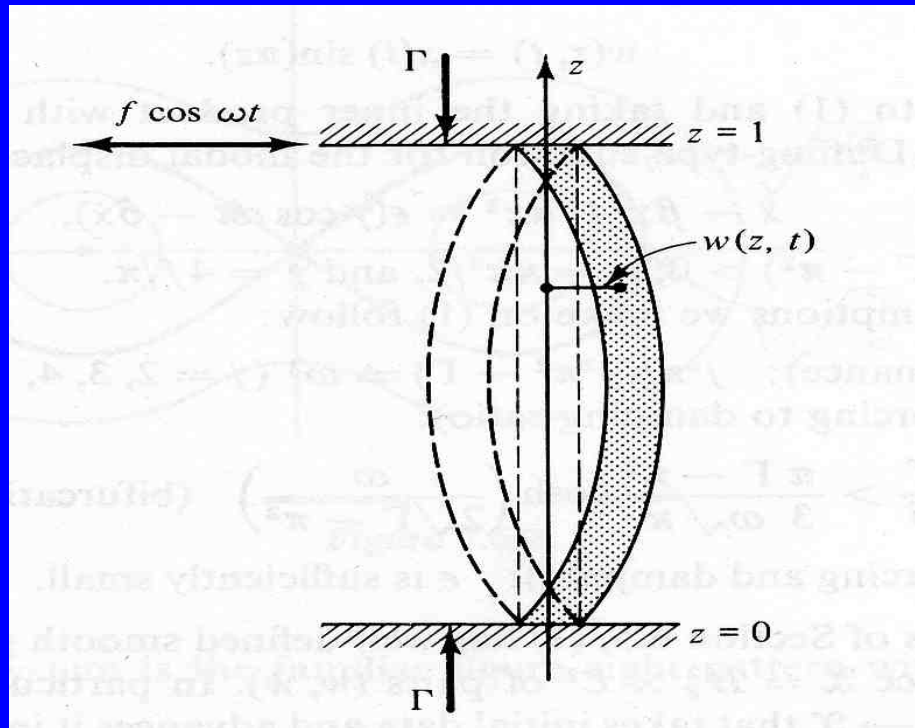


Psicología: mecanismo de agresión

rabia



miedo



$$\ddot{w} + w'''' + \Gamma w'' - \kappa \left(\int_0^1 [w']^2 d\zeta \right) w'' = \epsilon (f \cos \omega t - \delta \dot{w}),$$

L. Euler: Solución general de problemas de vibración lineales (1739).

De novo genere oscillationum (1739)

$$M\ddot{x} + Kx = F \sin \omega_d t$$

$$\omega = \sqrt{K/M},$$

$$n \equiv \frac{\omega_d}{\omega}$$

Resonancia

Carta a John Bernoulli (1739) y De integratione equationum differentialium altiorum graduum (1743)

$$\sum_{k=0}^n A_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad A_k = \text{const.}$$

$$p = \alpha \pm i\beta$$

$$\sum_{k=0}^n A_k p^k = 0.$$

$$y = Ce^{px}, \quad e^{\alpha x}(C \cos \beta x + D \sin \beta x)$$

No considera el caso de raíces múltiples

Da como ejemplo

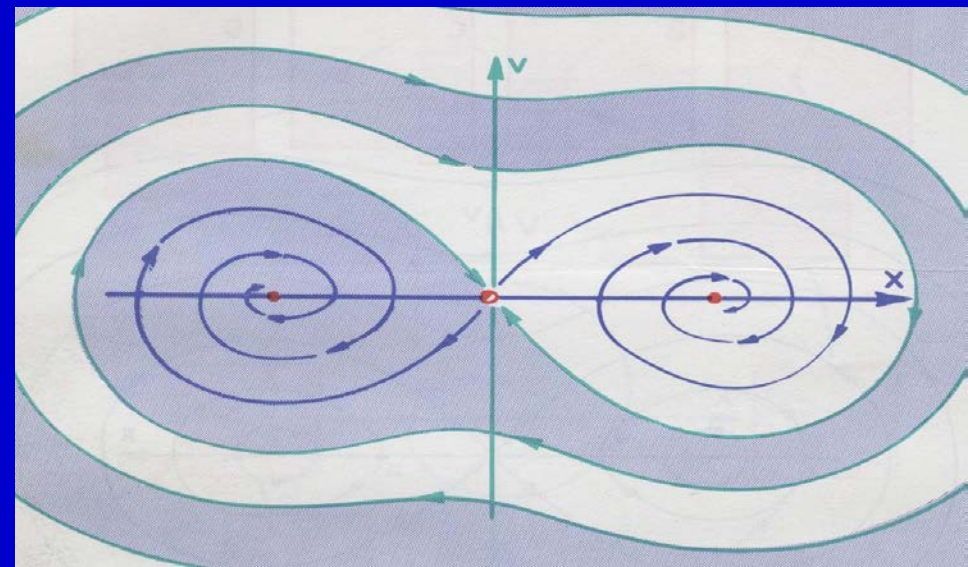
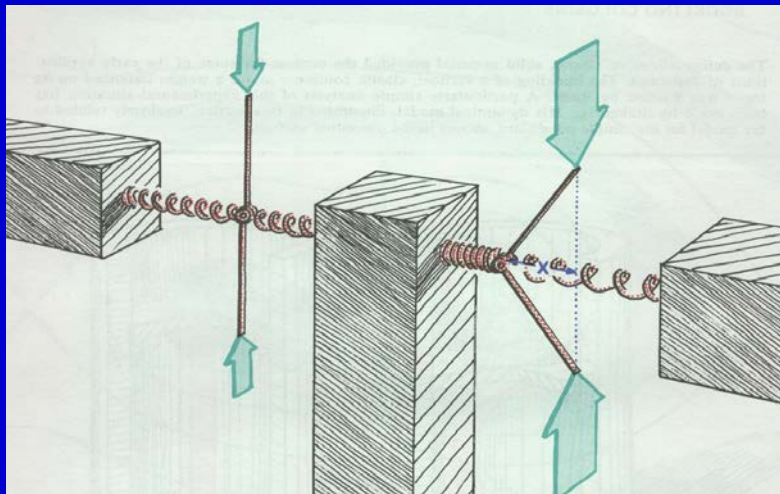
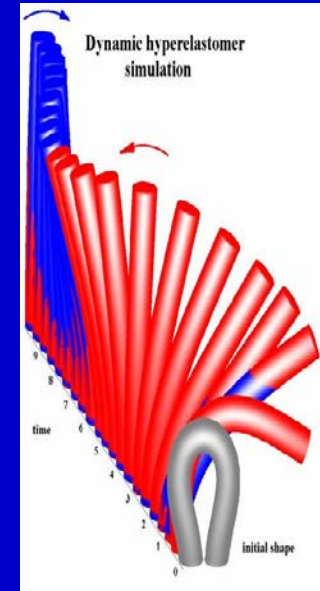
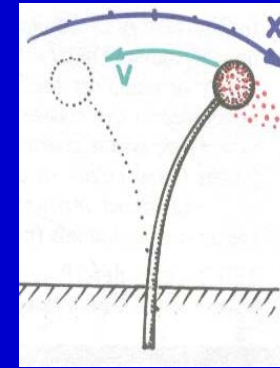
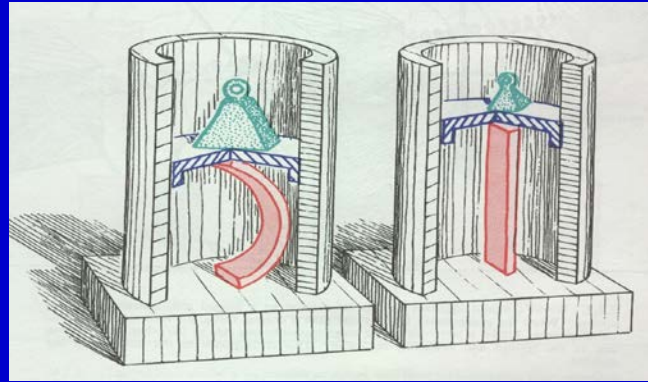
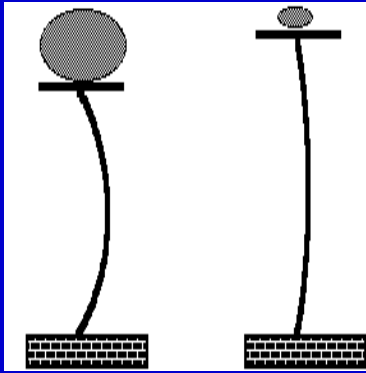
$$K^4 \frac{d^4 y}{dx^4} = y,$$

$$y = Ce^{\frac{x}{K}} + De^{-\frac{x}{K}} + E \sin \frac{x}{K} + F \cos \frac{x}{K}$$

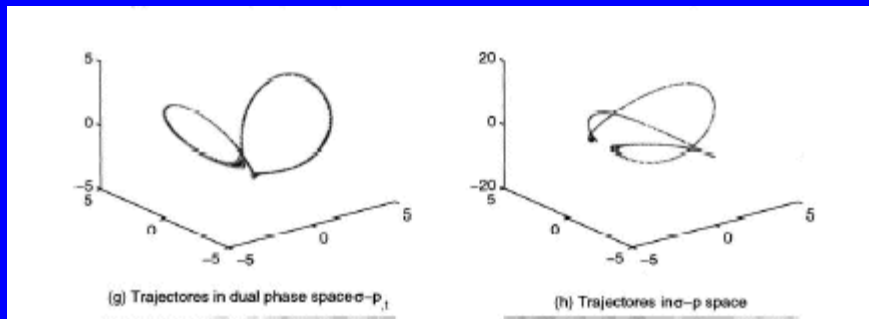
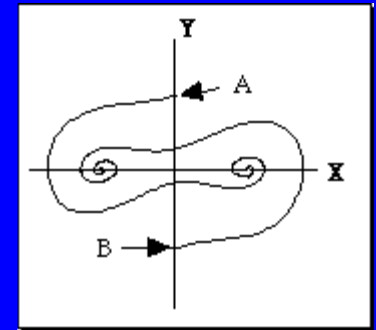
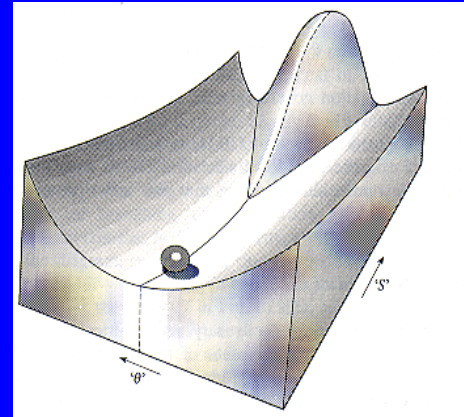
Primera noción de **solución general de una EDO lineal**, objeciones de John Bernoulli con el caso de “raíces imposibles” (numeros complejos)



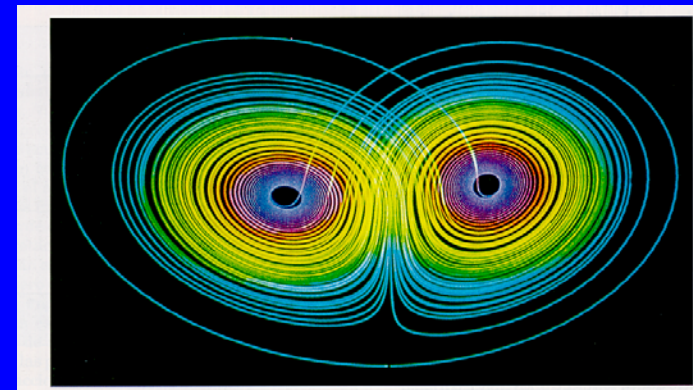
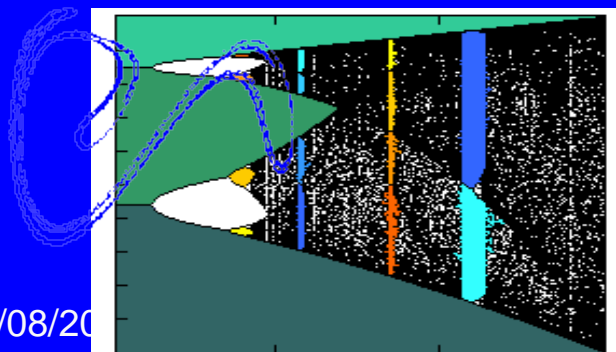
Observaciones sobre la dinámica (J.J. Stoker 1950)



Con peso: dos equilibrios



Cascada de bifurcaciones de soluciones periódicas



El atractor de Lorenz. Ilustración de Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Edit. Springer-Verlag.

Sistemas caóticos

Un sistema dinámico discreto es caótico si:

- Es sensible a las condiciones iniciales
- Es transitivo
- Las órbitas periódicas son densas en el espacio

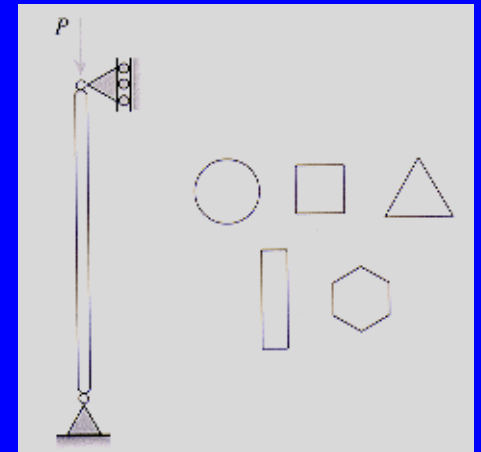
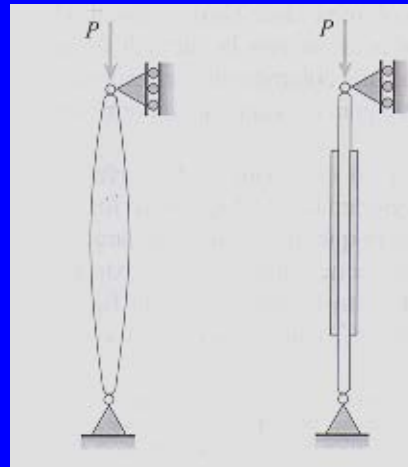


Optimización y Control

La mejor columna “elastica”: M. Vitruvio (I b. C.) *De Architectura*
25b. C., L.B. Alberti (1404-1472) 1450,

Euler 1744,
J. Lagrange (1736-1813) 1773,...

La más alta columna



L. Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Scientiarum Naturalium
Helveticae edenda curvaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Lipsiae et
Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri, 1911—.

$$H_c = \left(\frac{9EI}{4\rho A} j_{-1/3}^2 \right)^{1/3}$$

$$H_c = \left(\frac{9EI}{16\pi\rho} j_{-1/3}^2 \right)^{1/4}$$

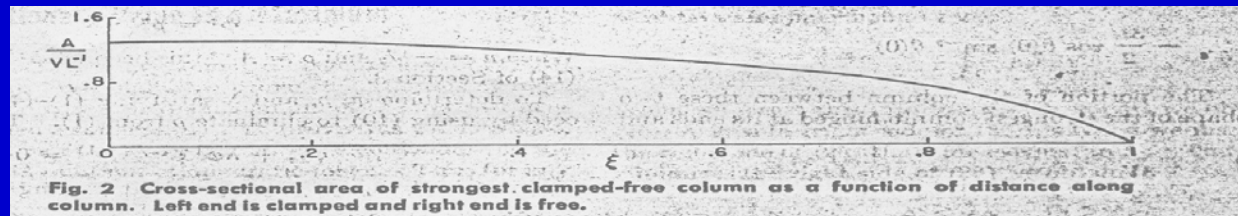


B. Keller and F. I. Niordson, “The Tallest Column”, Journal of Mathematics and Mechanics, 1986

S. J. Cox and M. L. Overton, “On the optimal design of columns against buckling,” SIAM J. Math. Anal. 1992

ON THE EULER BEST COLUMN: A SINGULAR NON LOCAL QUASILINEAR EQUATION WITH A BOUNDARY BLOWING UP FLUX CONDITION

J.I. DÍAZ AND M. SAUVAGEOT



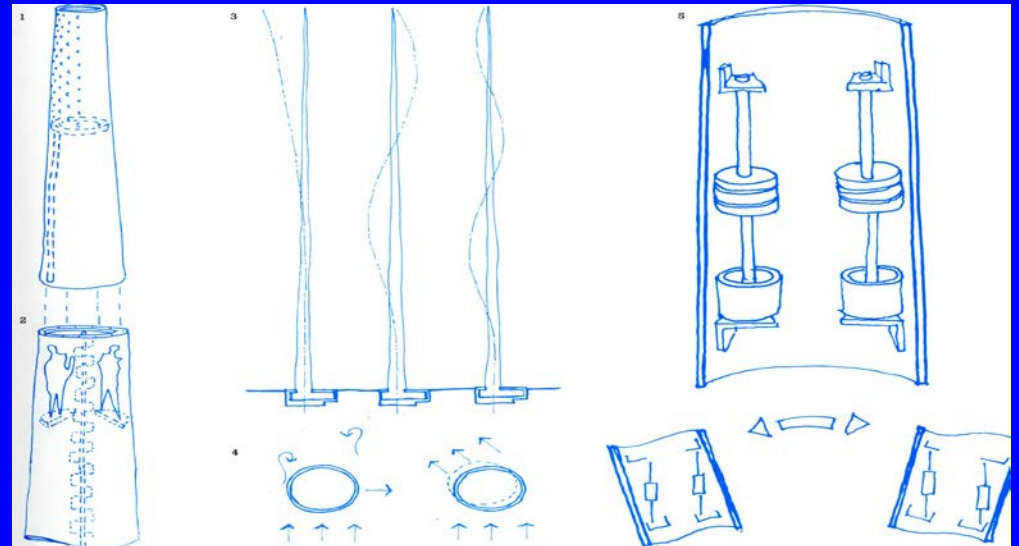


Spire. Dublin 2003

Arquitecto: Ian Ritchie Architects

Ingeniería: Arup

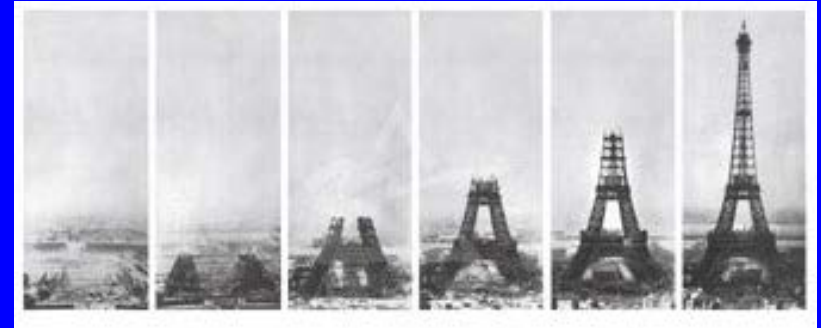
120 Metros, 3 mts de diámetro en la base



Nuevos materiales, nuevas técnicas,...



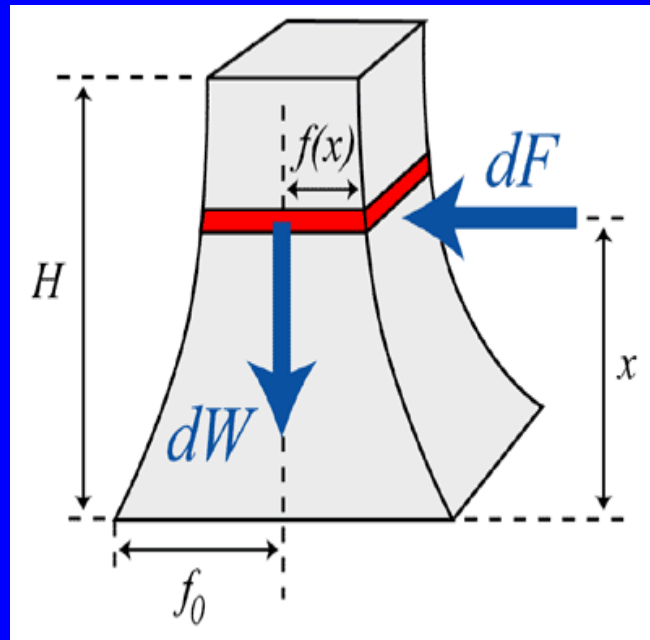
Matemáticas en la *Tour Eiffel*.



“Considero que la curvatura de las cuatro aristas, consecuencia de los cálculos matemáticos, dará una gran impresión de resitencia y belleza”

G. Eiffel /Le Temps, 14 de febrero de 1887)

J. Gallant, Am. J. Phys. 2002



$$dW = 4\rho g f^2(x) dx$$

Elemento de volumen

$$dF = 2 P f(x) dx,$$

Elemento de fuerza del viento

Balance de momentos

$$\frac{1}{2} \int_x^H f^2(x) dx - \text{constant} \times (H-x) = \int_x^H x w(x) f(x) dx,$$

$$w(x) = \frac{P(x)}{4\rho(x)g f_0}$$



$$\frac{1}{2}f^2(x) - \text{constant} = xw(x)f(x).$$

$$\frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f_0^2 = xw(x)f(x).$$

$$f(x) = xw(x) - \sqrt{x^2w^2(x) + f_0^2},$$

$w(x)$ constante

$w(x)$ con presión variando con la altura

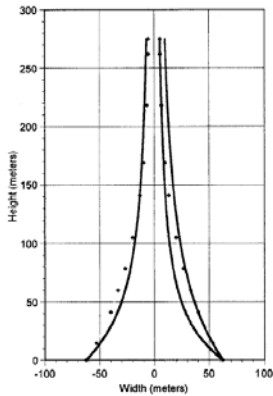


Fig. 2. The Eiffel function for three constant wind pressures ($w_0=0.700$ and $w_0=1.33$ on the right-hand side and $w_0=1.00$ on the left-hand side). The actual shape of the Tower are the data points.

$$w(x) = 0.690 - 1.53 \times 10^{-3}x + 3.96 \times 10^{-5}x^2 - 9.22 \times 10^{-8}x^3$$

$$\times 10^{-8}x^3$$

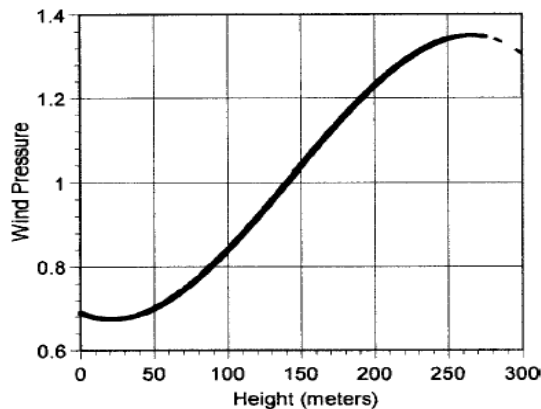


Fig. 3. The dimensionless maximum wind pressure $w(x)$ of Eq. (5) as a function of height.

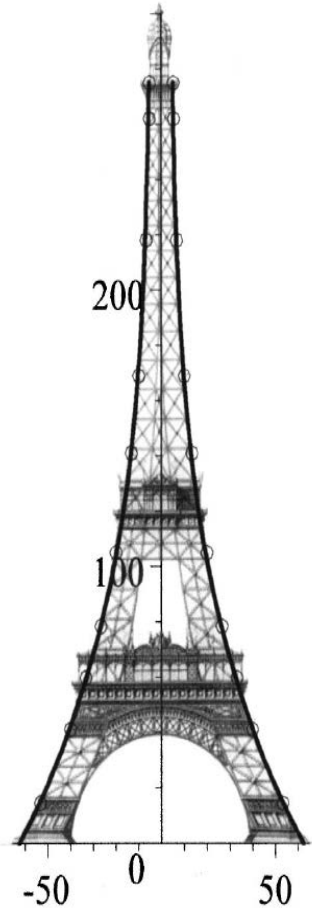


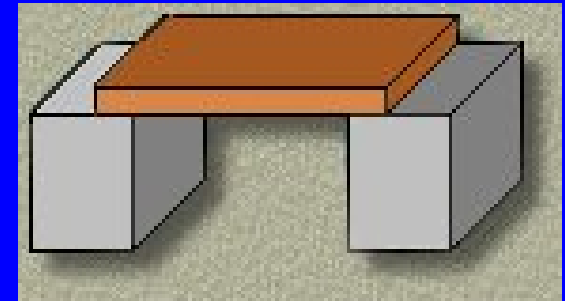
Fig. 4. The Eiffel function $f(x)$ with the cubic wind pressure, plotted with the data and an image of the Tower.



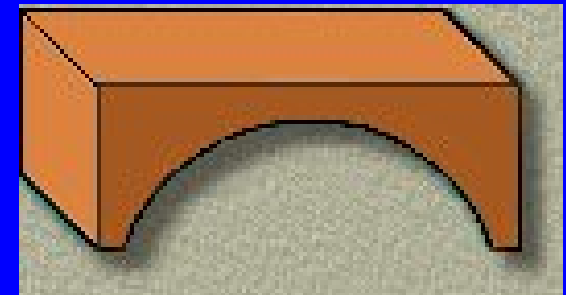
3. Matemáticas que sustentan puentes

Algunas estructuras

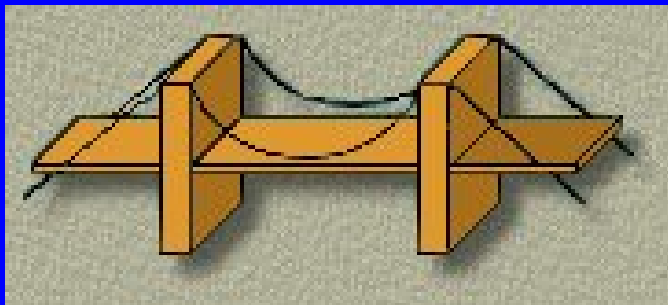
“Puente-viga”: estructura muy fuerte en distancias cortas, pero no suficientemente fuerte para largas distancias



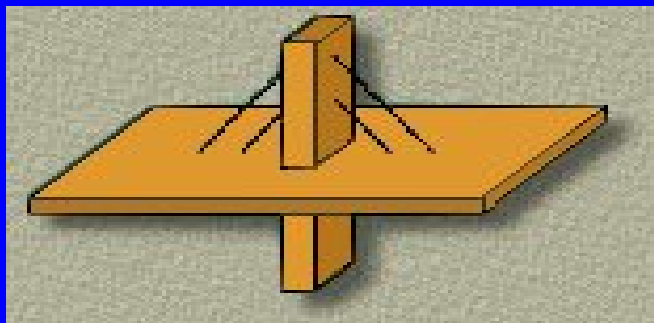
“Puente-arco”: la compresión empuja el peso lejos del arco y en contra de las paredes laterales y el material del arco propio.



“Puente en suspensión”: la estructura cuelga de los cables anclados en cada uno de sus extremos y también de las torres de apoyo. Adecuados para largas distancias



“Puente con cables”: la estructura cuenta con el apoyo de los cables de una torre central.



¿Cuáles son las principales fuerzas que actúan sobre la estructura de un puente?

En todas las estructuras de puentes, los diseñadores tratan de equilibrar las distintas fuerzas. Si no están en equilibrio la estructura puede colapsar.

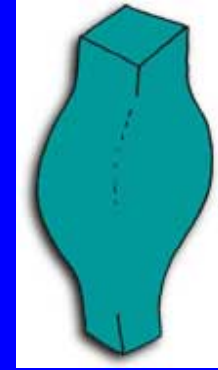
Carga - es la cantidad de empuje

- carga por su propio peso
- carga por otras estructuras que concurren
- carga de los vientos accionan contra él

Gravedad – hace tender hacia “abajo” la estructura.



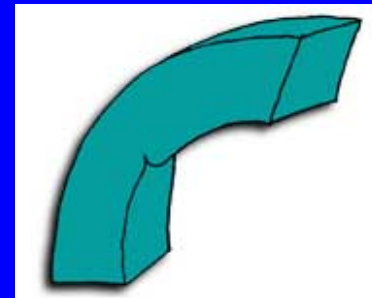
Compresión: efecto de imprimir fuerzas a las partes de una estructura



La tensión: efecto de “tirar de los extremos” de una parte de una estructura.



Pandeo (Bending): ocurre cuando una carga se impone en el lateral de una estructura.



Torsión: ocurre cuando los extremos de una parte de una estructura se “retuercen” en direcciones opuestas.



El puente colgante Tacoma Narrows

Diseñador

Leon Moisseiff (ingeniero consultor de los puentes Golden Gate, Bronx-Whitestone, San Francisco-Oakland Bay)

Características

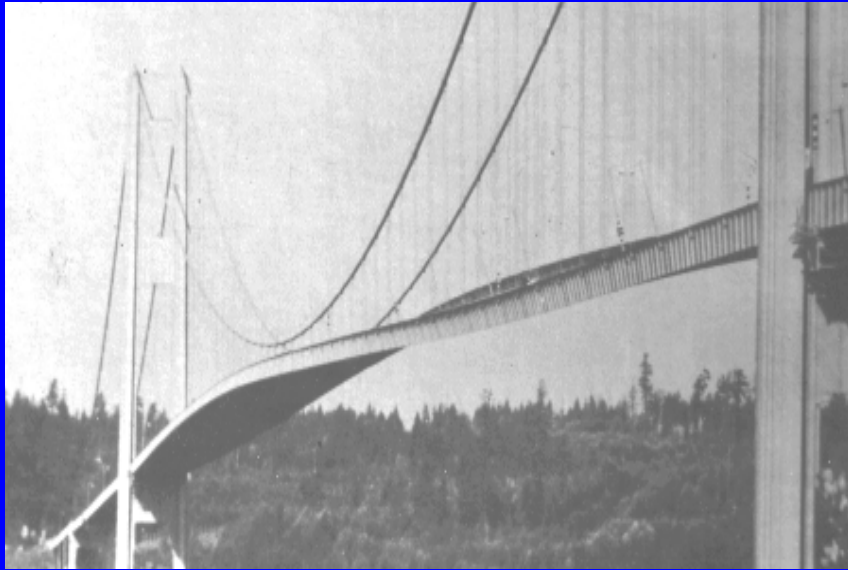
- fue el tercer puente más largo del mundo,
- era mucho más estrecho, más ligero y más flexible que cualquier otro puente de su tiempo.

Apodo

«Gertie Galopante»: las peculiaridades características del puente, junto con su baja capacidad de mojado causó grandes oscilaciones verticales incluso frente a los más moderados vientos.



November 7, 1940

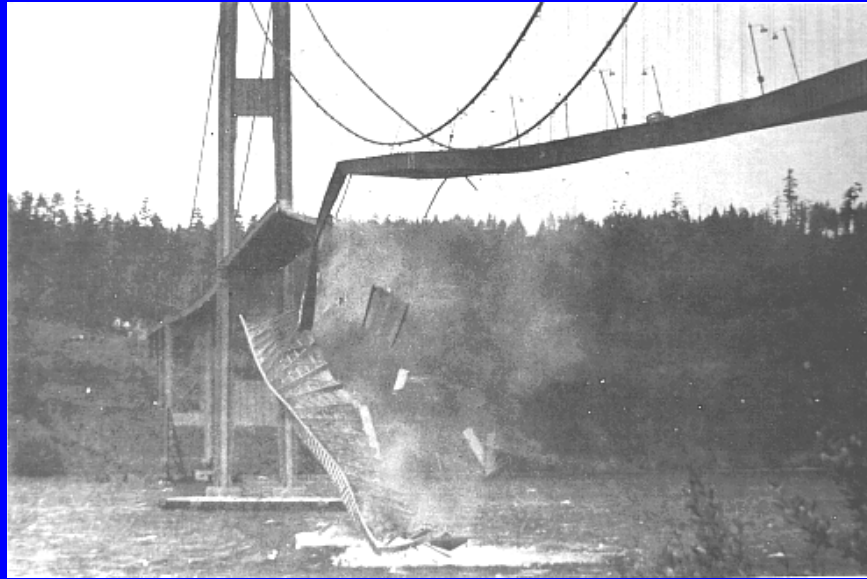


Oscilaciones: mientras que el viento no fue extraordinaria, el puente se onduló notablemente (velocidad del viento: 42 mph, amplitud: 1m, 38 oscilaciones / min).



Movimiento torsional: en un máximo, la elevación de la acera de la derecha fue 9 m superior a la acera de la izquierda.

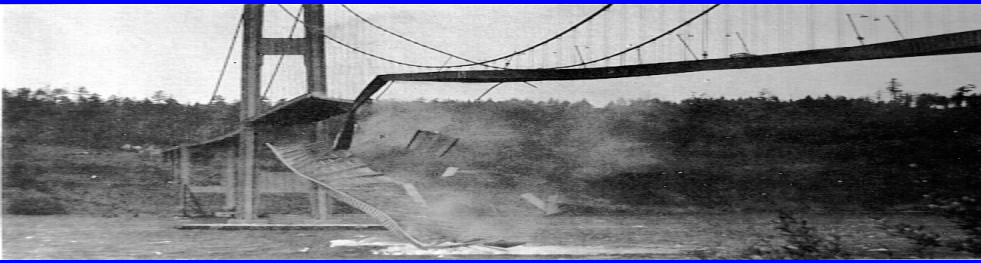




Colapso –ocurrió sobre las 11:00 a.m.



Imagen de la parte de la caída del tablero (aprox. 15m)



**Takoma Narrows
(Washington, 1940)**

**DISASTER!
The Greatest
Camera Scoop
of all time!**

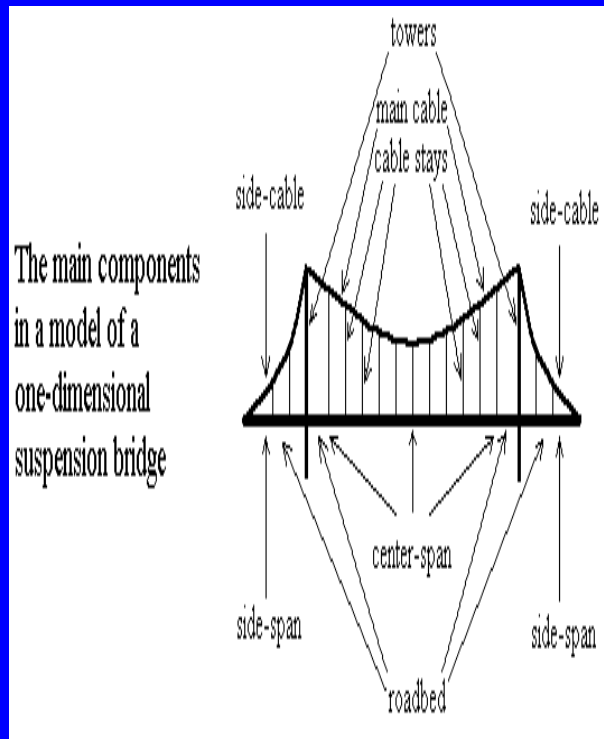
CAMERAFILMS

Posibles causas del colapso (FWA –Federal Works Agency)

- Oscilaciones verticales causadas por la fuerza del viento: no causaron daños estructurales.
- El movimiento torsional causado provocó una gran tensión a lo largo del puente y condujo al fracaso de la estructura suspendida.
- Se cree que las oscilaciones inducidas por el viento se acercaron a las de las frecuencias naturales de la estructura causando - y esto explica por qué la relativamente baja velocidad del viento (42 mph) causó las espectaculares oscilaciones y la destrucción del puente).



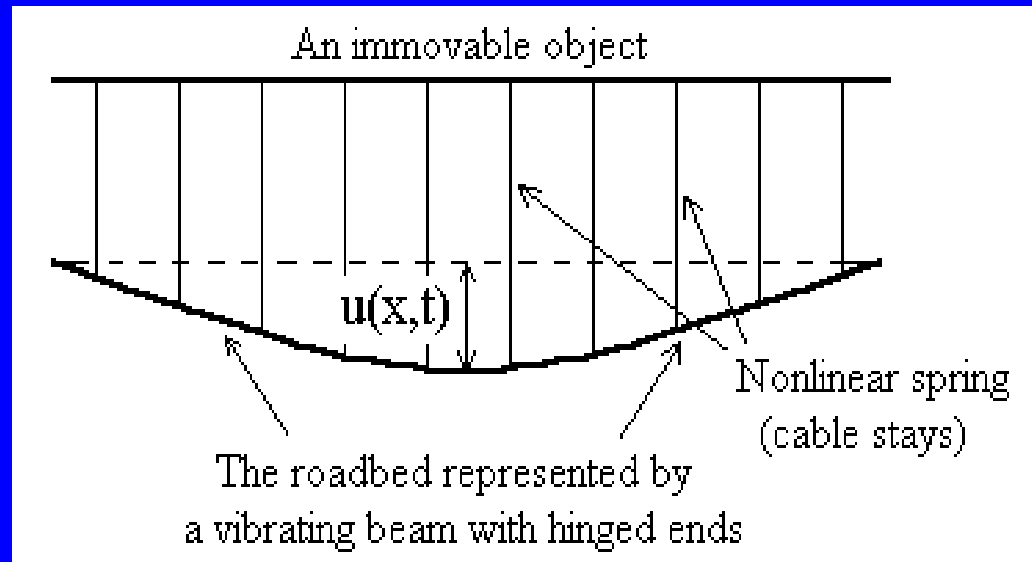
Algunos modelos matemáticos



- se tiene en cuenta sólo la longitud del puente.
- se desprecian la influencia de las torres laterales y de las partes.

Primera clase de modelos - una única viga

El puente colgante es visto como una viga de longitud L , con extremos en bisagras fijas y sometido a tres fuerzas:



- El panel superior mantenido fijo y con muelles transversales,
- El peso por unidad de longitud del puente, $W(x)$ empujándolo hacia abajo,
- La fuerza externa que se supone que periódica.

modelos antifuniculares

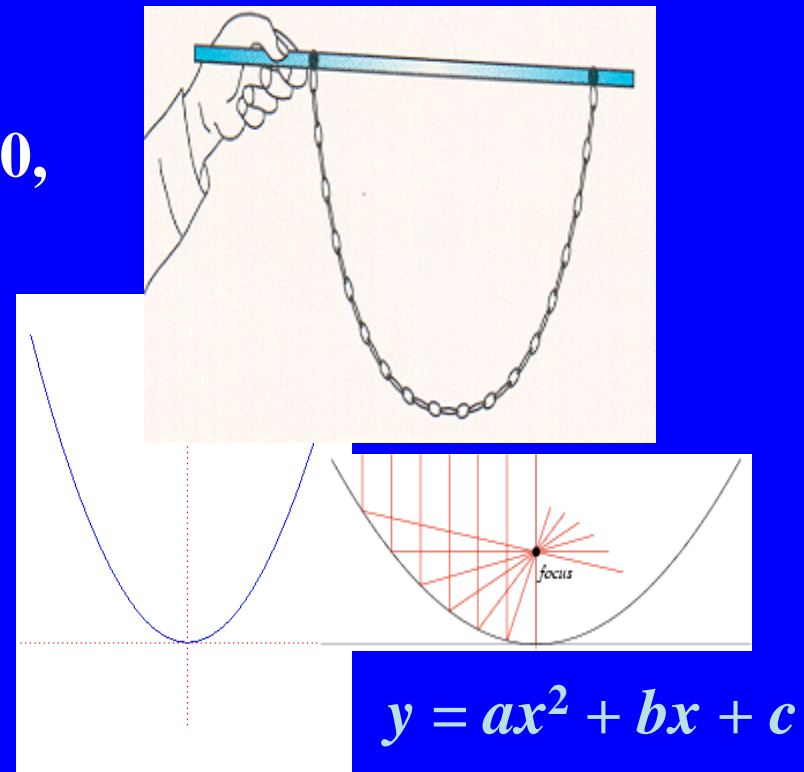
“La catenaria”:

Leonardo da Vinci (1452-1519) 1490,

En 1669, Jungius puso en tela de juicio la afirmación de Galileo Galilei (1562-1642): parábola

Huygens primero en utilizar el término de catenaria (carta a Leibniz en 1690)

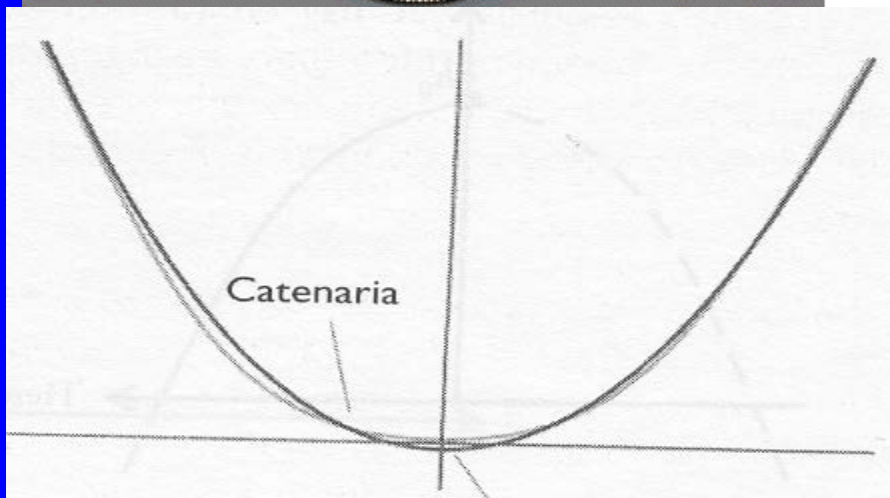
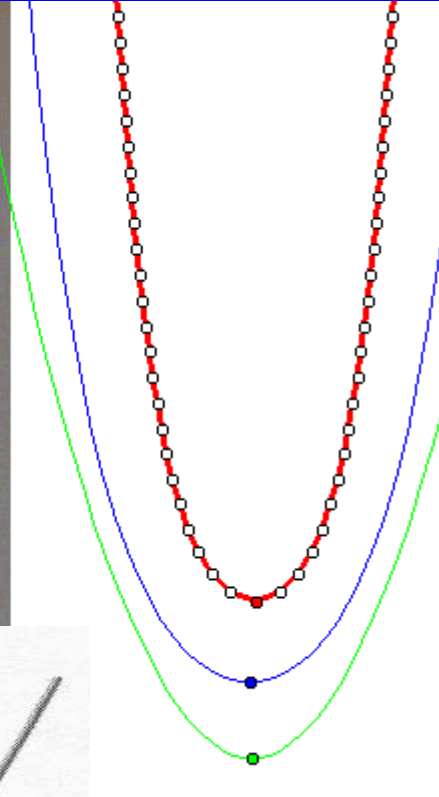
La ecuación fue obtenida por Leibniz, Huygens, y Johann Bernoulli en 1691 en respuesta a un problema de Jakob Bernoulli.



$$y = a \cosh(x/a)$$

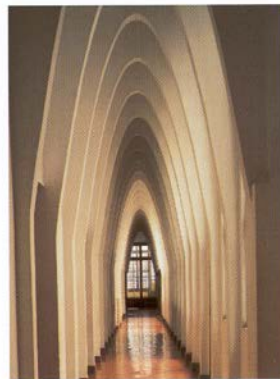
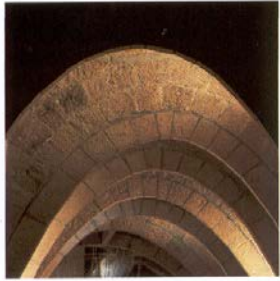


La sutileza de las matemáticas

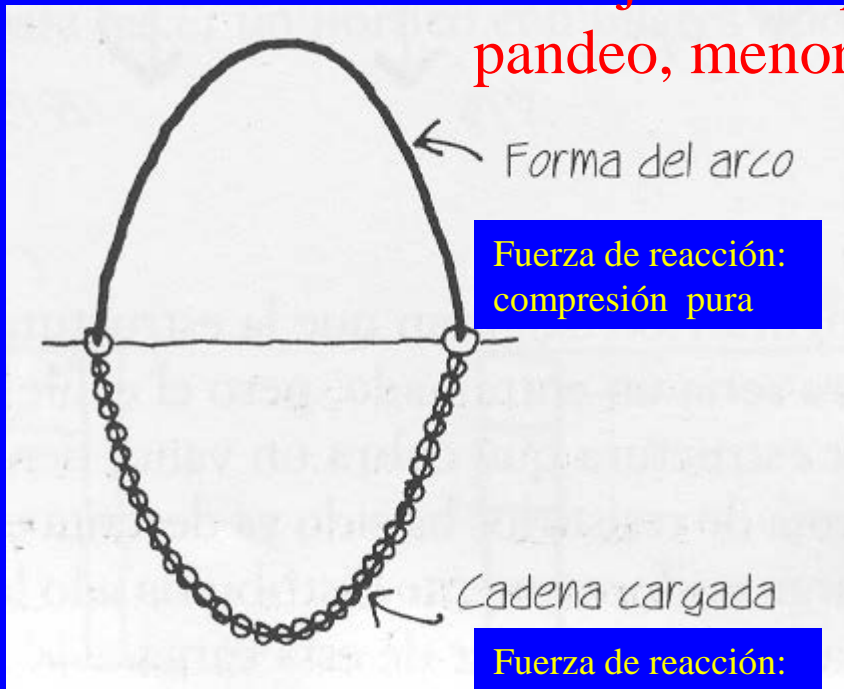


La Catenaria como Arco

Trabajo a compresión, menor pandeo, menor sección



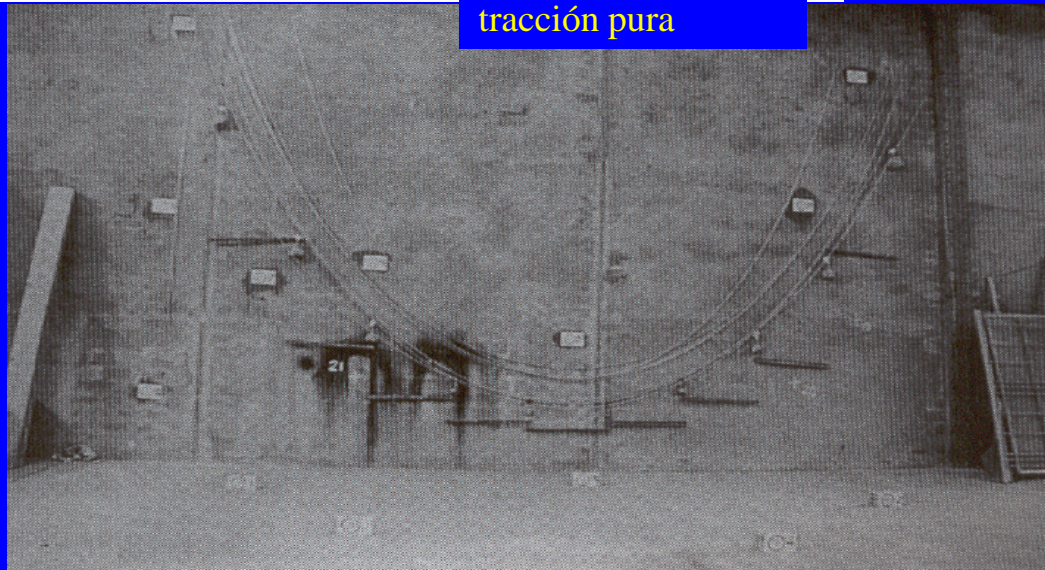
Arcos catenarios de las casas Milà y Batlló y del colegio de las Fiesasanas



Robert Hooke (1675)

G. Polini (1748)

San Pedro de Roma



Traslación de arcos catenarios de la Casa Milà. Modelo catenario del Espai Gaudí

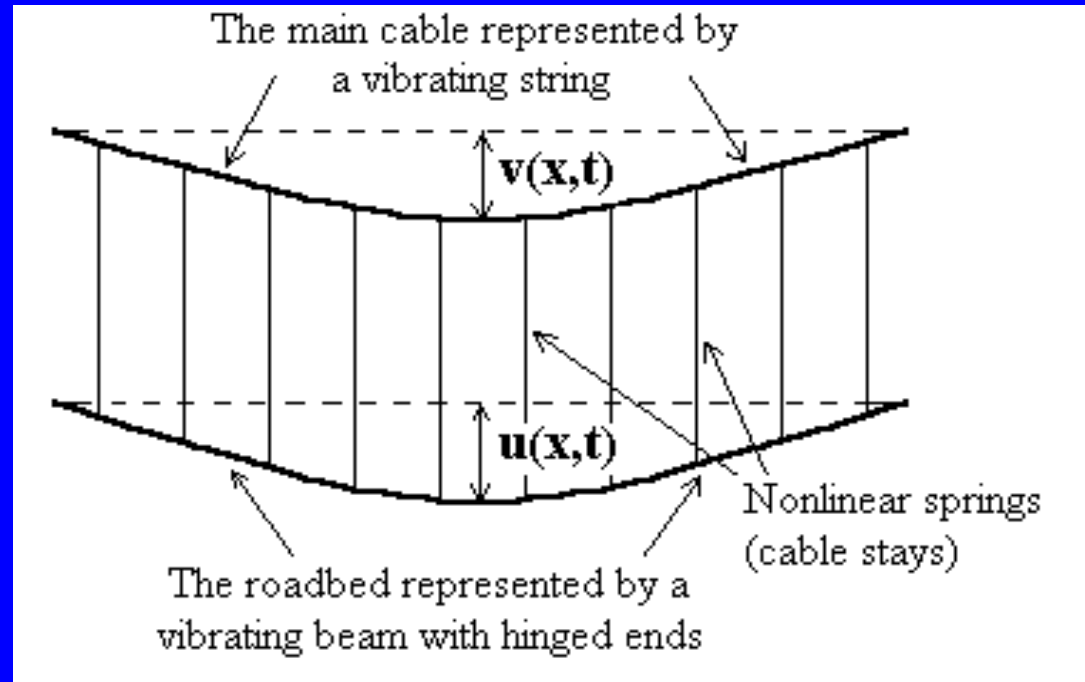
Casa Milà y

Terzianas



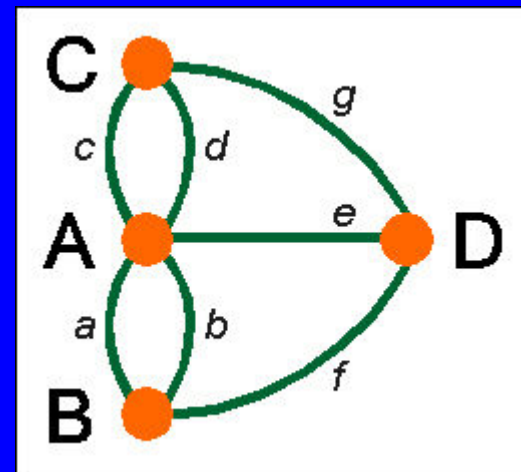
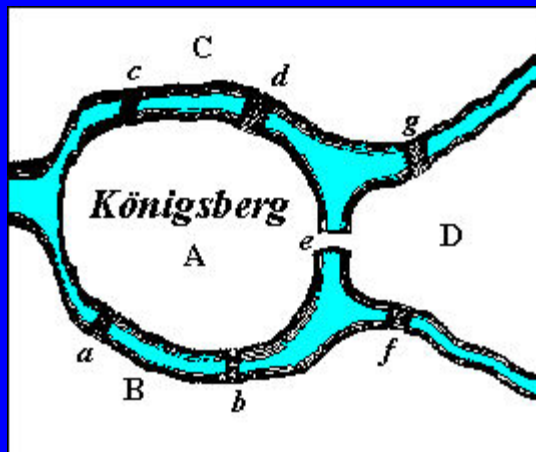
Una segunda clase de modelos: acoplamiento viga-cuerda vibrante

El puente colgante es visto como una viga de longitud L , al igual que en el modelo anterior.



El cable principal es tratado como una cadena vibrante acoplada a una viga por medio de muelles.

Los siete puentes de Königsberg: L. Euler 1736



Teoría de grafos

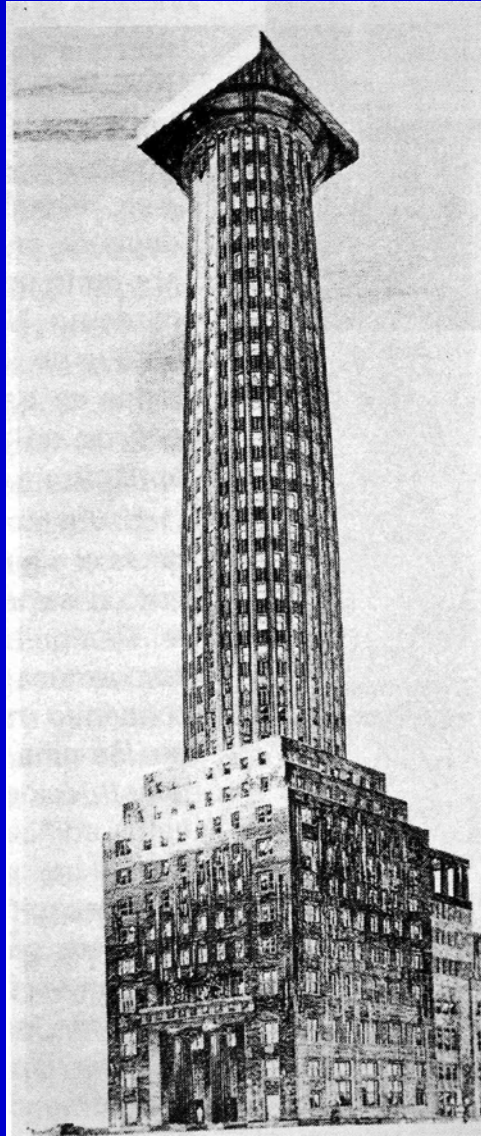
Miguel de Guzmán:

Mirar y Ver,

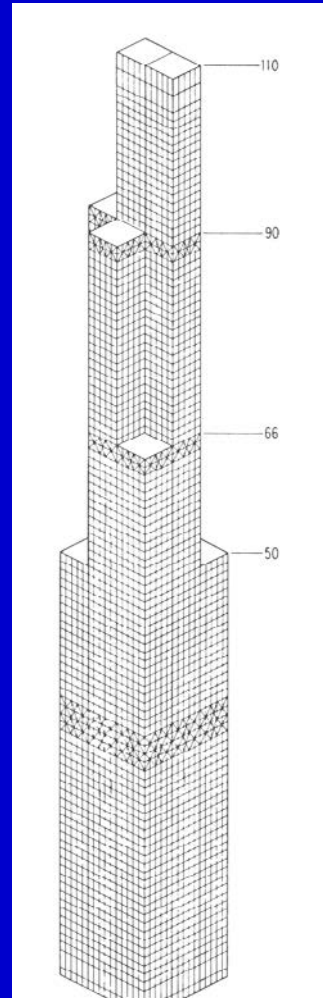
Alhambra, Madrid, 1981
J.I. Díaz



•4. Matemáticas que sustentan rascacielos.

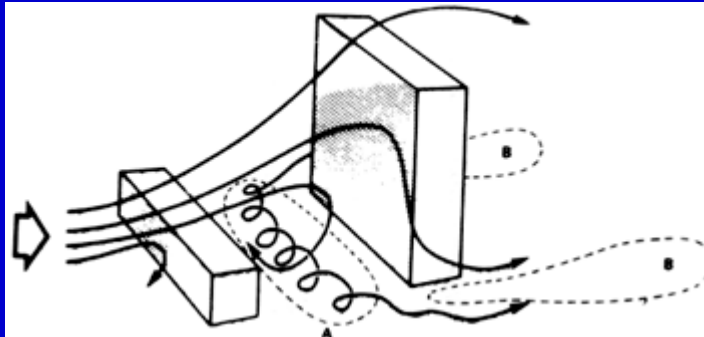
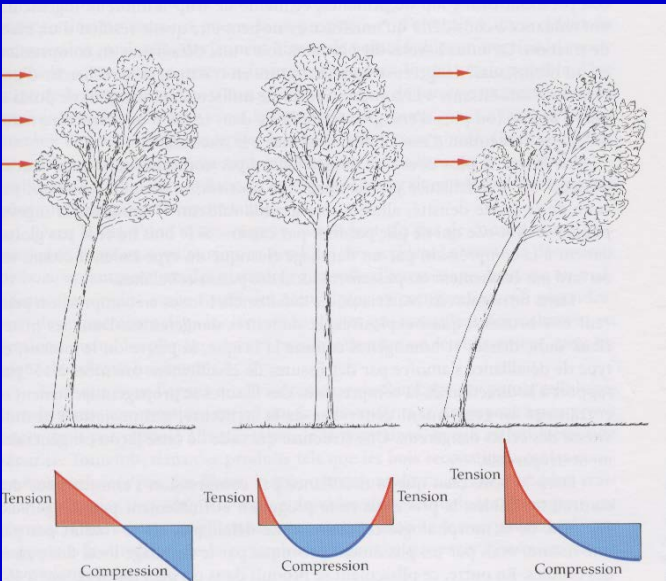
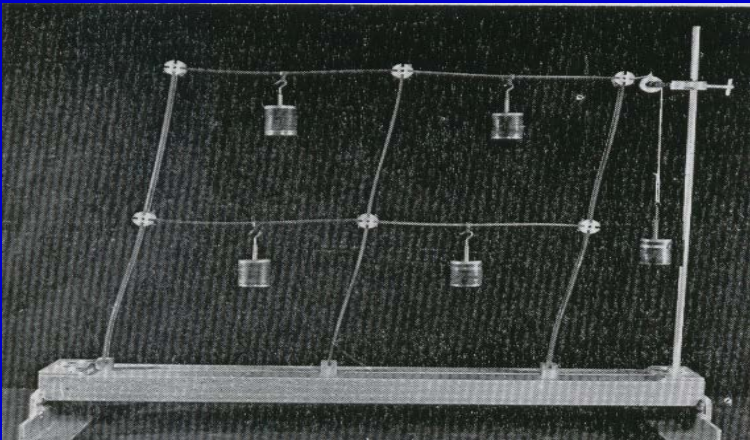
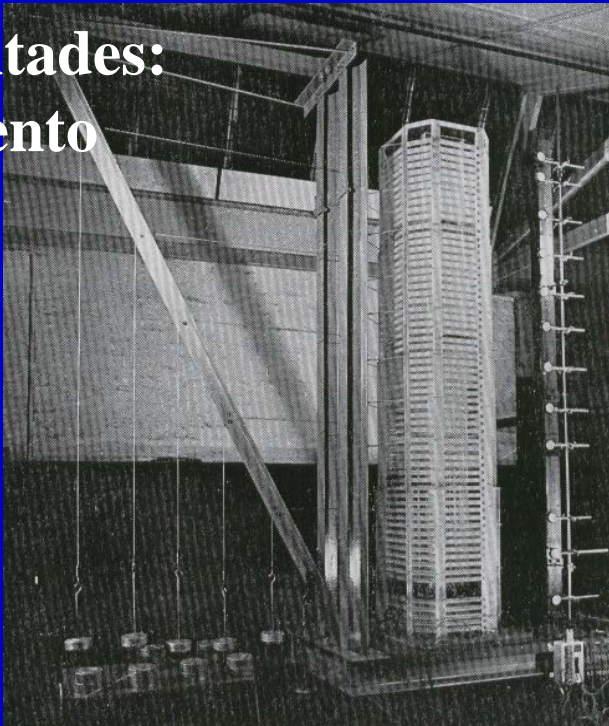


Lost, Chicago, 1920

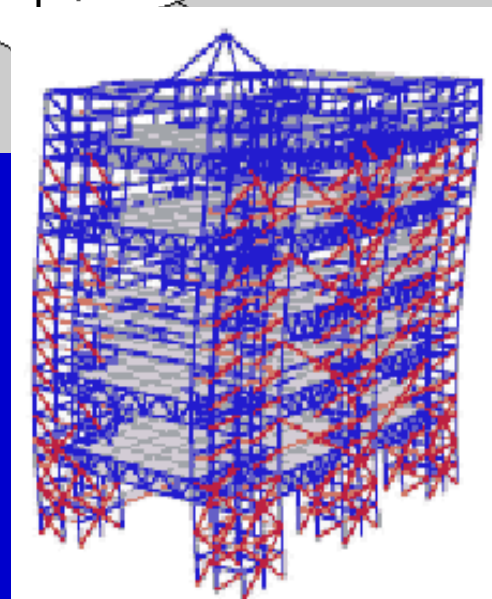
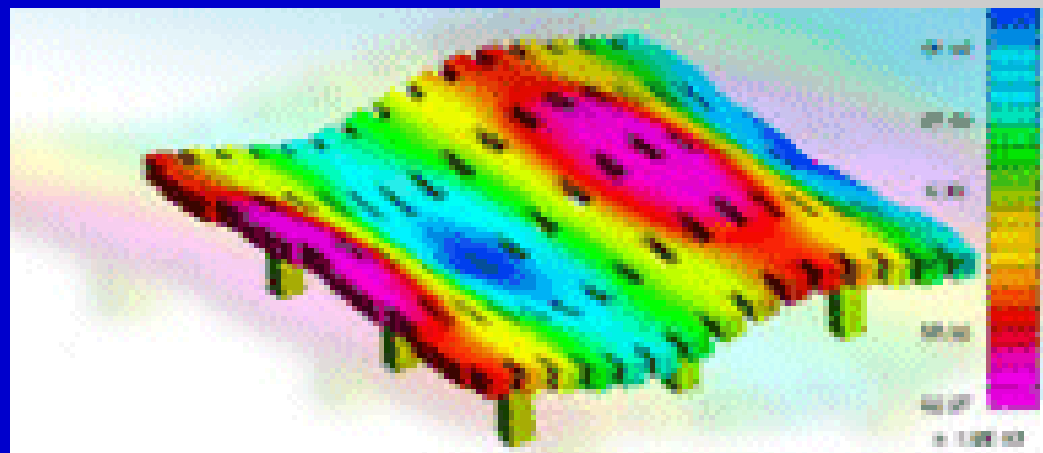
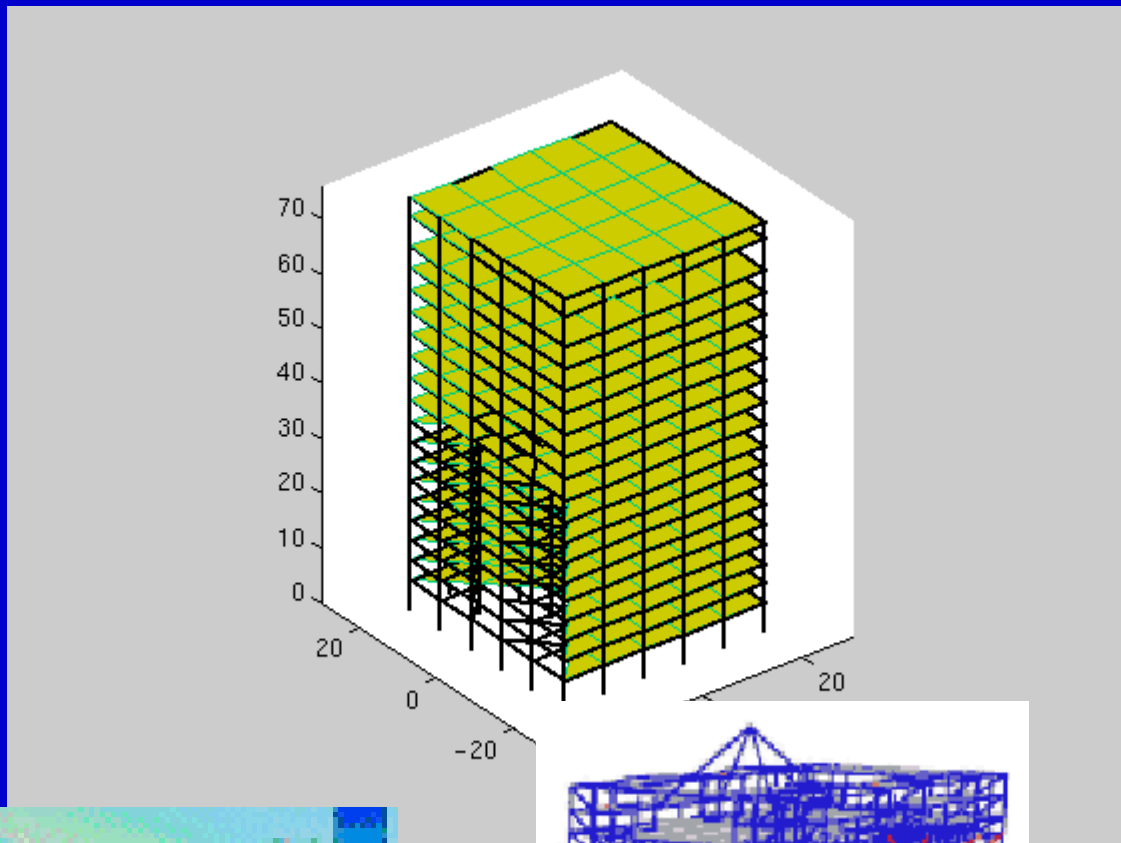
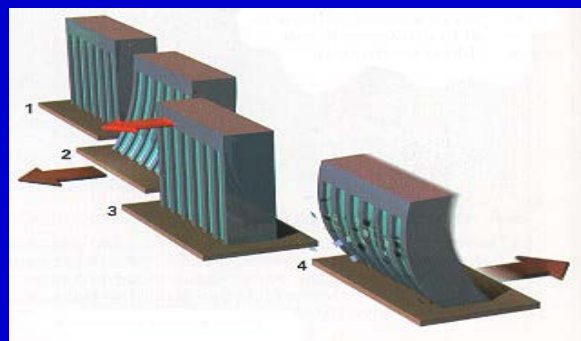


La Torre Sears de Chicago, 1974

Nuevas dificultades: estudios de viento

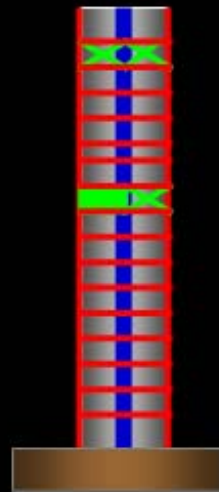
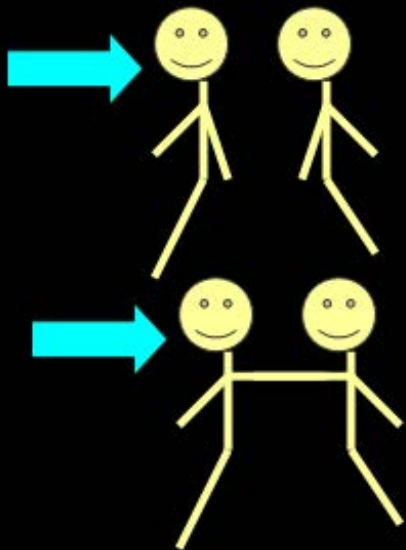
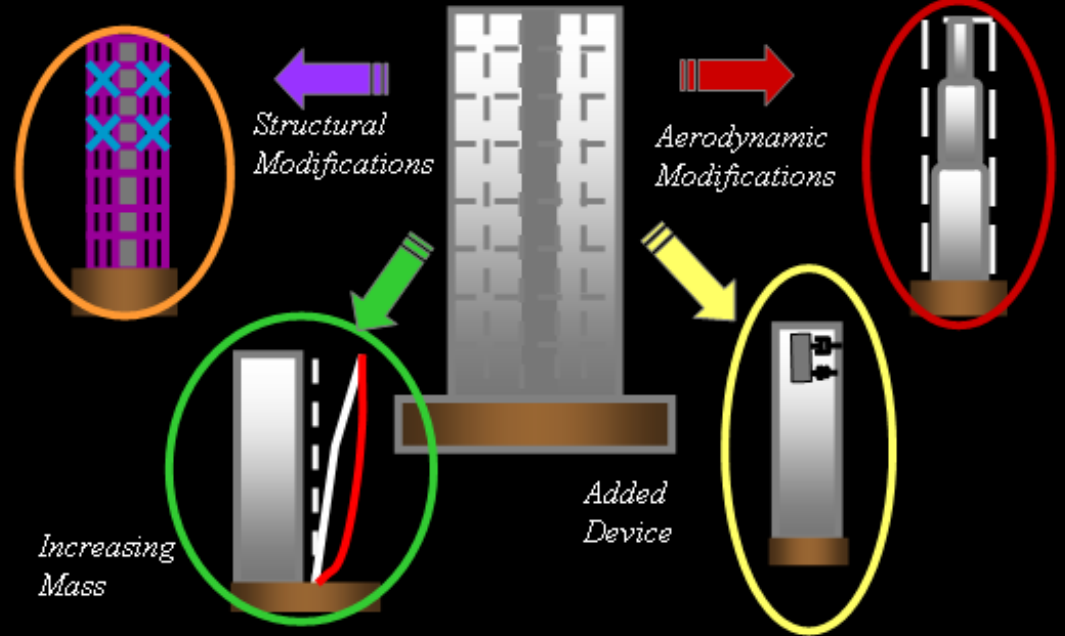


Dinámica: riesgos sísmicos

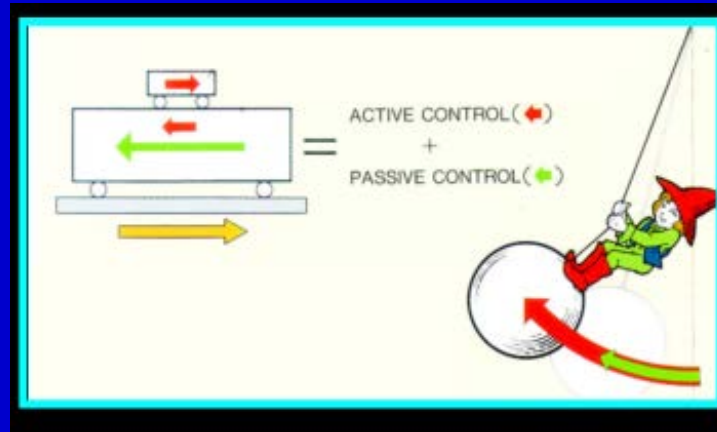


Optimización en el diseño

There are many solutions but they can be thought of in a few general ways.



Control de movimientos sísmicos



Landmark Tower.



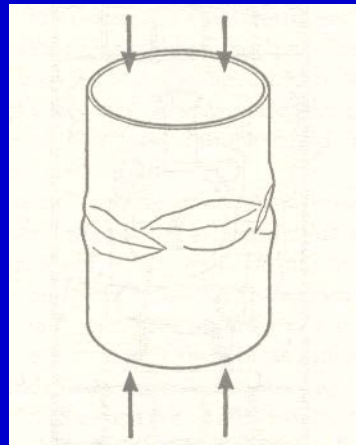
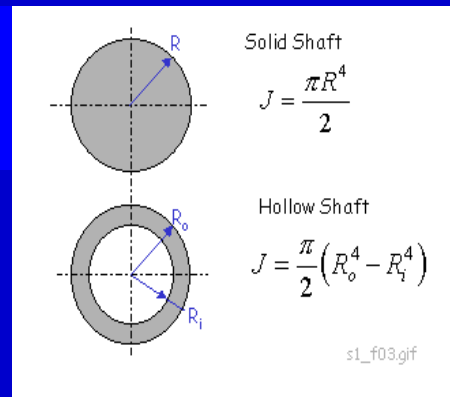
Shinjuku Park Tower.

Regreso al estudio de la columna: consideraciones sobre la distribución de masa

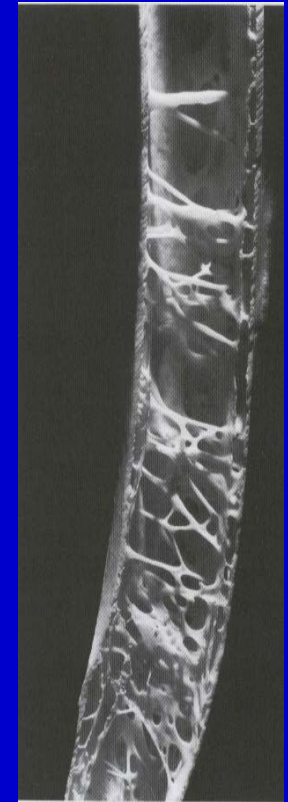
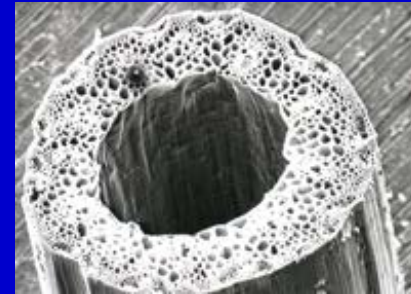
Solid Shaft
 $J = \frac{\pi R^4}{2}$

Hollow Shaft
 $J = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4)$

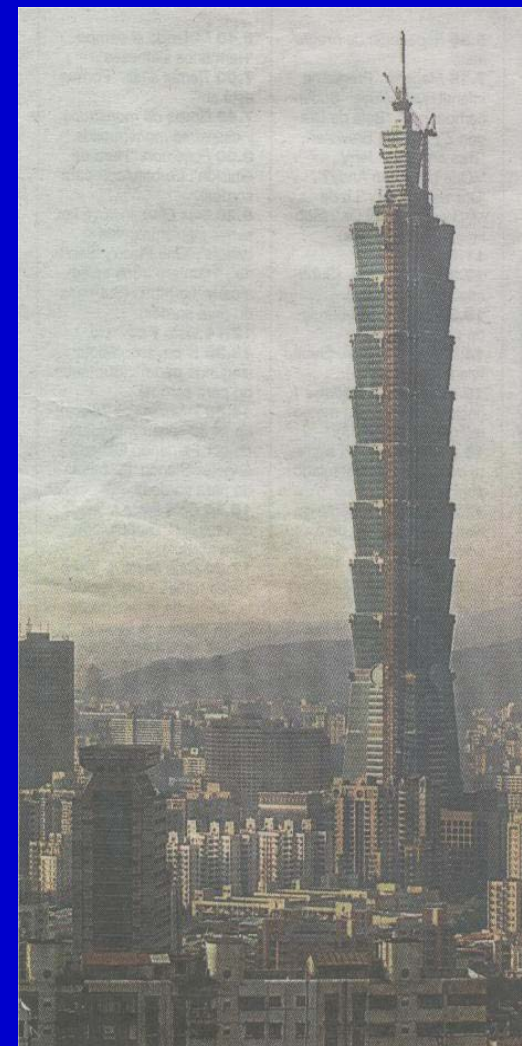
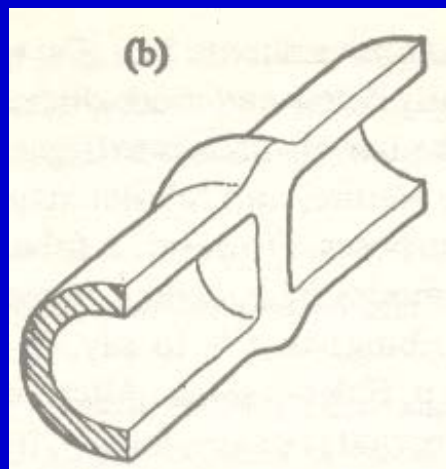
s1_f03.gif



Fractura de Brazier



**Una primera solución
de reforzamiento**

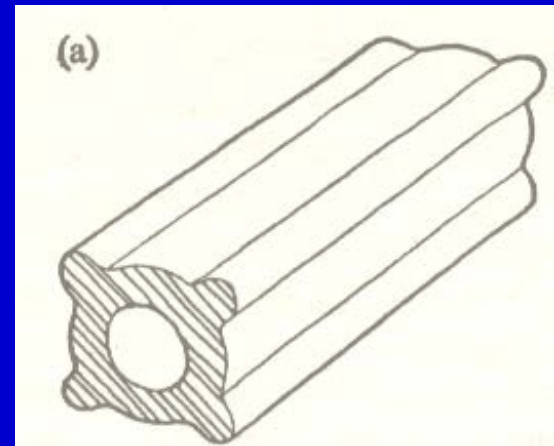
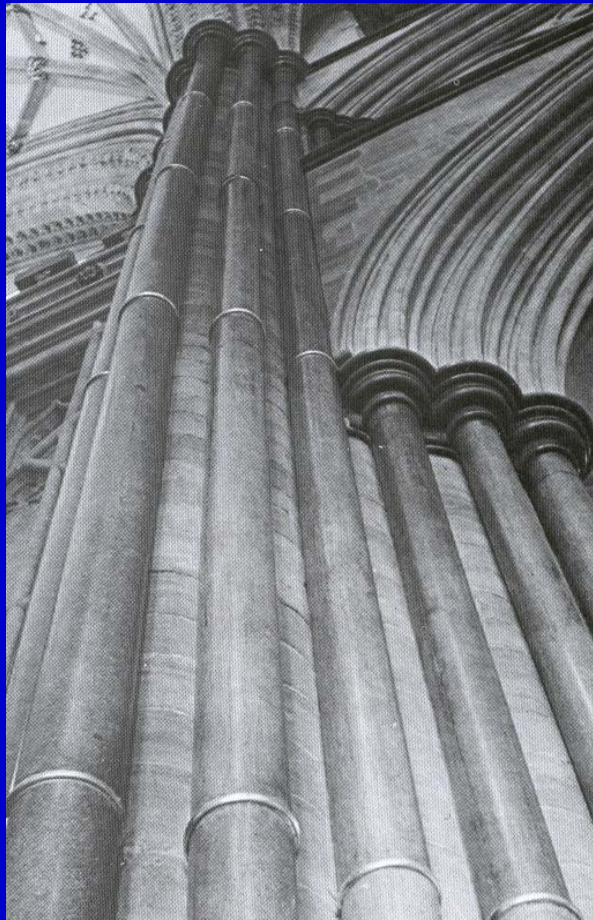


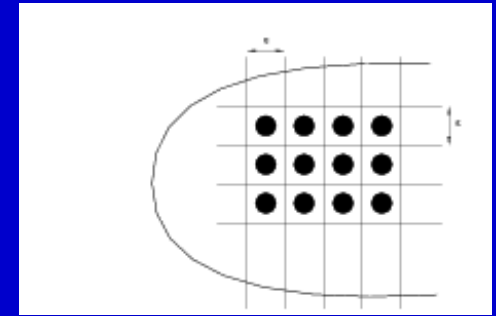
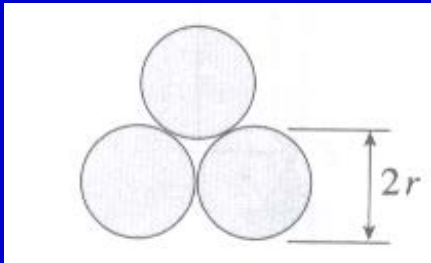
**Torre Jinmao de
Shanghai**

**Taipei 101 C.Y. Lee & Partners
(amortiguamiento en planta 88),**

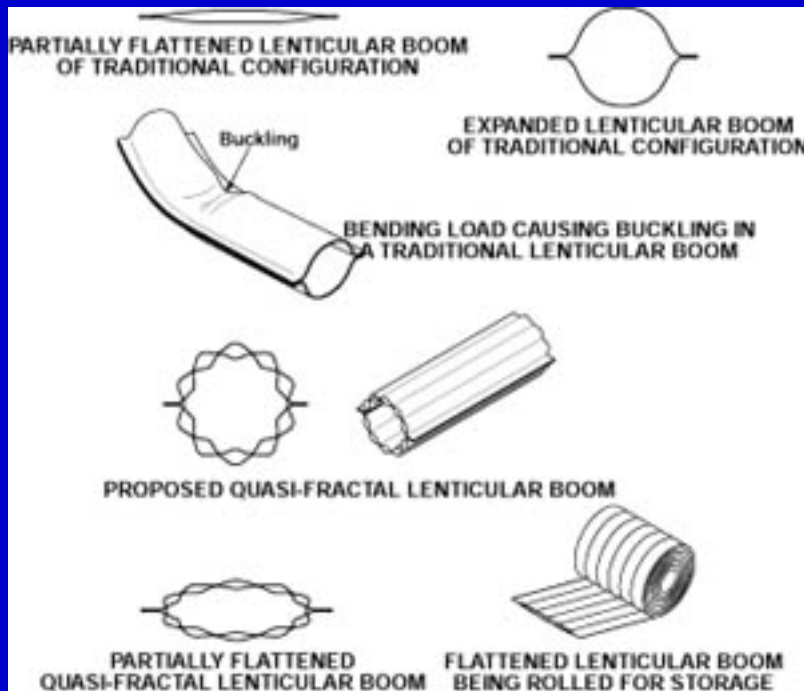
Una segunda solución de reforzamiento

Medios compuestos





Teoría de la Homogeneization

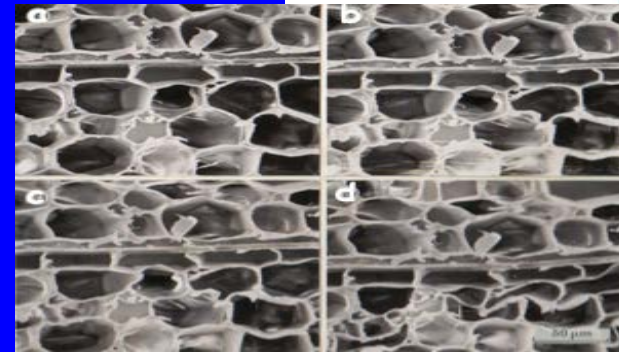
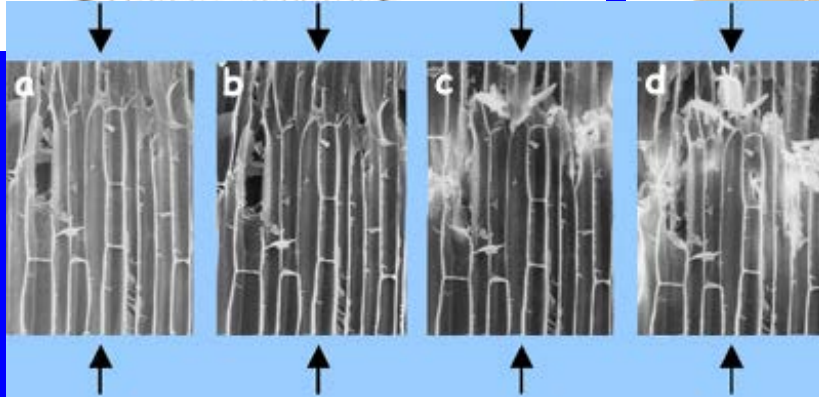
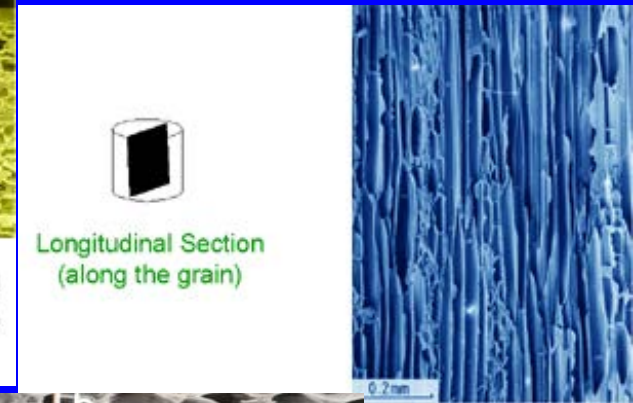
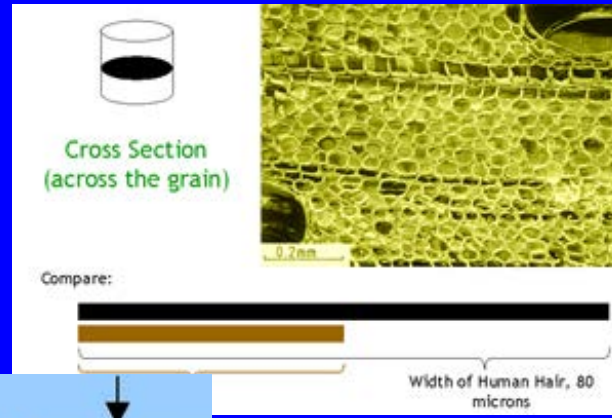
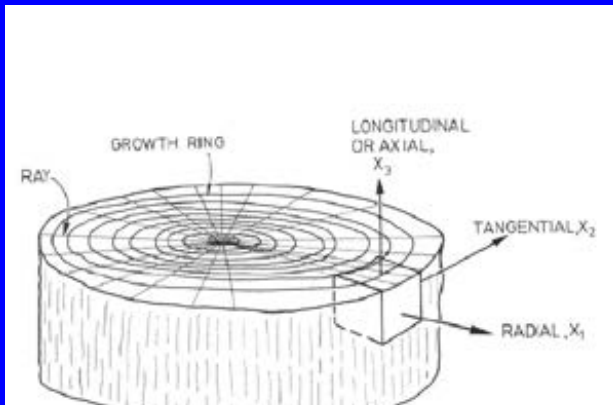
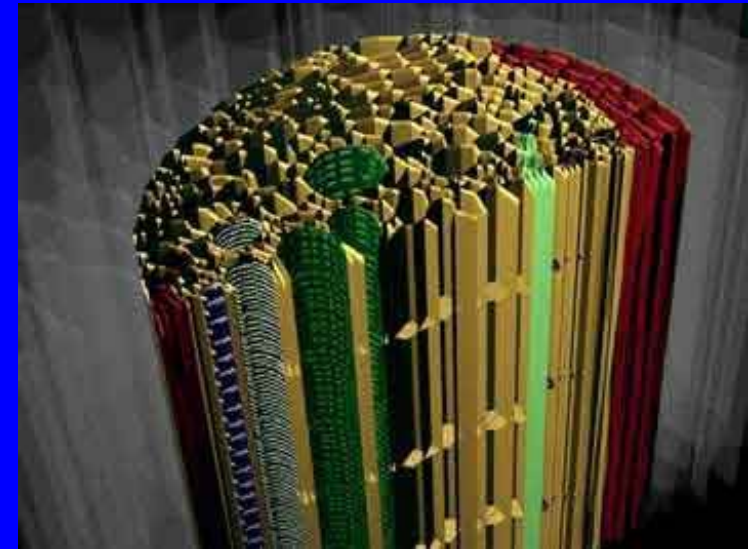


Sección Quasifractal (NASA)

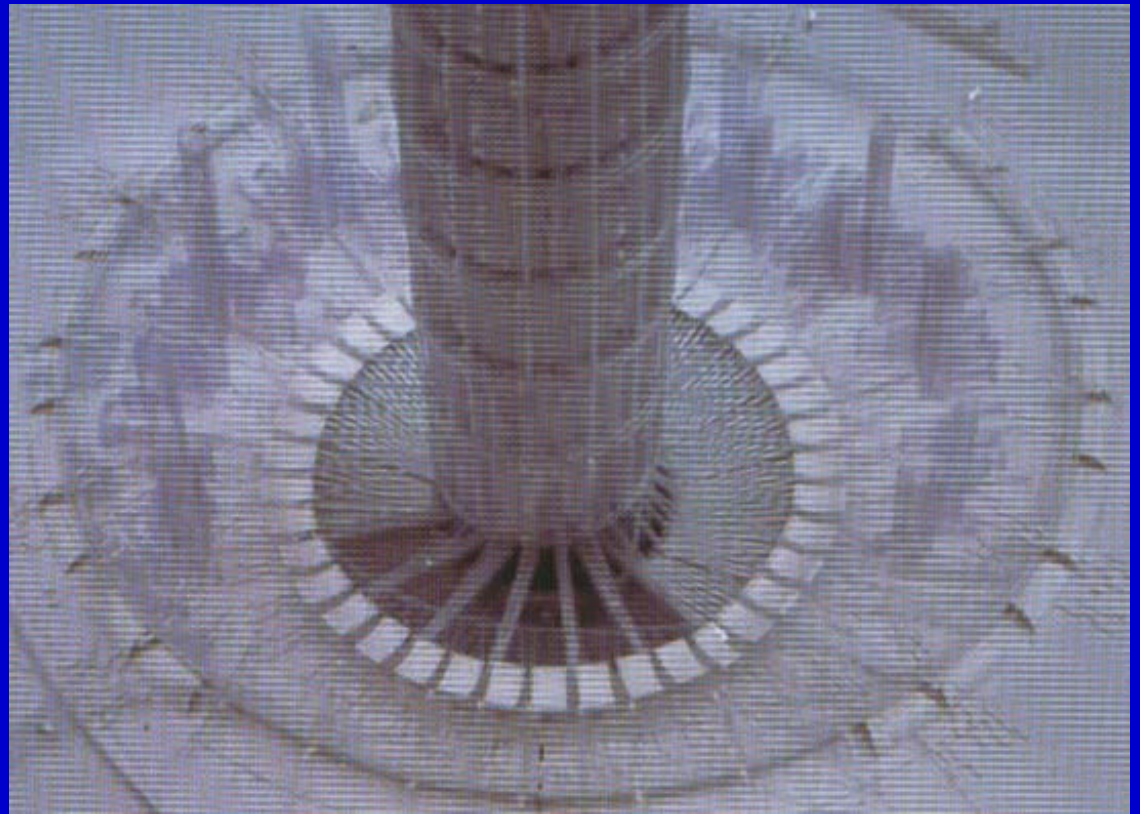
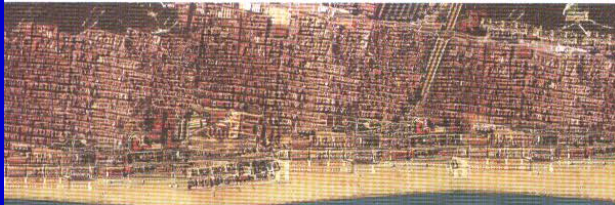


Sobre el proyecto Shangai bionic tower Cervera & Pioz

Inspiraciones naturales

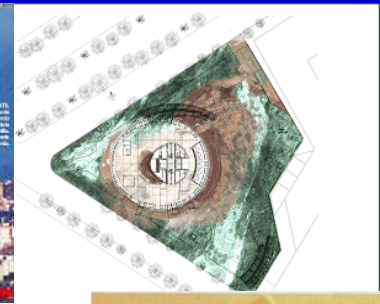


Metas ecológicas y sociales



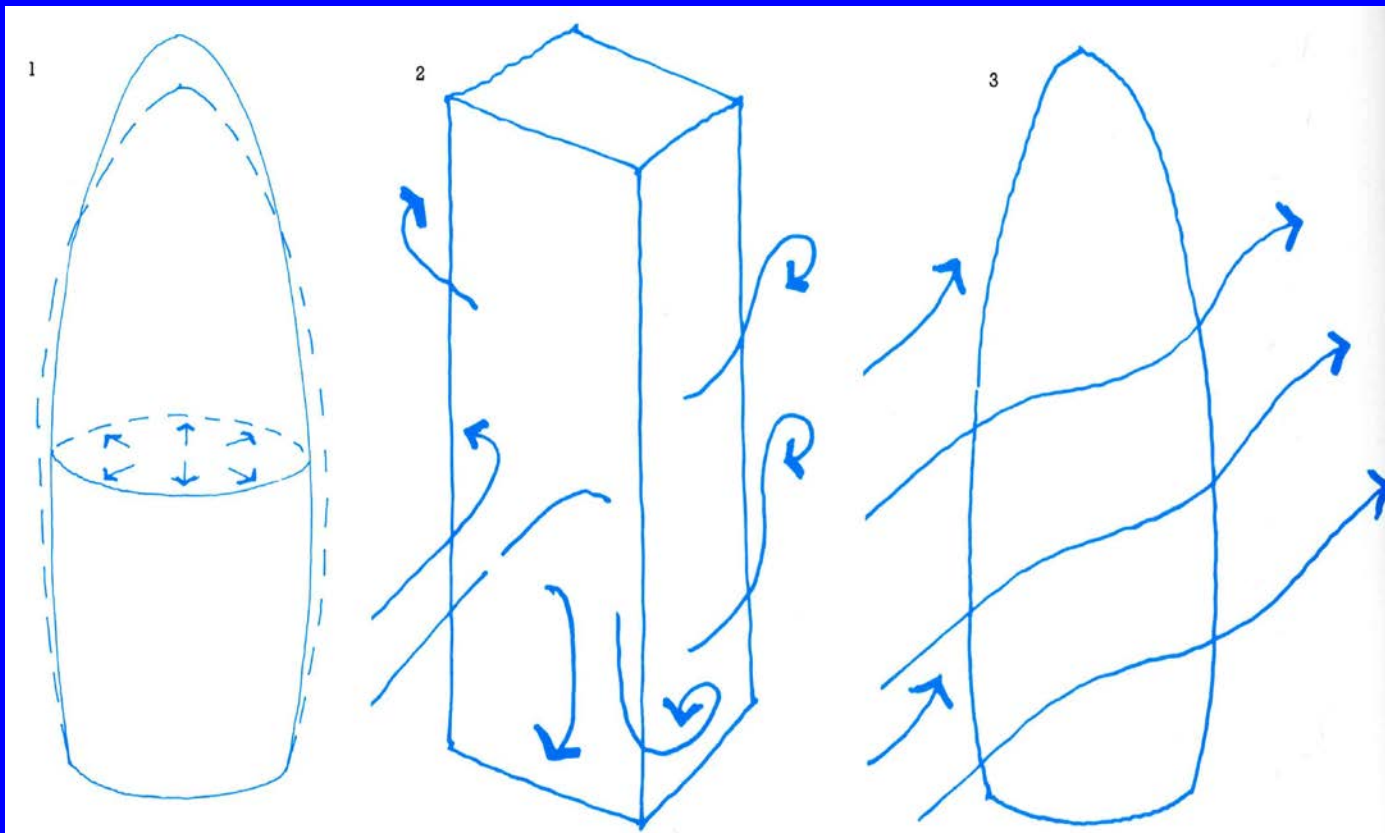
Torre Agbar, Barcelona 2004

Jean Nouvel



**Swiss Re Tower,
Norman Foster**





5. Tensegridades (*una visión complementaria a la de M. de Guzmán*).

Formaciones ingeniosas de gomas y varillas (*tensegridades*) que tanto atrajeron a uno de los más brillantes matemáticos de la historia de nuestro país: Miguel de Guzmán.



•La tensegridad nació con las esculturas de K. Snelson, 1949

•alcanzó cierto renombre a la sombra de Buckminster Fuller (<http://www.bfi.org/>) y va encontrando diversas aplicaciones:

•en medicina: arquitectura de la célula, D. Ingber, Harvard

•estructuras desplegadas: S. Pellegrino, Cambridge U.K.



R. Motro, Tensegrity. Structural Systems for the Future (2003) .

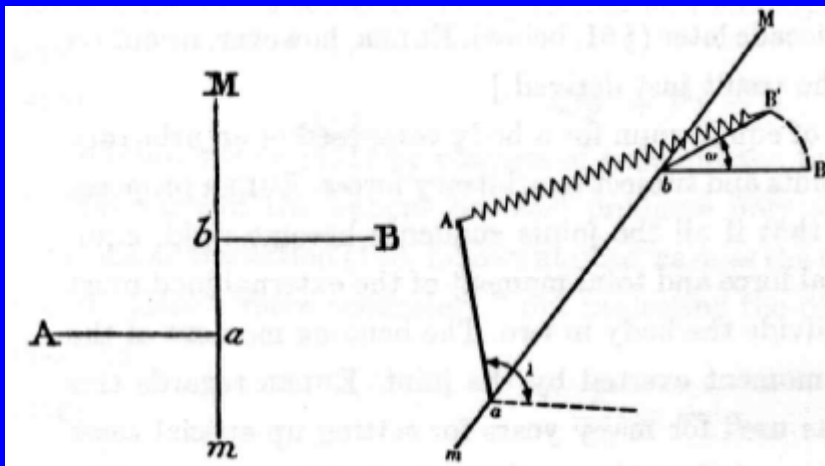


<http://usuarios.bitmailer.com/mdeguzman/tensegridad/mdeguzmangeomtenseg2004/seminario021203.html>



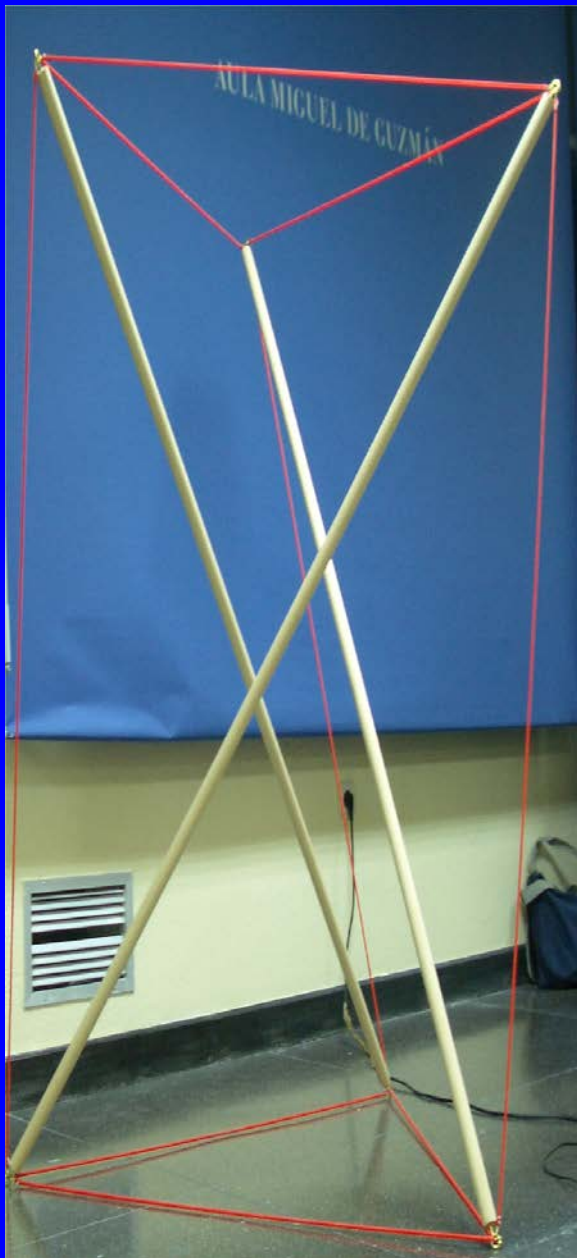
Euler (1764). Modelos discretos.

Utiliza sólo los Primeros principios de la Mecánica (1752).



3-cuerpos con acoplamientos elásticos.





Una de las tensegridades inicialmente consideradas (Snelson, Fuller): tres barras de igual longitud separadas en el espacio, tres cables de igual longitud por cada extremo, cada cable uniendo (y separando) en el espacio los extremos de las barras en una estructura rígida autotensionada.

Simetría rotacional alrededor de un eje. La simetría hace muy sencilla la determinación de fuerzas (vectores).

Configuración de seis puntos en el espacio, 1,2, 3, 4, 5, 6 (no hay cuatro en un mismo plano), por cada punto cuatro segmentos. Esto implica una única configuración posible de segmentos:

12,13,23,45,46,56,14,15,25,26,36,34.

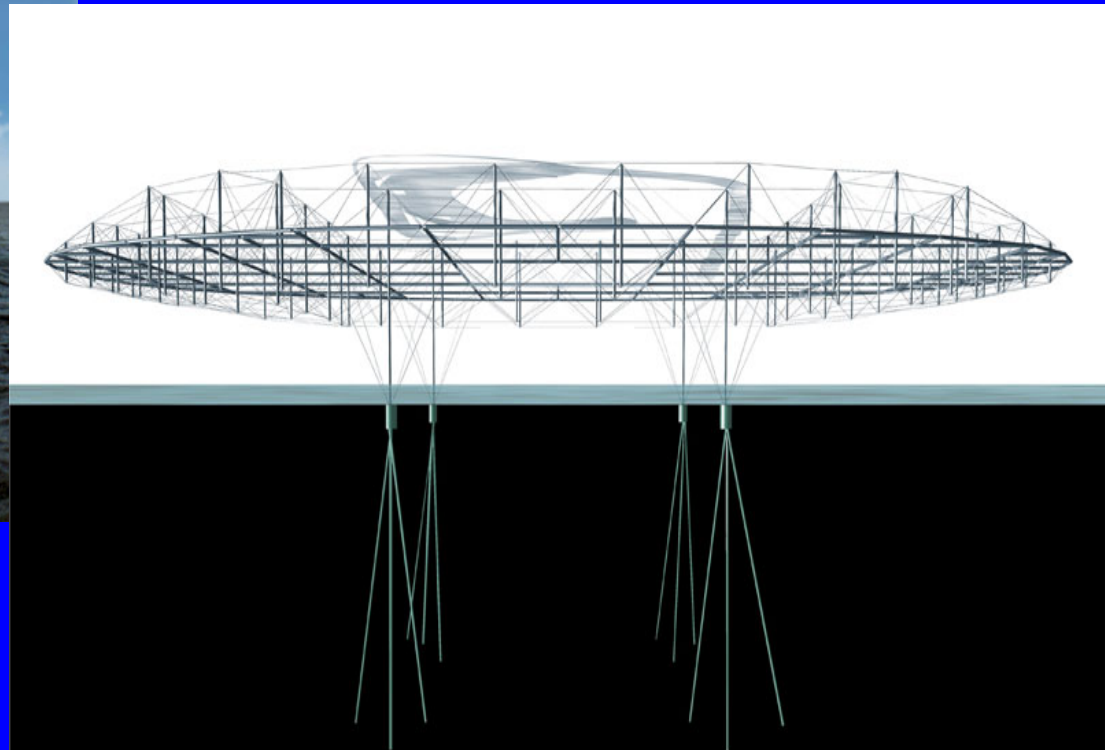
Es decir dos triángulos 123, 456, y tres cuadriláteros 1264, 2365, 1362

Es posible explorar la situación geométrica, p.e. con DERIVE..

La nube: Neuchatel Suiza EXPO.02

Ingenieros: Passera & Pedretti

Arquitectos: Diller & Scofidio Architecture New York





20/08/2023



Misión Galileo (ESA) 1991

Gracias por su
atención

