

Agua y Matemáticas

J.I. Díaz

Madrid, 7 de Mayo de 2009



Programa “Ciencia para todos”.
Curso 2008-2009.

<http://racefyn.insde.es/>

1. Introducción

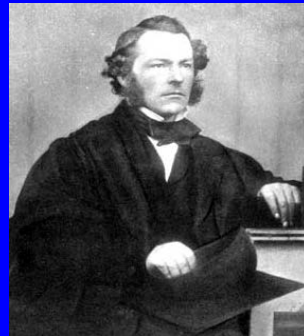
La Exposición Universal de Zaragoza que se celebró el año pasado escogió el *agua que nos rodea* como emblema destacado.



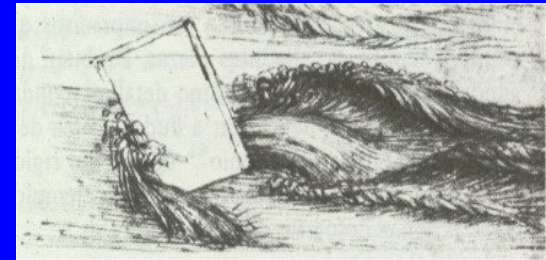
Sin duda, ello puede ser objeto de estudios técnicos como un fluido más al que aplicar la Mecánica de Fluidos, fuente de problemas de la Matemática Aplicada desde comienzos del siglo XVIII,...



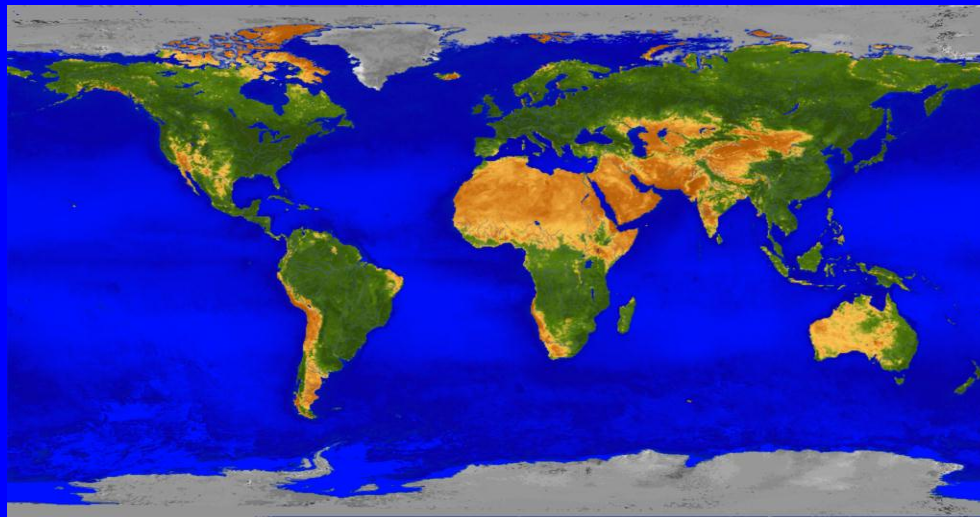
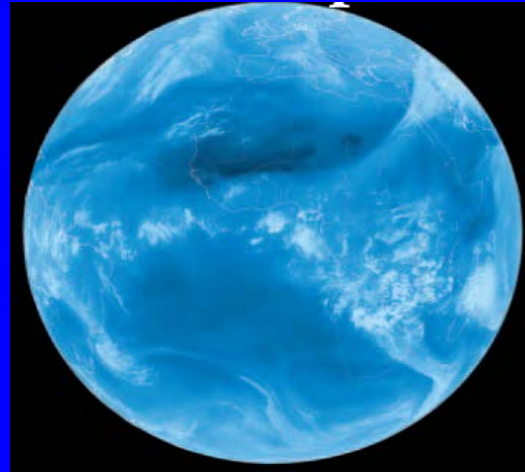
Claude Louis Marie Henri
Navier (1785-1836)



Sir George Gabriel Stokes
(1819-1903)



Pero también, desde un punto de vista más ecologista, e igualmente ligado a candentes problemas de la Matemática Aplicada de nuestros días, el agua puede ser abordada como el medio más importante que acompaña al hombre en su ocupación del planeta Tierra.



En esta charla pasaremos una rápida revista a este segundo aspecto mostrando diferentes contextos para los que se poseen complicados modelos matemáticos, siempre con el agua de fondo.

No es nada extraño pues, que...

El 24 de Mayo de 2000, en el Collège de France, el *Clay Mathematics Institute* (CMI) anunció la creación de unos premios de 1 millón de dólares para aquellos que resuelvan 7 importantes problemas clásicos que esperan aún su solución: *The Millennium Prize Problems*, propuestos por el Comité asesor del CMI: A. Connes, A. Jaffe, A. Wiles, y E. Witten

Uno de ellos (el 4º) : La ecuación de Navier-Stokes que gobierna el flujo de los fluidos tales como el agua y el aire. No hay ninguna demostración de la más básica de las preguntas; ¿existe solución? ¿Es única?

Ningún impedimento para el uso de N-S en otros campos (Ingeniería, Física,...). Pero la respuesta matemática no es sólo certeza, es también **comprensión** (análisis numérico, computación, ...).



Incompressible Navier-Stokes Equations

$u = u(t, x)$... fluid velocity

ν ... fluid viscosity

$p = p(t, x)$... pressure

$f = f(t, x)$... external force

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nu \Delta u + f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array} \right.$$

global in time existence of smooth solutions: 1 Million \$ Clay Prize

Application: Hydrology

Saint-Venant system

$h = h(t, x)$... water height-over-bottom (free boundary)

$Z = Z(x)$... bottom topography

g ... gravity constant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \operatorname{div}(h u \otimes u) + \nabla\left(\frac{g}{2}h^2\right) + gh\nabla Z = 0 \end{array} \right.$$

(compressible) p-system with quadratic pressure law and external forcing

2. Océanos

Ecuaciones de sus movimientos y otras incógnitas físicas como su temperatura y salinidad.



V. Bjerknes
(1862-1951)



Vagn Walfrid Ekman
.....
1874 – 1954



Carl-Gustaf Arvid Rossby
.....
1898 – 1957

Mecánica de fluidos en rotación: Ecs. de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2w\Omega \cos \varphi - 2v\Omega \sin \varphi =$$

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} \quad \Omega W \quad \Omega U$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

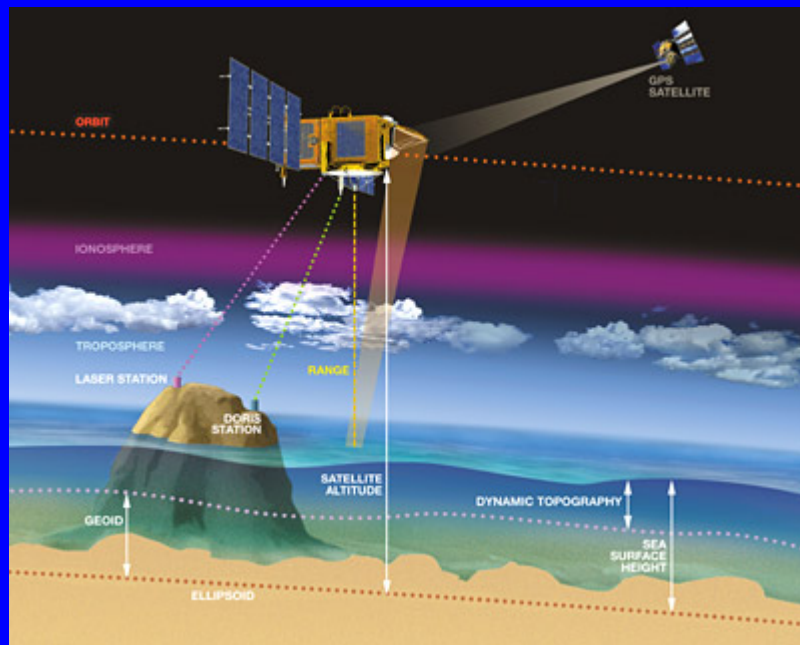
$$\frac{P}{\rho_0 L} \quad \frac{\nu U}{L^2} \quad \frac{\nu U}{L^2} \quad \frac{\nu U}{H^2}$$

$$\frac{\nu U}{H^2} \ll \Omega U$$

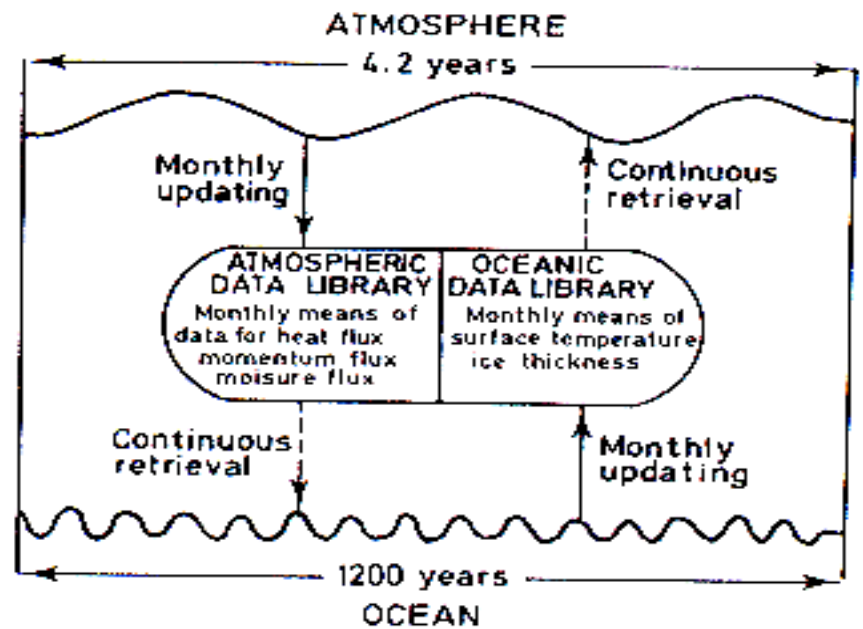
$$\frac{\nu W}{H^2} \ll \Omega W \ll \Omega U$$



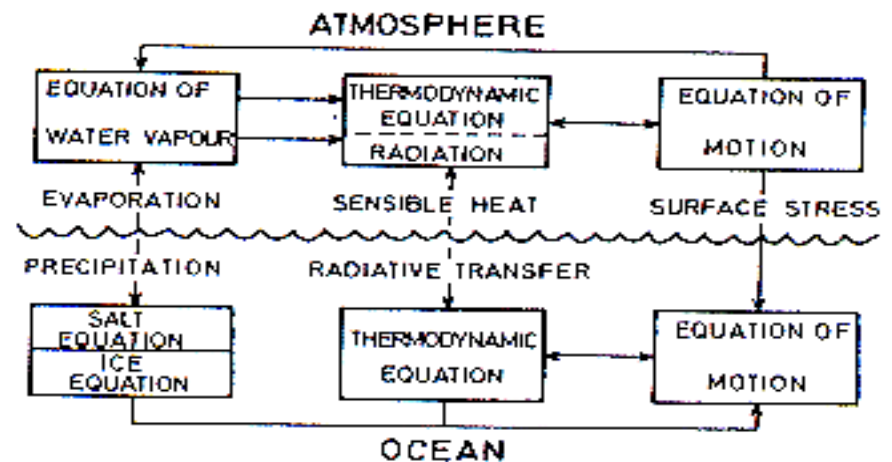
Acoplamiento



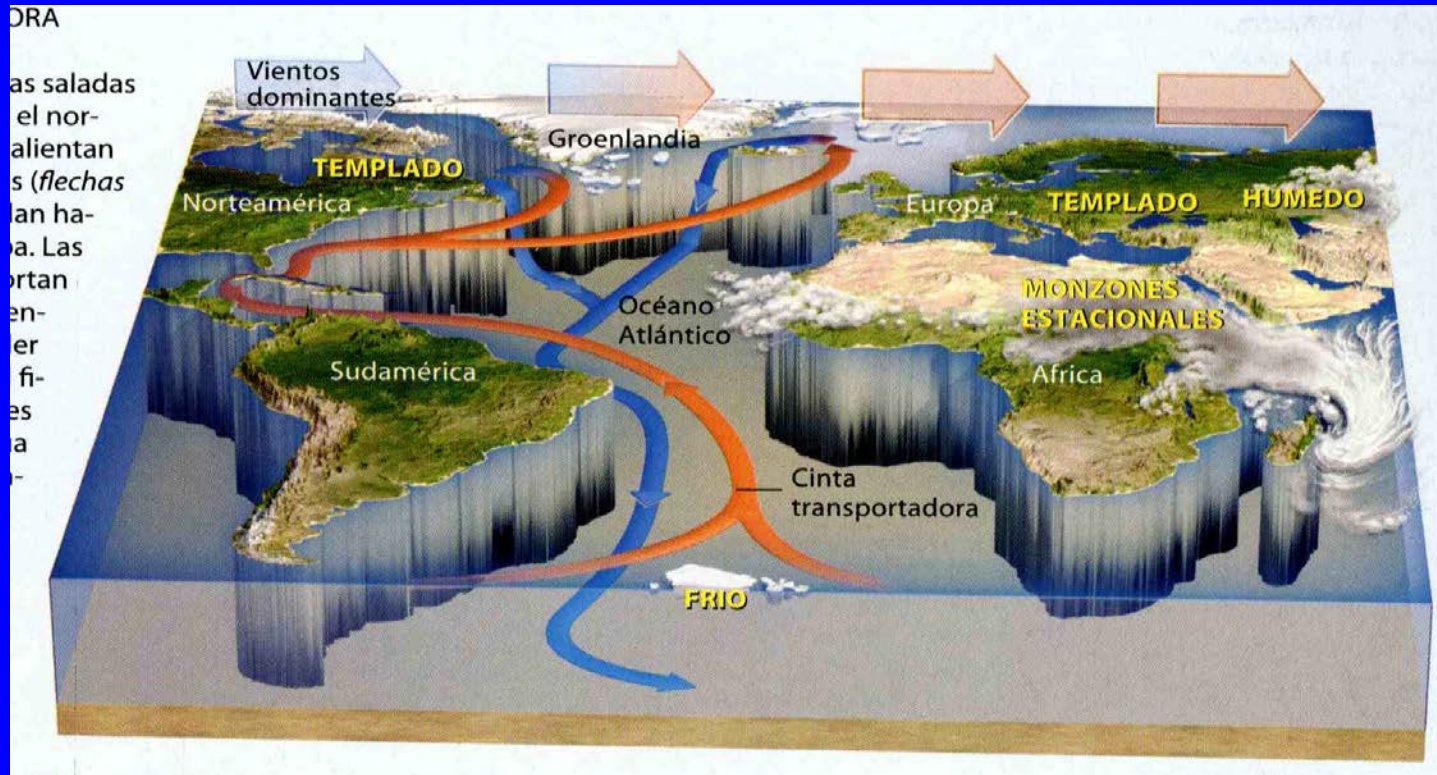
(a)



(b)



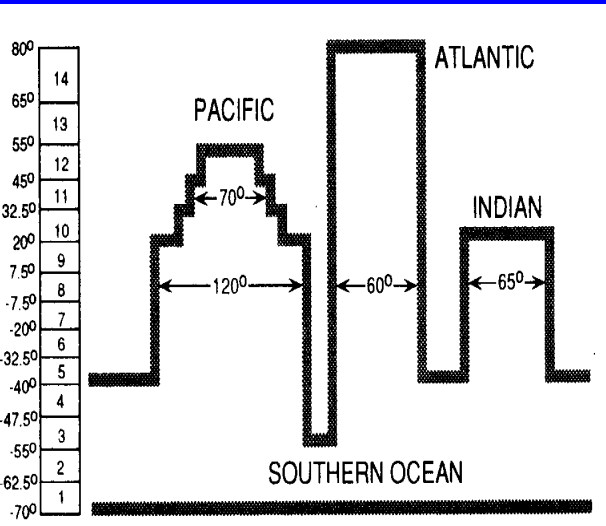
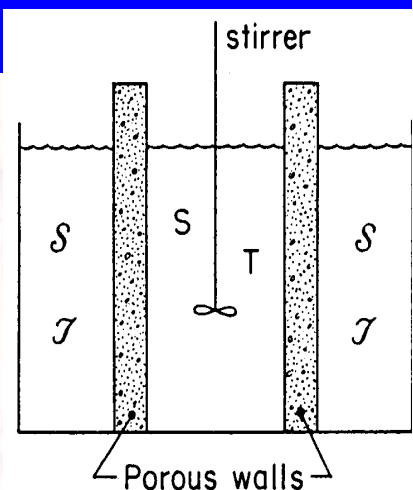
Modelos de salinidad oceánica



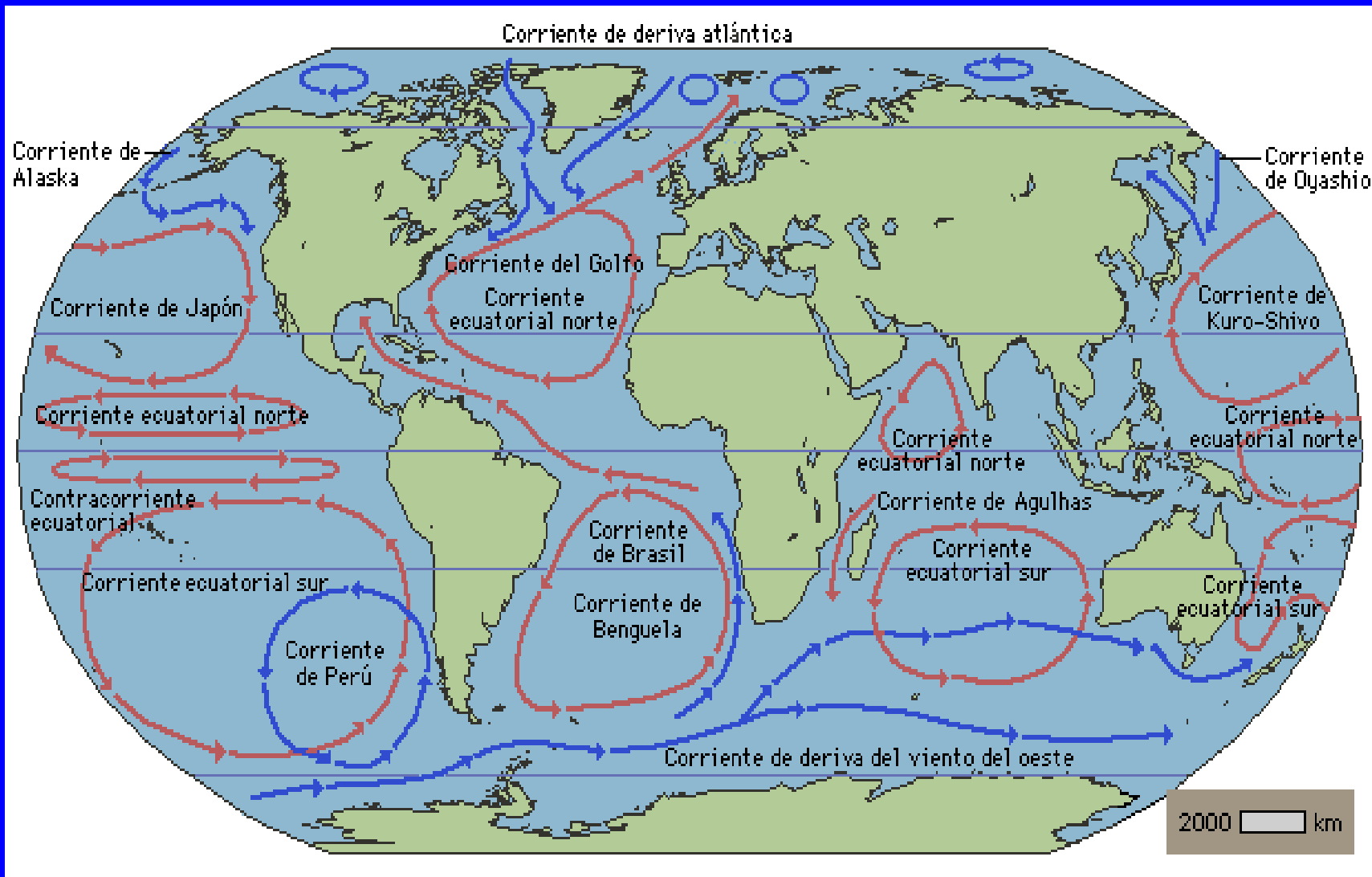
as saladas
el nor-
alientan
s (flechas
lan ha-
a. Las
ortan
en-
er
fi-
es
a
r-

$$\frac{dT}{dt} = c(T - T)$$

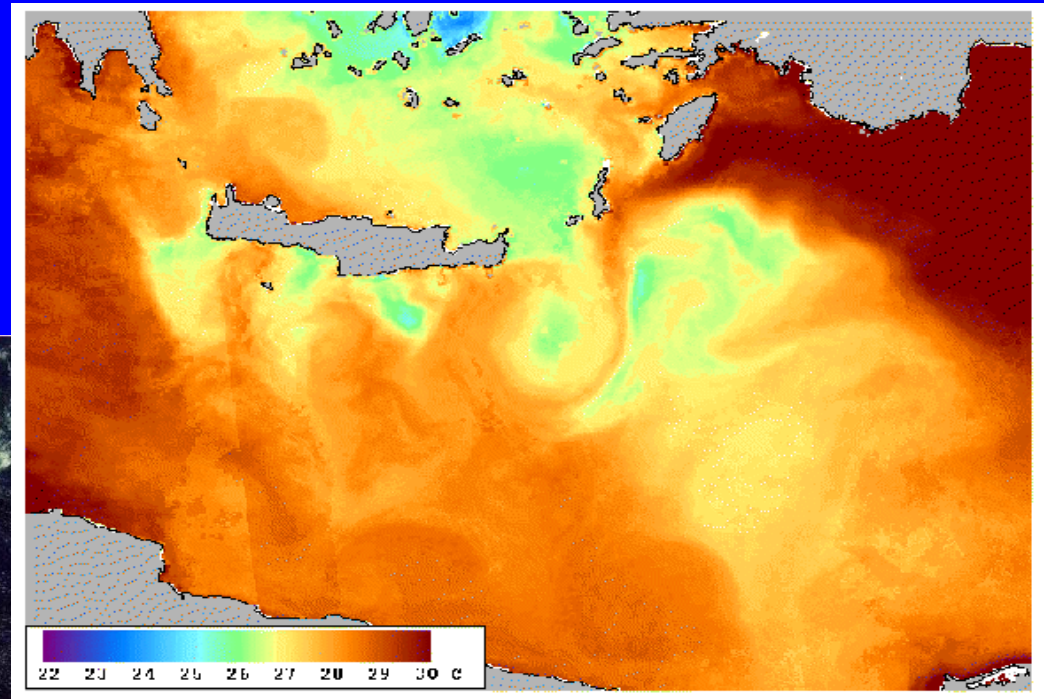
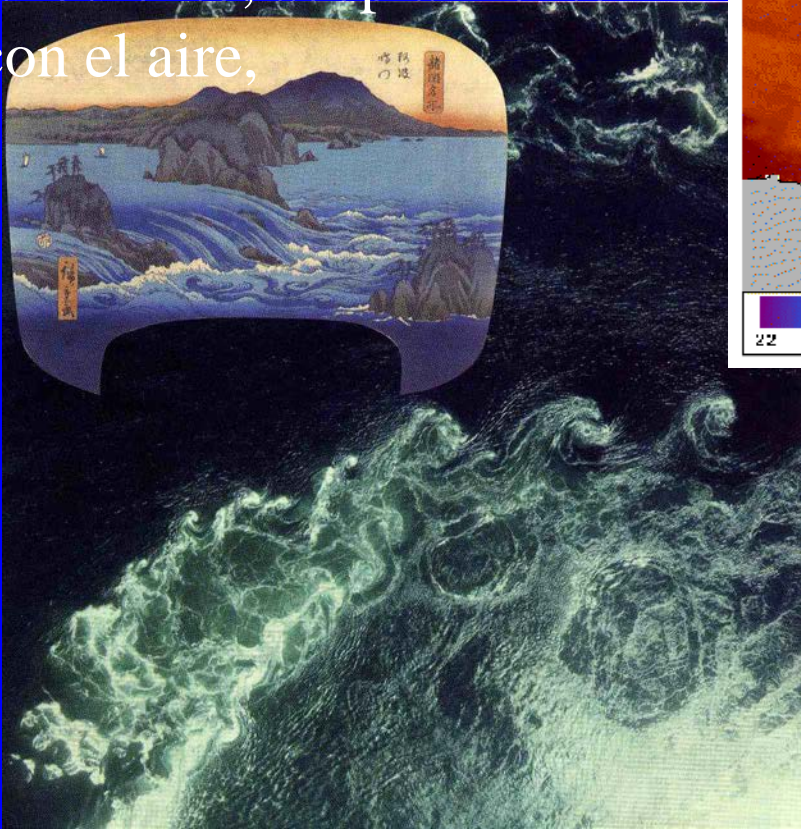
$$\frac{dS}{dt} = d(S - S)$$



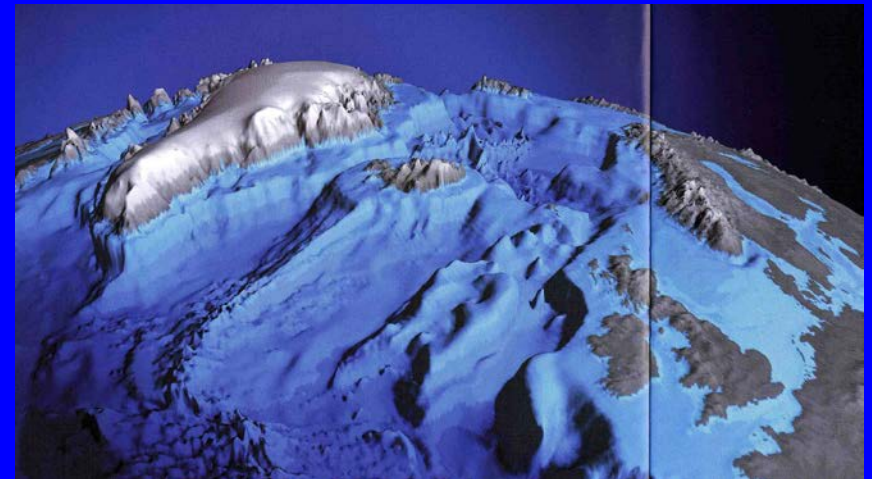
Broecker-Denton(1989)
Stommel (1961)
Rahmstorf (1995)

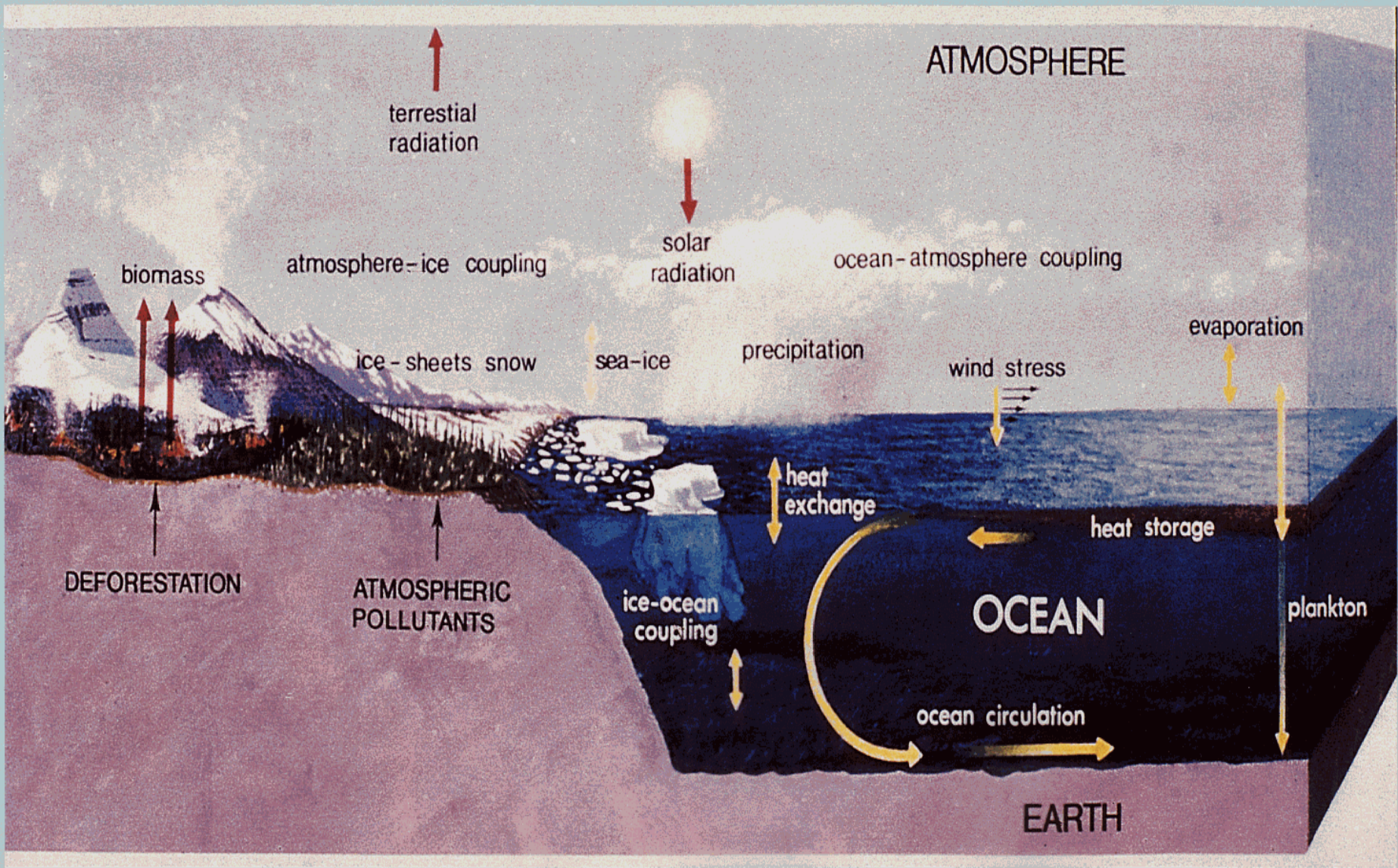


Corrientes marinas,
regímenes laminar y
turbulento, acoplamiento
con el aire,

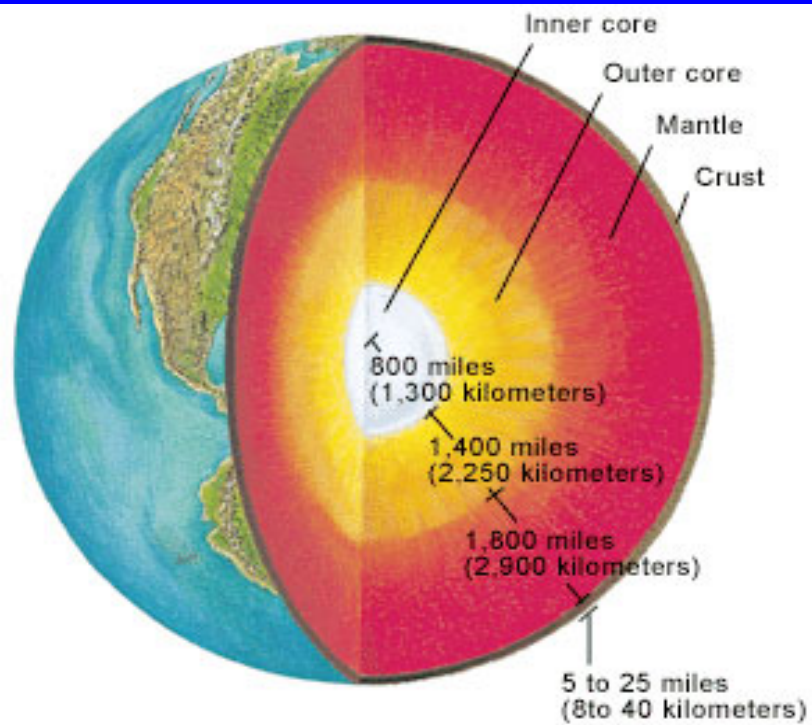


modelos climáticos mixtos,

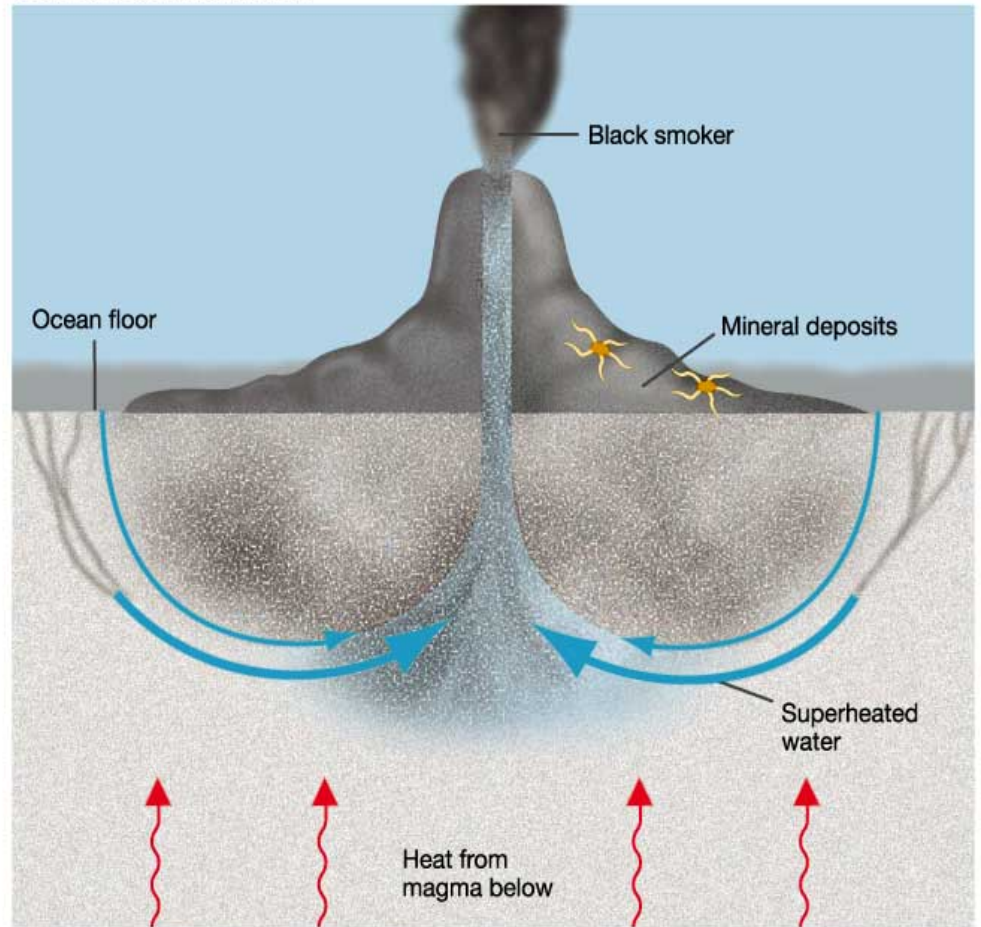




Volcanes marinos



Formation of black smokers



formación de olas y ondas por navegación en su seno

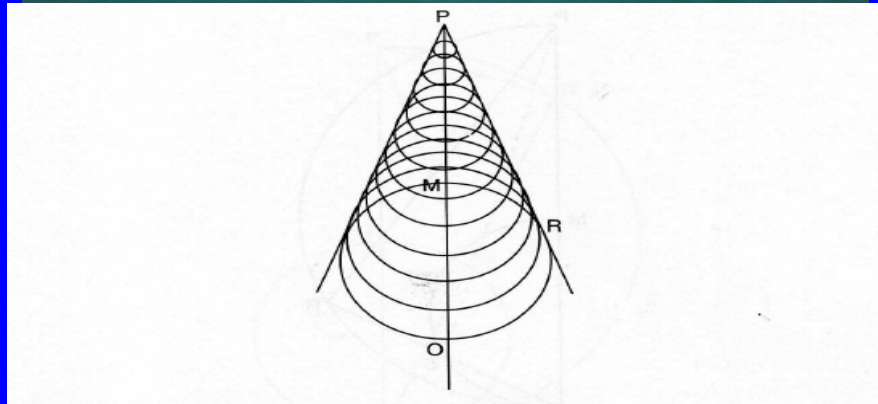
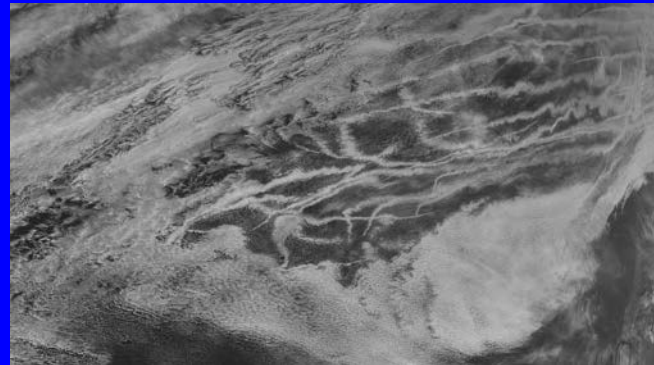
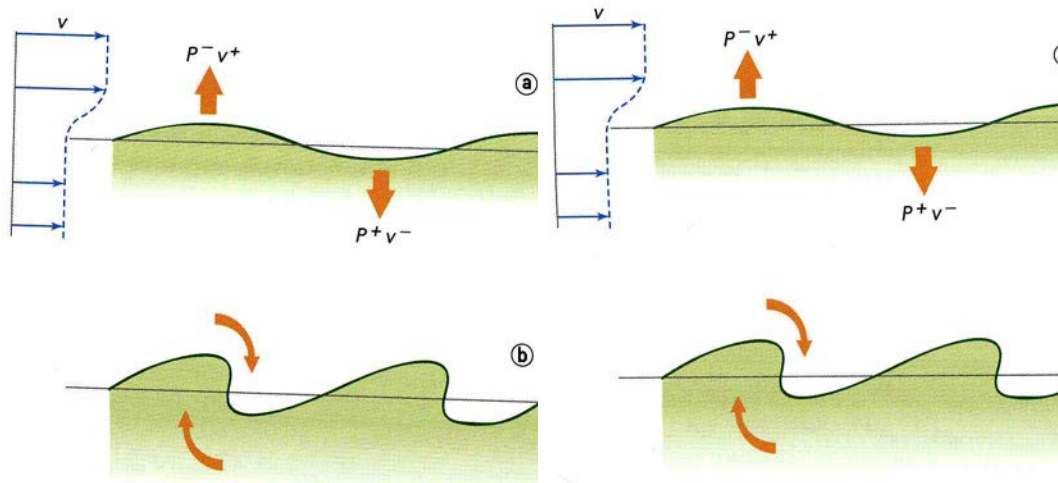


Figure 7.4. Many such waves (as in figure 7.3) reinforce a common tangent line PR . Redrawn from *Bores, Breakers, Waves and Wakes*, by R.A.R. Tricker (1964), M. & B. Elsevier: New York.



(Examples of) Wave Equations

Linear anisotropic Wave Equation: $u_{tt} = \sum_{j,l} a_{j,l} u_{x_j x_l}$

Linear Schrödinger Equation: motion of quantistic particles

$$i\epsilon u_t = -\frac{\epsilon^2}{2} \Delta u + V(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

current density $j(x, t) = \epsilon \operatorname{Im}(u(x, t) \operatorname{grad} u^*(x, t))$

spatial density of the quantum particle $\rho(x, t) = |u(x, t)|^2$

Korteweg-de Vries Equation : shallow water waves in a channel

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x + \epsilon^2 u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

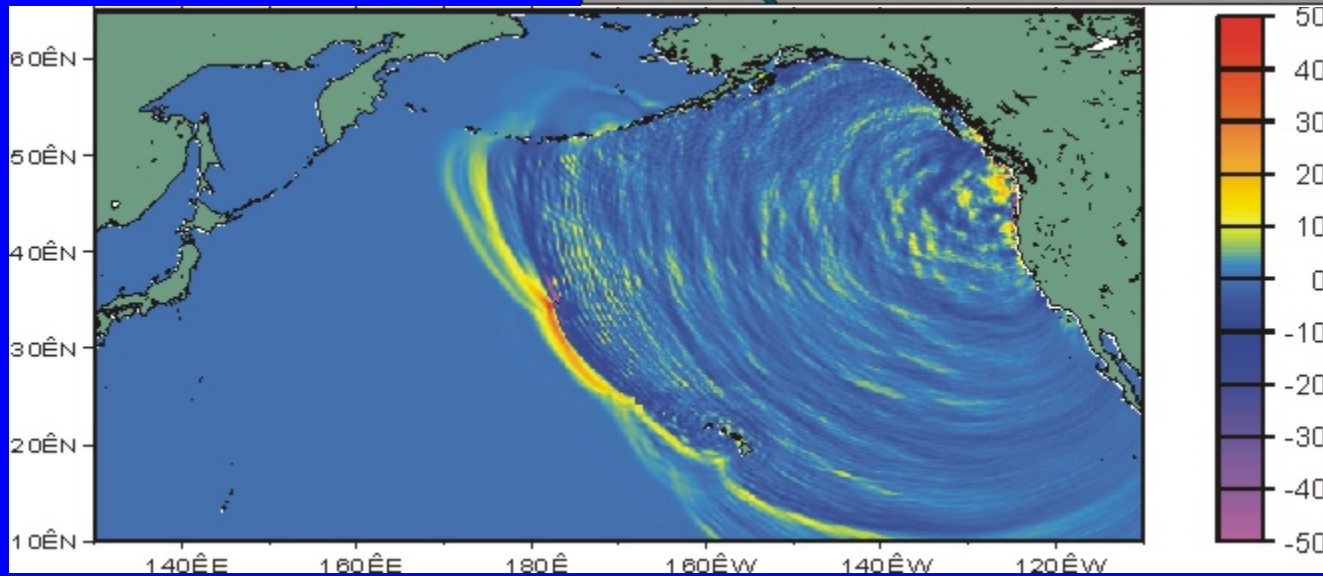
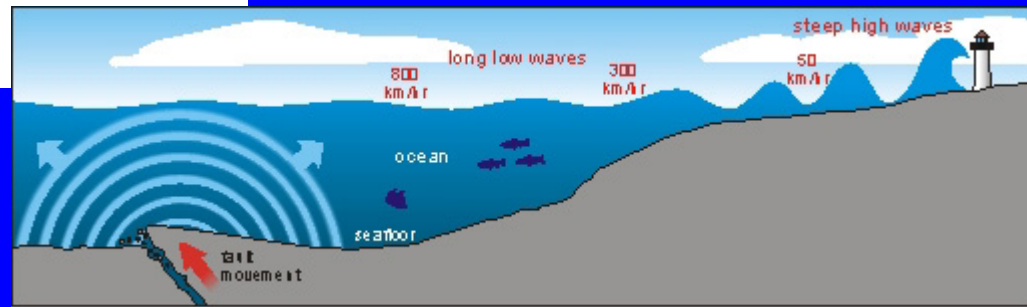
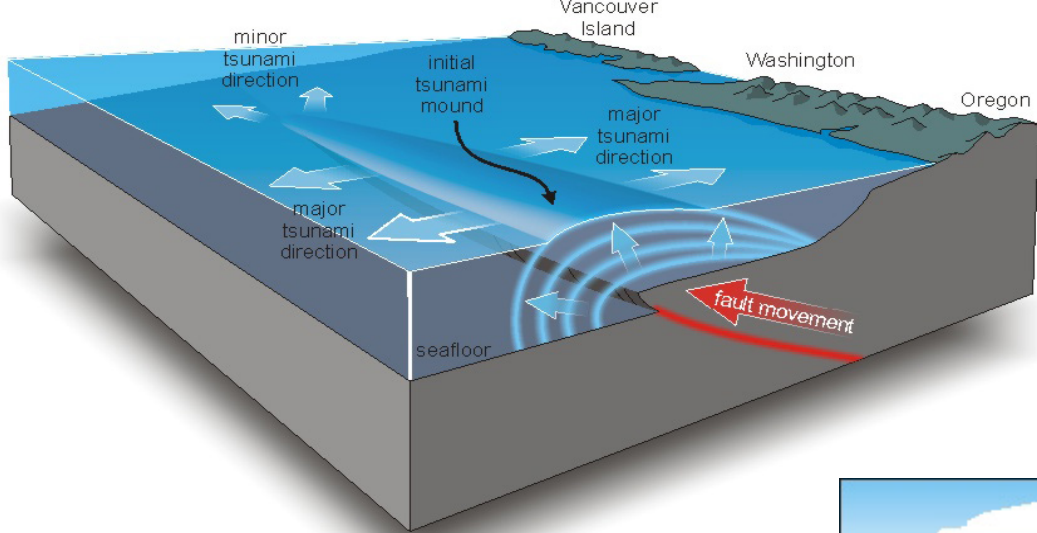
Plane and transversal Waves



Wave Breaking







RACSAM

Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.

VOL. 102 (2), 2008, pp. 319–334

Matemática Aplicada / Applied Mathematics

A hyperbolic model for convection-diffusion transport problems in CFD: Numerical analysis and applications

H. Gómez, I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro



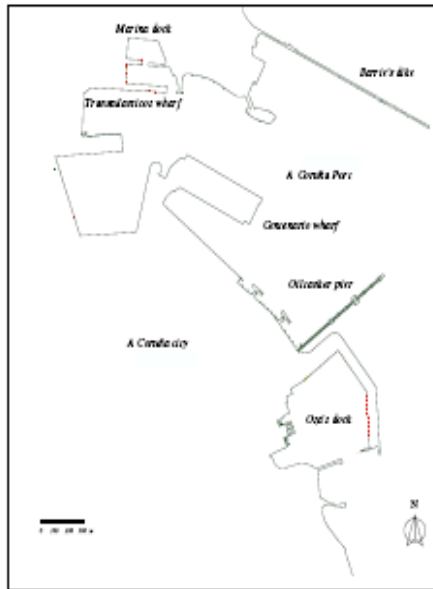


Figure 4. Simulation of an accidental spillage in the port of A Coruña. Layout of the port.

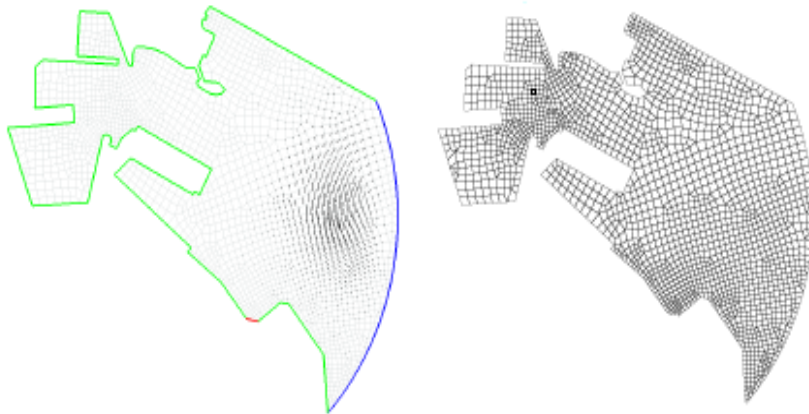
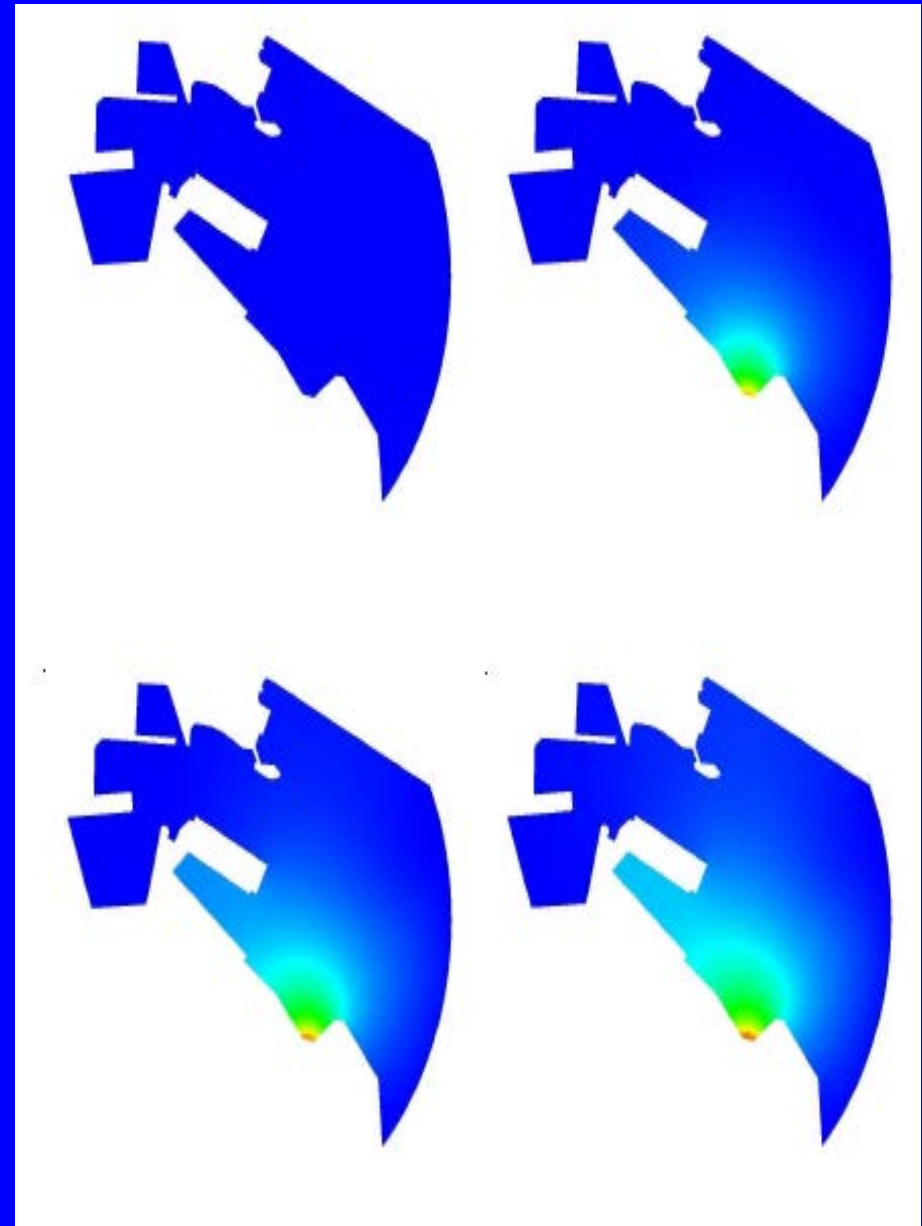
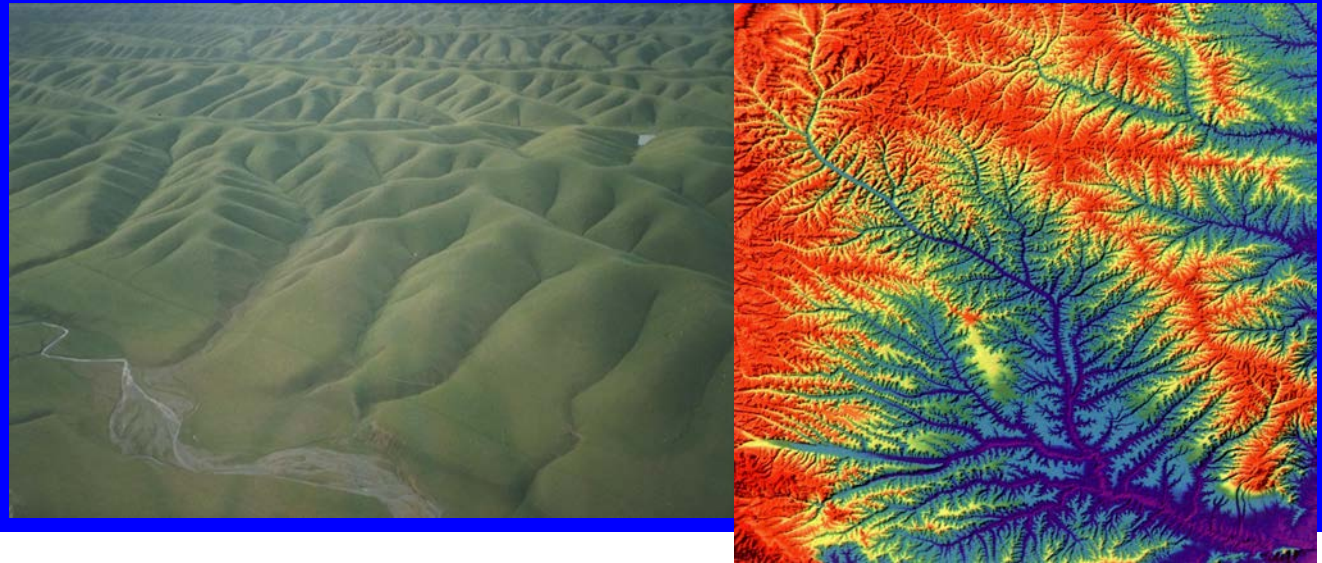


Figure 5. Simulation of an accidental spillage in the port of A Coruña. Velocity field and kinds of boundaries (left) and computational mesh of the problem (right). On the left hand side the solid wall boundary has been plotted in green; the boundary where the spillage happens has been plotted in red; the open sea boundary has been plotted in blue. The finite element mesh consists of 2023 bilinear elements and it was generated by using the code GEN4U [26].



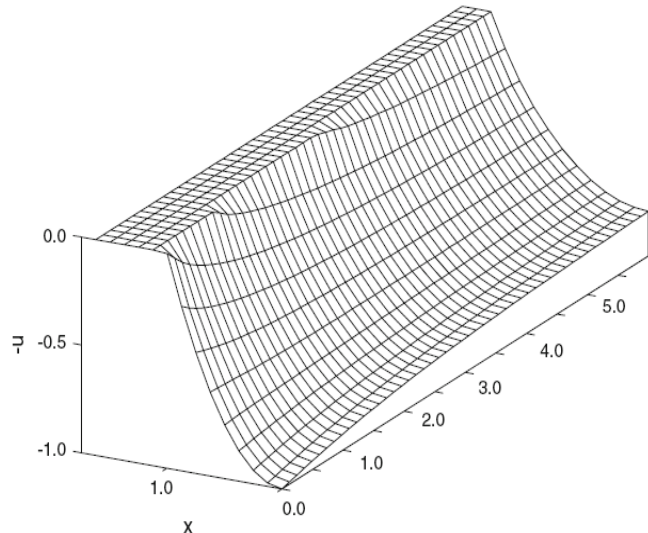
3. Ríos

Formación de ríos



Mathematical Analysis of a Model of River Channel Formation

J. I. DÍAZ,¹ A. C. FOWLER,² A. I. MUÑOZ,³ and E. SCHIAVI³



formación de meandros,

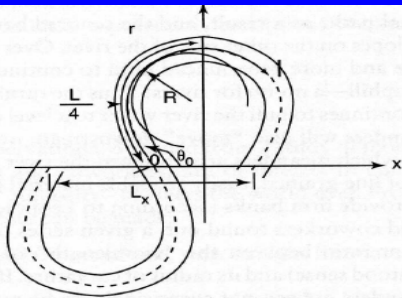
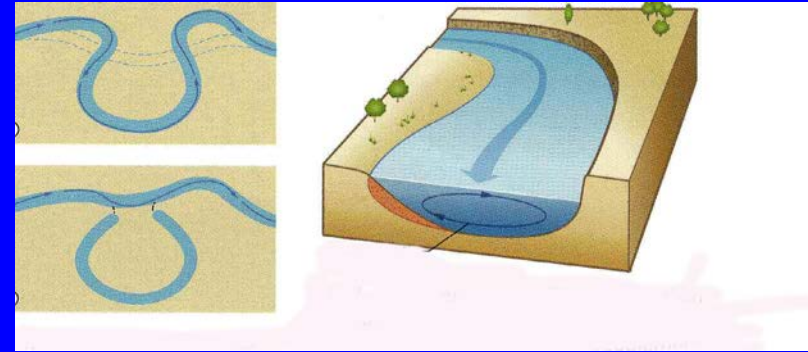
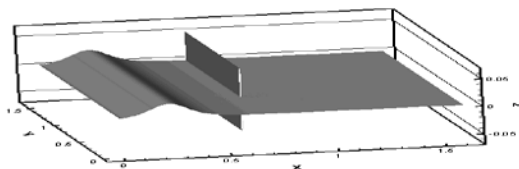


Figure 12.1. (a) The "river meander" configuration and notation used in deriving equation (1) Redrawn from "River Meanders" by L. B. Leopold and M. G. Wolman (1960), *Bulletin of The Geological Society of America*, 71: 769–794.



ondas solitarias viajeras (solitones)



Scott-Russell (1844):
observación

Korteweg and de Vries
(1895): cálculo

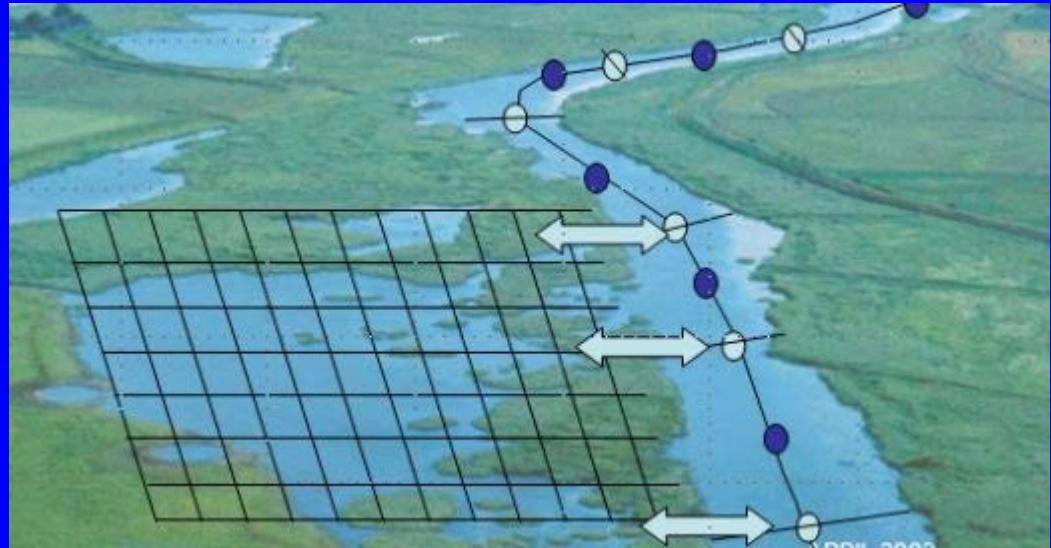
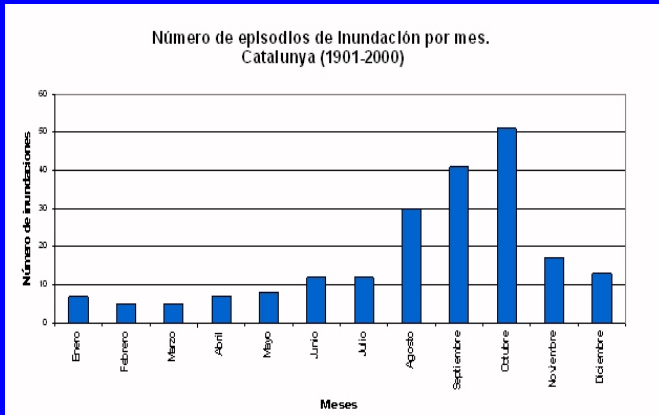
transporte y navegación,



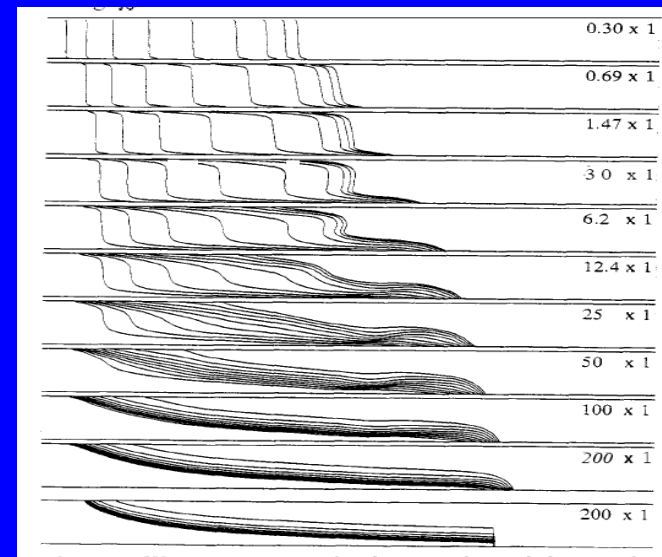
Cascadas rotas ,
(inestabilidades de Rayleigh-Talor),

Laroque, Aveyron, Francia

inundaciones;

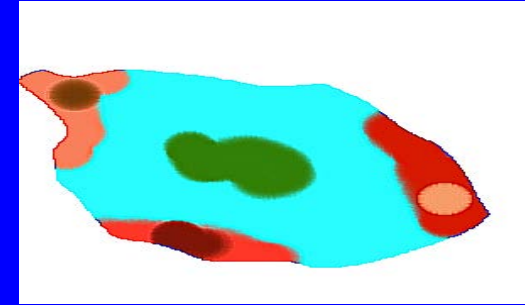


deltas: interfaz entre agua dulce y agua salada;



4. Lagos

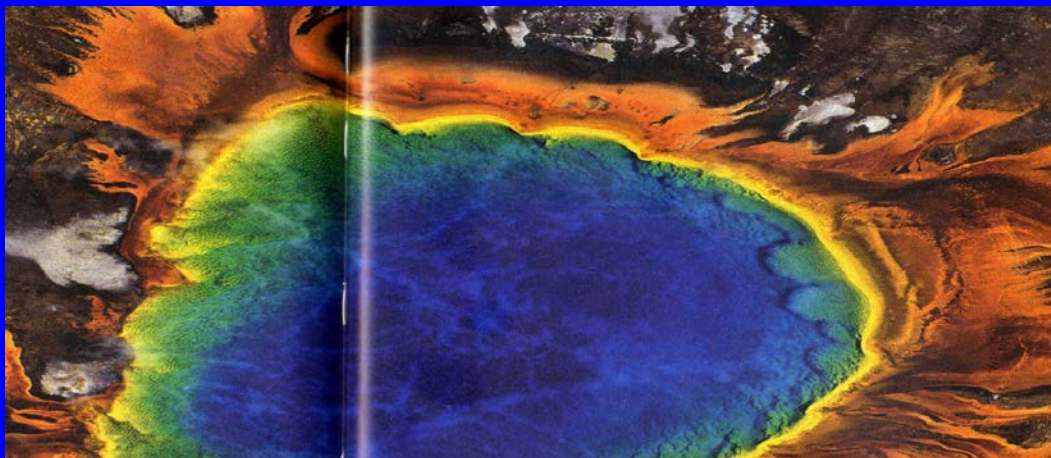
polución entre orillas,



On the approximate controllability of
Stackelberg-Nash strategies

J. I. Díaz¹ and J. L. Lions²

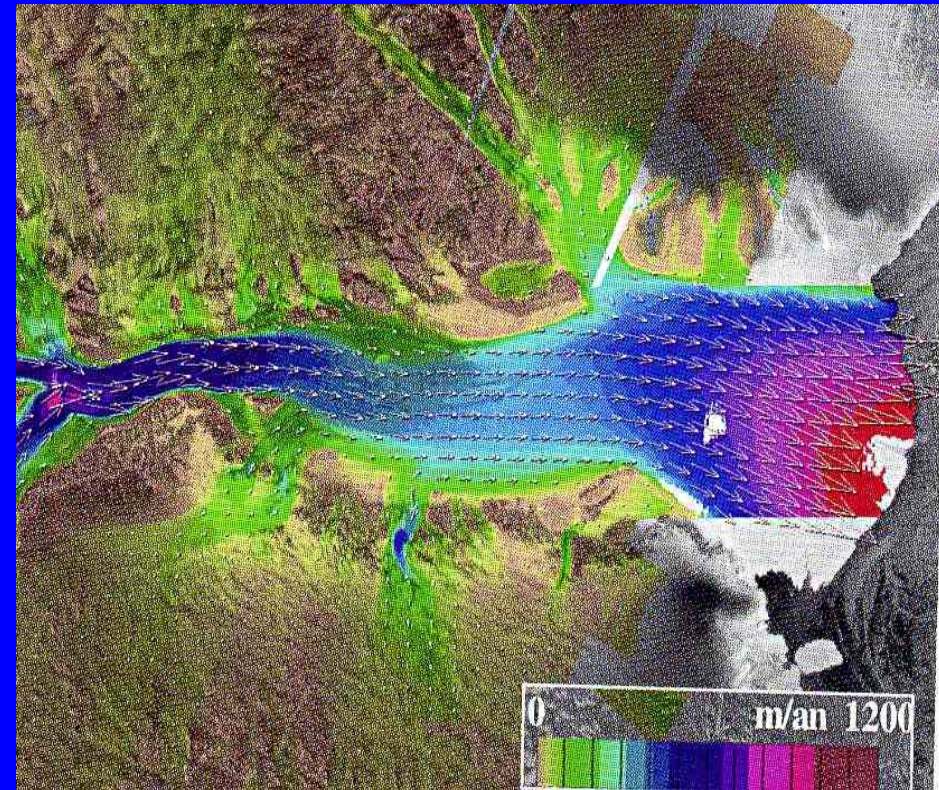
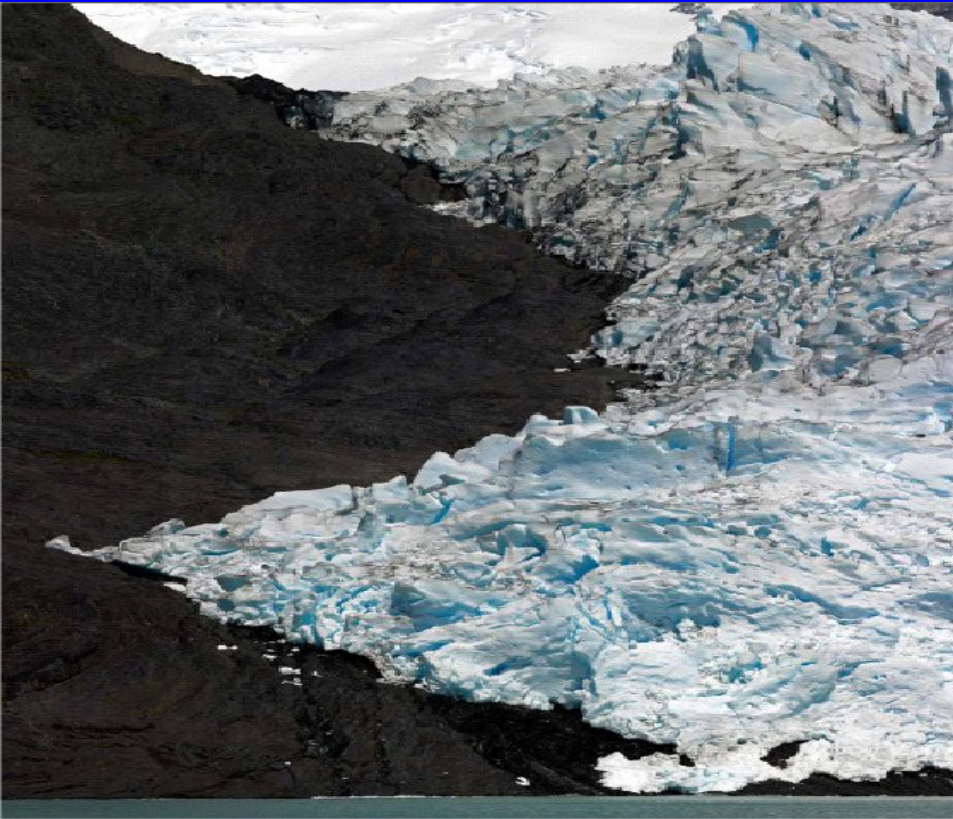
Sedimentos, géiseres (aspectos térmicos)



Old Faithful,
Yellowstone Park

5. Glaciares y casquetes polares

Ríos de hielo (fluidos no-newtonianos)

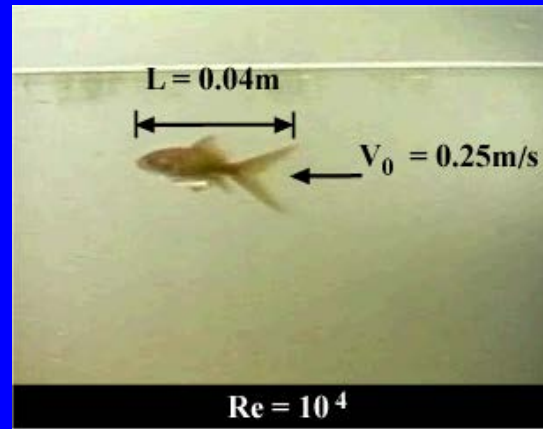
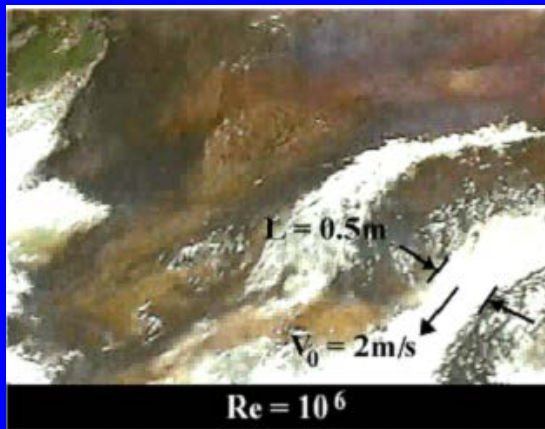


Cuestión de escalas

Número de Reynolds

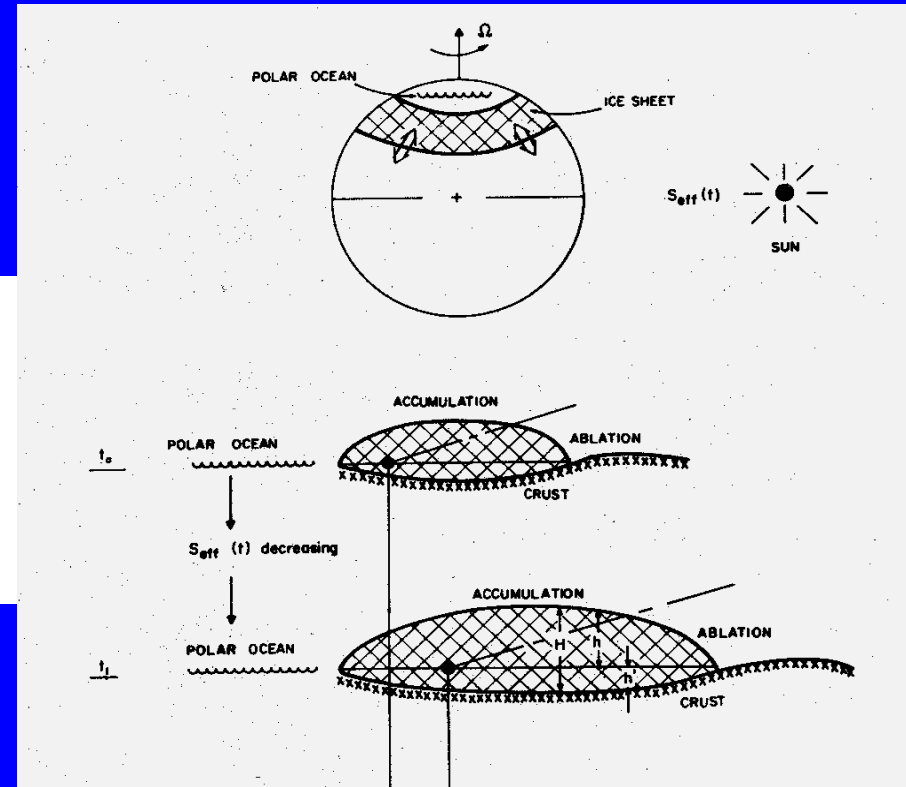
Números adimensionales / simplificaciones

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

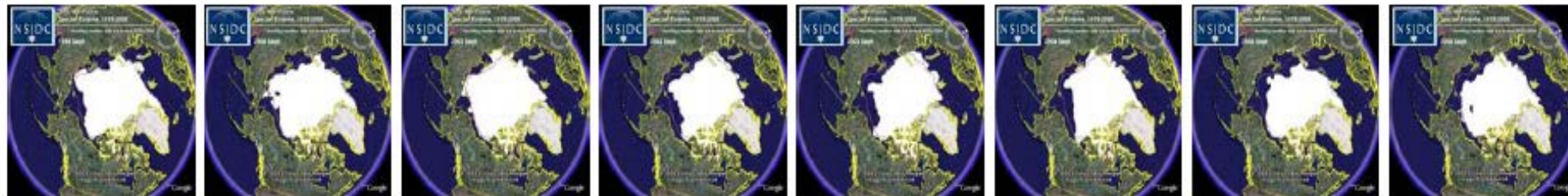


Crisofera: Modelos escalares de casquetes polares

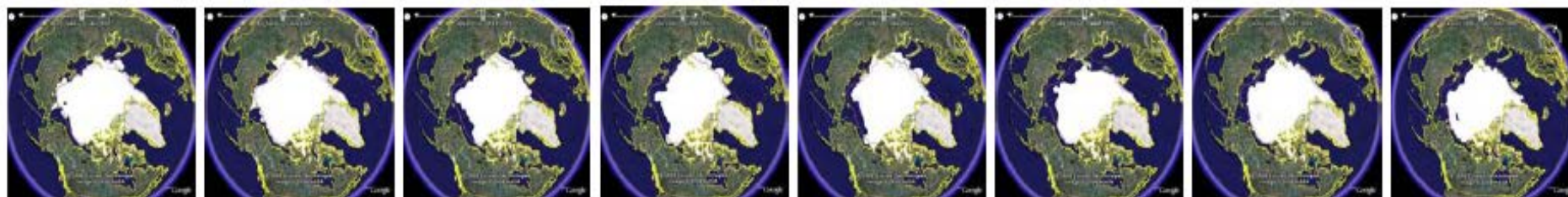
$$\begin{cases} h_t = \left(h^{n+2} |h_x|^{n-1} h_x \right)_x + a(t, x) & \text{en } Q \\ h = 0 \text{ en } \{S_-(t)\} \cup \{S_+(t)\} & t \in (0, T) \\ h(0, x) = h_0(x) & \text{en } D \end{cases}$$



Frontera libre dinámica



The September Arctic sea ice minimum is shown in this flipbook style animation. Both the data image and the date overlay are changed on the server every three seconds. The KML is set to refresh Google Earth every three seconds. The 27-year time series repeats every 81 seconds. The March Arctic maximum and the full time series (all months) are also implemented as flipbooks. Giving the user control of the flipbook would require some additional work to generate a custom KML file and server side image rotator for each user, and an interface to coordinate the two.



The same sea ice time series is shown using the new timeline widget. The elimination of the image rotator on the server side means less maintenance and less chance of something going wrong. The widget gives the user control over the animation. The arrow on the right controls pause/play. The white bar controls the range of data displayed at any one time. And the little circle on the left opens a panel to control the speed and cycling of the animation. It's still beta so there's a few kinks to work out yet, but it does greatly simplify the task of animating time series data.

LANGRAGIAN APPROACH TO LEVEL SETS: APPLICATION TO A FREE BOUNDARY PROBLEM ARISING IN CLIMATOLOGY

JESUS ILDEFONSO DÍAZ AND SERGEY SHMAREV

Obstacle Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } D(v) := \int_G \frac{1}{2} |\text{grad } v|^2 dx \\ \text{over the set} \\ X := \{v \in H^1(G) \mid v = \psi \text{ on } \partial G\} \cap \{v \mid v \geq \phi\} \end{array} \right.$$

Single Phase Stefan Problem, Iceberg Modeling

$u = u(t, x)$... negative temperature in the solid phase

$h = h(t)$... location of the phase transition ice-water

$x = 0$... ice-air interface

$\alpha = \alpha(t)$... negative air temperature

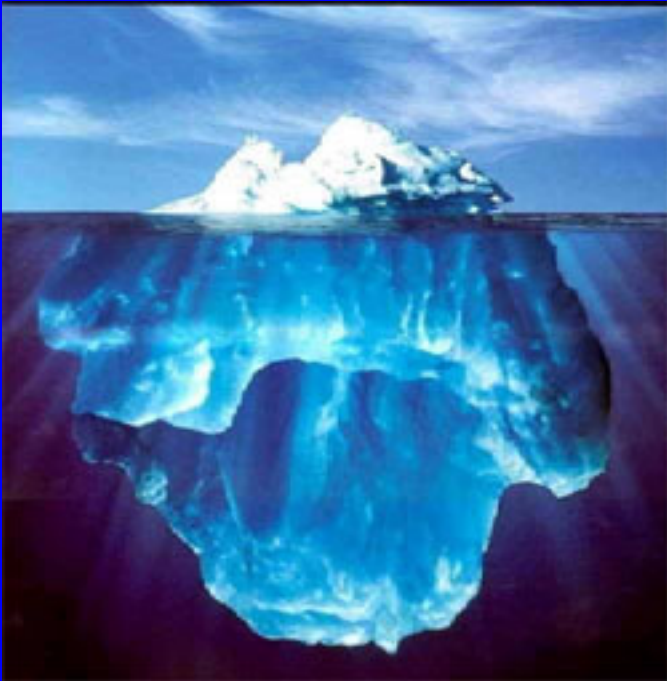
L ... latent heat

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < h(t) \\ u(x=0, t) = \alpha(t) \geq 0, \quad t > 0 \\ u(h(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, t=0) = u_0(x), \quad 0 < x < h(t) \end{array} \right.$$

subject to the Stefan condition:

$$L \frac{dh(t)}{dt} = -u_x(h(t), t), \quad t > 0$$





icebergs y el problema de Stefan,



lubricación en glaciares polares;



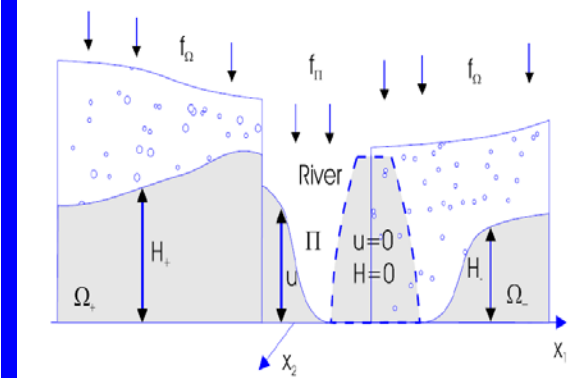
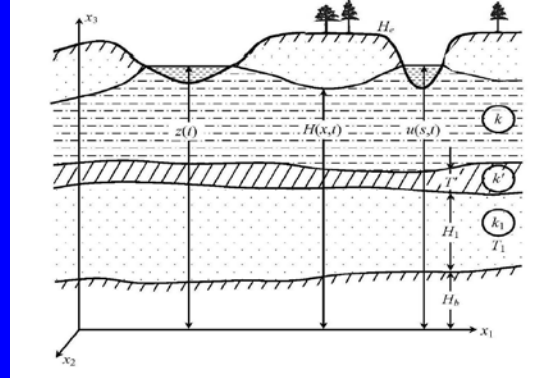
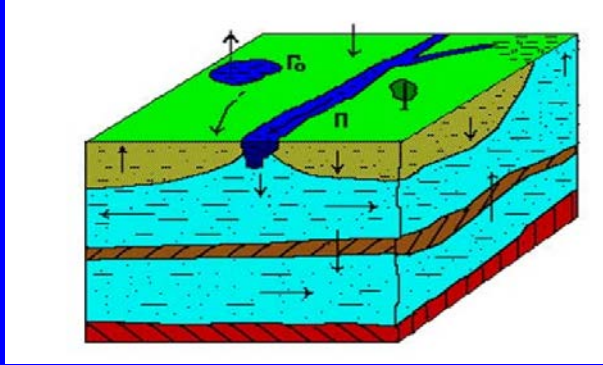
J. I. Díaz, A. I. Muñoz, E. Schiavi.

Mathematical analysis of an obstacle
problem modelling ice streaming.

*Nonlinear Analysis: Real World
Applications*, **8**, 2007, 267-287

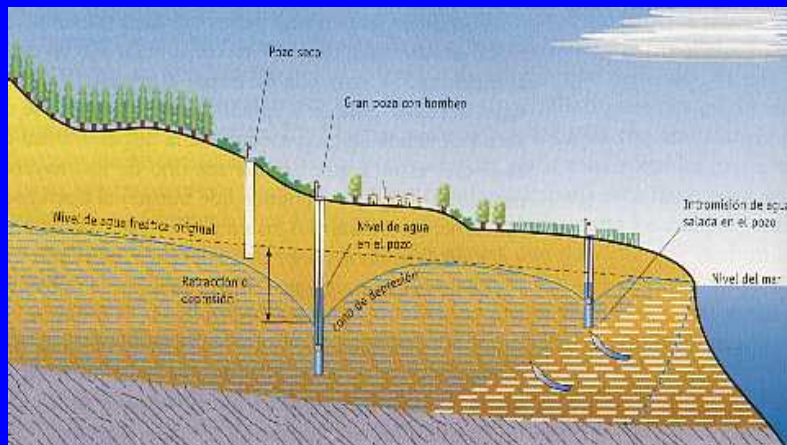
6. El ciclo del agua

el ciclo del agua: filtración en medios porosos,



On the coupling between channel level and surface ground water flows

S. N. Antontsev *, J.I. Díaz †



Cuenca de alimentación alterada por la actividad humana

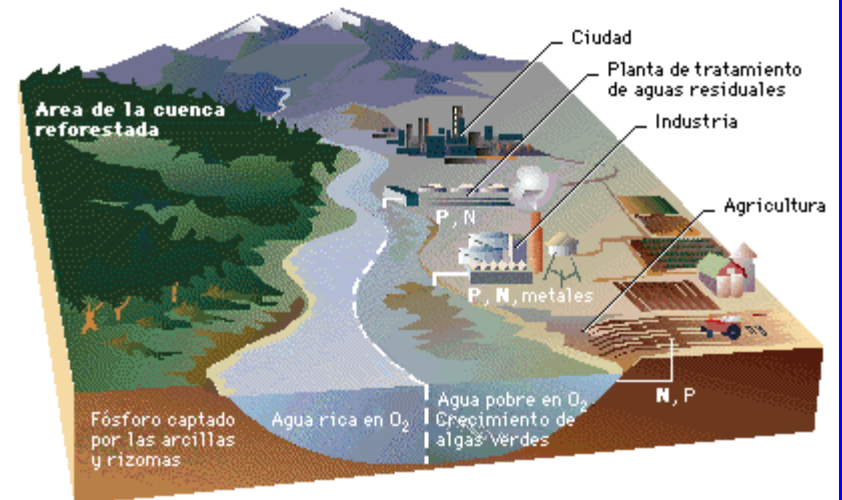
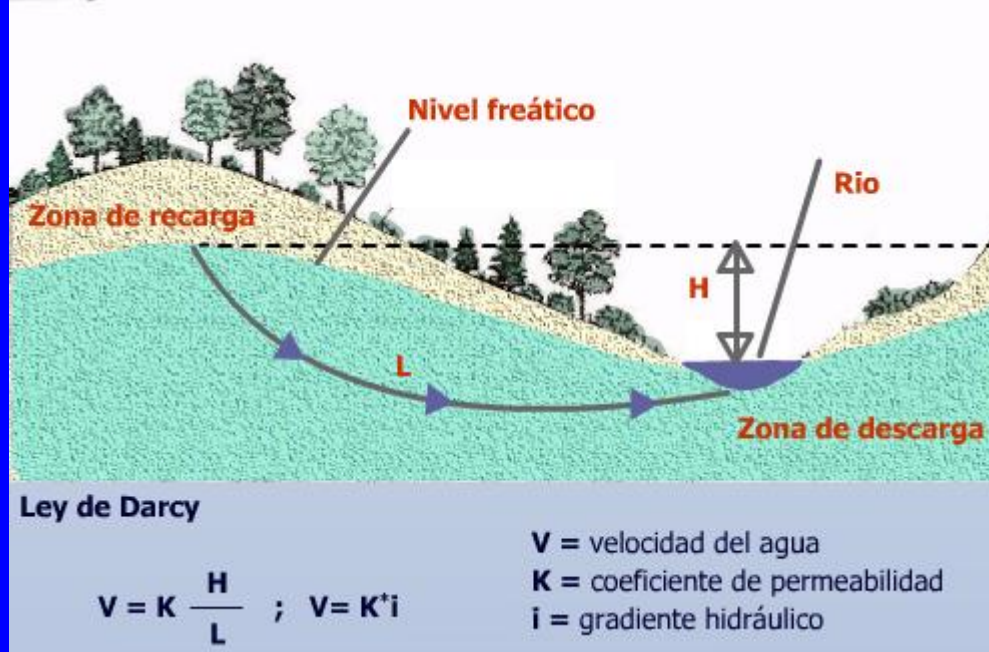
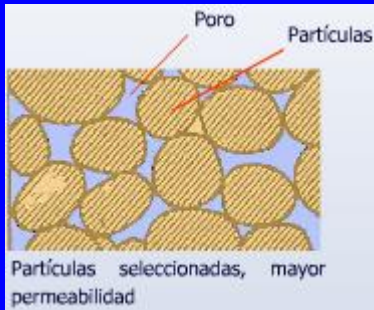
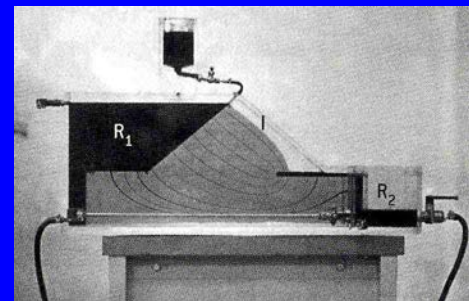


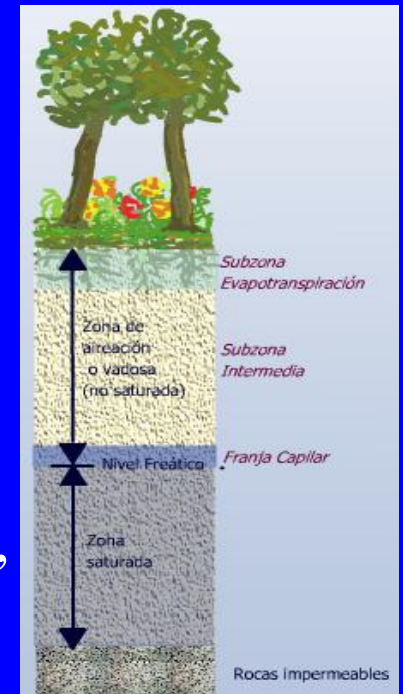
Ilustración de Microsoft



diques y presas;

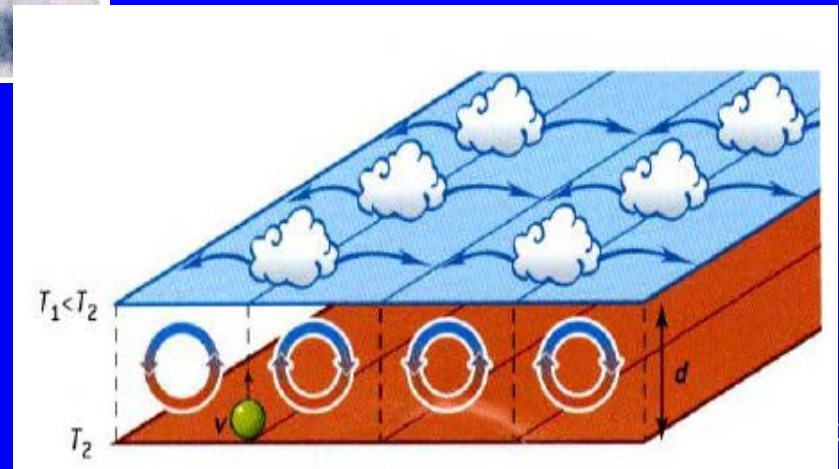
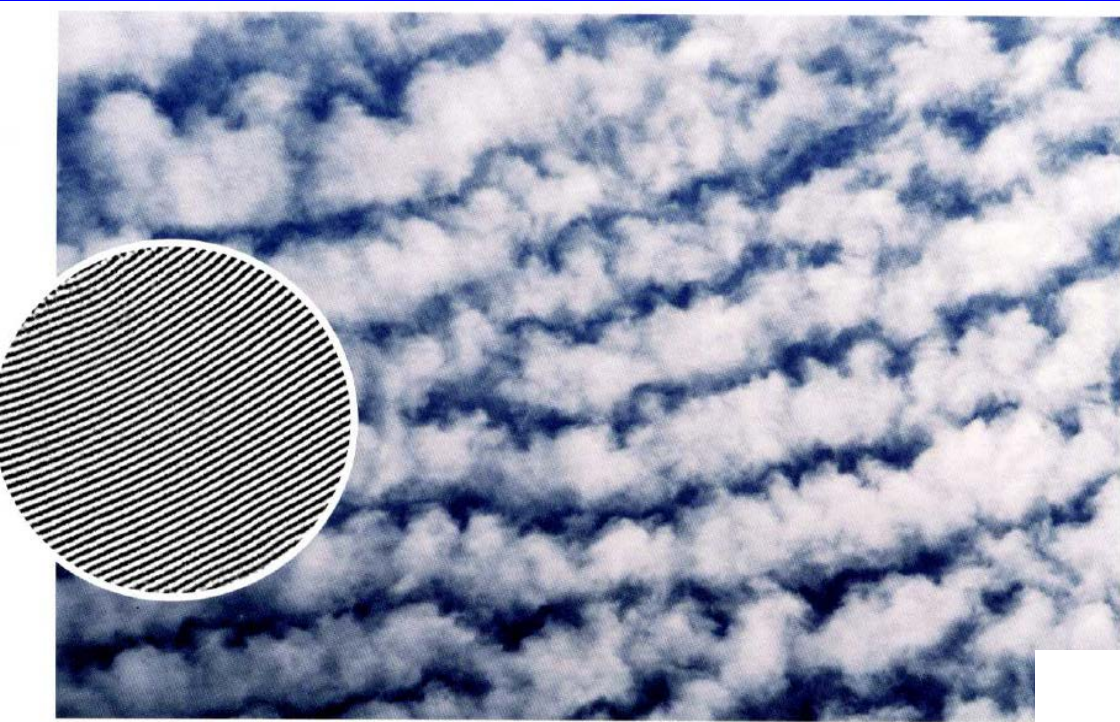


absorción por las plantas,

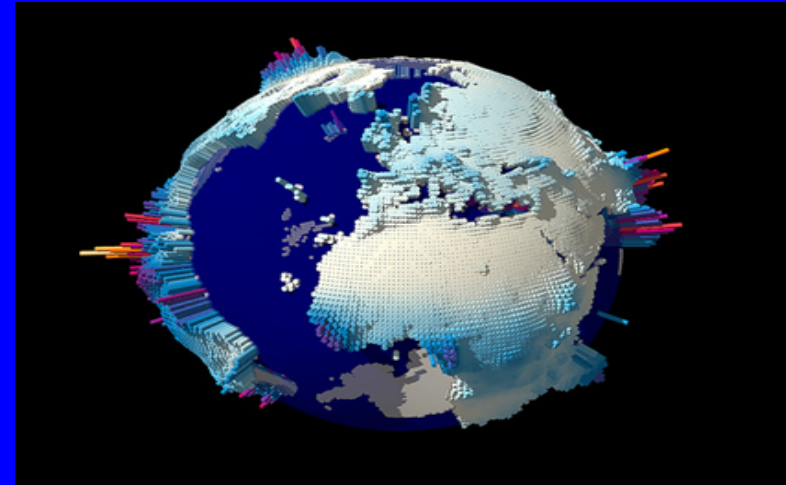
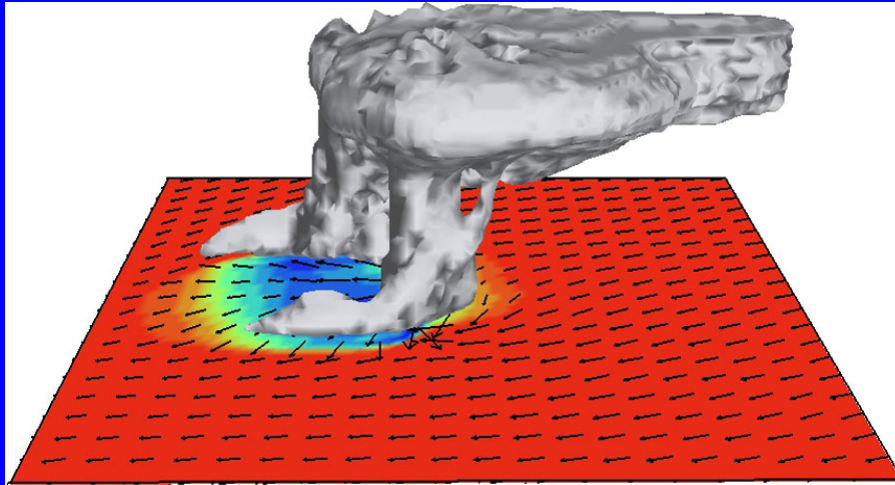


7. Nubes

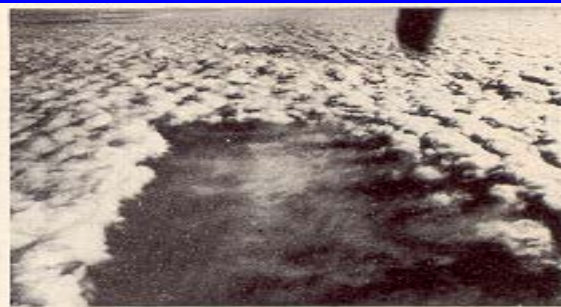
Formaciones regulares (rodillos, círculos, hexágonos, : células de Bénard



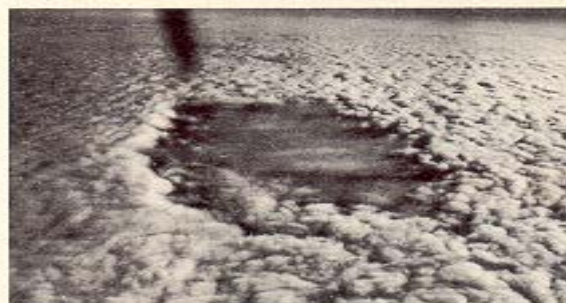
lluvia,



10:37 LST-16,100'



11:12 LST-14,250'
26 min. después de la inseminación



11:20 LST-16,100'
34 min. después de la inseminación



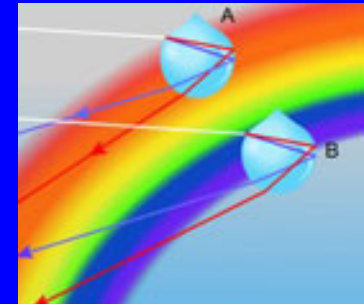
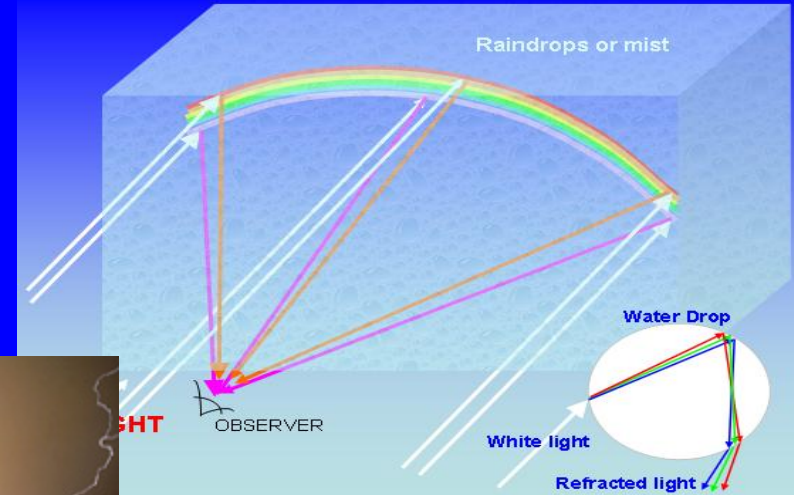
11:31 LST-16,200'
45 min. después de la inseminación

1972: Cambridge, EE.UU.



8. El arco iris

Descartes, Newton, Airy,...



Arco secundario



24/08/20

9. Procesos industriales



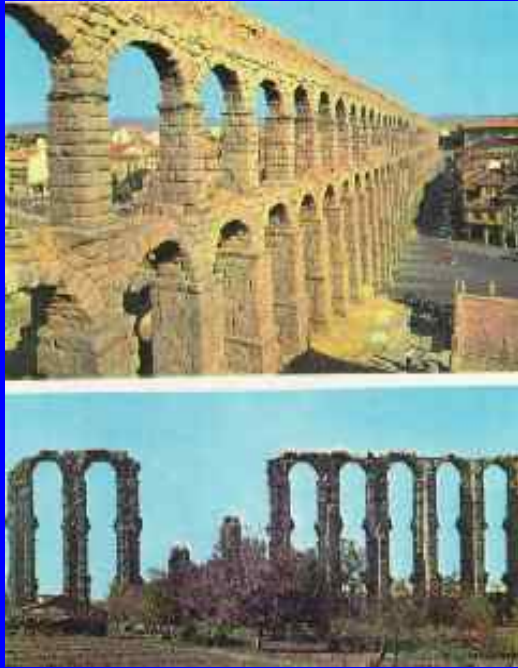
Las Médulas: Imperio Romano, a partir del siglo I d. C.

Canales que conducían el agua utilizada en el proceso de explotación del oro

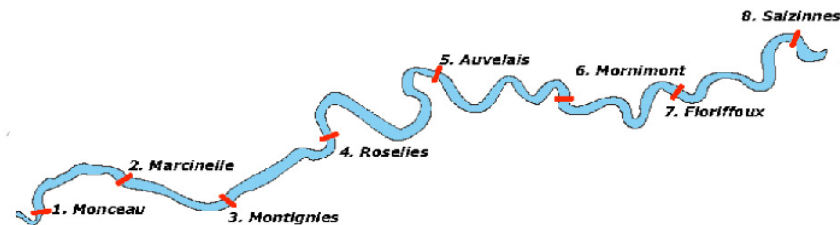
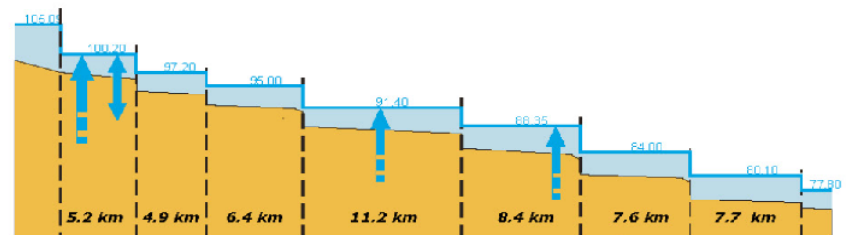
La palabra *hidráulica* viene del griego ὑδραυλικός (hydraulikós) que, a su vez, viene de ὑδραυλος, que significa "tubo de agua", palabra compuesta por ὕδωρ (agua) y αὐλός (tubo).

Drenaje, cloacas o red de saneamiento, en ingeniería y urbanismo, es el sistema de tuberías, sumideros o trampas, con sus conexiones, que permite el desalojo de líquidos, generalmente pluviales, de una población. La primera red de drenaje subterráneo se construyó en París, en el Siglo XIX.

Acueductos de Segovia y de Mérida



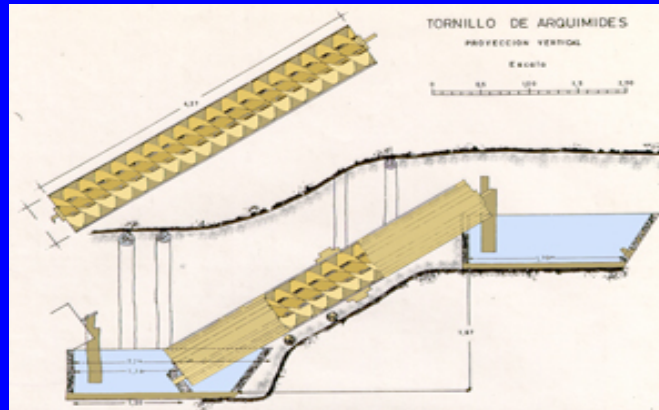
control del caudal, canales artificiales,



“Energía” : H. L. F. von Helmholtz (1821 –1894).

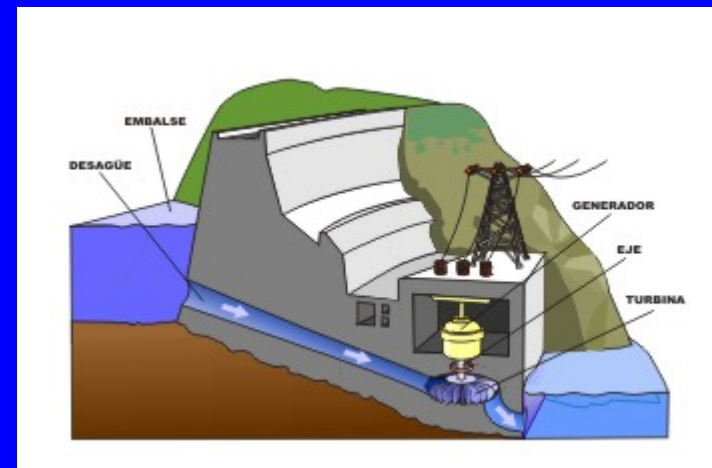
1847, *Über die Erhaltung der Kraft* (Sobre la conservación de la energía).

generación de energía



Tornillo de Arquímedes

generación de electricidad





Tres gargantas (China)



enfriamiento en
plantas industriales,



24/08/2023

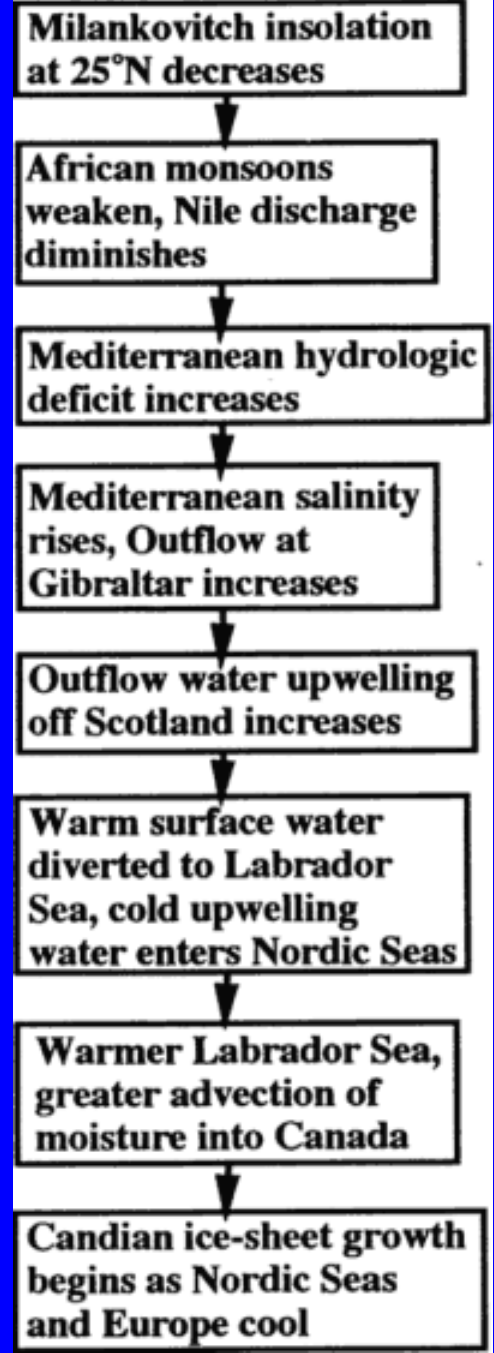
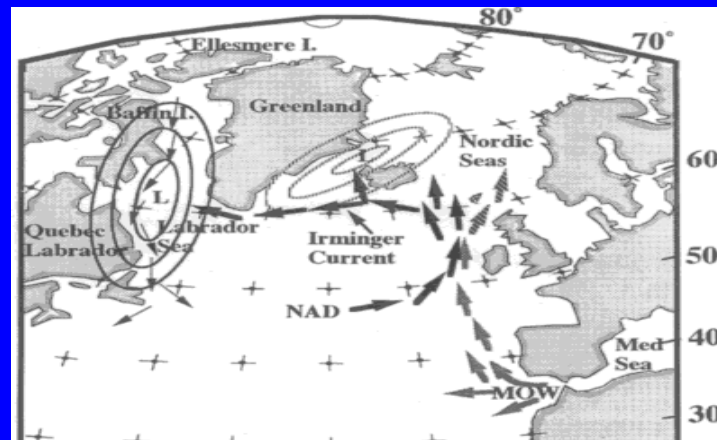
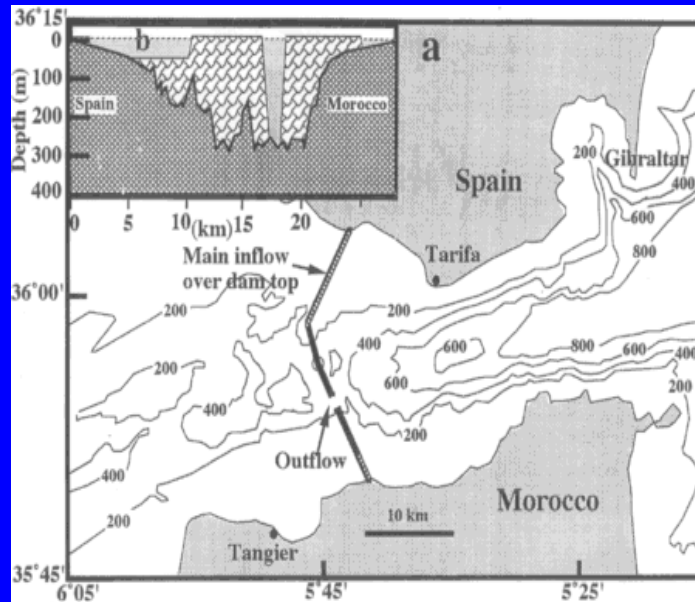
diseño de playas,
plantas desaladoras,



Vista de la zona donde se aplicará la recuperación de playas en Playa del Carmen, identificando la zona que se usará para extraer la arena al norte de Cozumel.

Acciones posibles propuestas: un dique en Gibraltar

R.G. Thomson
American Geophysical Union, 1997



10. Deportes acuáticos

Copa de América: competición como banco de pruebas.

Modelling and Numerical Simulation for Yacht Engineering

Nicola Parolini¹, Alfio Quarteroni^{1,2}

(¹ CMCS/IACS, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, ² MOX, Politecnico di Milano, Italy)



Figure 1: The Swiss yacht Alinghi, two-time winner of the America's Cup (2003 and 2007). Photo by Ivo Rovira.

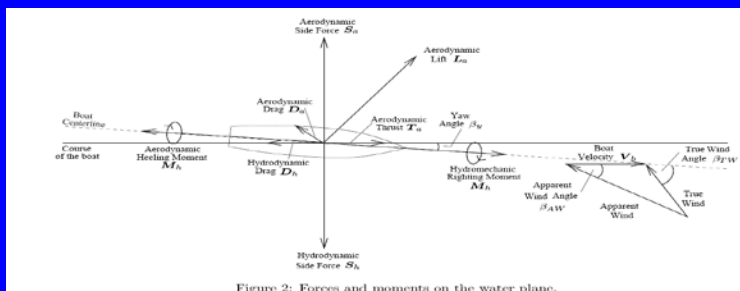


Figure 2: Forces and moments on the water plane.

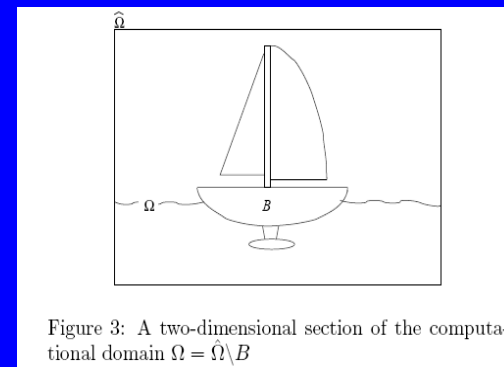
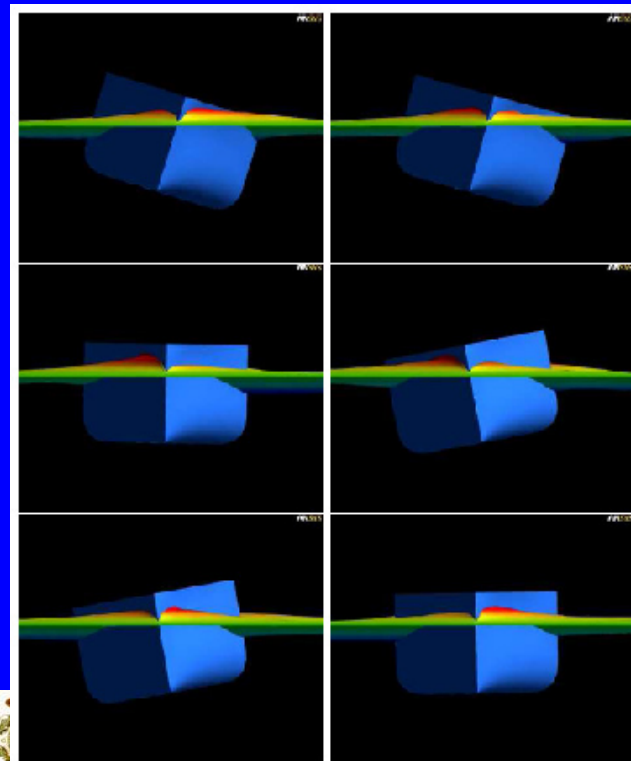


Figure 3: A two-dimensional section of the computational domain $\Omega = \hat{\Omega} \setminus B$



Acoplamiento del mar y del aire con las velas elásticas y el sólido rígido

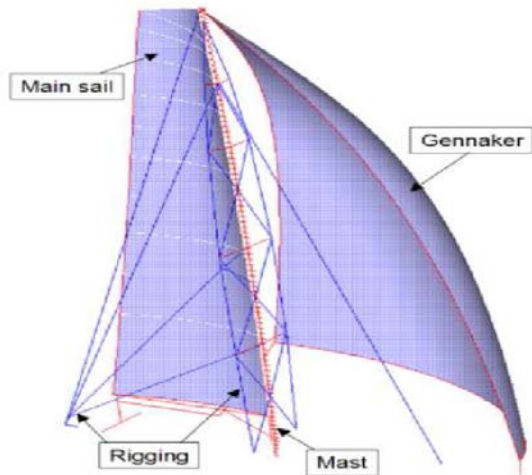


Figure 3: Components considered in the structural model.

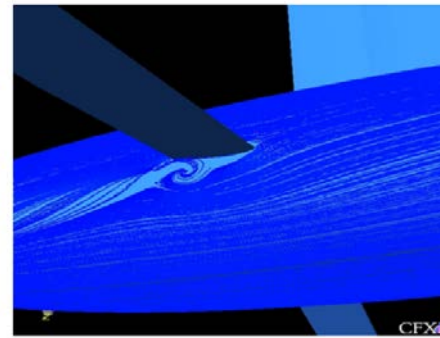


Figure 6: Separation bubble at the winglet-bulb junction.

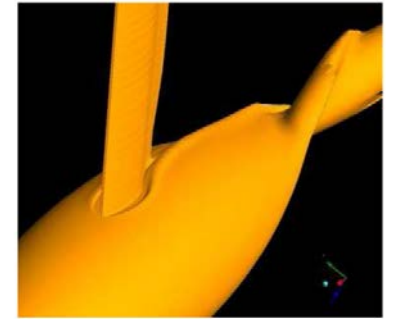


Figure 5: Isosurface of total pressure around bulb and keel. Note the horseshoe vortex generated around the keel-bulb junction.

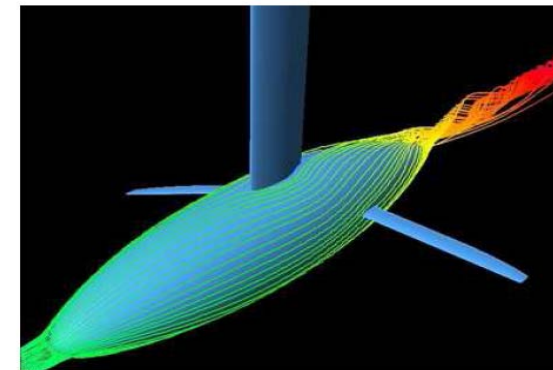
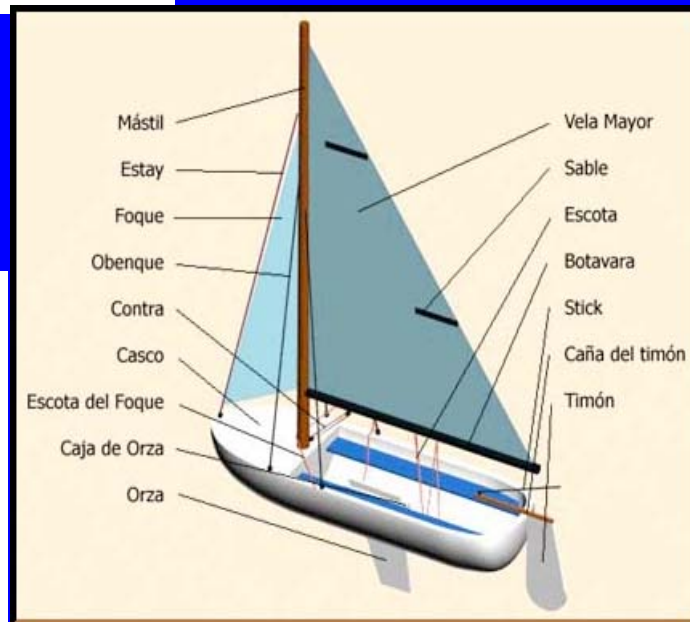


Figure 4: Streamlines around the appendages.



Figure 8: Setup of the 1.5:1 scale model in the wind tunnel.

Optimización: diseño de la orza (quilla) contrapeso

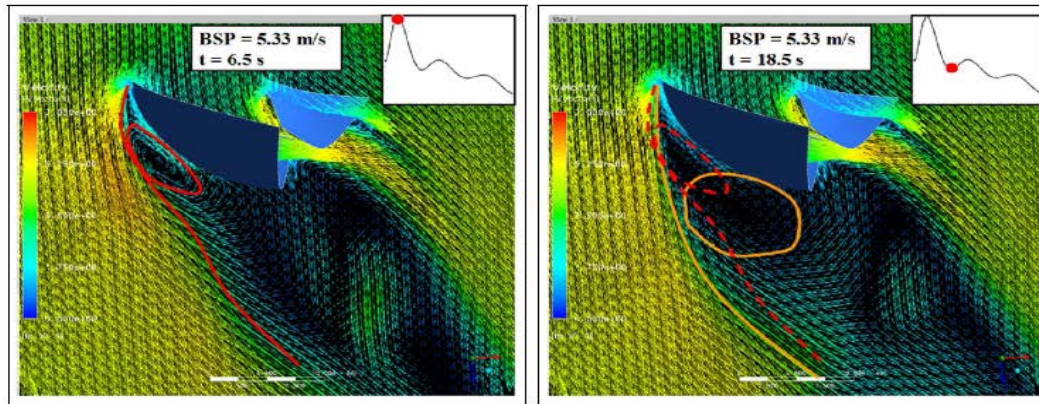
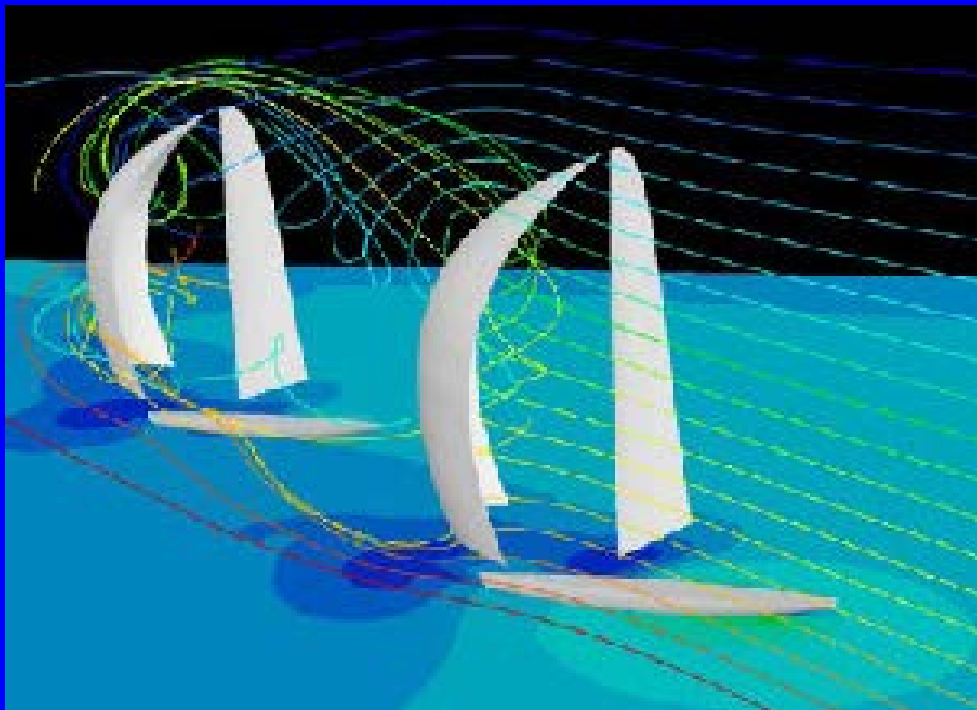
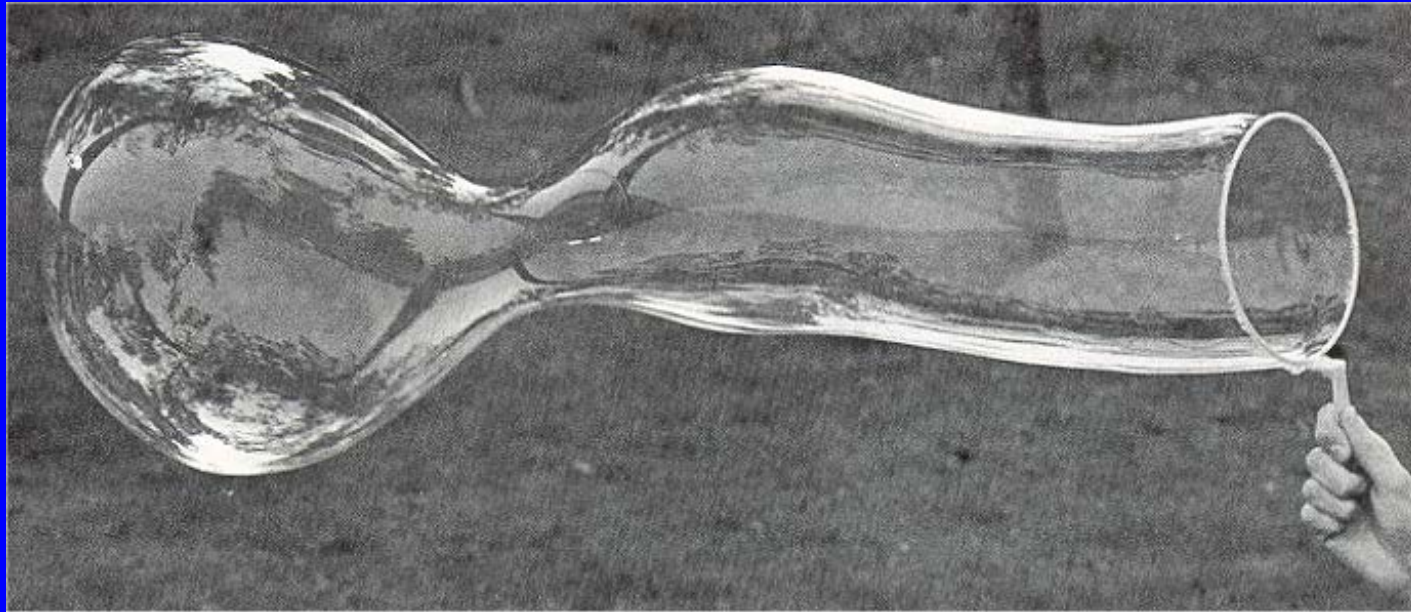


Figure 12: Fluid flow and driving force (in top-right corners) at two time instants, $T = 6.5 s$ (left) and $T = 18.5 s$ (right), for an unsteady fluid-structure simulation.

Teoría de juegos : la mejor estrategia





Gracias por su
atención



Instituto de España
San Bernardo, 49 Madrid
Tel. 91 522 48 85
secretaria@insde.es
www.insde.es
boletin.insde.es



CHARLES DARWIN: UNA VIDA Y UNA VISIÓN DEL MUNDO



MAYO
11
12
13
18
19
20

a las 19:30 h.

Coordinado por
JOSÉ M. SÁNCHEZ RON
de la Real Academia Española
y Contador del Instituto de España

CURSOS 2009

CHARLES DARWIN: UNA VIDA Y UNA VISIÓN DEL MUNDO

CURSOS 2009

CONTENIDO

Doscientos años después de su nacimiento y ciento cincuenta de la publicación de *El origen de las especies*, es oportuno estudiar de nuevo la vida y la obra de Charles Darwin (1809-1882). Su vida, no sólo por ser la de uno de los grandes científicos de todos los tiempos, sino también porque se inserta de manera particularmente intensa en la sociedad y en el mundo en el que vivió, un mundo que reaccionó de muy diversas maneras ante sus ideas, como muestra, por ejemplo, el caso de España.

Su obra, porque suministra elementos imprescindibles para cualquier visión de la naturaleza que pretendamos construir. Y también por su variedad, ya que las aportaciones de Darwin no se limitan a su célebre teoría de la evolución de las especies, afectando, directa o indirectamente, a muchas otras disciplinas, de las que en ese ciclo se tratarán algunas, como la geología, las matemáticas o la sociología (no olvidemos que fue Herbert Spencer quien acuñó el término "supervivencia de los más aptos").

2009 CURSOS

LUNES 11 de mayo

19:30 *Charles Darwin, su vida, su obra y su época*
JOSÉ M. SÁNCHEZ RON
de la Real Academia Española y
Contador del Instituto de España

MARTES 12 de mayo

19:30 *Evolución, Darwin antes y después*
EMILIANO AGUIRRE
de la Real Academia de Ciencias Exactas,
Físicas y Naturales

MIÉRCOLES 13 de mayo

19:30 *El evolucionismo en sociología:
de Spencer a Parsons*
SALUSTIANO DEL CAMPO URBANO
Presidente del Instituto de España, de
la Real Academia de Ciencias
Morales y Políticas

LUNES 18 de mayo

19:30 *Matemáticas en torno a Darwin*
JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
de la Real Academia de Ciencias Exactas,
Físicas y Naturales

MARTES 19 de mayo

19:30 *La geología en el pensamiento
científico de Darwin*
JOSÉ PEDRO CALVO SORANDO
Director General del Instituto
Geológico y Minero de España

MIÉRCOLES 20 de mayo

19:30 *La difusión del darwinismo y la libertad
de cátedra en España*
FRANCISCO JAVIER PUERTO
de la Real Academia Nacional de Farmacia

