Incertidumbre compatible con alguna certeza parcial: potenciales singulares en Mecánica Cuántica

J.I. Díaz

Universidad Complutense de Madrid

y

RAC

Madrid, 4 de Mayo de 2017

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE
FUNDACIÓN RAMÓN ARECES
Fundación Jorge Juan

0. Introducción

Dos temas tempranamente estudiados de la Mecánica Cúantica y su consideración actualizada vía argumentos insospechados.

E.P., Wigner: ***The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences***, Comm. Pure Appl. Math., 13, 1960, pp. 1-14.

Eugene Paul Wigner (1902-1995)

Premio Nobel de Física en 1963

Plan de la conferencia

1. Ejemplos pioneros de soluciones de la ecuación de Schrödinger: potencial de paredes verticales de Gamow (1928). Efecto túnel. Nuevos microscopios para Nanociencia

2. El potencial de paredes infinitas (Mott 1930): valor pedagógico. Ambigüedad (recientemente señalada) en su tratamiento.

3. Intermedio: comentarios de tipo histórico (visitas de Schrödinger a España en 1934 y 1935).
4. Breve regreso a la ciencia dura: certezas para potenciales adecuadamente singulares.

5. Últimos comentarios.

1. Ejemplos pioneros de soluciones de la ecuación de Schrödinger: Potencial de paredes verticales de Gamow.

Con intención de profundizar en trabajos de Max Plank y Niels Bohr, el austriaco E. Schroedinger, propuso en 1925, una ecuación en derivadas parciales con valores complejos, por, causó enseguida un gran impacto (de hecho transformó el mundo de la Física) pero que también causó un cierto “desconcierto inicial” ante la ausencia de soluciones explicitas.

Erwin Schrödinger (Viena, 1887-1961)

Curiosamente, ese fenómeno de desconcierto inicial apareció, similarmente, en 1750 (ecuación de ondas) y en 1975 con la aparición de los fractales de la mano de Benoît Mandelbrot (1924-2010).

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi, \text{ en } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \qquad i=\sqrt{-1}$$

$\psi : [0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ function de onda (L. de Broglie 1924: dualidad onda-particula)

$\hbar > 0$ constante renormalizada de Plank, m masa de la particula elemental,
$V(x) \in \mathbb{R}$ potencial de la fuerza externa

$$\boxed{\Delta u = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}}$$

Algunas veces me limitaré (por simplicidad en la exposición, a N=1)

Una buena parte de los primeros ejemplos concretos correspondían a los llamados estados estacionarios (*bound states*)

$$\boxed{\psi(x,t) = e^{-iEt}u(x)}$$

de la ecuación de Schrödinger en $\mathbb{R}^N$.

Para los propósitos de esta charla los valores exactos de m y $\hbar$ no son relevantes por lo que supondremos por simplicidad en la exposición que $m = 1$ y $\hbar = 1$.

Además, en matemáticas, es más usual denotar a los autovalores por λ en vez de E. Así, los estados estacionarios $u(x)$ deben resolver el problema elíptico

$$\boxed{-\Delta u + V(x)u = \lambda u \quad \text{en } \mathbb{R}^N.}$$

Motivado por un trabajo de 1927 de Ernest Rutherford (1871-1937), sobre dispersión de rayos alfa en Uranio, un, entonces jovencísimo, recién graduado, G. Gamow (1904-1958) analizó en 1928 el caso unidimensional del potencial de Coulomb

$$V(x) = k\frac{x}{||x||}$$

(modificado cerca del origen).

George Gamow
(Odessa, Ukrania 1904-Boulder (Colorado, USA), 1968)

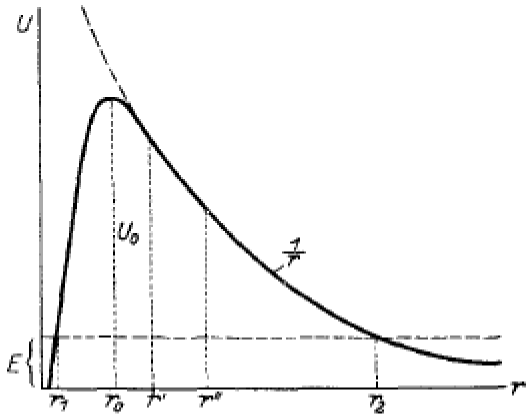


Fig. 1.

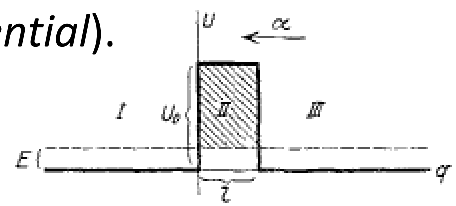
Zur Quantentheorie des Atomkernes.

Von G. Gamow, z. Zt. in Göttingen.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1928.)

Traducción para mi por Uwe Brauer (UCM)

Al parecer, por primera vez en la literatura (**y desde entonces repetido en todos los libros de texto sobre Mecánica Cuántica**) Gamow (24 años) reemplazó ese potencial por otro más simple pero que contenía las principales dificultades: el potencial (discontinuo) de paredes verticales (*well potential*).



El trabajo de Gamow, de hecho, fue simultaneo (incluso una semana posterior) al publicado en *Nature* por el inglés R. F. Gurney (1898-1953) y el norteamericano E. Condon (1902-1974) [experimentalistas: no hablaban de potenciales discontinuos].

Gamow dice en su póstuma autobiografía *My World Line,* (ver página 62) , publicada en 1970*,* que esa pudo ser la causa de que ninguno de los tres recibiesen el premio Nobel.

En su artículo de 1928, Gamow consideró el pozo de potencial finito resolviendo el problema en un ***sentido débil***: la solución no podía ser de clase C^2 (pues la función potencial era discontinua) y era meramente de clase C^1. Era coherente con la noción de ***solución débil*** introducida varios años más tarde por Jean Leray (1906-1998), Sergei Sobolev (1908-1989) y Laurent Schwartz (1915-2010).

Curiosamente, en su autobiografía, *My World Line,* cuenta (página 59) que no sentía una especial atracción por las matemáticas (Calculus, EDPs, etc.) y que de hecho pidió a un colega matemático ruso ***N. Kotshchin*** (que estaba también ese verano en Göttingen) que le calculase una integral singular que necesitaba.

Zum Schluß möchte ich noch meinem Freund N. Kotschin meinen besten Dank aussprechen für die freundliche Besprechung der mathematischen Fragen. Auch Herrn Prof. Born möchte ich für die Erlaubnis, in seinem Institut zu arbeiten, herzlich danken.

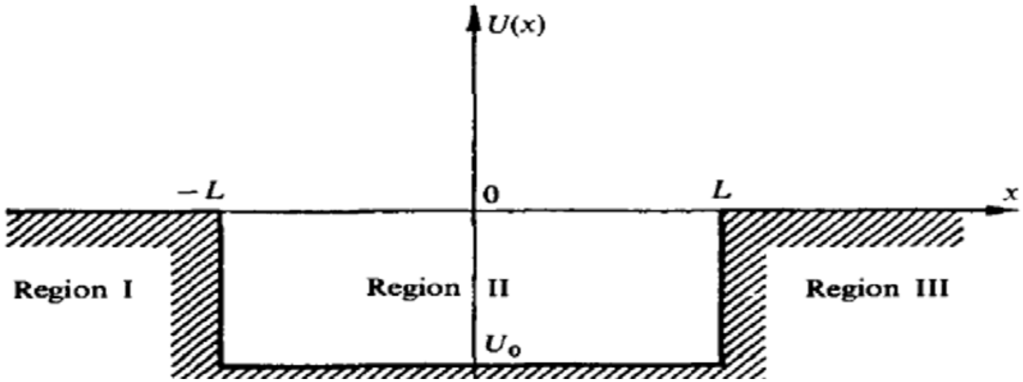
Göttingen, Institut für theoretische Physik, 29. Juli 1928.

No llegó a Göttingen invitado por nadie sino con una beca para pasar allí ese verano (recomendación de un profesor suyo en *Leningrado*).

En ese trabajo genial, el entonces jovencísimo autor, del que me declaro gran admirador, mostró por primera vez el llamado “efecto túnel” para potenciales de paredes finitas que ha sido la base de la generación de microscopios denominados “de efecto túnel” y sobre los que descansan los enormes progresos de la Nanociencia y la Nanotecnología de nuestros días.

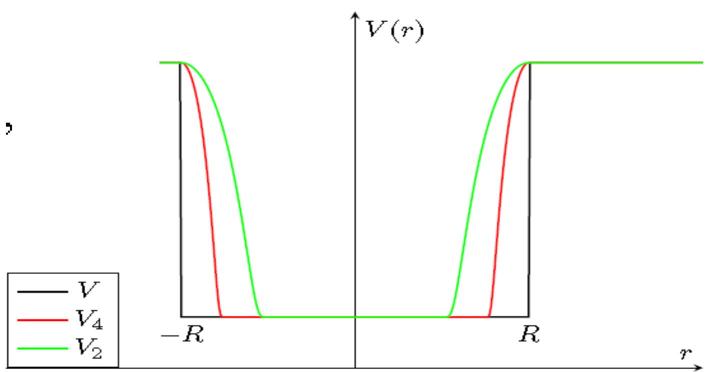
El problema es “bastante similar” a cuando se supone que el potencial es de tipo “pozo”

$$V_q(x : R, V_0) = \begin{cases} V_0 & \text{if } x \in (-R, R), \\ q & \text{if } x \notin (-R, R). \end{cases}$$



En el caso de la Mecánica Clásica, el plano de fases para tal tipo de potencial sería (notas de mi curso de Mecánica y Ondas (2º de la Facultad Matemáticas, UCM):

$$V(r) = \begin{cases} V_+, & r \notin (-R, R), \\ V_0, & r \in (-R, R) \end{cases}$$



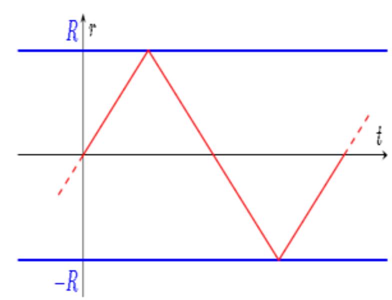
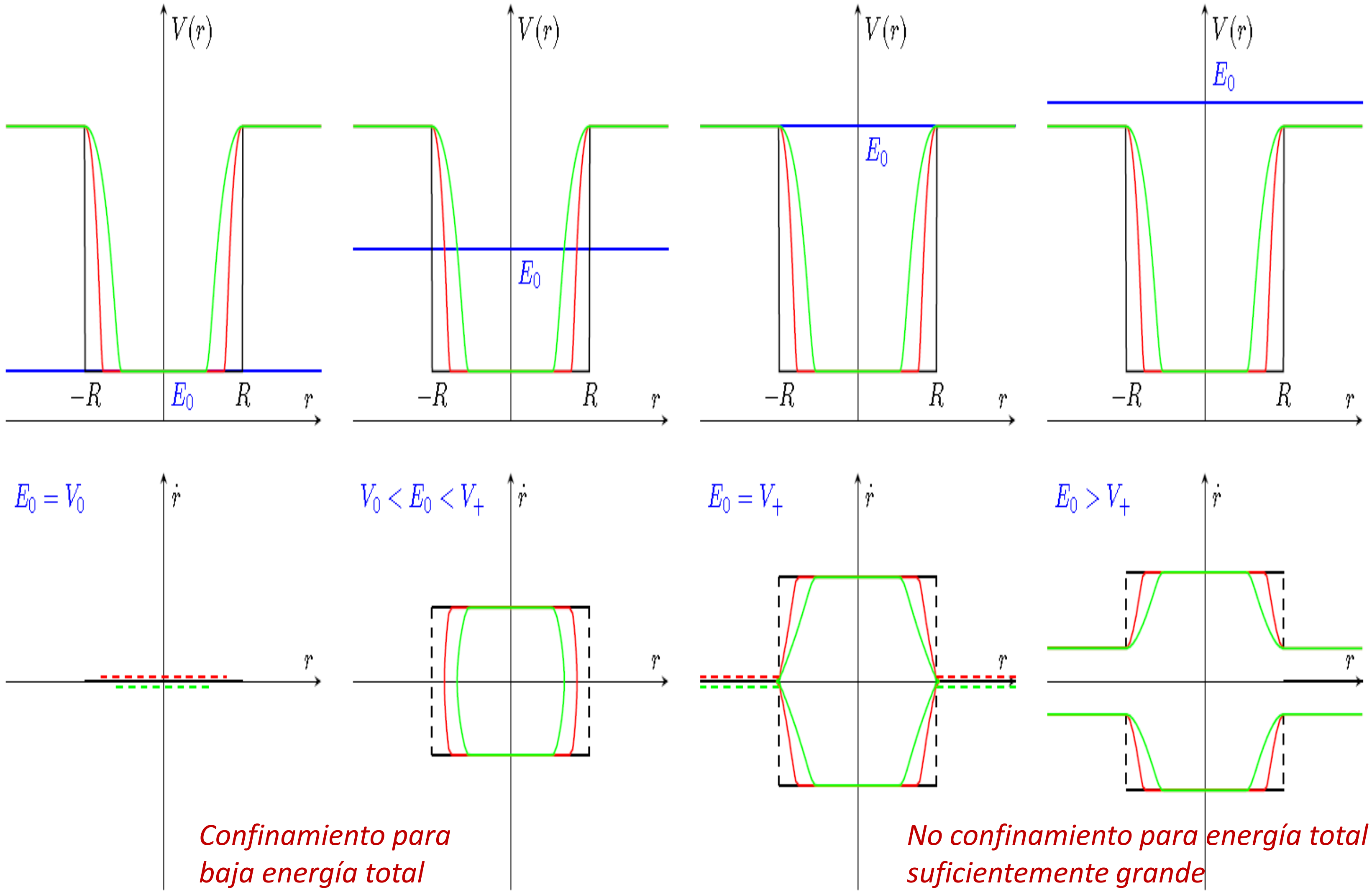


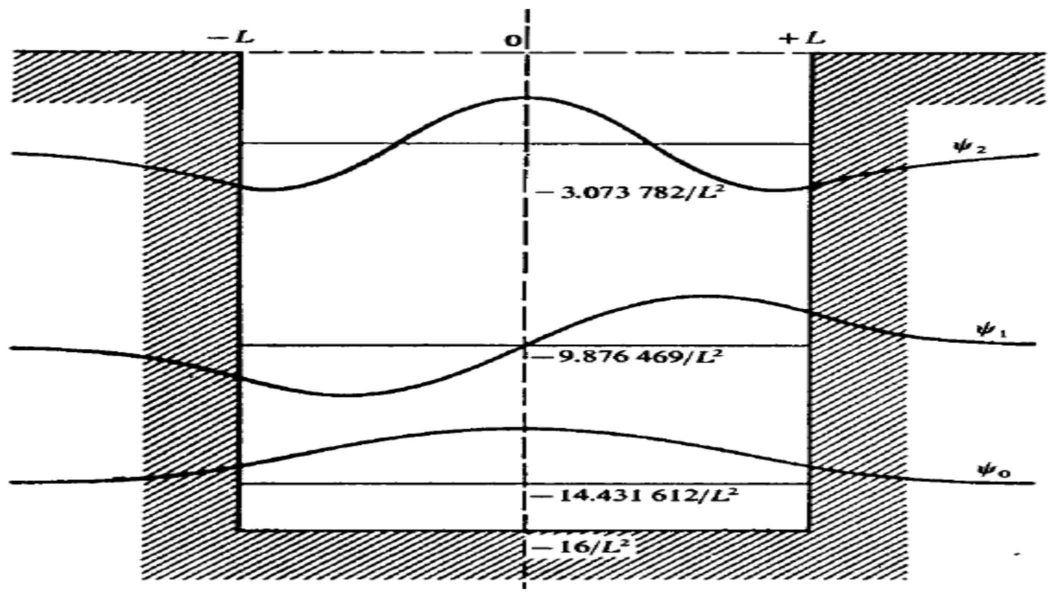
Figura 2.6.3: Solución del potencial de pared finita si $V_0 < E_0 < V_+$.



(a) $E_0 = V_0$ (b) $V_0 < E_0 < V_+$ (c) $E_0 = V_+$ (d) $E_0 > V_+$

No es exactamente como si la partícula “rebotase en las paredes” (libros de texto)

Sin embargo, Gamow mostró en 1928 que en el caso cuántico la partícula penetraba más allá de las paredes (incluso para bajas energías: menores que la altura del pozo)



Wave functions and potential for a square potential well with $L|U_0|^{1/2} = 4$

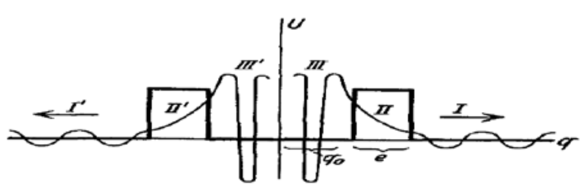
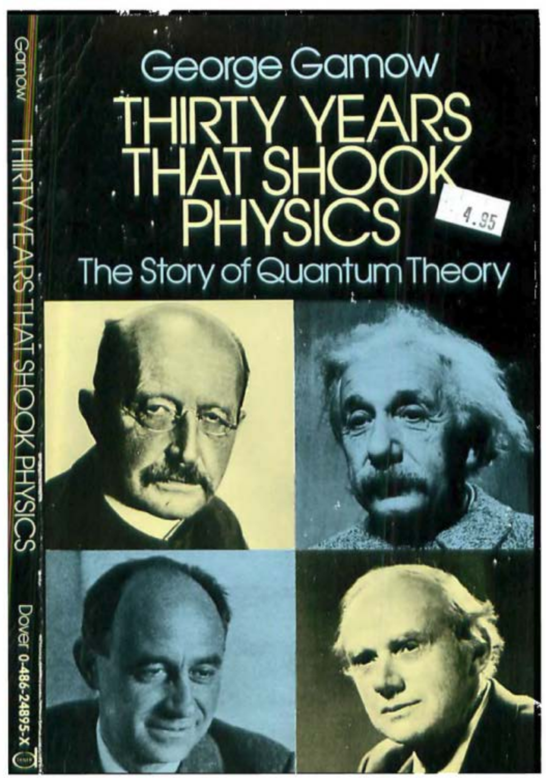


Fig. 3.

Figura en el artículo de Gamow de 1928

Descripción de Gamow en uno de sus libros



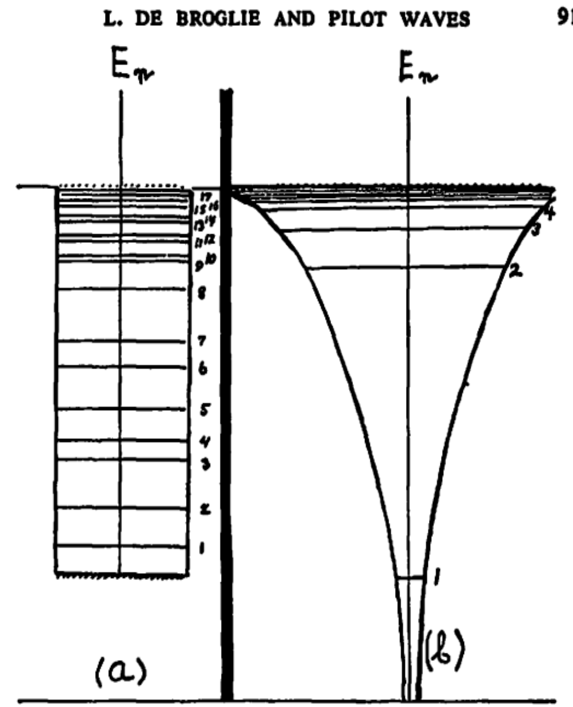


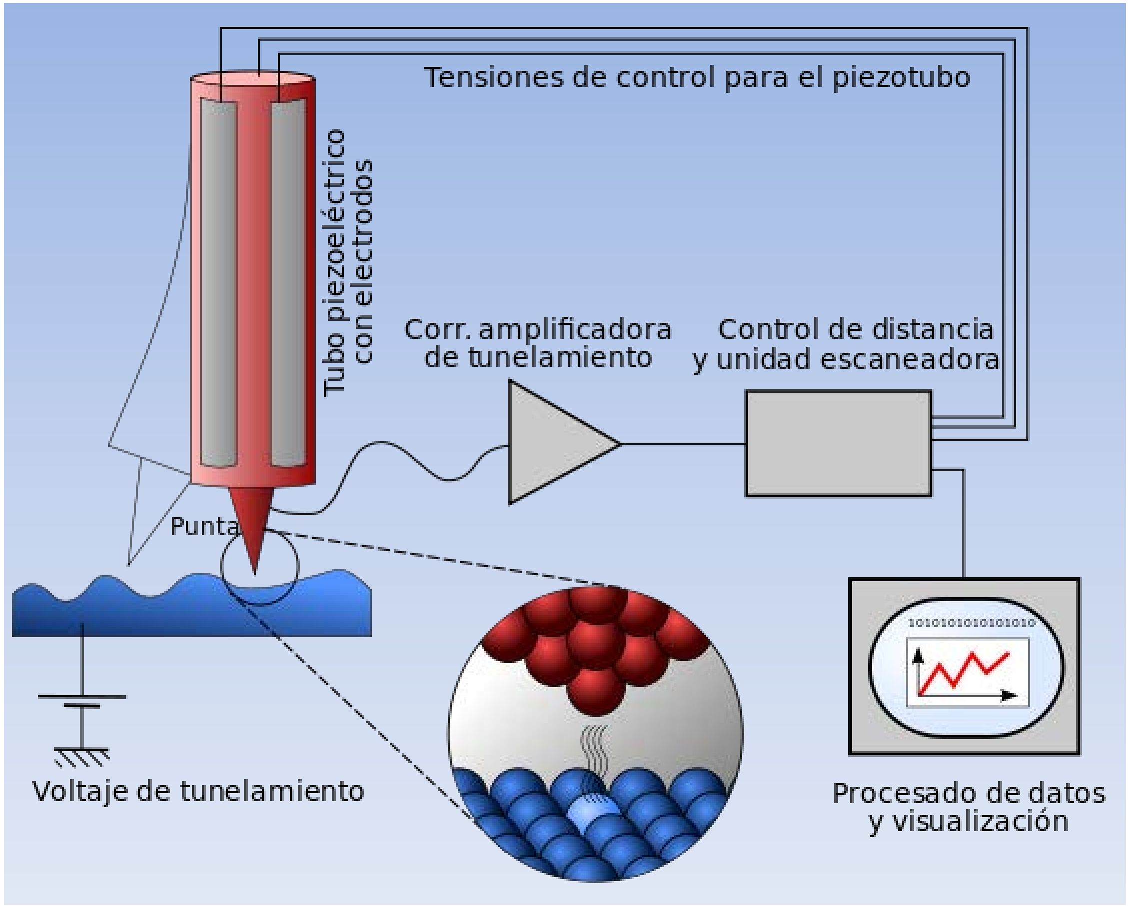
Fig. 22. Quantum energy levels in a rectangular potential hole (a) and in a funnel-shaped potential hole (b).

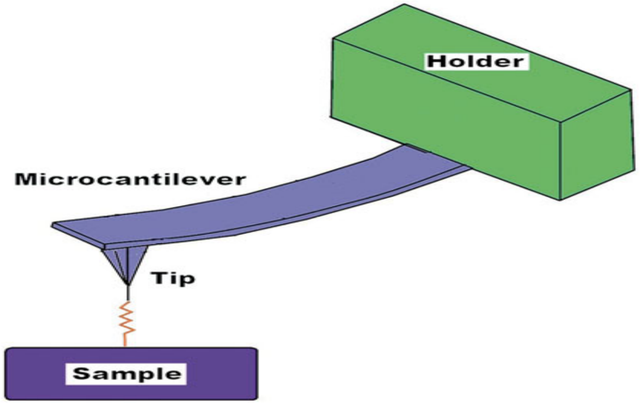
Es el llamado “efecto túnel” para potenciales de paredes finitas que ha sido la base de la generación de microscopios denominados “de efecto túnel” y sobre los que descansan los enormes progresos de la Nanociencia y la Nanotecnología de nuestros días.

Microscopios de Efecto Túnel (en inglés *Scanning tunneling microscope* o STM)

G. Binnig y H. Rohrer (de IBM Zürich),
1981: Premio Nobel de Física de 1986

- imágenes de superficies a nivel atómico.
- resolución de 0.1 nm 1nm=$10^{-9} m$


Tensiones de control para el piezotubo
Tubo piezoeléctrico
con electrodos
Corr. amplificadora
de tunelamiento
Control de distancia
y unidad escaneadora
Punta
Voltaje de tunelamiento
Procesado de datos
y visualización

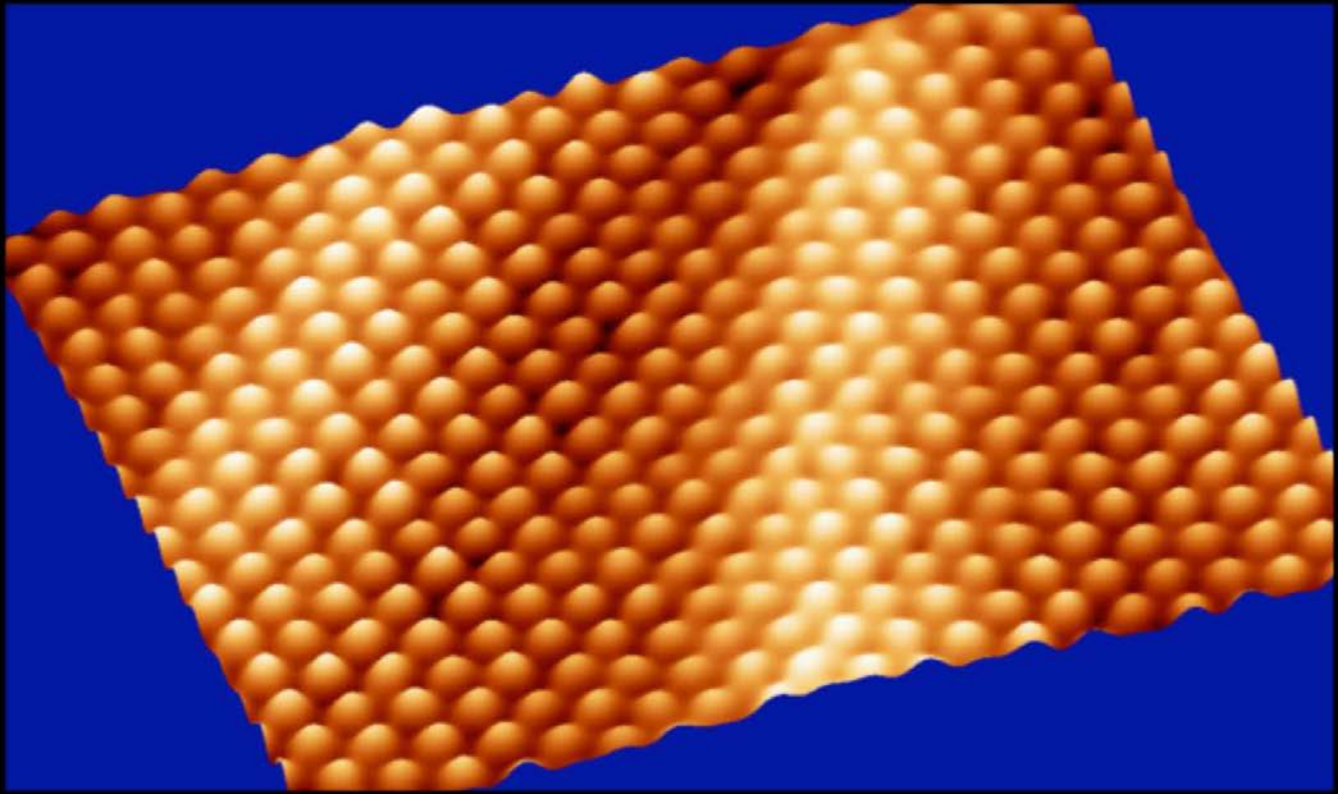

Holder
Microcantilever
Tip
Sample

Como David y Goliat.

En la fotografía puede verse claramente la diferencia de tamaños entre un microscopio electrónico de transmisión, conocido como TEM (al fondo) y un microscopio de efecto túnel (en la mano del investigador).

Abajo, a la derecha, se presenta una fotografía del microscopio de efecto túnel, STM.

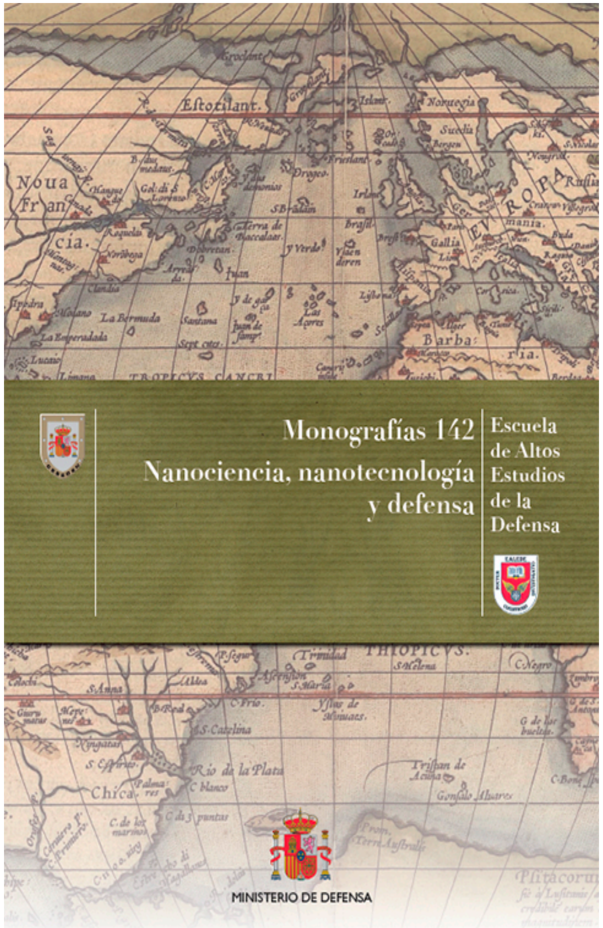
Ambos microscopios pueden llegar a ver átomos, pero resulta sorprendente cómo utilizando las ideas de la física cuántica se puede construir un microscopio tan pequeño y tan potente.



Paisajes del nanomundo. Cada una de estas "bolas" es un átomo en una superficie de oro. Esta imagen fue obtenida con un microscopio de efecto túnel (STM) operando en ultra alto vacío. Veinticinco siglos después de que Demócrito propusiese la existencia de los átomos, se han construido microscopios que nos permiten verlos, manipularlos y construir tecnología con ellos. La distancia que separa cada uno de los átomos es más de diez mil veces más pequeña que el grosor de un cabello humano.

Nanociencia y Nanotecnología en Defensa

http://publicaciones.defensa.gob.es/inicio/libros/libro/nanociencia-nanotecnologia-y-defensa.-nº-142?



Presidente:
Excmo. Sr. D. Jesús Ildefonso Díaz Díaz
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Vocales
Excmo. Sr. D. Antonio Hernando Grande
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Excmo. Sr. D. Fernando Briones Fernández-Pola
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
D. Julio Plaza del Olmo
Unidad de Fotónica. Instituto Tecnológico La Marañosa
D. Jesús Carlos Gómez Pardo
Teniente Coronel del Ejército de Tierra

Unas pinceladas sobre la vida de Gamow

Gueorgi Antonovich Gamow, nacido en 1904 en Odesa (entonces Rusia, hoy Ucrania)

Estudió primero en la Universidad de Novorossia, en Odesa, pero en 1922, interesado en estudiar Física Teórica, se marchó a la Universidad de Leningrado (San Petersburgo). Allí coincidió con dos colegas de talla excepcional: **Dmitri Ivanenko** y *Lev Landau* (Los Tres Mosqueteros).

Sus resultados de 1928 en Göttingen investigación en el núcleo atómico fueron la base de su tesis doctoral.
Entre 1928 y 1931 trabajó en el Instituto de Física Teórica de la Universidad de Copenhague (con Niels Bohr): *beca Carlsberg*

Breve estancia, en 1929 para trabajar con Ernest Rutherford, en el Cavendish Laboratory de Cambridge.

De 1932-1933 URSS. Emigra clandestinamente a Alemania con su esposa (representante ruso en el Congreso Solvay, Bruselas, Octubre 1933)

Tras breves estancias en el laboratorio de Marie Curie, en el Cavendish y en el instituto de Bohr en Copenhague, obtuvo una plaza de profesor en la Universidad George Washington (otro famoso artículo Gamow-Teller, en 1936, mejorando uno de Fermi)

Hacia mediados de la década de 1940-50, Gamow cambió de tema de trabajo de nuevo. Se consideraba bastante torpe con las matemáticas y comentaba que cuando un tema empezaba a complicarse desde el punto de vista de los cálculos procuraba cambiar a otro que requiriese una matemática más sencilla.

Cosmología física: el estudio del origen del universo y de su evolución.

Predijo la temperatura de la radiación cósmica de fondo de microondas (junto a Alpher y Herman). En 1964, los físicos estadounidenses Penzias y Wilson descubrieron por accidente el “ruido de fondo” (Premio Nobel en 1978) *Teoría del Big Bang.*

En 1948 publicó en Physical Review «El origen de los elementos químicos», firmado por **Alpher, Bethe y Gamow**. El trabajo lo habían llevado a cabo Gamow y Alpher, pero Bethe, un reputado físico teórico de la Universidad de Cornell, ganador del premio Nobel de Física en 1967, no sabía nada del mismo. Gamow quiso incluirlo porque así las iniciales de los autores coincidían con las de los tres procesos radiactivos básicos (**alfa, beta y gamma**) y con las tres primeras letras del alfabeto griego, lo que le resultaba especialmente divertido.

Algunos años más tarde se enroló en lo que el mismo denominaba “una extravagante desviación en el campo de las ciencias biológicas”. Fue entonces cuando, poco después de que Crick y Watson descubrieran la estructura de doble hélice de la molécula de ADN, Gamow estudió **cómo los cuatro tipos de bases presentes en el ADN forman los 20 aminoácidos constituyentes de las proteínas**.

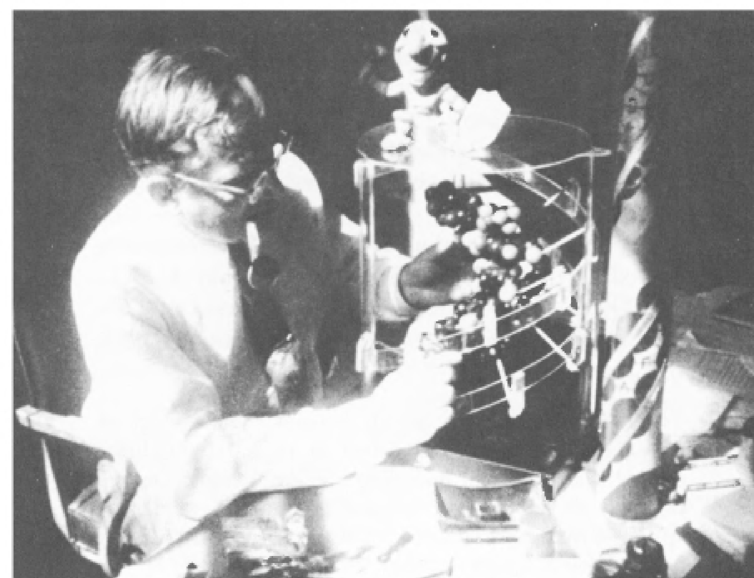
Además de su relevancia como investigador, Gamow destacó como ***divulgador científico*** y obtuvo en 1956 el **premio Kalinga, otorgado por la Unesco**.
Entre sus publicaciones más conocidas en este campo están los cuatro libros sobre las **aventuras del Sr. C.G.H. Tompkins** (un empleado de banca aficionado a la física, cuyas iniciales responden a tres de las constantes universales fundamentales: c, la velocidad de la luz en el vacío, G, la constante de gravitación universal, y h, la constante de Planck.
Gamow publicó también otros veinte libros más de divulgación de la física.

En 1955, se trasladó a la Universidad de Colorado, estado en el que falleció en 1968.

Afterword: Notes on My Life in the U.S. [143

A composite picture of Robert Herman, George Gamow (as a genie coming out of a bottle of ylem), and Ralph Alpher, from photographs taken in 1949.

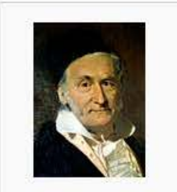
146] MY WORLD LINE



Building a DNA model in 1954.

Göttingen, Institut für theoretische Physics (dirigido por Max Born en 1928)

47 Premios Nobel



Carl Friedrich Gauss, mathematician

Bernhard Riemann, mathematician

David Hilbert, mathematician

Felix Klein, mathematician

Constantin Carathéodory, mathematician

Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathematician

Max Born, physicist

J. Robert Oppenheimer, physicist

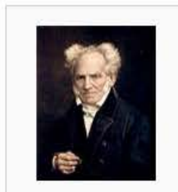
Max Planck, physicist

Walther Nernst, chemist

Friedrich Wöhler, chemist

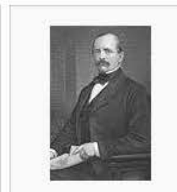
Heinrich Heine, poet

Brothers Grimm, writers



Arthur Schopenhauer, philosopher

Rudolf von Jhering, jurist



Otto von Bismarck, "Iron Chancellor" of the second German Empire

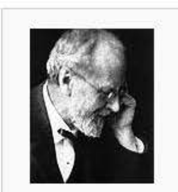
Richard von Weizsäcker, former President of Germany

Gerhard Schröder, former Chancellor of Germany

Max Weber, sociologist

Jürgen Habermas, sociologist

John von Neumann, mathematician

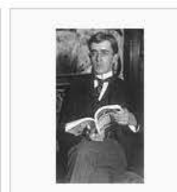


Gottlieb Burckhardt, psychiatrist

Werner Heisenberg, Physicist

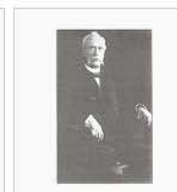
Enrico Fermi, Physicist

Wolfgang Pauli, Physicist



Irving Langmuir. Chemist/Physicist

Max Von Laue. Physicist



Rudolph Sohm, lawyer and Church historian

William Graham Sumner. Sociologist

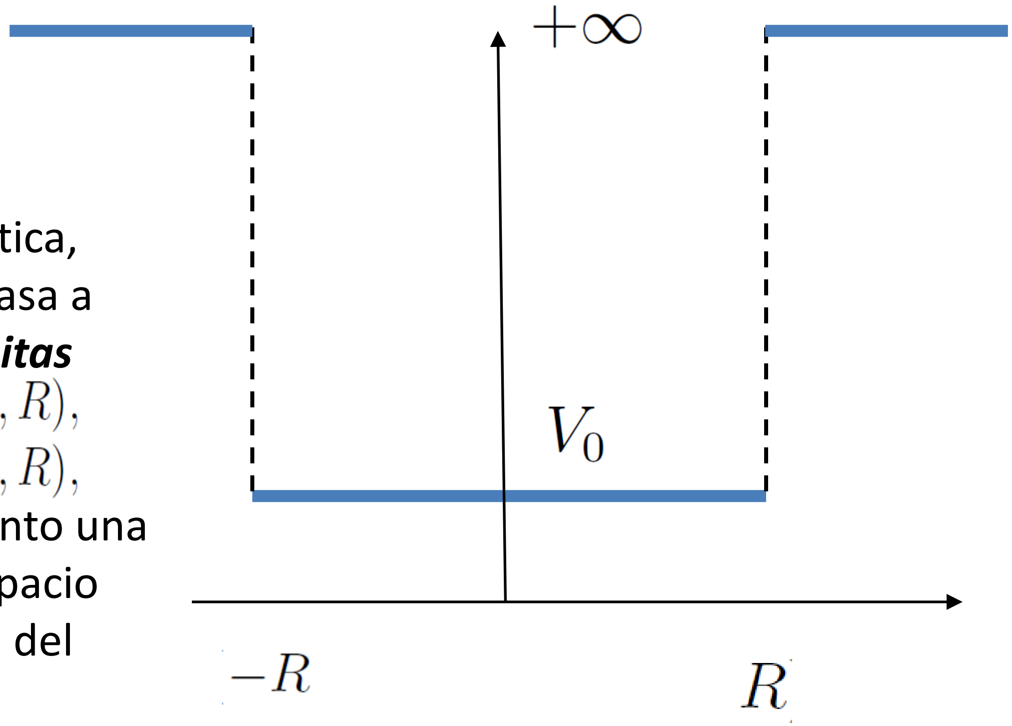
Göttingen also had a focus on natural science, especially mathematics. Carl Friedrich Gauss taught here in the 19th century. Bernhard Riemann, Peter Gustav Lejeune Dirichlet and a number of significant mathematicians made their contributions to mathematics here. By 1900, David Hilbert and Felix Klein had attracted mathematicians from around the world to Göttingen, which made Göttingen a world mecca of mathematics at the beginning of the 20th century.

2. El potencial de paredes infinitas: valor pedagógico y ambigüedad en su tratamiento.

En los libros de texto de Mecánica Cúantica, tras el potencial de paredes finitas, se pasa a considerar el ***potencial de paredes infinitas***

$$V_\infty(x:R,V_0)=\begin{cases} V_0 & \text{if } x\in(-R,R),\\ +\infty & \text{if } x\notin(-R,R),\end{cases}$$

¿Cómo interpretar un potencial (y por tanto una fuerza) que vale infinito sobre todo el espacio excepto sobre un subconjunto compacto del espacio total?



Matemáticamente se podría dar un sentido (técnicamente muy sofisticado) por medio de la teoría de las medidas de Borel.

Espacio medible $(\Omega,\mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega\in\mathcal{A}$
- $A\in\mathcal{A}\ \Rightarrow\ \Omega\setminus A\in\mathcal{A}$
- $A_n\in\mathcal{A}\ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset,\Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

- Toda intersección de σ-álgebras es una σ-álgebra
- Para $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$, existe la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{S}$
- Ω espacio topológico con topología $\mathcal{T}$: la σ-álgebra de Borel de Ω es la engendrada por $\mathcal{T}$. Sus elementos son los conjuntos de Borel en Ω.

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega\in\mathcal{A}$
- $A\in\mathcal{A}\ \Rightarrow\ \Omega\setminus A\in\mathcal{A}$
- $A_n\in\mathcal{A}\ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset\in\mathcal{A}$
- $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{A}\ \Rightarrow\ \bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{A}$
- $A_n\in\mathcal{A}\ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$
- $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{A}\ \Rightarrow\ \bigcap_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{A}$
- $A,B\in\mathcal{A}\ \Rightarrow\ A\setminus B\in\mathcal{A}$

Medida

$\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Medidas de Borel

Medida de Borel en un espacio topológico Ω = Medida definida en la σ-álgebra de Borel de Ω

Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$ arbitrario, $m: \Omega \to [0,\infty]$ cualquier función y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} m(x) := \sup\{\sum_{x\in J} m(x) : J \subseteq A,\ J \text{ finito}\} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

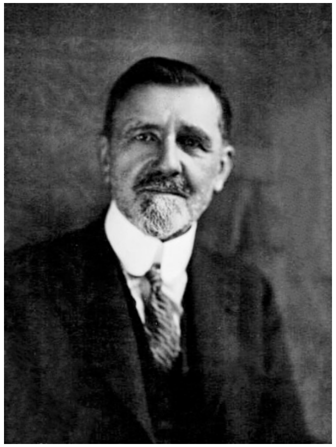
Medidas de Dirac

Fijado $x \in \Omega$, para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define:

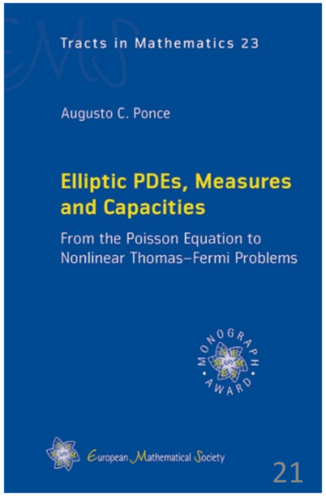
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con $m(x) = 1$ y $m(\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

F. É. J. Émile Borel (1871 - 1956)



Monografía de 2016 tratando la ecuación estacionaria de Schrödinger con medidas de Borel



En la mayoría de los libros de texto se emplea el siguiente argumento:
El producto V(x)ψ(x,t) *solo tiene sentido*, allí donde V(x)=+∞, imponiendo que se cumpla que ψ(x,t)=0 para esos valores de x.

Argumento equívoco en matemáticas (regla de l'Hôpital,…)

Un camino más natural para definir la solución es "pasar al límite" cuando $q \to +\infty$ en las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger con potenciales de paredes verticales de altura q.

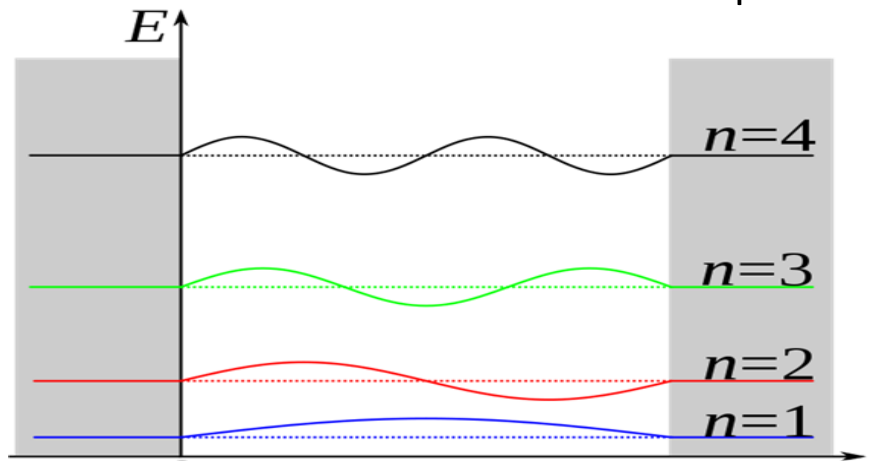
Aunque en algunos libros de texto se menciona este procedimiento, pero como no lo vi bien justificado en ninguna referencia **(¿en qué topología se produce la convergencia de las soluciones?:** *como no lo encontré en la literatura lo escribí con detalle* (la referencia será dada más adelante).

LEMMA 2.1 Given $q > 0$ and $V_q(x : R, V_0)$ defined by (1.2) problem (1.3), with $N = 1$, has a numerable sequence of eigenvalues $\lambda_n(q)$ and eigenfunctions $u_{q,n}(x)$ (renormalized such that $\|u_{q,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$). Moreover, as $q \to +\infty$,

$$\lambda_n(q) \to \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2 n^2, \quad \text{with } n \in \mathbb{N},$$

and $u_{q,n} \to u_n$ weakly in $H^1(\mathbb{R})$, with u_n given by (1.5) and u_n extended by zero on $\mathbb{R} - (-R, R)$.

En términos de la formulación física completa



$$E_n = \frac{h^2}{2m} \lambda_n$$

Caso excepcional: **certeza parcial** (la partícula ha de estar en el pequeño compacto (-R,R) compatible con la incertidumbre general señalada por Heisenberg…..

Relación con el principio de incertidumbre de Heisenberg: la función de onda es nula fuera del un compacto ((-R,R) en el caso unidimensional

Biografía de la Física www.librosmaravillosos.com George Gamow

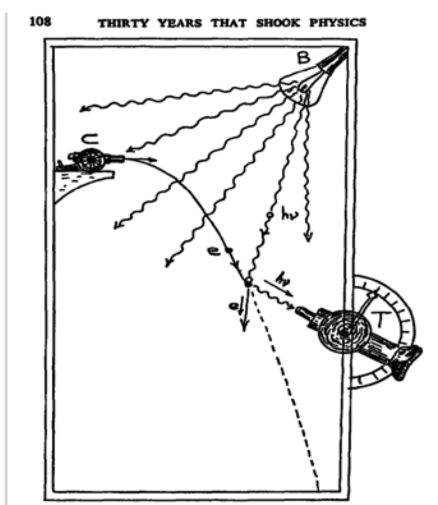
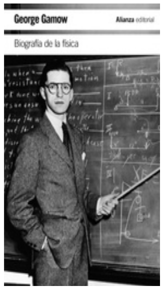


Fig. 24. Heisenberg's ideal quantum microscope interpreting the uncertainty relations: $\Delta p \Delta q \geq h$.

¿Qué ocurriría si un electrón fuera disparado en la cámara? Según los textos clásicos de mecánica, la partícula seguiría una trayectoria conocida como parábola. Pero de hecho, en el momento en que un fotón choca contra él, el electrón retrocederá y cambiará su velocidad. Observando la partícula en puntos sucesivos de su movimiento, veremos que sigue un curso en zigzag a causa de los impactos del fotón. Pero como tenemos un instrumento idealmente flexible, aminoramos los impactos reduciendo la energía de los fotones, lo que se puede hacer empleando luz de menor frecuencia. De hecho, llegando al límite de la frecuencia infinitamente baja (lo que es posible en nuestro aparato) podemos hacer la perturbación del movimiento del electrón tan pequeña como deseamos. Pero entonces surge una nueva dificultad. Cuanta más larga la onda de luz menos seremos capaces de determinar el objeto a causa del efecto de difracción. Así, pues, no podemos encontrar la posición exacta del electrón en un instante dado. **Heisenberg demostró que el producto de las incertidumbres sobre posición y velocidad nunca puede ser menor que la constante de Planck dividida por la masa de la partícula**:



Curiosamente, el problema de paredes infinitas no es atribuido a Gamow sino a N.F. Mott
N.F. Mott, **An Outline of Wave Mechanics**, Cambridge University Press, 1930.

Sir Nevill Francis Mott (1905 –1996)

Premio Nobel de Física (en 1977)

SECTION III

NORMAL MODES OF A DE BROGLIE WAVE

Let us consider an electron shut up in a box. The walls of the box are to be of some perfectly elastic medium, so that the electrons are reflected without loss of energy. Now we have been able to describe all that we can observe of the behaviour of a free electron by means of a wave function ψ which obeys the wave equation; perhaps the same method will describe the behaviour of an electron in a box. Just what kind of solution to look for is not immediately obvious, so let us for a moment forget that our waves have any connection with electrons, and enquire as to what kind of oscillation waves in a box can perform.

In the first place, since the electron is always in the box, ψ must vanish outside the box. As we assumed in Chapter I, ψ must be continuous; and therefore ψ must vanish on the walls of the box. If now we confine ourselves to motion in one direction, say along the x-axis, we see that the wave length of the waves that ψ represents must, *just as in the case of the stretched string*, be a divisor of twice the length of the box. If l be the distance between the walls of the box, and λ the wave length of the waves, then

$$\lambda = 2l/n,$$

where n is an integer.

Algunas buenas referencias sobre el potencial de paredes infinitas:

M. Belloni and R.W. Robinett, The infinite well and Dirac delta function potentials as pedagogical, mathematical and physical models in quantum mechanics, Physics Reports 540 (2014) 25—122 (contiene 148 referencias sobre el tema)

D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New York, 1995:

"Este potencial es muy artificial, pero le insto a tratarlo con respeto. Pese a su simplicidad – o, más bien, precisamente debido a su simplicidad- sirve maravillosamente como banco de prueba accesible para todas las virguerías (*fancy stuff*) que vienen más adelante ".

El potencial de paredes infinitas (*Jeans' cube*) según Gamow en 1966

G. Gamow: Thirty Years That Shook Physics: The Story of Quantum Theory, 1966, Dover Publications,

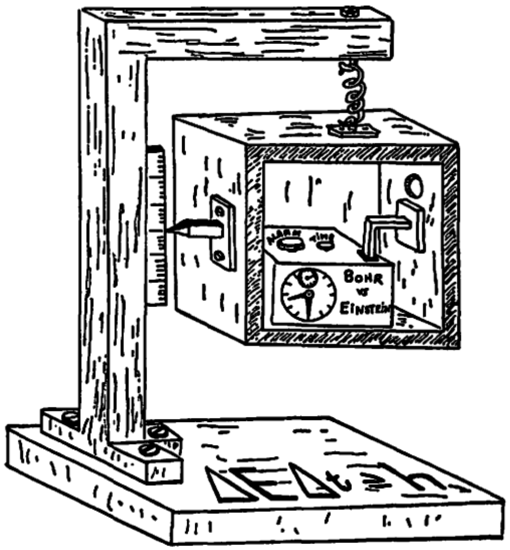
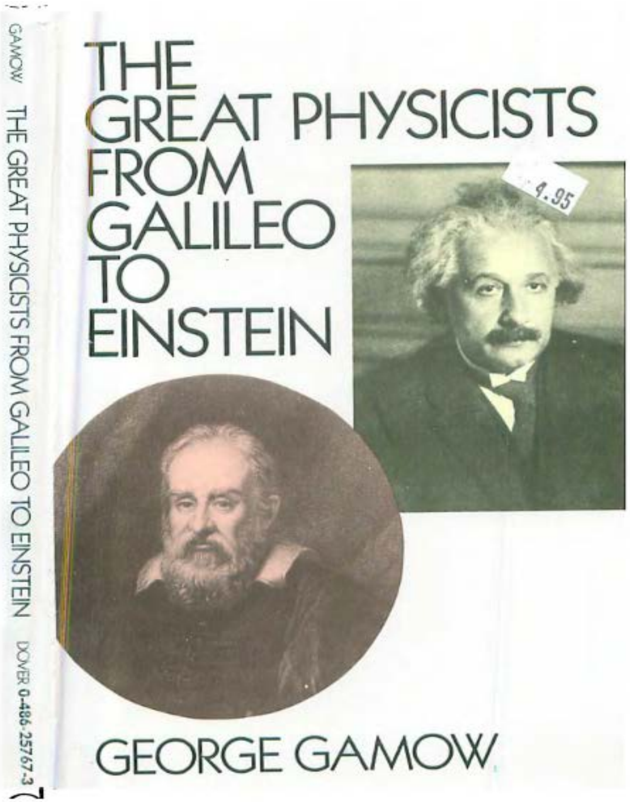


Fig. 25. Bohr's ideal experiment which disproved Einstein's statement that the relation $\Delta E \Delta t \geqq h$ is wrong.

various overtones will be double, triple . . . tenfold, a hundredfold, a millionfold, a billionfold . . . etc., of the basic tone.

In the case of standing waves within a three-dimensional container, such as a cube, the situation will be similar though somewhat more complicated, leading to unlimited numbers of different vibrations with shorter and shorter wavelengths and correspondingly higher and higher frequencies. Thus, if E is the total amount of radiant energy available in the container, the Equipartition Principle will lead to the conclusion that each individual vibration will be allotted E/∞, an infinitely small amount of energy! The paradoxicalness of this conclusion is evident, but we can point it even more sharply by the following discussion.

Suppose we have a cubical container, known as "Jeans' cube," the inner walls of which are made of ideal mirrors reflecting 100 per cent of the light falling on them. Of course, such mirrors do not exist and cannot be manufactured; even the best mirror absorbs a small fraction of the incident light. But we can use the notion of such ideal mirrors in theoretical discussions as the limiting case of very good mirrors. Such reasoning, whereby one *thinks* what would be the result of an experiment in which ideal mirrors, frictionless surfaces, weightless bars, etc., are employed, is known as a "thought experiment" (*Gedankenexperiment* is the original term), and is often used in various branches of theoretical physics. If we make in a wall of Jeans' cube a small window and shine in some light, closing the ideal shutter after that operation, the light will stay in for an indefinite time, being reflected to and fro from the ideal mirror walls. When we open the shutter sometime later we will observe a flash of the escaping light. The situation here is identical in principle to pumping some gas into a closed container and letting it out again



George Gamow,
The Great Physicists from Galileo to Einstein
1961,
(Biography of Physics)- Revised

The Law of Quantum 227

length. We speak figuratively about coal dust because it is black, and it is known that black bodies (or rather, *ideal* black bodies to match the *ideal* mirrors of Jeans' cube) would absorb and emit the radiation of any wave length. The coal dust particles are introduced

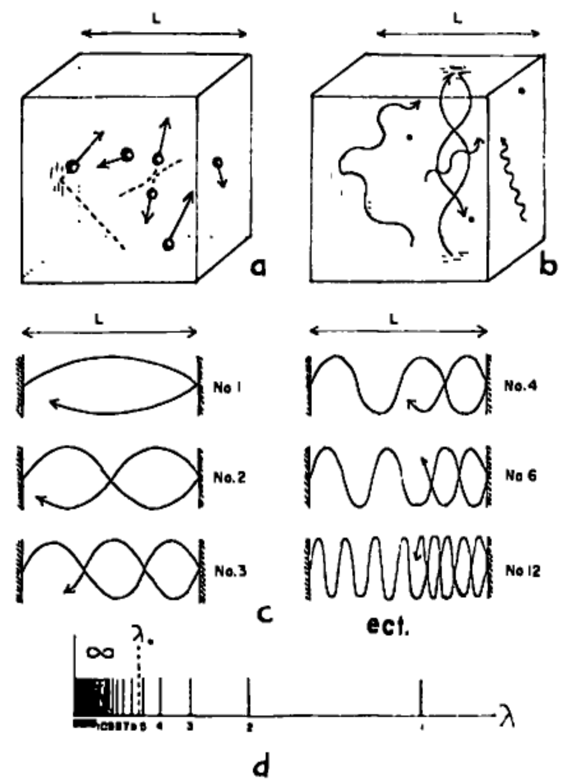


FIG. VII-8.

Comparison between the random motion of gas molecules in a closed container (a), and random motion of waves in Jeans' cube (b). Black dots in (b) represent tiny particles of coal dust serving as energy exchangers between the waves. (c) shows various modes of vibrations in Jeans' cube (for simplified one-dimensional case), while (d) gives the corresponding spectrum.

Incertidumbre: Interpretación probabilista de M. Born (1928)

$$|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 = |\mathrm{Re}\,\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 + |\mathrm{Im}\,\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$$

$$N = \int d^3\boldsymbol{r}\,|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 < +\infty$$

Re-normalización

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la región R en el instante t es

$$\frac{1}{N}\int_R d^3\boldsymbol{r}\,|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 \qquad [6.6.5]$$

Es interesante recordar que, históricamente, M. Born vio apoyada y reforzada su interpretación probabilística al aplicarla al análisis de experimentos de dispersión de partículas microscópicas (específicamente, dispersiones de electrones por átomos).

Variables clásicas	Variables cuánticas
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{cl}}$	$\boldsymbol{r}$
$\boldsymbol{p}_{\mathrm{cl}}$	$\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$
$\dfrac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{cl}}^2}{2m}$	$\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = \dfrac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}$
$H_{\mathrm{cl}} = \dfrac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{cl}}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_{\mathrm{cl}},t)$	$H = \dfrac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_{\mathrm{cl}},t)$

INCERTIDUMBRES Y RELACIONES DE INCERTIDUMBRE PARA POSICIONES Y MOMENTOS

Si la partícula microscópica [sometida, en general, al potencial $V(\boldsymbol{r}, t)$] está representada por la función de onda normalizada $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$, y si $\langle \boldsymbol{r} \rangle = (\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle)$ dado en [7.2.1] es el valor medio del vector posición, ¿cómo caracterizar, en general, el grado de concentración de $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ en torno a $\langle \boldsymbol{r} \rangle$?, o bien, ¿cómo medir, en general, el tamaño de la región tridimensional en torno a $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ y en la que $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ es apreciablemente diferente de cero en el instante t? La Estadística nos sugiere cómo: evaluemos $(x - \langle x \rangle)^2$ para cada valor de la componente x, «pesémoslo» con la correspondiente probabilidad $|\Psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 d^3\boldsymbol{r}$ (todo lo cual indica cómo se «dispersa» x respecto a $\langle x \rangle$), efectuemos la suma infinita y continua para todo $\boldsymbol{r}$ (es decir, la integral) y tomemos la raíz cuadrada. Se obtiene, así, lo que en Mecánica Cuántica se denomina la incertidumbre Δx de la componente x de la posición en el instante t (lo cual, en Estadística, correspondería a la noción de desviación cuadrática media):

Sea $\tilde{\Psi}(\boldsymbol{q}, t)$ la función de onda en el espacio de momentos, obtenida a partir de $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ mediante [7.6.1], y sea $\langle \boldsymbol{p} \rangle = (\langle p_x \rangle, \langle p_y \rangle, \langle p_z \rangle)$ (dado en [7.6.4] y en [7.3.2]) el valor medio del vector momento, ¿cómo caracterizar la zona del espacio de momentos en torno a $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ en la que $\tilde{\Psi}(\boldsymbol{q}, t)$ es apreciablemente distinta de cero? La respuesta, sugerida por [7.8.1] y [7.8.3], es: mediante nuevas incertidumbres Δp_x, Δp_y, Δp_z en las correspondientes componentes del momento. Así, Δp_x se introduce mediante ($\boldsymbol{q} = (q_x, q_y, q_z)$):

$$\Delta p_x = \left[\int d^3\boldsymbol{q} (q_x - \langle p_x \rangle)^2 |\tilde{\Psi}(\boldsymbol{q}, t)|^2 \right]^{1/2} \qquad [7.8.5]$$

[7.8.5] puede reexpresarse como:

$$\Delta p_x = \left[\int d^3\boldsymbol{r} \Psi^*(\boldsymbol{r}, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right)^2 \Psi(\boldsymbol{r}, t) \right]^{1/2} \qquad [7.8.6]$$

Incertidumbre global:

Recordemos en este punto el análisis aproximado presentado para la partícula libre en las secciones 3.5 y 6.5. Es natural pensar que las incertidumbres Δx, Δp_x, etc., introducidas mediante [7.8.1], [7.8.5], etc., constituyen generalizaciones precisas de las magnitudes aproximadas Δx, $\hbar \Delta k_x$, etc., que aparecían en aquellas secciones. En tal caso, ¿cuáles serían, en el caso presente, las generalizaciones de las relaciones cualitativas o semicuantitativas [3.5.3] o [6.5.12] y cuál sería su sentido concreto? Pues bien, las siguientes desigualdades fundamentales (denominadas también relaciones de incertidumbre posición-momento de Heisenberg) son válidas para [7.8.1], [7.8.5] y sus análogos según las componentes y, z, en el instante t:

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2} \quad , \quad \Delta y \Delta p_y \geqslant \frac{\hbar}{2} \quad , \quad \Delta z \Delta p_z \geqslant \frac{\hbar}{2} \qquad [7.8.9]$$

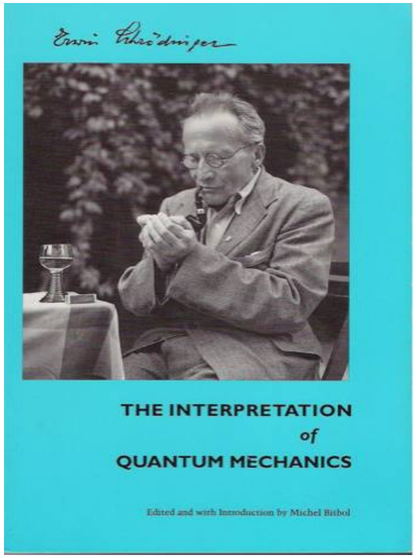
Certeza parcial:

ψ(x,t)=0 para los valores de x en los que V(x)=+∞, es decir fuera de un "pequeño compacto".

La probabilidad de encontrar la partícula fuera de ese compacto es, con total certeza, NULA, **e.d. la partícula ha de estar en ese compacto.**

Interpretación filosófica …. (otra conferencia)

E. Schrödinger, The Interpretation of quantum mechanics, edited by M. Bitbol, Ox Bow Press, 1995



Determinismo / azar

Schrödinger no identifica, como tantos otros, el indeterminismo y la teoría cuántica, en primer lugar, porque ya era indeterminista en cierto sentido antes de que surgiera la tesis del indeterminismo cuántico y, en segundo lugar, porque la culminación de la teoría y sus propios descubrimientos dentro de ella supusieron para él una reconversión hacia el determinismo en varios aspectos relevantes

La creencia en vínculos causales objetivos y universalmente necesarios es el postulado más utilizado, pero un examen atento de la evolución de la ciencia en el siglo XIX arroja como resultado que no es la necesidad causalista, sino el azar acausal, la fuente más fructífera y eficaz de nuevas leyes: «la investigación física ha demostrado clara y definitivamente que el azar es, por lo menos en la abrumadora mayoría de los procesos naturales, la raíz de esa regularidad y de esa invariabilidad que nos han llevado a establecer el postulado de la causalidad universal, en vista de su estricto ajuste a las leyes» (Schrodinger 1922). La paradoja se explica teniendo en cuenta que **la termodinámica y la mecánica estadística fueron las más preciadas conquistas de la ciencia en el tránsito del siglo XIX al XX, y que en estos ámbitos las leyes encontradas eran de naturaleza estadística y dependían de la existencia de distribuciones azarosas, indiscriminadas, en poblaciones numerosas de casos particulares.**

SCHRÖDINGER, E.; ¿Qué es una ley de la naturaleza?, F.C.E., México, 1975.

Así lo expliqué en mi curso de Física: Mecánica y Ondas el curso 2012-2013, cuando me di cuenta de algo que comprobé con asombro que era inadvertido en la literatura:

Hay una sutil ambigüedad pues ese “limite de soluciones de pozos finitos” **NO cumple verdaderamente la ecuación de Schrödinger en todo el espacio.**

Conferencias de investigación impartidas sobre localización parcial para la ecuación de Schrödinger con potenciales singulares: Tours (2012), Valencia (2013), **Cambridge (2014), Nápoles (2015),** Tenerife (2016), **RAC (2016),** Bilbao (2017), Poitiers (2017) …

No todas tienen la misma relevancia

Interfaces and Free Boundaries **17** (2015), 333–351
DOI 10.4171/IFB/345

On the ambiguous treatment of the Schrödinger equation for the infinite potential well and an alternative via flat solutions: The one-dimensional case*

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain
E-mail: ildefonso.diaz@mat.ucm.es

[Received 25 July 2014 and in revised form 18 April 2015]

SeMA
DOI 10.1007/s40324-017-0115-3

CrossMark

On the ambiguous treatment of the Schrödinger equation for the infinite potential well and an alternative via singular potentials: the multi-dimensional case

Jesús Ildefonso Díaz[1]

25 años de la Sociedad Española de Matemática Aplicada

Received: 31 January 2017 / Accepted: 23 February 2017

The ambiguity in this mathematical treatment arises because the derivatives of such u_n are discontinuous at the points $x = \pm R$, and thus such u_n are not solutions of the equation in the whole domain $\mathbb{R}$ in the sense of distributions

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_n}{dx^2} + V(x)u_n = E_n u_n, \quad \text{in } \mathbb{R},$$

but they satisfy a different equation

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_n}{dx^2} + V(x)u_n = E_n u_n + k_n(R)\delta_{\{R\}} - k_n(-R)\delta_{\{-R\}}, \quad \text{in } \mathbb{R}, \qquad (1)$$

since the second derivative develops two Dirac deltas (see Lemma above). Here

$$k_n(-R) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{2}}{R^{3/2}}n\pi \quad \text{and} \quad k_n(R) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{2}}{R^{3/2}}n\pi(-1)^n.$$

The presence of such discontinuities was noticed previously in the literature (see, e.g. the book by Galindo and Pascual (1990)) but, as far as we know, it seems that a careful analysis of this ambiguity, and the study of some alternative potential $V(x)$ preventing it, was not considered before.

Publicado en Enero de 2017

8 Estados ligados en una dimensión

Antonio Muñoz Sudupe

8.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en el siguiente se analizan algunos ejemplos unidimensionales. Su valor pedagógico, no exento de importancia práctica, los hacen imprescindibles en cualquier texto. Algunos de los ejemplos que presentamos corresponden a idealizaciones de potenciales unidimensionales reales, principalmente encontrados en el campo de la microelectrónica, y otros a reducciones a una dimensión de problemas tridimensionales. Son, en

Nuevo en la 6º edición (2017): página 232

Las autofunciones encontradas en [8.2.9] no cumplen uno de los requisitos mencionados en la introducción de este capítulo: sus derivadas primeras son discontinuas en los puntos $x = \pm a/2$. Estas discontinuidades, que tienen su origen en el salto infinito del potencial en los puntos mencionados, deben entenderse como una idealización de situaciones físicamente realizables. Sin embargo, representan una ambigüedad en el momento de la partícula, asociada a las paredes del pozo infinito y tienen consecuencias matemáticas como muestra el siguiente ejemplo.

Página 233

Esta aparente contradicción proviene del hecho de no haber tratado adecuadamente las divergencias asociadas a las derivadas de las discontinuidades de la derivada primera en los extremos de integración $x = \pm a/2$. Agradecemos al profesor Amador Álvarez Alonso la sugerencia del ejemplo presentado.

Un tratamiento riguroso de las ambigüedades en la formulación matemática del pozo infinito unidimensional y soluciones basadas en potenciales alternativos puede verse en: 1) Díaz, J. I. (2015). «On the ambiguous treatment of the Schrodinger equation for the infinite potential well and an alternative via flat solutions: The one-dimensional case». *Interfaces and Free Boundaries, 1*, 333-351; 2) Díaz, J. I., Hernández, J. e Ilyasov, Y. «Stability criteria on flat and compactly supported ground states of some non-Lipschitz autonomous semilinear equations». Aceptado en *Chinese Annals of Mathematics*.

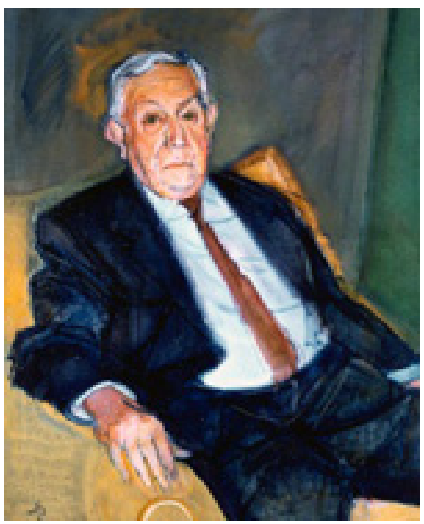
Inicié entonces (mayo de 2012) una búsqueda bibliográfica cuidadosa con el asesoramiento de personas de mi entorno:

Alberto Galindo (RAC y UCM),
Antonio Fernández Rañada (UCM),
J.M. Sánchez Ron (RAE, RAC y UAM),
J. Santamaría (RAC y UCM),…

Galindo, A. y Pascual, P. (1989). *Mecánica Cuántica*, vols. 1 y 2. Madrid: Eudema.

Galindo, A. y Pascual, P. (1989). *Problemas de Mecánica Cuántica*. Madrid: Eudema.

y muy especialmente Carlos Sánchez del Rio (RAC y UCM) y sus colaboradores (Ramón Fernández Álvarez Estrada).



Carlos Sánchez del Río y Sierra
(Borja, Zaragoza; 16 de agosto de 1924 - 13 de mayo de 2013)

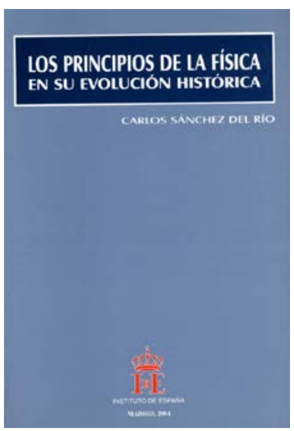
Doctor en ciencias por la universidad de Madrid desde 1948. Amplió sus estudios en la Universidad de Roma, el Centro Informazione Studi ed Esperience (Milán), la Université de Genève, la Eidgenössische Technische Hoschschule (Zurich) y la Universidad de Chicago entre 1948 y 1953.

Fue catedrático de Física Atómica y Nuclear en la Universidad de Madrid desde 1953. Académico numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1975), en 1975 fue elegido miembro del Consejo Asesor de RTVE. Ha sido decano de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid (1986).

Fue vicerrector de la Universidad Complutense, Director General de Política Científica, Presidente del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, vicepresidente y presidente en funciones de la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica, Director de Investigación de la Junta de Energía Nuclear.

Presidente de la Real Sociedad Española de Física y Química, presidente de la Sociedad Nuclear Española, presidente de la Asociación Nacional de Físicos de España.

En el ámbito internacional fue director de división del Organismo Internacional de Energía Atómica (Viena), presidente del Centro de Compilación de Datos Nucleares (París), Representante de España en la Sociedad Europea de Energía Atómica y en el Centro Europeo de Investigaciones Nucleares (CERN, Ginebra)



Numerosos libros y artículos

https://es.wikipedia.org/wiki/Carlos_Sanchez_del_Rio

"Los principios de la física en su evolución histórica" de Carlos Sánchez del Río

Exposición muy diferente a la de Gamow

En el 2012, Carlos Sánchez del Río, tras sugerirme la lectura del libro de W. Heitler, *Elementary Wave Mechanics*, Oxford Univ. Press, 1945, me habló de la **visita de Schrödinger al Curso de Verano en Santander, en 1935**, que desarrollaré a continuación.

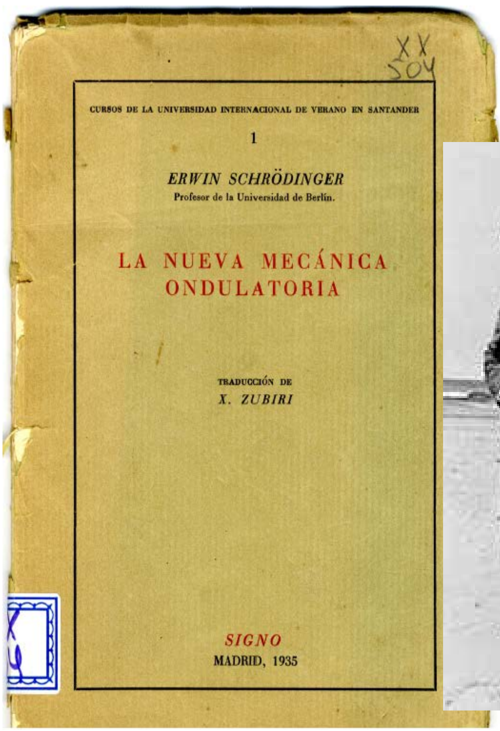
Carlos Sánchez del Río, un salto cuántico en la ciencia española

El principal impulsor del actual CIEMAT y primer titular de una cátedra de Física Atómica y Nuclear en España fue discípulo del premio Nobel Enrico Fermi (A. Galindo, EL PAÍS, 30 de Mayo de 2013).

3. Intermedio literario: Schrödinger (visitas a España en 1934 y 1935), Cabrera, Zubiri.

C. Sánchez del Río me sugirió que leyese los textos de Louis de Broglie: *Ondas corpusculares y Mecánica Ondulatoria*, Espasa-Calpe, Madrid, 1947 (Gamow en 120) y Erwin Schrödinger *La nueva mecánica ondulatoria (traducción de X. Zubiri), Signo,Madrid, 1935.*

Invitado por la Universidad Internacional de Verano en Santander, y que impartió en Agosto de 1934 (ese mismo mes había estado en el Congreso de la AEPPC en Santiago de Compostela)



ABC de 15 de mayo de 1935

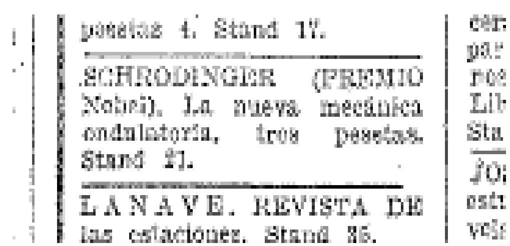
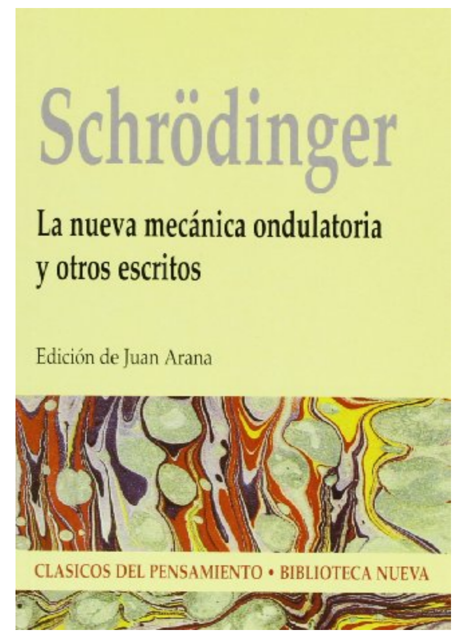


Foto: F. García Olmedo



Edición de 2001

Numero 1 de la colección Cursos de la U.I. de Verano de Santander

Libro de 1935 (Santander 1934): ninguna fórmula

un valor determinado. Los que favorecen la interpretación estadística propiamente dicha os dirán que de una experiencia, adecuada para determinar el valor de esta variable, resultará un valor u otro, estando regulada la probabilidad por el cuadro del coeficiente en el desarrollo, análogamente a lo que acontecía con la energía. Pero yo prefiero pensar que ninguna experiencia es adecuada para medir una cosa que de antemano se sabe que no tiene existencia ninguna.

Conviene añadir que los valores que puede tomar una variable, y que se llaman sus "valores propios", no constituyen necesariamente una variedad discontinua. Incluso en muchos casos son exactamente las mismas que en mecánica clásica. Ahora bien: la suma que representa la función ψ, desarrollada en serie de funciones propias—o por lo menos una parte de esta suma—, se convierte en una integral. (Porque puede muy bien ocurrir que el "espectro" de los valores propios sea en parte discontinuo y en parte continuo.) Sin embargo, la energía no es una excepción desde este punto de vista. También ella puede tener un espectro continuo o discontinuo o mixto según la naturaleza del sistema físico en cuestión y de las fuerzas o condiciones a las cuales está sometido. Por ejemplo, para un solo punto libre en el espacio infinito, el espectro de energía es continuo. Pero si está rodeado de paredes que no

29

puede rebasar, el espectro es discontinuo. Si las paredes reculan hacia el infinito, los valores propios se acumulan cada vez más para formar en el límite un espectro continuo. La menor abertura en las paredes, que permitiera una escapada hacia el infinito, hace de un golpe continuo el espectro. Ven ustedes, pues, que la diferencia no es muy esencial desde el punto de vista físico. Por esto escribiremos y consideraremos el desarrollo bajo forma de una suma, como lo hemos venido haciendo hasta el presente.

Volvamos ahora a la concepción según la cual a una variable clásica corresponde en mecánica cuántica un sistema de ejes rectangulares al que hay que referir el vector-estado (es decir, ψ) para informarnos de la estadística de esta variable, por ejemplo la energía, en el estado dado por ψ. A otra variable clásica, por ejemplo a una componente del impulso, corresponderá un sistema de ejes rectangulares de orientación distinta, es decir, un sistema que resultaría del primero por una cierta rotación, que por lo demás puede ser cualquiera. Aunque el número de ejes es infinito—dicho toscamente, llamamos "ejes" a las funciones propias—, bastará con que se representen ustedes el caso tridimensional considerando ψ como un vector de tres dimensiones. Para abreviar llamaremos A y B a las dos variables clásicas. Si ocurre que A tenga

30

Espectro continuo para el potencial de paredes infinitas que se hace un espectro continuo si la anchura del potencial crece a toda la recta (partícula libre)

No cita a Gamow ni a Mott.

Yo llegué a Gamow a través del este libro de 1943

110 ONDAS Y CORPUSCULOS

la curva de potencial. Por consiguiente, ninguna partícula α debería poder poseer una energía menor que la que corresponde a los puntos A y B. Ahora bien, se conocen, en efecto, cuerpos radiactivos para los cuales la energía cinética de las partículas α es netamente inferior al valor del potencial coulombiano a las distancias correspondientes a los puntos A y B.

Existe, en ello, una gran dificultad y esta dificultad ha sugerido a Gamow la idea de aplicar la Mecánica ondulatoria a la teoría de la "evasión" de las partículas α de un núcleo radiactivo. Se puede demostrar, en efecto, en Mecánica ondulatoria, que en el interior de una barrera de potencial tal como la representada en la figura anterior, la onda asociada a una partícula es absorbida exponencialmente en las regiones en que el potencial U es superior a la energía de la partícula.

Sea, pues, una partícula α contenida en el núcleo y cuya energía es inferior al valor del potencial en el punto A, cumbre de la barrera de potencial. Su onda asociada penetrará en la barrera de potencial, pero se extinguirá exponencialmente. Si la barrera es muy espesa, la onda Ψ, no podrá franquearla y se extinguirá antes de haber llegado al exterior. Pero si la barrera tiene sólo un espesor limitado, una pequeña fracción de la onda la podrá atravesar y escapar hacia el exterior: en otras palabras, la onda podrá difundirse muy lentamente a través de la barrera, como un líquido difundiría lentamente a través de las paredes de un vaso si dichas paredes no fueran perfectamente impermeables (*). Ahora bien, según las ideas de la Mecánica ondulato-

(*) Este fenómeno es enteramente análogo al de las ondas evanescentes en Optica ordinaria.

Página 120

Curso de Verano de 1934 en la U. I. de Verano (Santander)

Schrödinger había recibido el premio Nobel de Física, junto con Paul Dirac y Werner Heisenberg, el año anterior.

Maurice Fréchet y Esteban Terradas hablaron sobre probabilidad

Blas Cabrera había sucedido a Ramón Menéndez Pidal como rector de la Universidad Internacional de Verano (había sido uno de sus fundadores en 1933).

1934. Presidente de la Academia de Ciencias de Madrid, cargo que ocupó hasta el año 1937 en que se exilió.

Xavier Zubiri (1898-1983) había estudiado en Berlín durante el curso 1930-1931, donde frecuentó entre otros a Einstein, Schrödinger y Planck.

Blas Cabrera (1878-1945)

Correspondencia Schrödinger-Cabrera en José Manuel Sánchez Ron, **Cincel, martillo y piedra**, Taurus, Madrid, 1999, p. 315.

Es muy probable que el filósofo español fuera responsable directo de la invitación, puesto que «ha sido un pilar importante de esa Universidad. No sólo pudo sugerir nombres acertados de grandes profesores, sino que además, como eran amigos suyos, animó a muchos a que vinieran.

Carmen Castro, *Biografía de Xavier Zubiri*, Edinford, Málaga, 1992.

Clara Janés. *El saber y el mar: Xavier Zubiri y Erwin Schrödinger* , EU-topias, 23-33, 2015.

Se podría entrar en detalles, ahora, sobre:

- amistad Zubiri-Schrödinger (Berlin 1931)
- Dominio del castellano por parte de Schrödinger
- 3 cartas Schroedinger-Cabrera
- Curso de verano de Santander de 1934 (Julián Marías)
- Zubiri y la “Nueva Física”
- Artículos de Sánchez-Ron sobre Schrödinger y España (J.M. Sanchez-Ron, A man of many worlds: Schrödinger and Spain, en el libro *Erwin Schrodinger* BITBOL (Ed),O. DARRIGOL (Ed), Éditions Frontiers, Paris, 1992,9-22.
- …

Pese a todas esa informaciones: me resulta curioso que apenas se diga nada en esas fuentes sobre el segundo viaje de Schrödinger por España en 1935 y **su relación con la Academia de Ciencias**

* ausencia de comentarios de Sánchez del Río,
* sorpresa de A. Galindo, …

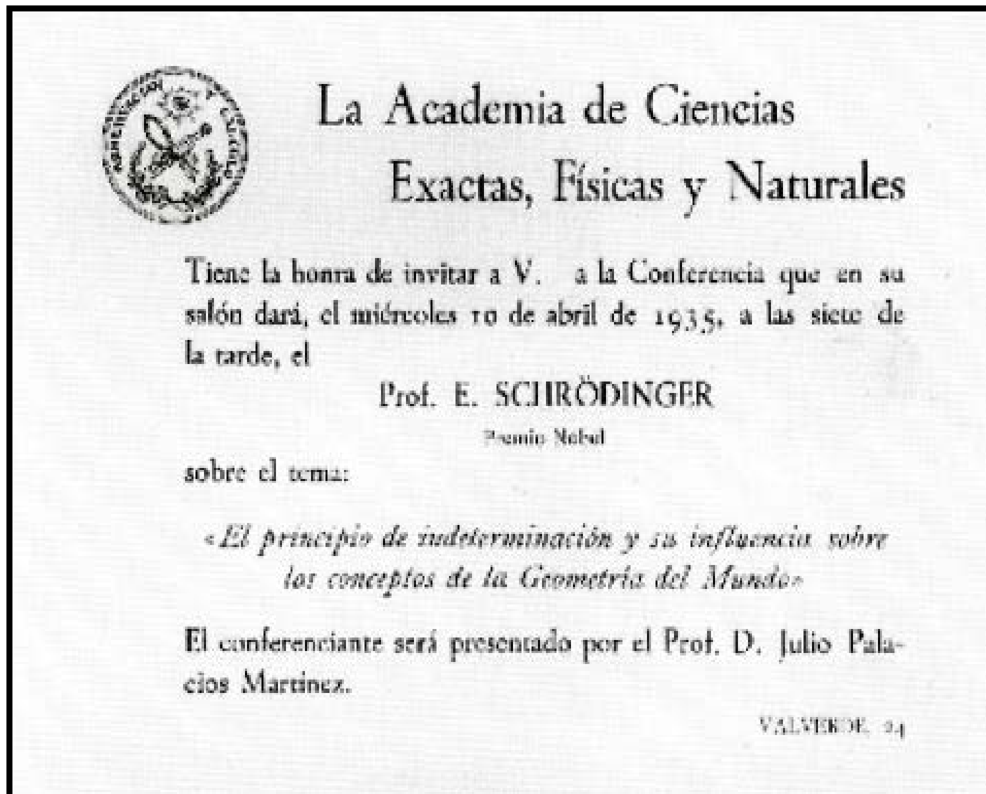
He indagado personalmente (junio de 2016: archivos de la Real Academia de Ciencias).

Empecé por las **Actas de plenos de 1935** y todo lo que se puede encontrar es:

En el Pleno de marzo de 1935 se anuncia una conferencia de Schrödinger , con fecha aún por determinar, y en el acta del 24 abril ya no se dice nada de ella (la conferencia se celebró el 10 de abril).

El 26 de octubre de 2016 logré encontrar los siguientes documentos:

Conferencia en la Academia de Ciencias (se había suprimido lo de Real) el 10 de abril de 1935).



La Academia de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturales

Tiene la honra de invitar a V. a la Conferencia que en su salón dará, el miércoles 10 de abril de 1935, a las siete de la tarde, el

Prof. E. SCHRÖDINGER
Premio Nobel

sobre el tema:

«El principio de indeterminación y su influencia sobre los conceptos de la Geometría del Mundo»

El conferenciante será presentado por el Prof. D. Julio Palacios Martínez.

VALVERDE, 24

Cartulina de invitación de la conferencia. Presentación por Julio Palacios (en realidad no fue él sino José Casares)

Reseña interna de la RAC (¿para la prensa?)

El profesor Schroedinger en la Academia de Ciencias

Anoche dió una interesante conferencia este eminente físico,creador de la Mecanica ondulatoria,galardonado hace poco con el Premio Nobel.

Presidió D.José Casares,que hizo una breve presentación de aquel haciendo resaltar la profunda huella que sus investigaciones han introducido en la moderna Fisica.

El Profesor Schrödinger comenzó explicando el principio de indetermina-
ción en virtud del cual no pueden simultaneamente determinar la posición y la velocidad de un electron,sino que el producto de las indeterminacio-
nes de ambas es del orden de la constante de Planck.En opinion del conferen-
ciante esto no solo quiere decir que no existen puntos de masa en el sen-
tido de la Geometria euclidiana a los fenomenos fisicos.Aun mayores dificul-
tades se encuentran para combinar la relatividad restringida con la teoria mecanico-cuantista.

Una de las dificultades que resultan de todo ello es la espcial prerro-
gativa que la mecanica cuantista se asigna al tiempo,en tanto que en la Relatividad restringida el tiempo y las coordenadas especiales juegan el mismo papel.

Esta prerrogativa que ha de atribuirse al tiempo es indudablemente una imperfección de la teoria cuantista.

Mención a la conferencia en el
Anuario de la
Academia de Ciencias
de **1936 !!!**

petencia de "Las pesquerías del Sahara Español y la fauna de vertebrados de Ifni", ayudándose también con interesantes proyecciones. A cargo del Catedrático del mismo centro docente D. Arturo Caballero y Segares corrió la tercera, el 6 de abril, tratando de "La vegetación del territorio de Ifni y particularidades de su flora", y exhibiendo de una y otra excelentes fotografías. El jueves 11 de abril, se ocupó el Profesor del Museo Nacional de Ciencias Naturales, D. Fernando Martínez de la Escalera, de "La fauna entomológica, la agricultura y la ganadería de Santa Cruz de Mar Pequeña". La última conferencia, el 13 de abril, estuvo a cargo del Catedrático de la Universidad Central, premiado

por nuestra Academia y Miembro, como los cuatro anteriores, de la expedición de 1934, D. Francisco Hernández-Pacheco; trató de la "Exploración fisiográfica de los territorios españoles del Golfo de Guinea", poniendo digno remate a este interesante cursillo, cuya importancia, saliendo de los límites de la ciencia pura y aun de la aplicada, entra de lleno en el dominio del público culto que se interesa por los grandes problemas nacionales.

De carácter enteramente distinto, aunque no menos interesante, fué la conferencia de 10 de abril que, intercalada en las del cursillo anterior, hubo de pronunciar en esta tribuna el ilustre Profesor y Premio Nobel, E. Schrödinger, sobre el tema "El

principio de indeterminación y su influencia sobre los conceptos de la Geometría del mundo". Presidió el acto D. José Casares Gil, quien hizo una breve presentación del conferenciante, haciendo resaltar la profunda huella que sus investigaciones han introducido en la moderna Física.

Comenzó el Profesor Schrödinger explicando el principio de indeterminación, en virtud del cual no pueden simultáneamente determinarse la posición y la velocidad de un electrón, sino que el producto de las indeterminaciones de ambas magnitudes es del orden de la constante de Planck; en su opinión, esto quiere decir que en el mundo físico no existen puntos de masa en el sentido de la Geometría Euclidiana. Aún se encuen-

tran dificultades mayores para combinar la relatividad restringida con la teoría mecánico-cuantista; es una de ellas la especial prerrogativa que ésta asigna al tiempo, en tanto que en la relatividad restringida juega éste el mismo papel que las coordenadas especiales, circunstancia que ha de atribuirse a una imperfección de la teoría cuantista. Los aplausos con que el selecto público que escuchó al eminente profesor hubo de premiar la disertación de éste, son prueba evidente de la satisfacción con que hubieron de escucharle.

El Profesor Herculano Amorim Ferreira, Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa, dió en los días 6 y 7 de junio dos interesantes conferencias, la pri-

Búsqueda en los archivos del ABC: solo anuncios previos a la conferencia

28 de marzo de 1935

Reuniones, lecturas y conferencias

Soluciones industriales al problema del aceite

La tercera conferencia de este ciclo, organizada por la Asociación Central de ingenieros industriales, ha estado a cargo del ingeniero industrial D. Francisco Sempere Ridaura, y ha versado sobre "La jabonería en relación con los aceites de oliva y orujo".

Empieza el conferenciante recordando a grandes rasgos la composición de los jabones comunes.

Explica luego con detenimiento lo que es el jabón de Castilla, de fama mundial y más conocido y admirado en el extranjero que en España.

Describe sus propiedades medicinales que son admirables e inigualadas por ningún otro jabón y que han decidido a los Estados Unidos a que su empleo sea obligatorio en hospitales, clínicas, sanatorios, etcétera.

Calcula que el consumo de aceite de oliva en España es de cerca de 500 millones de kilogramos, aunque hasta ahora las estadísticas lo han fijado en casi la mitad, pero es que la cantidad real producida es mucho mayor que la calculada, pudiendo asegurarse que la producción media de aceite de orujo es de unas 40.000 toneladas, de las que la mitad van a la jabonería.

Refiriéndose a la refinación de los aceites de orujo, está de acuerdo con la mayoría de los socios de la Federación de Exportadores de aceite de oliva de España, para que, salvo en casos de absoluta necesidad, no debe permitirse su empleo para fines alimenticios, y aún en aquel caso sin pasar nunca del 10 por 100 en la mezcla con el aceite de oliva.

Describe el daño enorme que a los fabricantes de aceites y jabones puros produce la adulteración de los jabones.

Termina asegurando que España se basta para la provisión de las grasas que necesita la jabonería.

El conferenciante fué muy aplaudido.

En la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Anoche celebró sesión plenaria la Academia bajo la presidencia de D. Blas Cabrera.

El secretario presentó las obras siguientes: "La Matemática española en el siglo XVII", por D. José A. Sánchez Pérez; "El P. José de Zaragoza y la Astronomía de su tiempo", por D. Armando Cotarelo Vallador; "Los historiadores de la Matemática española", por D. Francisco Vera, y otras de diversos autores extranjeros.

Con petición de cambio, a que se accede, se reciben el Boletín del Instituto de Investigaciones Agronómicas y el de la Asociación de Ingenieros de Guatemala.

Se da cuenta del fallecimiento del sabio sueco Axel Vallen, director del Servicio Hidrográfico y Meteorológico y secretario de la Sociedad de Geografía y Antropología de Estocolmo.

Se reciben invitaciones para los centenarios de la Academia de Ciencias de Dijon y Sociedad de Ciencias Naturales de Bufalo (Estados Unidos.)

Se votan definitivamente como académicos corresponsales nacionales a los catedráticos de las Universidades de Valencia, Sevilla y Zaragoza, señores Cámara, Peñalver y Galán, y como extranjeros los señores Duarte, de Caracas (Venezuela), Da Cunha, de Lisboa, y Severi y Enriques, de Roma.

El Sr. Cabrera da cuenta del curso de conferencias que bajo el patronato de la Academia darán, a partir del próximo sábado, los miembros de la Comisión de Estudio, que recientemente visitó nuestro territorio de Santa Cruz de Mar Pequeña (Ifni), y de otra conferencia que dará el sabio físico Schrödinger, Premio Nobel y creador de la nueva mecánica ondulatoria.

Finalmente, el doctor Esser dió cuenta de sus proyectos para constituir un Instituto Internacional de Cirugía structiva, ya conocido por la Academia de Medicina y otras Sociedades científicas.

CONVOCATORIAS

Con motivo del primer aniversario de la incorporación definitiva del territorio de Ifni a España, se ha organizado una serie de conferencias por los miembros de la expedición científica que ha visitado aquella región.

Las conferencias se pronunciarán en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, a las siete de la tarde, los días 30 de marzo, 4, 6, 11 y 13 de abril.

Los temas y conferenciantes son los siguientes:

"La expedición científica a Ifni, de 1934", por D. Eduardo Hernández-Pacheco, jefe de la expedición científica; "Las pesquerías del Sahara español y la fauna de vertebrados de Ifni" (con proyecciones), por D. Luis Lozano Rey; "La vegetación del territorio de Ifni y particularidades de su flora (con proyecciones), por D. Arturo Caballero y Segares; "La fauna entomológica del territorio de Ifni; la agricultura y la ganadería" (con proyecciones), por D. Fernando Martínez de la Escalera, del Museo Nacional de Ciencias Naturales; "Exploración fisiográfica de los territorios españoles del golfo de Guinea (con proyecciones), por D. Francisco Hernández-Pacheco, catedrático de Geografía Física de la Universidad de Madrid.

Cátedra de Genética de la Fundación del Conde de Cartagena.—En la conferencia pública que se dará hoy, jueves, a las siete de la tarde, en la Academia de Ciencias (calle de Valverde, 24), el profesor D. Antonio de Zulueta expondrá las "Mutaciones plastidicas, plasmónicas y bacterianas".

"Masarik y Checoslovaquia".—El profesor de la Universidad de Madrid D. Luis de Sosa inaugurará hoy el ciclo de conferencias organizado por Los Amigos de Checoslovaquia y el Comité Hispano-Eslavo, con una disertación que versará sobre el tema "Masarik y Checoslovaquia". El acto tendrá lugar a las seis y media de la tarde, en el salón de actos de la Unión Iberoamericana, Medinaceli, 8. Las invitaciones pueden ser solicitadas en: Legación de Checoslovaquia, Miguel Angel, 23; Centro de Estudios Históricos, Medinaceli, 4; Unión Iberoamericana, Medinaceli, 8, y en la Facultad de Filosofía y Letras, Ciudad Universitaria.

Hoy, jueves, a las siete y media de la tarde, tendrá lugar en el Centro de Acción Popular de Cuatro Caminos, Avenida de Pablo Iglesias, 15, una conferencia sobre "Algunas cosas municipales", que desarrollará el gestor del Ayuntamiento D. Francisco Morales.

Las Jornadas de Educación F. A. E.—Hoy jueves, 28, a las siete y media de la tarde, continuará el curso de conferencias correspondientes a estas jornadas en los locales de la F. A. E. (Claudio Coello, 32), versando la de este día sobre "Problemas de Segunda enseñanza", que correrá a cargo de D. Miguel Herrero García. La entrada será pública.

La Academia Nacional de Medicina celebrará sesión científica el sábado 30, a las seis y media de la tarde.

Hoy, jueves, 28, a las siete de la tarde, en Acción Popular, calle de Serrano, 6, pronunciará D. Joaquín Ruiz y Ruiz, doctor en Derecho y apoderado de Bolsa, una conferencia sobre el tema "Política de conversiones".

10 de abril de 1935

ferencia del curso de Estudios económicos, disertando D. José María Vives Llorca sobre el tema "Ley municipal y las Haciendas locales".

Instituto Francés. La conferencia del señor Laplane, sobre "Víctor Hugo y su tiempo", se adelanta al jueves, 11 (a las siete.)

En cuanto a la conferencia sobre "Lope de Vega y la literatura francesa", anunciada equivocadamente para el lunes, 8, se celebrará después de las fiestas, a una fecha que oportunamente se anunciará.

Hoy, miércoles, a las siete y media de la tarde, pronunciará en la Cámara de Comercio (Barquillo, 13), D. Hilario Crespo, una conferencia sobre el tema "Divagaciones sobre la moderna ciencia del urbanismo (primera parte)".

En la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales dará una conferencia hoy, miércoles 10, a las siete de la tarde, el profesor E. Schrödinger, premio Nóbel, sobre el tema: "El principio de indeterminación y su influencia sobre los conceptos de la Geometría del mundo".

El conferenciante será presentado por el profesor D. Julio Palacios Martínez.

Mañana jueves, a las siete de la tarde, hablará en la Económica de Amigos del País, plaza de la Villa, 2 (Torre de los Lujanes), D. César Cort, profesor de Urbanología de la Escuela Central de Arquitectura, sobre "La carestía de la vida en Madrid", tema de la información abierta por la sección de vida municipal de dicha sociedad.

Un Congreso magno para conmemorar el XIII centenario de la muerte de San Isidoro

La Hermandad de Doctores y Licenciados en Ciencias y Letras acordó el domingo celebrar el magno Congreso con motivo del XIII centenario de la muerte de su patrono San Isidoro, de Sevilla. A él se procurará que colaboren todos los Centros científicos de España y muchos del extranjero.

Además, se editará un libro con trabajos relativos a la obra enciclopédica y colosal del Santo, libro que se difundirá profusamente por España.

Estos acuerdos fueron tomados en la junta general celebrada, después de la misa de Comunión y de la imposición de medallas a veinticinco nuevos hermanos, que realizó el obispo de Madrid-Alcalá, miembro entusiasta de la Asociación, que cuenta ya con 131 socios.

Visitas de arte a las colecciones particulares

Correspondiente a este cursillo, organizado por el Comité de Arte de los Estudiantes Católicos, se ha visitado el palacio de la marquesa de Argüelles.

La mansión conocida bajo el nombre de *La Huerta* presenta, además de su aspecto artístico, uno histórico de gran interés, por haber sido la residencia de Cánovas del Castillo.

Conserva una ingente cantidad de obras de arte, muy admiradas por los señores cursillistas, quienes fueron amablemente guiados en su visita por la señorita María Luisa Liñán.

Nos vemos favorecidos diariamente con innumerables cartas, en que los lectores de A B C exponen iniciativas y observaciones, muchas de ellas oportunas y plausibles. No siéndonos posible materialmente contestar a tan copiosa correspondencia, rogamos a nuestros comunicantes que reciban con estas líneas nuestra disculpa y no interpreten como descortesía la falta de respuesta particular.

En la Academia de Bellas Artes

La sesión ordinaria celebrada por esta Corporación ha sido presidida por su director, conde de Romanones.

En el despacho ordinario se trató de asuntos diversos y se leyeron varias comunicaciones, entre ellas una relacionada con el premio Nóbel y la aspiración de que le sea conferido al Sr. Unamuno.

A propuesta del Sr. Anasagasti, se acordó solicitar de los aviadores que acaban de realizar en vuelo la ruta que siguió Don Quijote la cesión de fotografías que seguramente habrán hecho para comprenderlas entre las ilustraciones del libro que sobre el mismo asunto y por encargo de la Academia está escribiendo el académico señor Santa María.

Se ocupó también el Sr. Anasagasti de la poca eficacia del Patronato del Palmar de Elche, aún no constituido, después de haberse promulgado el decreto el 8 de marzo de 1933. Estos días se están talando un huerto contiguo a la puerta Morera y otro junto a la estación del ferrocarril, y del deplorable estado del jardín barroco de la plaza de Oriente, aún con las huellas de las devastaciones en el pedestal de la estatua ecuestre, embadurnado de rótulos, con lápidas y fuentes mutiladas y con una vegetación deficiente.

El mismo jardín situado detrás de la Embajada de Italia, sin carácter alguno con el palacio. También propuso que se debía substituir por un cerramiento definitivo de fábrica y verja, la valla de madera de la Almudena, que estorba la calle de Bailén y desdice del lugar.

Quedó sobre la mesa una moción, firmada por los Sres. Arbós, Fernández Bordas y Castell, proponiendo que el insigne violoncelista Pablo Casals sea designado académico honorario.

El Sr. Sánchez Cantón propuso, y así se acordó, que se solicite del ministerio de Estado la cesión en depósito para el Museo de la Academia de dos notables planchas de bronce que han venido utilizándose para grabar los títulos de caballeros de las Ordenes de Carlos III e Isabel la Católica.

Un banquete

Al mediodía del domingo se celebró en el hotel Florida un banquete organizado por la Casa de Aragón, en honor del escritor aragonés D. Fernando Castán Palomar, por el éxito literario obtenido con la publicación de su última obra *Aragoneses contemporáneos*.

Ocuparon la presidencia con el festejado, las señoras de Castán y Benito Landa, el presidente de la Casa de Aragón Sr. Ciarte; el ex-ministro D. Vicente Piniés y don Alfonso Gracia.

A los postres, el presidente de la comisión organizadora, Sr. Gracia, dió cuenta de las adhesiones del ministro de Industria, Sr. Marraco; diputado Sr. Royo Villanova; Javier de Mayandía, D. Darío Pérez y numerosas de Zaragoza, entre ellas, la de la Asociación de la Prensa.

Ofreció el homenaje el Sr. Liarte, que hizo un caluroso elogio del festejado. Seguidamente pronunció breves palabras ensalzando la personalidad del Sr. Castán el ex ministro Sr. Piniés.

Por último, el Sr. Castán dió las gracias por el homenaje de que se le hacía objeto, y tuvo palabras sentidas para la región aragonesa.

El Sr. Castán fué muy aplaudido y felicitado.

Noticias diversas

La Agrupación de Antiguas Alumnas de la Asociación para la Enseñanza de la Mujer celebrará este mes las siguientes reuniones:

Jueves, 25, a las tres y cuarto de la tarde, visita a la Escuela de Anormales (General Oráa, 45).

Sábado, 27, a las seis y media, en la Asociación, concierto de piano por la señorita Cañizares.

La Casa de Zamora ha trasladado su domicilio social a la calle del Príncipe, número 16, principal.

Clínica Psiquiátrica de los doctores Huertas y Villaverde en el hospital Provincial. El jueves, 11, se celebrará sesión clínica, a las doce de la mañana, en la sala de conferencias del Laboratorio Provincial, con las siguientes comunicaciones:

Doctor Fornoza: Alteraciones de la función laberíntica en la enfermedad de Friedreich.

Doctor Puyuelo: La biligénesis en el alcoholismo. Sugerencias para una terapéutica.

Doctor Portillo: El sueño y el sistema nervioso vegetativo.

Doctor Villaverde: Las formas atenuadas de la esclerosis en placas. Las neuritis ópticas retrobulares en el alcoholismo.

La Asociación de Palabra Culta y Buenas Costumbres de Madrid inauguró el domingo su curso de conferencias en el paraninfo del Instituto de San Isidro, bajo la presidencia del inspector de Primera enseñanza, D. Francisco Carrillo.

Leyó la Memoria del año el secretario, D. José María de la Vega, pronunciando a continuación un brillante discurso el sabio dominico padre Antonio García Figar, quien trató de "La bancarrota de la moral racionalista", y expuso conceptos tan fundamentales, que fué interrumpido por constantes aplausos.

Al final del acto la rondalla de la Asociación ejecutó obras de su escogido repertorio, que fueron objeto de una calurosa salva de aplausos. El paraninfo del Instituto de San Isidro estaba abarrotado de público.

Propuesta de Schrödinger como Académico Extranjero de la AC:
24 de abril de 1935

ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
VALVERDE, 22 Y 24 - MADRID - T. 12639

Los Académicos que suscriben tienen el honor de proponer a la Academia el nombramiento de Académico corresponsal Extranjero al Profesor de Física teórica en las Universidades de Berlin y Oxford Dr. E. Schrödinger. La notoriedad de la obra del sabio físico que ha creado la Mecánica ondulatoria es bien conocida, y ha recibido por ello uno de los premios Nobel.

Madrid 27 de Marzo de 1935.

En sesion general

celebrada en el dia de ayer fue elegido por unanimidad Academiaco Correspomsal Extranjero.

Madrid 25 de Abril de 1935.

El Secretario general.

Carta de nombramiento a Schrödinger el 25 de Abril de 1935

Esta Academia, teniendo en cuenta los relevantes merecimientos que a V.S.adornan, acordó en sesión celebrada en el dia de ayer, y previos los trámites reglamentarios nombrar a V.S. Académico Corresponsal Extranjero de la misma.

Lo que, por acuerdo de la Corporación, tengo la honra de comunicar a V.S:,incluyéndole un ejemplar de los Estatutos por que la misma se rige.

Madrid 25 de Abril de 1935.

El Secretario general.

José Maria Torroja.

Prof. Dr.E.Schrödinger.

Carta de respuesta, de Schrödinger a la AC, ficha firmada y foto: 13 de Mayo de 1935

13. Mayo 1935.

A la

Academia de Ciencias

Exactas, Físicas y Naturales

Madrid.

Ilustrísimos señores,

me siento muchísimamente honrado por la elección de Académico Corresponsal Extranjero y les quiero agradecer a Vs. sinceramente de que Vs. tuvieron la benevolencia de me hacer entrar en su celebre circulo.

No me olvidaré nunca el gran gusto que me daba su permisión de exponer delante Vs. mis opiniones sobre el desarrollo de las teorías modernas de la física.

Estén Vs. convencidos que me quedo siempre su afectísimo y muy agradecido servidor

E. Schrödinger.

Comenzó a aprender castellano en 1934 (carta a Zubiri)
Corrección de acentos a Zubiri (Clara Janés)

ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Antecedentes de los Sres. Académicos de Número y de los Corresponsales Nacionales y Extranjeros, necesarios para la historia de la Corporación.

Sr. D. E. Schrödinger

Sus títulos científicos y profesionales: ordentlicher Professor in der philosophischen Fakultät der Friedrich Wilhelm Universität zu Berlin (Catedratico en la facultad de filosofía de la Universidad Federico-Güilelmana en Berlin)
Doctor philosophiae (de la Universidad de Viena)
M. A. (= master of arts) de la Universidad de Oxford
Fellow of Magdalen College (Socio del Colegio de la Magdalena) Oxford

Corporaciones científicas o literarias a que corresponde:
Akademie der Wissenschaften in Wien (Academia de ciencias y letras, Viena)
" " " in Berlin
" " " in Leningrad
" " " in Dublin
Deutsche Physikalische Gesellschaft
American Physical Society

Cargos científicos, administrativos o de cualquiera otra especie que desempeña o que ha desempeñado:

Catedratico en la Universidad de Breslau (1921)
" " " " " Zurigo (1921–1927)
" " " " " Berlin (desde 1927)

Tratamiento jerárquico
Fecha de su elección académica: 24 Abril de 1935.
Fecha de la toma de posesión del cargo: ==========
Número de la medalla académica que le ha correspondido: ==========
Señas de su residencia y domicilio: 24 Northmoor rd, Oxford

E. Schrödinger.

Ampliación en cualquier concepto de los datos que preceden: noticias biográficas, títulos o mención de las obras que hubiere publicado, etc. etc.

Fecha de nacimiento: 12. 8. 1887.
1927: Premio Matteucci de la Società Italiana delle Scienze
1933: Premio Nobél en física.

ADVERTENCIA.—Se suplica a los Sres. Académicos tengan la bondad de devolver a la Secretaría de la Corporación esta hoja con las noticias que en ella se les piden.

C. Bermejo.—Sres. Trinidad, 7.—Teléfono 3195

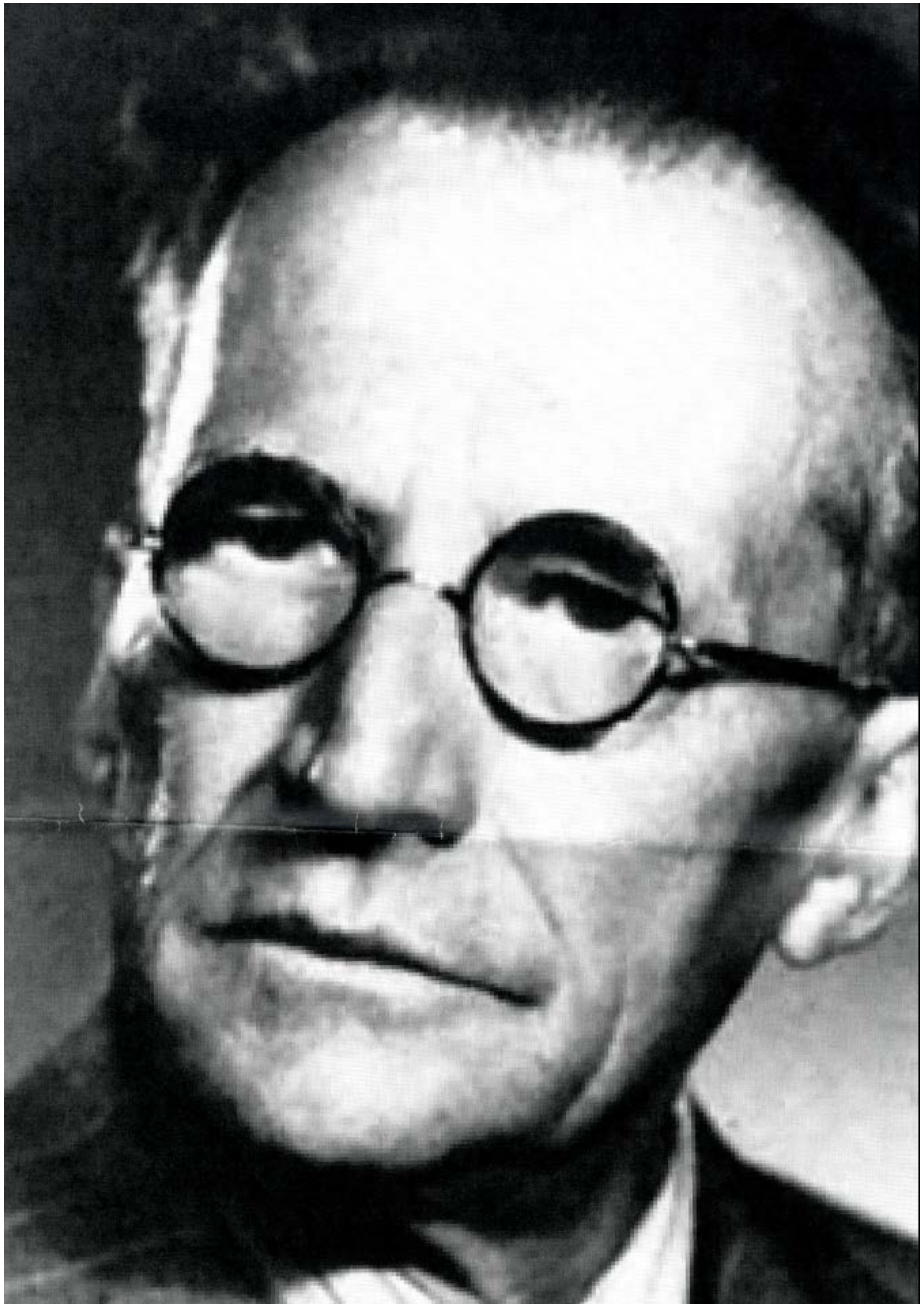
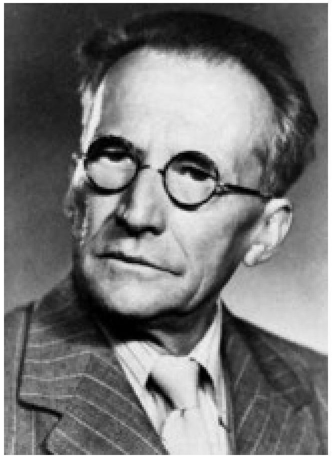


Foto enviada a la AC el 13 de Mayo de 1935

Reproducida, al menos, en http://www.physicsoftheuniverse.com/scientists_schrodinger.html



Realizada no antes del 13 de mayo de 1935

De hecho, no es apenas conocido (Sánchez, del Río, Galindo,…) que en su segundo viaje a España Schrödinger impartió un Curso de 3 sesiones en el **Instituto Nacional de Física y Química (Rockefeller)** Madrid Abril 1935

Eduardo Gil Santiago: " Nociones de la nueva mecánica cuántica", ***Metalurgia y Electricidad***

nº 47,48,51, (1941) (Físico, 1903, becado en Berlin en 1934, "depurado" en 1939, Venezuela, regresó en 1955. Falleció en 1979. Suegro de F. Ynduráin)

Nociones de la nueva mecánica cuántica

por E. GIL-SANTIAGO

El presente artículo constituye el tema desarrollado en una serie de conferencias dadas por el profesor Schrodinger, de Berlín, en el Instituto Nacional de Física y Química (Rockefeller) en abril de 1936, y que por diversas circunstancias, no han podido ser hasta ahora publicadas.

En el presente trabajo pretendemos dar solamente una indicación de los métodos de la Mecánica ondulatoria con aplicaciones a algunos ejemplos, y vamos a comenzar por uno que, a pesar de su sencillez, contiene en germen todos los ingredientes del método.

Se trata del oscilador armónico de Planck. Es éste un caso ilusorio, porque dentro de la mecánica cuantista no es posible, no tiene sentido, un punto material moviéndose según una línea recta que pase por él, pero servirá de introducción para un número mayor de dimensiones.

Tratamiento clásico del problema.—Partiremos de las ecuaciones de la mecánica analítica, y puesto que se trata de una sola coordenada, x, y conjugada correspondiente, la función H (p . q) se reducirá en este caso a $H(x, p_x)$ con $p = mx$. H es aquí la función de Hamilton, obtenida en función de las coordenadas generalizadas, y los momentos conjugados de estas coordenadas.

Para el caso que estamos considerando,

$$H(x \cdot p) = \frac{m}{2} x^2 + \frac{f}{2} x^2$$

	Estado del sistema en un instante dado	Ley o evolución temporal del sistema
Mecánica clásica	x, p	$\dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta x} \quad x' = \frac{\delta H}{\delta p}$
Mecánica ondulatoria	$\varphi(x, t)$	$H[\psi] = \frac{h}{2\pi i} \frac{d\psi}{dt}$

Se ve, pues, que en Mecánica clásica basta dar inicialmente dos parámetros, que son x y p, y el comportamiento temporal del sistema se deduce a partir de aquellas ecuaciones de Hamilton; si se tratase de mayor número de coordenadas, siempre sería preciso dar los p y los q, pero entre todos un *número finito* de parámetros.

En Mecánica ondulatoria, por el contrario, el estado del sistema está definido por la función ψ de x, y si hubiera más coordenadas, por una función de todas estas coordenanadas o parámetros generalizados; es decir, en ambos casos hay que dar una *infinidad* de números, esto es, una función ψ.

Pero para determinar el desarrollo temporal de $\psi (x\,t)$ nos servimos ahora solamente de una ecuación que, por tratarse de una función de dos variables, ha de ser en derivadas parciales, y esta ecuación se obtiene mediante una expresión H, que, operando sobre ψ, se convierte en

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\delta\psi}{\delta t}$$

(*Continuará.*)

(*) Es muy sugestiva e interesante la explicación dada por don Julio Palacios en Coimbra, Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, en que ya en el año 1926 es abordado este problema.

Contribución original de un matemático español en 1937

Peña Serrano, Fernando. 1937. Un método para determinar los niveles de energía del oscilador armónico. *Revista matemática hispano-americana*, 12, 10–16.

Ingeniero de Montes (1894-1960)

UN MÉTODO PARA DETERMINAR LOS NIVELES DE ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

Por F. PEÑA.

Asistió a las 3 conferencias.
Publicado durante la guerra

Esquela de Schrödinger recibida en la RAC: 1961

Im Namen aller Verwandten und Freunde
teile ich im tiefen Schmerze mit,
daß mein innigstgeliebter Gatte

Erwin Schrödinger

am 4. Jänner 1961, nach langer, schwerer Krankheit,
im 74. Lebensjahre sanft verschieden ist.

Das Begräbnis findet in aller Stille
im Ortsfriedhof Alpbach (Tirol) statt.

Annemarie Schrödinger geb. Bertel

Wien, am 5. Jänner 1961

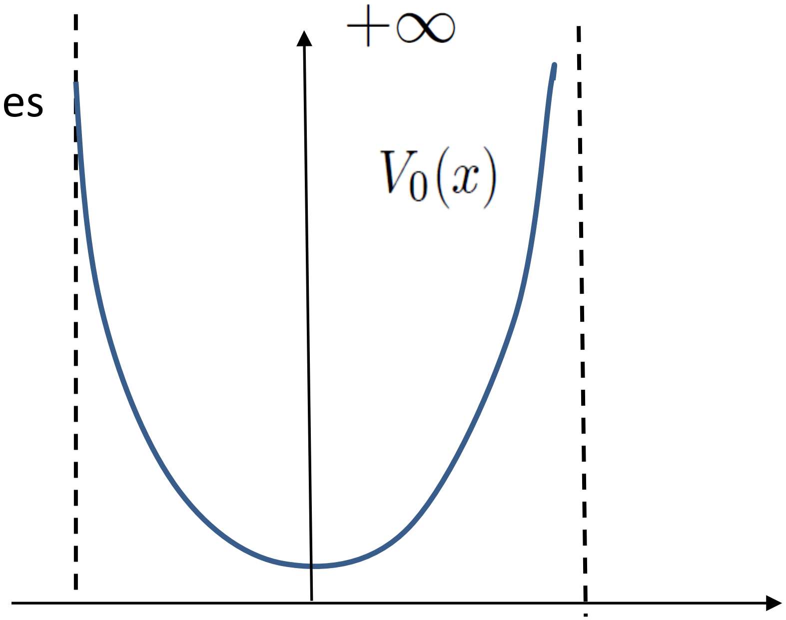
DA ICH LEIDER NICHT IMSTANDE BIN, DIE VIELEN BEILEIDSBRIEFE UND TELEGRAMME, DIE FÜR MEINEN VERSTORBENEN GATTEN SO ÜBERAUS EHREND UND FÜR MICH TRÖSTEND WAREN, EINZELN ZU BEANTWORTEN, BITTE ICH SIE, MEINEN HERZLICHEN DANK AUF DIESEM WEGE ENTGEGENNEHMEN ZU WOLLEN.

Annemarie Schrödinger

WIEN, IM JÄNNER 1961

4. Breve regreso a la ciencia dura: confinamiento para potenciales adecuadamente singulares.

En el otoño de 2012 me pregunté si la ambigüedad que aparece en el potencial de paredes infinitas podría evitarse para adecuados potenciales singulares en el borde del compacto donde se quiere lograr la localización.



El espectro (pero no la localización) de potenciales singulares de la forma

$$V_\infty(x:\Omega,V_0(\cdot))=\begin{cases} V_0(x) & \text{if } x\in\Omega,\\ +\infty & \text{if } x\notin\Omega,\end{cases}$$

con Ω un abierto acotado regular fue ya tratado en la monografia deM.A. Naimark cuando se supone $V_0 \in L^1(\Omega)$.

La "certeza parcial" (localización en Ω) se obtendría mostrando que para ciertos potenciales singulares $V_0(x)$ las soluciones del problema de autovalores sobre Ω

$$DP(V,\lambda,\Omega)\begin{cases} -\Delta u+V(x)u=\lambda u & \text{in } \Omega,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

deben cumplir que $\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ on } \partial\Omega$

y así la extensión por cero es solución en todo el espacio y con soporte en $\overline{\Omega}$

Conferencias de investigación impartidas sobre localización parcial para la ecuación de Schrödinger con potenciales singulares: Tours (2012), Valencia (2013), **Cambridge (2014), Nápoles (2015),** Tenerife (2016), **RAC (2016),** Bilbao (2017), Poitiers (2017) …

No todas tienen la misma relevancia

Interfaces and Free Boundaries **17** (2015), 333–351
DOI 10.4171/IFB/345

On the ambiguous treatment of the Schrödinger equation for the infinite potential well and an alternative via flat solutions: The one-dimensional case*

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain
E-mail: ildefonso.diaz@mat.ucm.es

[Received 25 July 2014 and in revised form 18 April 2015]

Publicado en Enero de 2017 (Página 233)

SeMA
DOI 10.1007/s40324-017-0115-3

On the ambiguous treatment of the Schrödinger equation for the infinite potential well and an alternative via singular potentials: the multi-dimensional case

Jesús Ildefonso Díaz[1]

Received: 31 January 2017 / Accepted: 23 February 2017

Mi resultado muestra que esto SOLO puede ser cierto (y de hecho es) para potenciales de tipo

$$\frac{\underline{C}}{d(x,\partial\Omega)^2} \leq V(x) \leq \frac{\overline{C}}{d(x,\partial\Omega)^2} \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega, \qquad (10)$$

Hardy type absorption potentials, **Un importante ejemplo**:

49. Pöschl, G., Teller, E.: Bemerkungen zur Quantenmechanik des Anharmonischen Oszillators. Z. Phys. 83(3,4), 143–151 (1933)

$$V(x) = V(|x|) = \frac{1}{2}V_0\left\{\frac{k(k-1)}{\sin^2\alpha\,|x|} + \frac{\mu(\mu-1)}{\cos^2\alpha\,|x|}\right\}, \qquad (9)$$

for some V_0, $\alpha > 0$, k, $\mu \geq 0$, intensively studied since 1933 (see, e.g. the monograph [41]). The special case of $V_0 = 2$, $\alpha = 1$ and $\mu = 0$ was studied in [17] as an important examples of the so-called *supersymmetric potentials* (SUSY).

41. Gltigge, S.: Practical Quantuum Muchanics. Springer, Berlin (1999)

17. Cooper, F., Khare, A., Sukhatme, U.: Supersymmetry and quantum mechanics. Phys. Rep. 267–385 (1975)

Mis resultados (versión de 2017)

Proposition 2.1 *Assume (10), then there exists a sequence of eigenvalues $\lambda_n \to +\infty$, $\lambda_1 > \lambda_{1,\Omega}$ (the first eigenvalue for the Dirichlet problem for the $-\Delta$ operator on Ω), λ_1 is isolated and $u_1 > 0$ on Ω.*

Theorem 2.1 *Let u_n be an eigenfunction associated to the eigenvalue λ_n. Then u_n is a flat solution of $DP(V, \lambda_n, \Omega)$. In fact, there exists $\overline{K}_n > 0$ such that*

$$|u_n(x)| \leq \overline{K}_n d(x,\partial\Omega)^2 \quad a.e. \quad x \in \Omega. \qquad (13)$$

As a particular consequence of Theorem 2.1 it is possible to offer a correct alternative to the "localizing" process suggested by Gamow in his paper [40].

Corollary 2.1 *Let Ω be an open regular bounded set of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. For any $q \in [0, +\infty)$ consider the potential*

$$V_{q,\Omega}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{if } x \in \Omega, \\ q & \text{if } x \in \mathbb{R}^N - \Omega. \end{cases}$$

Assume (10)*. Then there exists a countable set of eigenvalues λ_n and eigenfunctions $\widetilde{u}_{n,q}$ of the Schrö dinger equation*

$$-\Delta u + V_{q,\Omega}(x)u = \lambda_n u \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{18}$$

such that

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & \text{if } x \in \Omega, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^N - \Omega, \end{cases}$$

where λ_n and $u_n(x)$ are the eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet problem $DP(V, \lambda, \Omega)$. Moreover the same conclusion holds for $q = +\infty$ if we define the corresponding solution as $\widetilde{u}_{n,\infty}(x) = \lim_{q \nearrow +\infty} \widetilde{u}_{n,q}(x)$.

Remark 2.3 Notice that no Dirac delta is generated on the boundary $\partial\Omega$ once we assume (10). Moreover, by construction of the extension $\widetilde{u}_n(x)$ over $\mathbb{R}^N - \Omega$ the value of of the extension of $V(x)$ over $\mathbb{R}^N - \Omega$ is irrelevant. Notice that this is peculiar to the special construction of our solution $\widetilde{u}_n$ since otherwise some conditions on the behaviour of $V(x)$ for $|x|$ large enough must be assumed for the existence of weak solutions (see, e.g. [15,37,51] and their references).

4 The evolution case

As mentioned in the Introduction we consider the Schrödinger equation with potentials becoming singular on the boundary of a regular open bounded domain Ω of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. As before, we identify $\hbar$ and $2m$ with 1. So our problem becomes

$$\begin{cases} \mathbf{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(x)\psi & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) & \text{on } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{42}$$

We consider the case of potentials with a singularity over $\partial\Omega$, i.e., such that there exists $q \in [0,+\infty)$ such that

$$V_{q,\Omega}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{if } x \in \Omega, \\ q & \text{if } x \in \mathbb{R}^N - \Omega, \end{cases} \tag{43}$$

and $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfies

$$\frac{\underline{C}}{d(x,\partial\Omega)^\alpha} \leq V(x) \leq \frac{\overline{C}}{d(x,\partial\Omega)^\alpha} \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega, \tag{44}$$

for some $\alpha > 0$ and some $\overline{C} > \underline{C} \geq 0$. Our interest is the study of the time evolution of localized initial wave packets $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R} : \mathbb{C})$, i.e. such that

$$\text{support } \psi_0 \subset \overline{\Omega}.$$

The behaviour of the support of the particle $\psi(t,.)$ depends of the exponent α. Let us study the permanent confinement in Ω question under assumption (44) and more specially for $\alpha = 2$ (condition (10)).

Theorem 4.1 *Assume (10) and let $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^N : \mathbb{C})$ such that support $\psi_0 \subset \overline{\Omega}$.Then*

(i) For $q > 0$ consider the the extended potential $V(x) = V_{q,\Omega}(x)$ given by (43). Then Problem (42) has a unique solution $\psi \in C([0,+\infty) : L^2(\mathbb{R}^N : \mathbb{C}))$ with $\psi \in L^2(0,T : H^1(\mathbb{R}^N : \mathbb{C}))$ and $V_{q,\Omega}(x)\psi \in L^2(0,T : L^2(\mathbb{R}^N : \mathbb{C}))$ for any $T > 0$.

(ii) The problem

$$\begin{cases} \mathbf{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(x)\psi & \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \\ \psi = \mathbf{0} & \text{on } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) & \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{45}$$

has a unique solution $\psi_\Omega \in C([0,+\infty) : H^2(\Omega : \mathbb{C}) \cap H_0^1(\Omega : \mathbb{C}))$, and we have the Galerkin decomposition

$$\psi_\Omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n e^{-\mathbf{i}\lambda_n t} u_n(x), \tag{46}$$

with convergence at least in $L^2(\Omega : \mathbb{C})$, where λ_n and u_n are the eigenvalues and eigenfunctions given in Proposition 2.1 (renormalized by (12)) for any n and

$$\mathbf{a}_n = \int_\Omega \psi_0(x) u_n(x) dx.$$

(iii) Assume that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{a}_n| \overline{K}_n < +\infty \tag{47}$$

where $\overline{K}_n > 0$ was given in Theorem 2.1. Then

$$|\psi_\Omega(t,x)| \leq K d(x, \partial\Omega)^2 \quad \text{for any } t > 0 \text{ and a.e. } x \in \Omega, \tag{48}$$

for some $K > 0$. In consequence, the unique solution of (42) for the extended potential $V_{q,\Omega}(x)$ is given by

$$\psi(t,x) = \begin{cases} \psi_\Omega(t,x) & \text{if } x \in \Omega, \\ \mathbf{0} & \text{if } x \in \mathbb{R}^N - \Omega, \end{cases} \tag{49}$$

and thus support $\psi(t,.) \subset \overline{\Omega}$ for any $t > 0$.

(iv) (Tunneling effect or instantaneous propagation). If $V(x)$ satisfies (44) with $\alpha \in [0,2)$ then

$$(\text{support}\psi(t,.)) \cap (\mathbb{R}^N - \overline{\Omega}) \neq \phi \text{ for } t > 0.$$

Corollary 4.1 *Under the conditions of Theorem 4.1 assumption (47) holds if for instance*

$$a_n \equiv 0 \quad \text{for any} \quad n \geq n_0, \quad \text{for some} \quad n_0 \in \mathbb{N}.$$

Remark 4.2 The case $q = +\infty$ can be also considered (see Corollary 2.1). In fact, for the existence of a solution satisfying that support $\psi(t,x) \subset \Omega$ for any $t > 0$ the value of V on $\mathbb{R}^N - \Omega$ is irrelevant (see Remark 2.3).

Since no assumption on the connectness of the domain Ω was made in Theorem 4.1 the conclusion applies to domains with "holes":

Corollary 4.2 *(i) Assume* (10) *and*

$\Omega = \Omega_0 - \cup_{k=1}^{r} \overline{D}_k$, *for some regular open bounded sets,* Ω_0, D_k *of* $\mathbb{R}^N$ *with* $D_k \subset\subset \Omega_0$.

Then, if $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^N : \mathbb{C})$ *and* $\psi_0(x) = \mathbf{0}$ *for a.e.* $x \in \cup_{k=1}^{r} \overline{D}$ *for some and assumption* (47) *holds then the same happens for* $\psi(t,x)$, *for any* $t > 0$.

(ii) Consider the Pösch–Teller potential (9) *and let* $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^N : \mathbb{C})$ *such that* $\psi_0(x) = \mathbf{0}$ *for a.e.* $|x| \in [0,+\infty) - \left([\frac{j\pi}{\alpha}, \frac{(j+1)\pi}{\alpha}] \cup [\frac{m\pi}{\alpha}, \frac{(m+1)\pi}{\alpha}]\right)$ *with* $0 \leq j < j+1 < m$. *Then support* $\psi(t,x) \subset \{x \in \mathbb{R}^N$ *such that* $|x| \in [\frac{j\pi}{\alpha}, \frac{(j+1)\pi}{\alpha}] \cup [\frac{m\pi}{\alpha}, \frac{(m+1)\pi}{\alpha}]\}$ *for any* $t > 0$.

Remark 4.3 The conclusion of the above Corollary can be contrasted with the study of the cases in which the potential V grows as $d(x, \partial\Omega)^{-\alpha}$ with $\alpha \in [0, 2)$ considered, for instance, in [18,42–44], where it was shown that the wave function $\psi(t,x)$ cannot exhibit "holes" for finite-time intervals. Although the study of the Pösch-Teller potential was initiated with the important paper [49], as far as we know, no rigorous proof of the statement ii) was given in the previous literature.

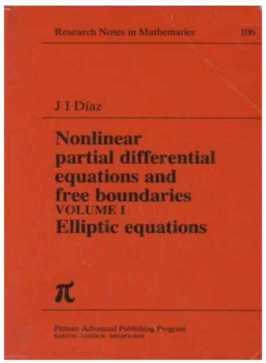
38. Galindo, A.: Propagación instantánea en los sistemas cuánticos. Anales de la Soc. Esp. Física y Quím., serie A Física. **64** (A), 141–147 (1968)

44. Hegerfeldt, G.C., Ruijsenaars, S.N.M.: Remarks on causality, localization, and spreading of wave packets. Phys. Rev. D **22**(2), 377–384 (1980)

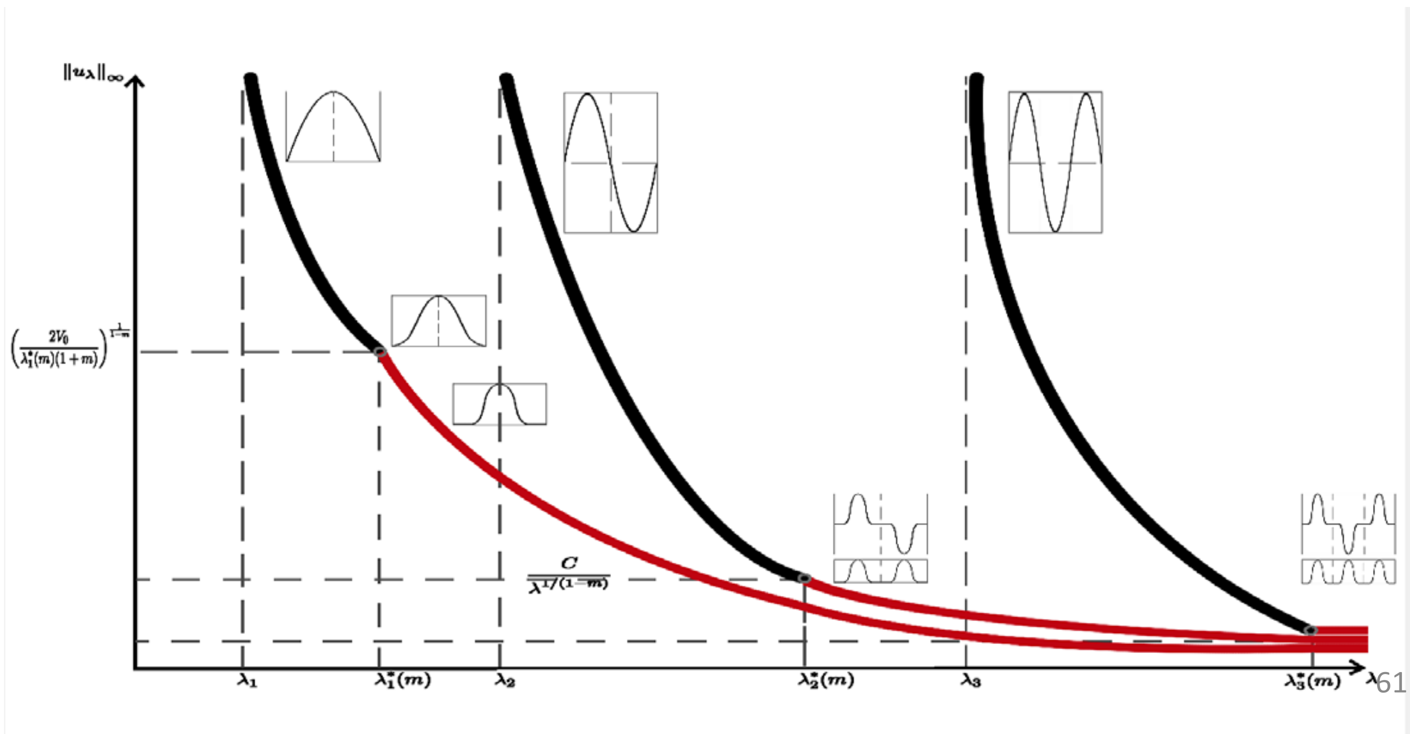
Método sofisticado de demostración: resolución de una EDP lineal a través de una no lineal

$$P(R, m, V_0, \lambda) \equiv \begin{cases} -\Delta v + V_0 \, |v|^{m-1} \, v = \lambda v, & v \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \\ v = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

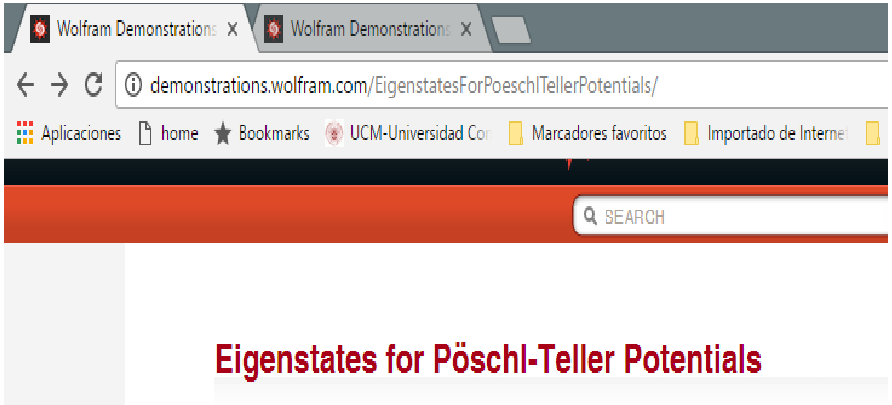
for a given $V_0 > 0$ and $m \in (0, 1)$.

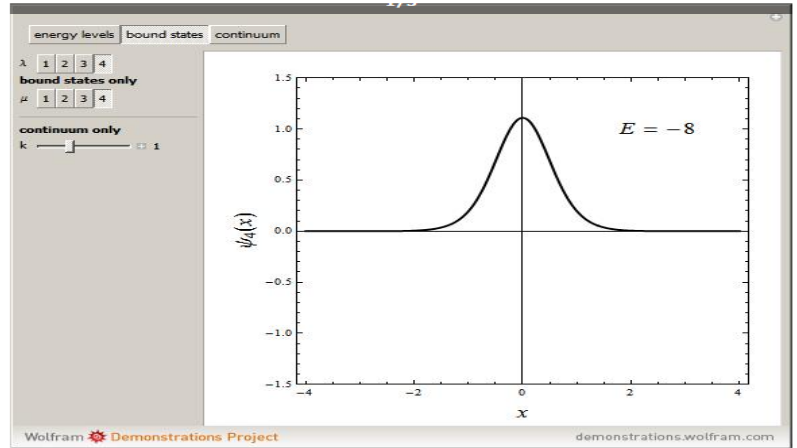


Díaz, J.I., Hernández, J.: Positive and nodal solutions bifurcating from the infinity for a semilinear equation: solutions with compact support. Portugal. Math. **72**(2), 145–160 (2015)



Un caso concreto:





It has been long known that the Schrödinger equation for a class of potentials of the form $V_\lambda(x) = -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\,\mathrm{sech}^2\,x$, usually referred to as Pöschl–Teller potentials, is exactly solvable. The eigenvalue problem

$$-\frac{1}{2}\,\psi''(x) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\,\mathrm{sech}^2\,x\;\psi(x) = E\,\psi(x)$$

(in units with $\hbar = m = 1$) has physically significant solutions for $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, for both bound and continuum states. For $\lambda = 1$, we find the solution $\psi(x) = \mathrm{sech}\,x$, $E = -1/2$, which follows simply from the derivative relation $\partial_{x,x}\,\mathrm{sech}\,x = \mathrm{sech}\,x - 2\,\mathrm{sech}^3\,x$. More generally, the Schrödinger equation has the bound state solutions

$$\psi_{\lambda,\mu} = P_\lambda^\mu(\tanh x),\; E_{\lambda,\mu} = -\frac{\mu^2}{2},\; \lambda = 1, 2, 3, \ldots,\; \mu = \lambda, \lambda-1, \ldots, 1,$$

where the P_λ^μ are associated Legendre polynomials.

The Schrödinger equation has, in addition, continuum positive-energy eigenstates with $E_{\lambda,k} = k^2/2$. The trivial case $\lambda = 0$ gives a free particle $\psi_{0,k}^{+}(x) = e^{i\,k\,x}$. The first two nontrivial solutions are $\psi_{1,k}^{+}(x) = \left(1 + \frac{i}{k}\,\tanh x\right)e^{i\,k\,x}$ and $\psi_{2,k}^{+}(x) = \left(1 + k^2\right)^{-1}\left(1 + k^2 + 3\,i\,k\tanh x - 3\,\tanh^2 x\right)e^{i\,k\,x}$. These represent waves traveling left to right. A remarkable property of Pöschl-Teller potentials is that they are "reflectionless", meaning that waves are 100% transmitted through the barrier with no reflected waves.

5. A modo de conclusión: sobre el concepto de verdad en ciencia.

Afortunadamente en ciencia, una pequeña ambigüedad como la referida, no merma un ápice lo más valioso de las aportaciones novedosas en la que aparece inmersa. A veces, la sutileza del pasaje hace que su repetición se perpetúe del investigador original a los libros de texto hasta que otra persona lo detecta.

La admiración por la labor bien hecha de tantas figuras tan excepcionales debe guiar nuestro juicio global sobre este bello campo científico: silenciar que alguna pequeña ambigüedad, sin trascendencia, puede haberse escapado de su control puede llevarnos a pensar que esos sabios eran más máquinas que seres humanos.

Como el propio Schrödinger escribió en su libro **¿Qué es la vida? El aspecto físico de la célula viva** [Orbis, Barcelona, 1986]

"si un hombre nunca se contradice será porque nunca dice nada"

(frase que tomó de Unamuno al que conoció en Santander en 1934).

La conferencia podría concluir dando pie a unas reflexiones generales sobre la conexión entre estas pequeñas ambigüedades y el concepto de verdad en ciencia asunto que ha ocupado a numerosos pensadores (entre ellos Karl Popper y René Thom).

Me inclino por la tesis de éste último: la verdad en ciencia tiene como fundamento lo aceptado por los científicos de la época en la que se produce la innovación. **Desarrollarlo más sería materia para otra conferencia.**

Gracias por su atención