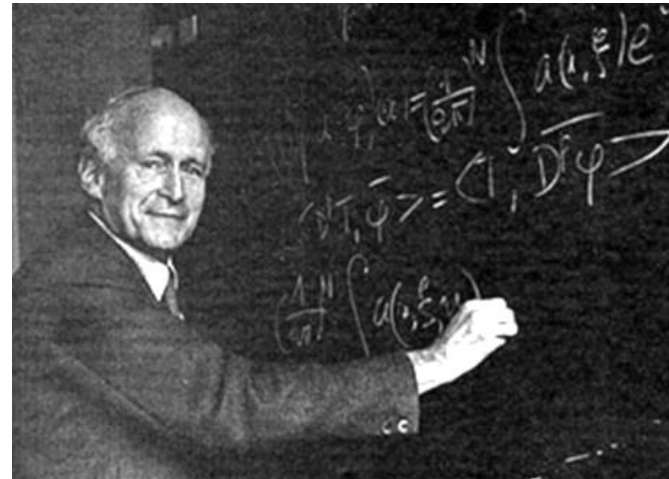


Históricamente, ese “concepto” ya aparece “utilizado y mencionado” en trabajos de Cauchy (en 1827), Denis Poisson y Gustav Kirchhoff en el estudio de la propagación de ondas. Hermann von Helmholtz lo utilizó como límite de campanas de Gauss, y Lord Kelvin para modelizar una fuente puntual de calor. A finales del XIX, Oliver Heaviside lo utilizó para “manipular formalmente” ciertas series de Fourier. Finalmente, Paul Dirac lo sistematizó como una “notación muy útil” en su memorable libro de 1930 (lo llamó "delta" pues decía que era una versión análoga a la delta de Kronecker discreta).

Pero el verdadero tratamiento matemático coherente se lo dio Laurent Schwartz (1915 –2002) al sistematizar **la Teoría de Distribuciones** (serie de trabajos iniciados en 1945). Medalla Fields de 1950.



Por ejemplo, el mayor inconveniente de la transformación **clásica** de Fourier es que está definida para una clase bastante limitada de funciones: es necesario que estas funciones disminuyan rápidamente a cero (en la vecindad del infinito) para asegurar la existencia de la integral de Fourier.

Por ejemplo, la transformada de Fourier de funciones tan simples como los polinomios no existe en el sentido clásico. La extensión de las transformaciones clásicas de Fourier a las distribuciones amplió considerablemente la clase de funciones que podrían transformarse y esto eliminó muchos obstáculos.

Forma lineal y continua

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto \langle \delta, \phi \rangle := \int \phi d\delta = \phi(0),$$

Es la derivada de la distribución asociada a la función discontinua de Heaviside

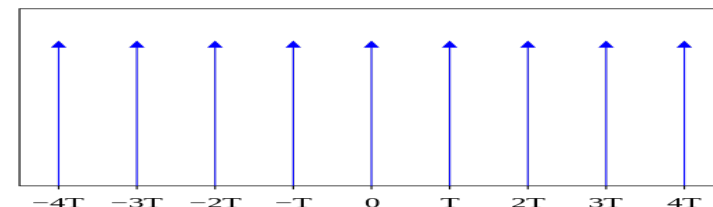
$$\langle (T_H)', \phi \rangle = -\langle T_H, \phi' \rangle = -\int H\phi' = -[\phi]_0^\infty = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

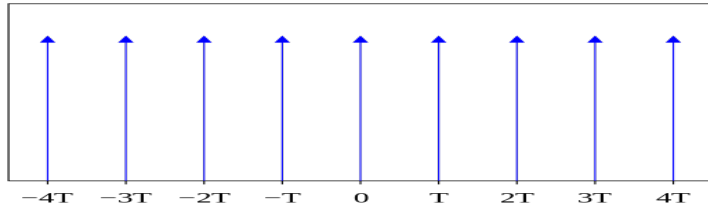
Su transformada de Fourier (como “distribución temperada”) es 1:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \int e^{-ix \cdot y} d\delta(x) = e^{-i0 \cdot y} = 1.$$

En el estudio de la cristalografía (y también en tratamiento de imágenes) interesa considerar un conjunto de Deltas de Dirac aplicadas sobre una familia de puntos: el ***peine (peigne, comb) de Dirac***

Woodward, P. M. (1953), Probability and Information Theory, with Applications to Radar, Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt.





$$\Delta_T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Al ser periódica esa distribución, se puede representar por

$$\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nt/T}.$$

Un resultado matemático pasa a jugar un papel fundamental en el estudio de estructuras cristalinas: **la fórmula de sumación de Poisson**

Sistemáticamente usado por Yves Meyer (como expondré a continuación). Además:

Invent. math. (2015) 200:585–606
DOI 10.1007/s00222-014-0542-z



Quasicrystals and Poisson's summation formula

Nir Lev · Alexander Olevskii

Kahane, J.-P., Mandelbrojt, S.: Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson. Ann. Sci. École Norm. Sup. **75**, 57–80 (1958)

Bombieri, E., Taylor, J. E.: Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory: some preliminary connections. The legacy of Sonya Kovalevskaya. Contemp. Math. **64**, 241–264(1987) (American Mathematical Society, Providence, RI)

Córdoba, A.: La formule sommatoire de Poisson. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306**, 373–376 (1988)

Córdoba, A.: Dirac combs. Lett. Math. Phys. **17**, 191–196 (1989)

Siméon Denis Poisson (1781 - 1842) físico, matemático (trabajos en electricidad, geometría diferencial y teoría de probabilidades).



Su trabajo sobre integrales definidas y su discusión de la serie de Fourier, preparó el escenario para las investigaciones de Dirichlet y Riemann (Mem de Acad, 1823)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DE L'INSTITUT
DE FRANCE.

ANNÉE 1823.

TOME VI.



PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,
RUE JACOB, N° 24.
1827.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le sixième de la collection des Mémoires de l'Académie des Sciences; depuis l'ordonnance du 21 mars 1816.

	Pages
RECHERCHES SUR quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat, par M. LÉGENDE . . .	1
MÉMOIRES sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, par M. DE LAPLACE	61
MÉMOIRE sur l'état de la végétation au sommet du Pic du Midi de Bagnères, par M. L. RAMOND	81
MÉMOIRE sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 23 novembre 1825	175
MÉMOIRE sur les lois du mouvement des fluides, par M. NAVIER.	389
MÉMOIRE sur la théorie du magnétisme en mouvement, par M. POISSON	441
MÉMOIRE sur le calcul numérique des intégrales définies, par M. POISSON	571
MÉMOIRE sur les développements des fonctions en séries périodiques, par M. AUGUSTIN CAUCHY	603

Su fórmula de sumación apareció en:

Sur les intégrales définies et sur la sommation des séries,

Journal de l'École Royale Polytechnique, volumen de 1823.

Para ilustrar la fórmula de sumación de Poisson, comencemos por recordar la expresión de la **Transformada de Fourier** de una función de una variable:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Sea $a > 0$ y sea $\omega_0 = 2\pi/a$. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + na) = \frac{1}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m\omega_0) e^{im\omega_0 t}.$$

O bien, con otras notaciones:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Utilizando la Fórmula de sumación de Poisson se puede ver que la transformada de un peine de Dirac es otro peine de Dirac (en el espacio de las frecuencias):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi fnT}.$$

A Córdoba, Dirac combs, in Letters in Mathematical Physics, vol. 17, nº 3, 1989, 191–196.

En cristalografía, la fórmula de sumación de Poisson tiene una interpretación muy interesante en términos de los espectros de difracción de las estructuras periódicas.

Una ley básica afirma que sólo las estructuras periódicas presentan "picos de Bragg" nítidos en su difracción.

En términos matemáticos, la pregunta es si pueden existir otras fórmulas de Poisson que no sean una superposición finita de fórmulas derivadas de la anterior por un cambio lineal de coordenadas.

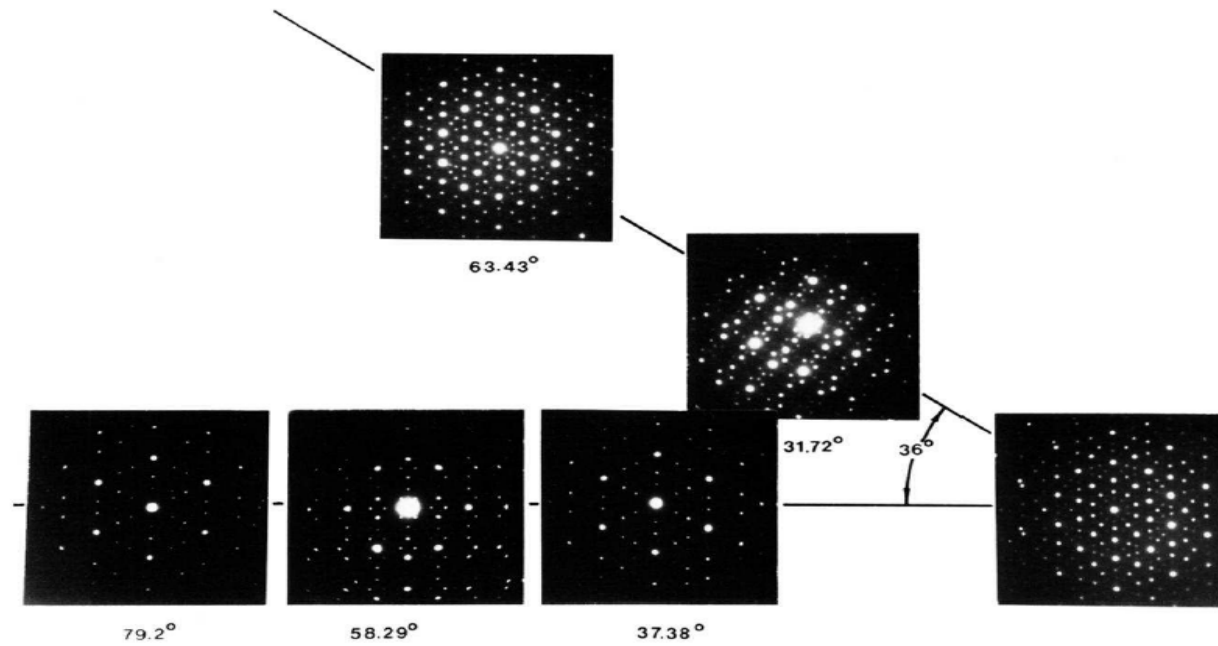


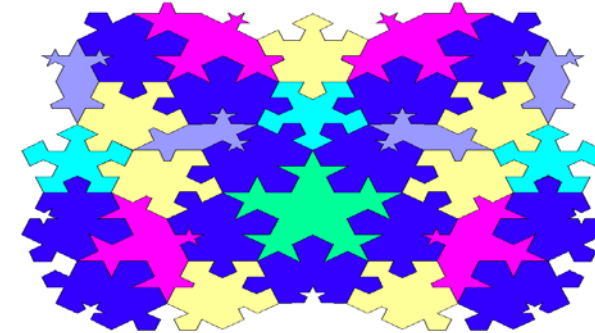
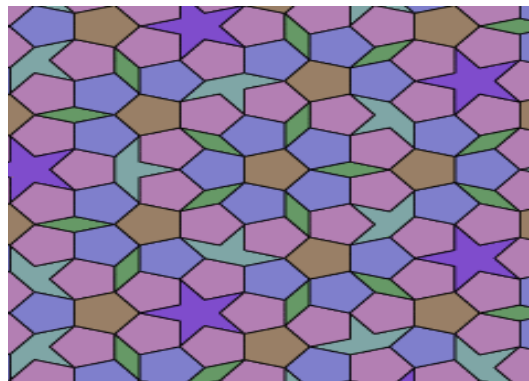
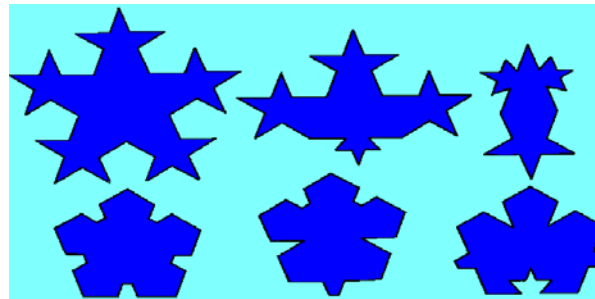
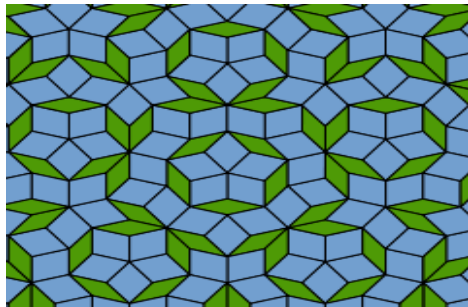
FIG. 2. Selected-area electron diffraction patterns taken from a single grain of the icosahedral phase. Rotations match those in Fig. 1.

6. Prehistoria matemática de los cuasicristales: Roger Penrose e Yves Meyer

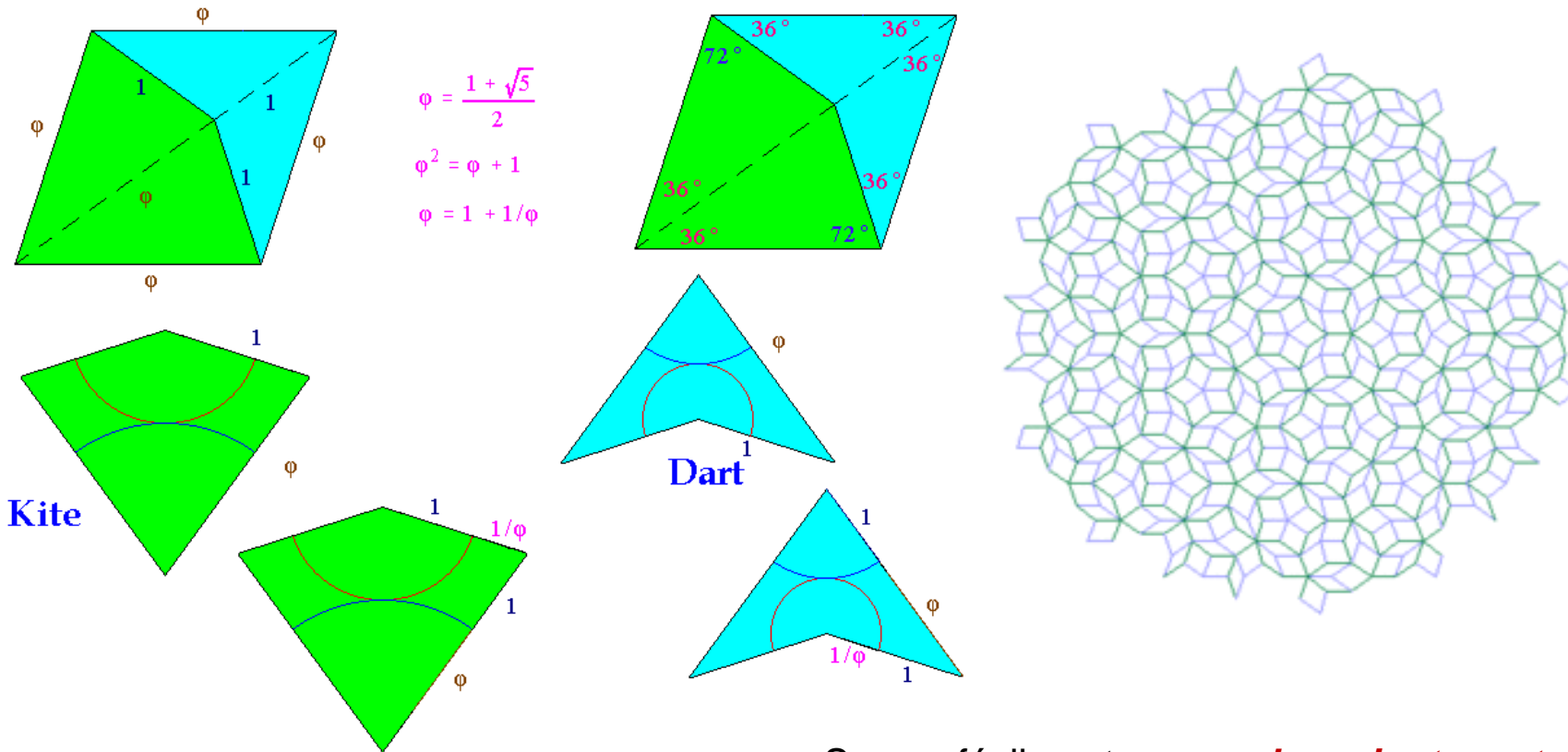
- Trabajo de Roger Penrose (1931-) de 1973
- Es posible teselar el espacio de manera no repetitiva, sin huecos
- Rombos, polígonos (distintos grupos)
- Ordenamiento aperiódico, sin patrones repetidos
- Método predecible (jerarquía de inflación – crecimiento)

Roger Penrose descubrió tres sistemas de azulejos aperiódicos en 1973 y 1974. Su primer sistema. <http://www2.spsu.edu/math/tile/aperiodic/penrose/penrose1.htm>

Existía ya desde 1974 un ejemplo en 2D de una estructura formada por rombos de dos tamaños que poseía orden traslacional a largo alcance y ejes de rotación de orden 5, conocida como el embaldosado (entejado, teselado) o patrón de Penrose en honor del matemático británico que la descubrió.



Modelo de Penrose (construidos con la cometa (Kite) y el dardo (Dart)).



Se ve fácilmente que **el cociente entre las áreas de la cometa y del dardo es el número de oro ϕ .**

<http://mathworld.wolfram.com/PenroseTiles.html>

Conjuntos armoniosos de Yves Meyer introducidos en 1970

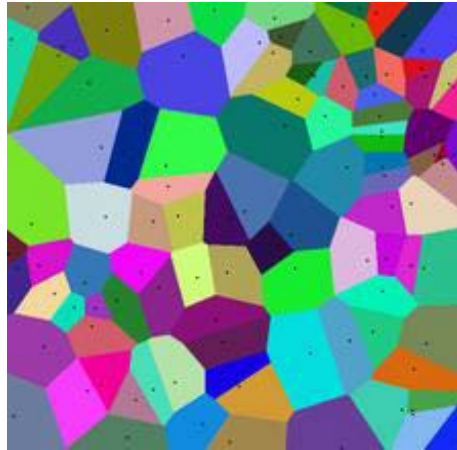
Pero independientemente de Penrose, también en 1970 Yves Meyer había propuesto una teoría de cuasicristales. Son los conjuntos armoniosos de puntos S (conjuntos de Meyer). Inicialmente presentado por Y. Meyer en el contexto de Teoría de números :

Meyer, Y.: Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 117. Springer-Verlag, New York (1970)

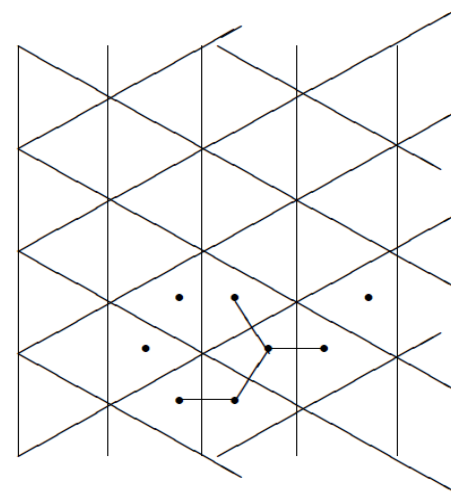
Meyer, Y.: Algebraic Numbers and Harmonic Analysis. North-Holland, Amsterdam (1972)

Meyer, Y.: Quasicrystals, diophantine approximation and algebraic numbers. In: Beyond Quasicrystals (Les Houches, 1994), pp. 3–16. Springer, Berlin (1995)

¿Cómo pasamos de un conjunto de puntos a un pavimento? gracias al método de Voronoi: a cada elemento p de S se asocia la celda de Voronoi constituida de todos los puntos en el espacio que están más cerca de p que cualquier otro punto en S . Hay también un proceso dual, Delaunay: trazamos un borde de p a q si sus celdas Voronoi son adyacentes



Células de Voronoi
(G. F. Voronói (1868-1908))



Construcción de un diagrama de Delaunay
(Boris Delaunay Delone (1890-1990))

Un cuasicristal es, según Meyer, un conjunto de puntos S que verifica las tres propiedades siguientes:

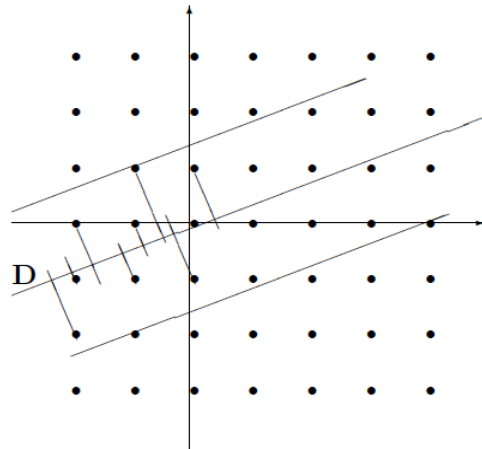
1. Es uniformemente discreto (existe $r > 0$ tal que cada bola de radio r contiene a lo sumo un elemento de S),
2. Es relativamente denso (existe $R > 0$ tal que cada bola de radio R contiene a al menos un elemento de S),
3. Existe una parte finita F de S tal que $S - S \subset S + F$.

Por ejemplo, la red de todos los puntos de coordenadas enteras respecto de una base fijada es un cuasicristal.

¿Se conserva esta propiedad por proyección?

Veamos el caso de dimensión dos y la sencilla red $S = \{(n, m); n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Proyectémosla ortogonalmente sobre una recta D . Sea esa p proyección.



- si la pendiente de D es racional, entonces $p(S)$ es periódico (cristal),
- si la pendiente de D es irracional, entonces $p(S)$ es denso (la propiedad 1 no se cumple).

La idea para construir un cuasicristal no es más que la de proyectar solo los puntos de S que estén a una distancia menor que un cierto número a de D .

Este proceso es general y permite definir lo que Meyer llamó *Modelos* ["Model sets": sets of points constructed by the "cut and project" scheme. Y.M. (1970)]

Así, el ejemplo de Penrose se puede obtener de esta manera, por proyección de una red de dimensión 5.

Las ideas de Meyer han dado lugar a muchos trabajos

- Un teorema de Lagarias (2000) caracteriza los conjuntos de puntos cuyos pavimentos Voronoi o Delaunay usan un número finito de formas de células. Este es el caso de los cuasicristales.
- algunos modelos son *repetitivos* (en nuestro ejemplo anterior, la condición es que dos rectas a distancia a de D no intersecten con la red S).

La repetición musical no es una mera repetición de elementos idénticas, sino una repetición presentando algunas diferencias.

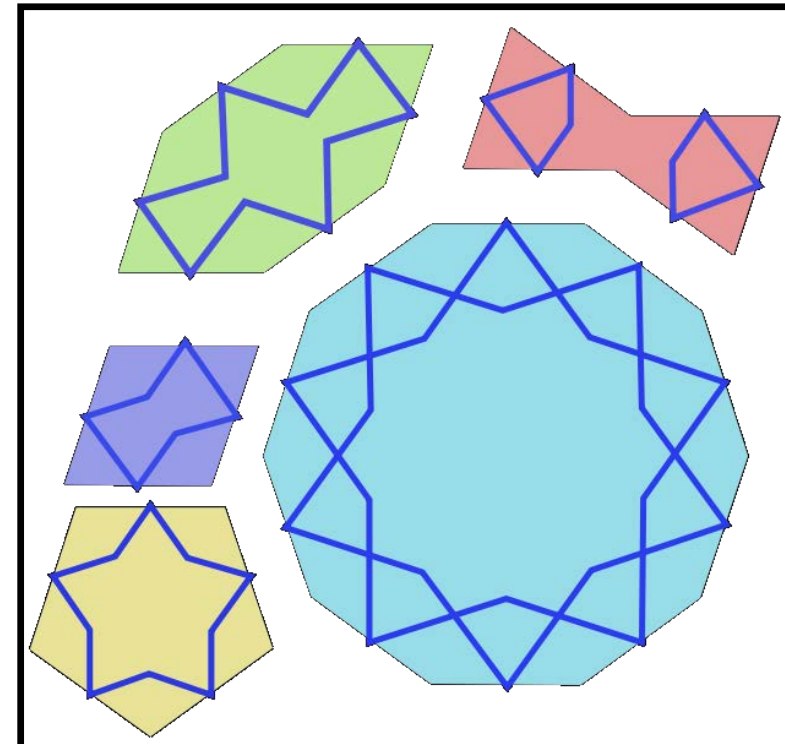
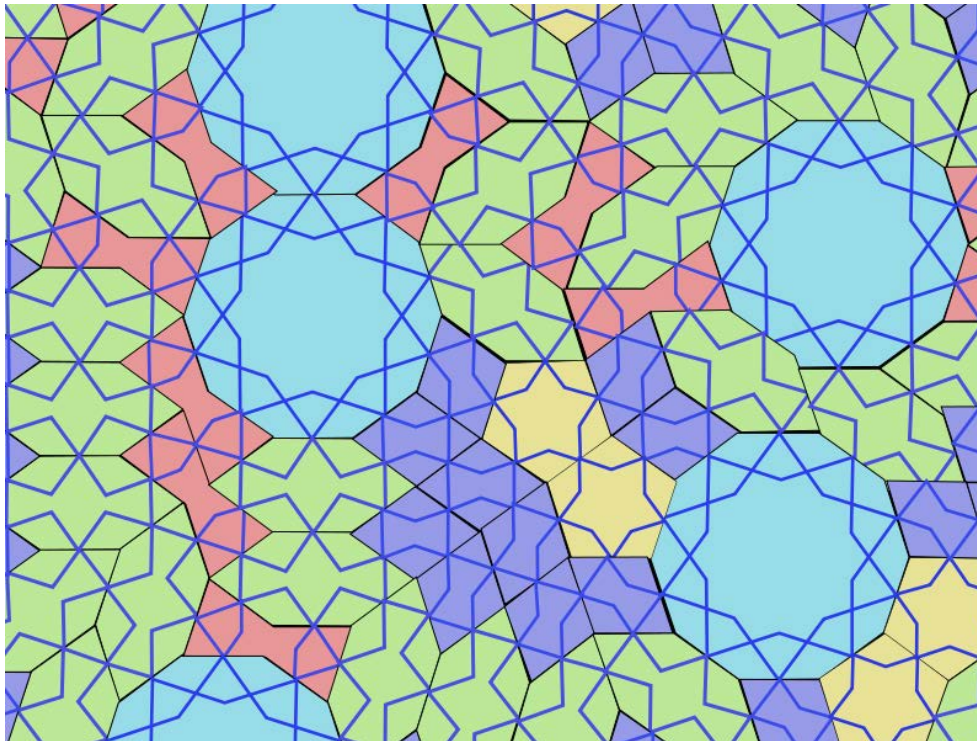
Un ejemplo es el Bolero de Ravel.

La música tradicional *malouf* (de Túnez, importada de Andalucía después de la inmigración española del siglo XV) es a veces criticada por ser repetitiva. Pero cambios sutiles que ocurren en la música *malouf* invitan a imaginar mejor que es un cuasicristal. **Los cuasicristales son repetitivos pero no periódicos.**

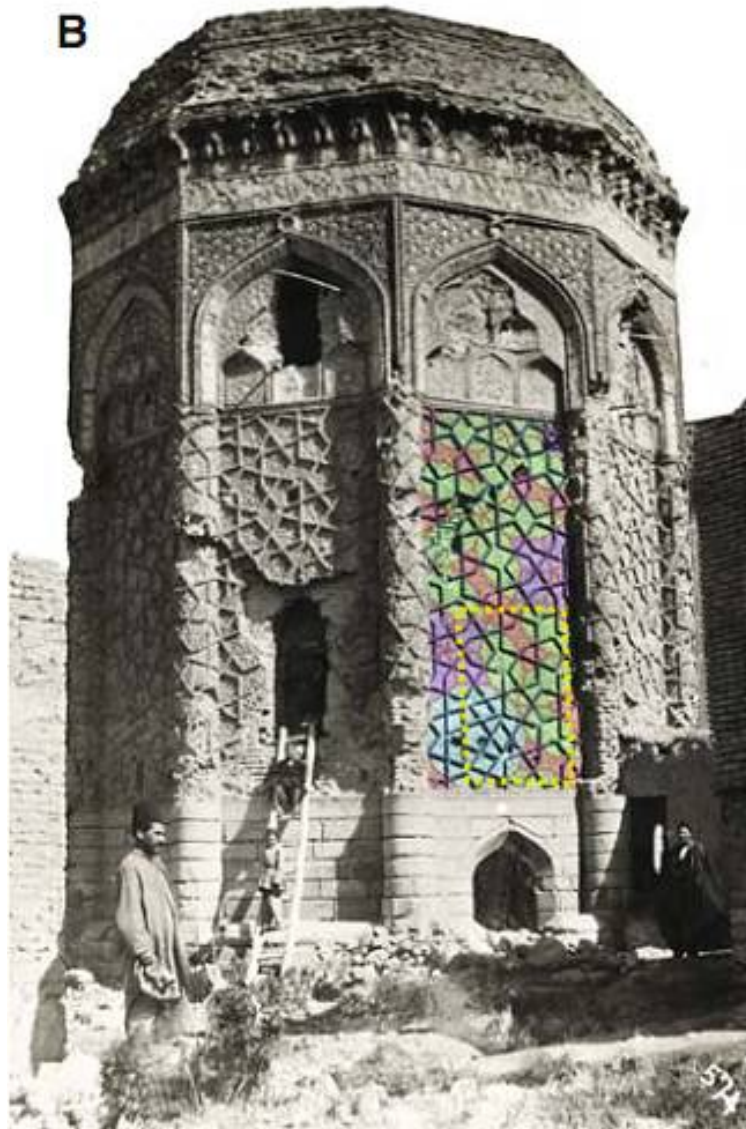
- La imagen por difracción de un cuasicristal es un cuasicristal.

Esos conjuntos tienen importantes aplicaciones en Tratamiento de Imágenes (para muestreo: un conjunto de puntos asociados a una función de la que conocemos la transformada de Fourier y su soporte). Se consiguen así teselamientos aperiódicos: cubren el espacio sin huecos. Cierta orden pero no repetitivo.

Aparecen en el arte islámico. Arquitectura medieval islámica: teselas de Girih (año 1200), Templo Darb-i Imam (Isfahan, Iran – 1453)



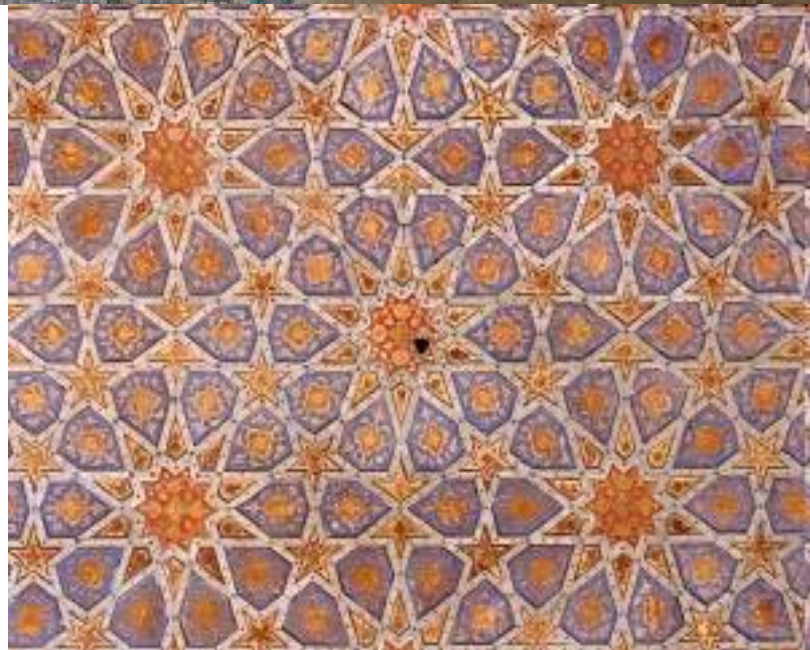
Teselas de Girih



Teselas de Girih







Existen importantes conexiones entre los cuasi cristales y las llamadas funciones ***almost periodic functions*** cuya teoría fue desarrollada por Harald Bohr (1887-1951), hermano del conocido físico Niels Bohr.

Una función $f(x)$ se dice almost-periodic si

$\forall \varepsilon > 0$ y $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector (*almost period*) $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{P})| < \varepsilon$$

En general, cuanto menor es el valor de ε , mayor ha de ser el tamaño del vector de traslación \mathbf{P} , aunque se requiere que formen un conjunto relativamente denso en \mathbb{R}^n .

Con esto queremos decir que para cada ε existen unos radios valores R_1 y R_2 tal que cada bola de radio R_2 contiene al menos un vector \mathbf{P} que satisfaga la condición anterior, y que en cada bola de radio R_1 alrededor de cualquier vector de traslación \mathbf{P} que satisfaga la condición anterior, no hay otro vector de traslación distinto a \mathbf{P} que satisfaga la condición anterior.

Las funciones *almost periodic* pueden aproximarse uniformemente por series de Fourier que contienen una cantidad numerable de frecuencias inconmensurables dos a dos. Cuando el conjunto de frecuencias requeridas se puede generar a partir de una base finito-dimensional se dice que la función resultante es **cuasiperiódica**.

Consideremos una función cuasiperiódica dada por su descomposición discreta de Fourier

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

Donde los vectores recíprocos vienen dados por

$$\mathbf{k} = \sum_{j=1}^N n_j \mathbf{b}_j$$

Si la cantidad mínima de vectores de base \mathbf{b}_j es mayor que tres (es decir, $N > 3$), entonces se necesita una descripción dimensional más alta para describir la red recíproca, y la estructura relacionada es un cristal aperiódico. En otro caso obtenemos un cristal periódico, lo que indica que las funciones periódicas son solo un caso particular de las cuasiperiódicas.

Un ejemplo de función almost-periodic que es cuasiperiódica es

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

Un ejemplo unidimensional sencillo de función cuasiperiódica corresponde a

$$f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x),$$

donde α es un número irracional. Es interesante observar que esta función cuasiperiódica se puede obtener como la proyección unidimensional de una función periódica asociada de dos dimensiones

$$f(x, y) = \cos x + \cos y$$

a través de la restricción $y = \alpha x$. Esta propiedad es la base del llamado *método de corte y proyección*, que se ha utilizado ampliamente en el estudio de cuasicristales.

De hecho, como cualquier función cuasiperiódica puede asociarse a una función periódica en un espacio de mayor dimensión, muchas de las nociones básicas de la cristalografía clásica pueden extenderse adecuadamente al estudio de cuasicristales en espacios de dimensión superior apropiados.

7. Idealización: cuasicristales como medidas cristalinas exóticas

Para muchos autores un cuasicristal es un conjunto numerable Λ que es el soporte de una medida atómica μ , cuya transformada de Fourier es también una medida atómica.

Recordemos que por la fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

En particular, si $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ entonces $\hat{\mu} = \mu$.

También hay una versión multidimensional de la fórmula de Poisson.

Supongamos que L es un (retícula de rango completo), y sea L^* su retículo dual.

Entonces

$$\left(\sum_{\lambda \in L} \delta_\lambda \right)^\wedge = \frac{1}{\det(L)} \sum_{s \in L^*} \delta_s.$$

Ejemplos concretos de cuasicristales (según la definición matemática) se pueden encontrar en la Introducción del artículo de Lev y Olevski (2015) antes mencionado.

De hecho, nuevas fórmulas de sumación de Poisson fueron ofrecidas en ese importante trabajo de Nir Lev y Alexander Olevskii y otros anteriores de 2013, pero en particular por Yves Meyer en una serie de trabajos. En un trabajo de 2015 se centró en una peculiar distribución que da origen a nuevas formulas de sumación de Poisson

$$\sigma = -2 \frac{d}{dx} \delta_0 + \sum_1^{\infty} r_3(n) n^{-1/2} (\delta_{\sqrt{n}} - \delta_{-\sqrt{n}})$$

$r_3(n)$ be the number of decompositions of the integer $n \geq 1$ into a sum of three squares (with $r_3(n) = 0$ if n is not a sum of three squares). More precisely $r_3(n)$ is the number of points $k \in \mathbb{Z}^3$ such that $|k|^2 = n$. We have $r_3(4n) = r_3(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_3(0) = 1$, $r_3(1) = 6$, $r_3(2) = 12, \dots$. Then $r_3(2^j) = 6$ if j is even and 12 if j is odd. The behavior of $r_3(n)$ as $n \rightarrow \infty$ is erratic. The mean behavior is more regular since

$$(3) \quad \sum_{0 \leq n \leq x} r_3(n) = \frac{4}{3} \pi x^{3/2} + O(x^{3/4})$$

This is equivalent to

$$(4) \quad \sum_{0 \leq n \leq x} r_3(n) n^{-1/2} = 2\pi x + O(x^{1/2})$$

Andrew Guinand (1912 - 1987) was an Australian mathematician

Alumno (Oxford) 1937 de E. C. Titchmarsh (alumno de Oxford 1937 de G.H. Hardy)

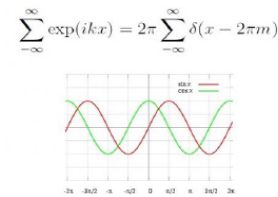


El trabajo de Guinand sobre este problema fue olvidado en gran parte y permaneció en la oscuridad hasta que fue redescubierto por Yves Meyer en 2015



Mathematician finds his 'new' solution to Poisson formula problem buried in 1959 paper

25 March 2016, by Lisa Zyga



(Left) Professor Yves Meyer. (Top right) The original Poisson formula (this is one way it can be written). (Bottom right) Sine and cosine waves, whose interference can be understood using the Poisson formula.

(Phys.org)—As Yves Meyer was getting ready to publish a detailed mathematical proof that he had spent months working on, he decided to do a final search of the existing literature. In the reference list of one of the papers he had just peer-reviewed, he noticed what he described as a "bizarre" paper

Meyer—who has spent his career making fundamental contributions to wavelet theory and number theory, and recently won the [Gauss Prize](#)—explains that at first he was somewhat embarrassed that someone else had made the same discovery many decades earlier. However, he also interprets the experience as an example of a more universal pattern: that all of human discovery builds on what comes before.

"Suddenly I understood what I have been steadily doing in my scientific life," Meyer told *Phys.org*. "I was transmitting a heritage. Today I can express my gratitude to Guinand, who was a great person, both as a human being and as a mathematician."

Not just one Poisson formula

Meyer has spent much of his career investigating the mathematical properties of oscillations. One question that arises is, what happens when large numbers of sines or cosines interfere with one another? This interference occurs in many physical scenarios, such as X-ray crystallography, a technique used to study crystals. The Poisson

Premio
Gauss

El resultado de Yves Meyer de 2015 afirma:

Corollary 3.1 *Guinand's distribution is the sum of a linear trend $4\pi x$ and a fluctuation which is an almost periodic distribution. More precisely we have*

$$(9) \quad \sigma(x) = 4\pi x + 2 \sum_1^{\infty} r_3(n) n^{-1/2} \sin(2\pi\sqrt{nx}).$$

We recall that a tempered distribution τ is almost periodic if for every test function ϕ in the Schwartz class the convolution product $\tau * \phi$ is an almost periodic function in the sense of Bohr. This definition was proposed by L. Schwartz in [15].

Esto arroja nuevas medidas cristalinas exóticas.

8. Una insospechada conexión: medidas cristalinas exóticas y ondas de Riemann

El objeto de esta sección es dar algunas ideas contenidas en el artículo:

African Diaspora Journal of Mathematics
Volume 20, Number 1, pp. 1–13 (2017)

ISSN 1539-854X
www.math-res-pub.org/adjm

POISSON SUMMATION FORMULAE AND THE WAVE EQUATION WITH A FINITELY SUPPORTED MEASURE AS INITIAL VELOCITY

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ

Instituto de Matemática Interdisciplinar y Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
Plaza de las Ciencias 3, Madrid, 28035, Spain.

YVES MEYER

CMLA, ENS-Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay, France.

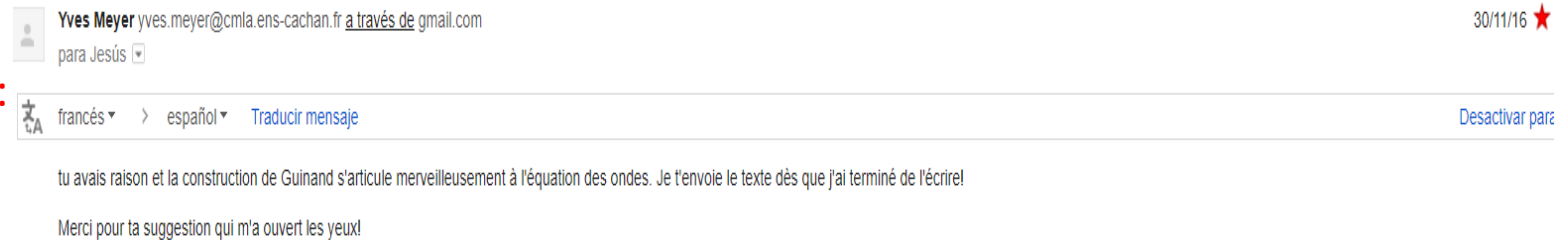
Todo empezó con la conferencia de Yves Meyer con motivo de la Jornada por la jubilación de Magdalena Walias, el 25 de noviembre de 2016 en Universidad Autónoma de Madrid.



Escuchando a Yves mino a mi mente (como un *chispazo eléctrico*) la idea de que el tratamiento de Yves sobre la distribución de Guinand podría interpretarse en términos de Ecuaciones en Derivadas Parciales con datos muy singulares.

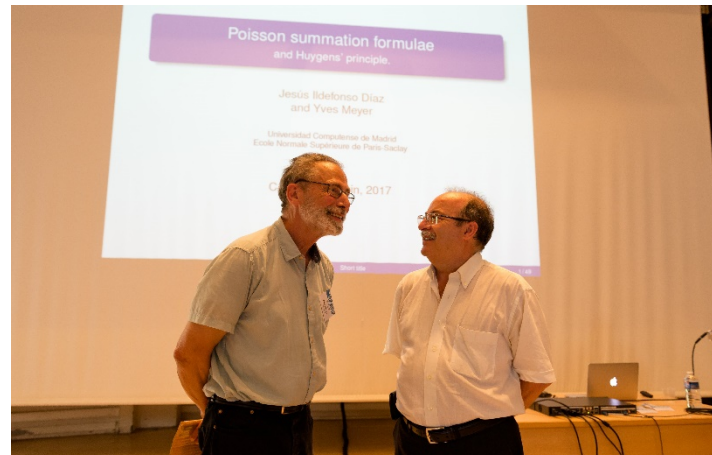
En tan solo dos días, el 27 de Noviembre de 2016, tenía ya un boceto de posibles conexiones con las llamadas “ondas de Riemann”. Pero faltaban detalles francamente difíciles. Se lo mandé a Yves y al principio su silencio fue total.

Pero...
a los tres días:



Él acabó (y mejoró enormemente) los puntos más delicados.

En el homenaje que Yves Meyer en su centro de trabajo él eligió ese tema para su charla:



Interview en la Gaceta de la RSME, 2018 (Ireneo Peral)

La idea principal es utilizar unas soluciones singulares de la ecuación de ondas que ya fueron imaginadas por Riemann.

Georg Friedrich Bernhard **Riemann** ([1826](#) - [1866](#))



List of things named after Bernhard Riemann

From Wikipedia, the free encyclopedia

(Redirected from [List of topics named after Bernhard Riemann](#))

For music and Hugo Riemann, see [Neo-Riemannian theory](#).

The German mathematician [Bernhard Riemann](#) (1826–1866) is the [eponym](#) of many things.

Contents [\[hide\]](#)

- "Riemann" (by field)
 - Analysis
 - Number theory
 - Physics
- Riemannian
- Riemann's
- Non-mathematical

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_things_named_after_Bernhard_Riemann

Bernhard Riemann, « Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite », Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, vol. 8, 1860

[Sobre la propagación de las ondas de aire planas de amplitud finita](#)

Relación con el problema de Riemann en dinámica de gases

Una versión simplificada del problema de Riemann en dinámica de gases se puede formular como

$$\begin{cases} u_t + G(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = H(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

para una función continua G , donde $H(x)$ denota a la función de Heaviside.

Tomando $G(s) = s$ y derivando respecto de x obtenemos

$$\begin{cases} u_{xt} + u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_x(x, 0) = u_t(x, 0) = \delta_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Derivando respecto de t

$$u_{tt} + u_{tx} = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

y llegamos al mismo tipo de problemas hiperbólicos de segundo orden verificado por w .

La solución de la ecuación de onda con una velocidad inicial singular

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta w & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ w(x, 0) = 0, \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \delta_0(x) & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

tiene como solución la medida

$$w(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \delta(t - |x|) \quad (1)$$

(véase, e.g. W. A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, Wiley, New York, 2007, páginas 323 y 332). Esto se puede interpretar en términos de la medida superficial $d\sigma_t$ sobre la esfera $B_t \subset \mathbb{R}^3$ centrada en 0 y radio $|t|$ (ver Lemma 6.2 de D-Meyer). No es difícil probar que w también puede ser escrita como

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \delta(t^2 - |x|^2) \operatorname{sgn}(t) \quad (2)$$

y así, w es una distribución que se anula excepto en el cono de luz sobre el que es una delta de Dirac. Además (2) implica la propiedad crucial

$$w(x, -t) = -w(x, t).$$

Como w no es una función si no una distribución singular (incluso si es regular en t , $w \in C^1(\mathbb{R} : D'(\mathbb{R}^3))$) una cuestión muy delicada es saber en qué sentido se puede entender el valor de esa distribución en un sólo punto, como lo es $x = 0$, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$. La respuesta es afirmativa: $u(0, t)$ es la transformada de Fourier de la medida atómica μ del Theorem 4.11 de D-Meyer (2017).

El enfoque a través de las ondas de Riemann sobre toro tridimensional nos proporcionó una comprensión notable de la distribución y medida de Guinand. Usando este nuevo enfoque uno puede construir una gran familia de velocidades iniciales que dan lugar a medidas cristalinas generalizando la solución de Guinand

Es de señalar que hoy día sabemos que hay muchas otras medidas cristalinas exóticas diferentes a las construidas en D-Meyer.

Quizás el enfoque a través de las ondas de Riemann pueda dar luz sobre la optimización de medidas cristalinas exóticas siguiendo diferentes criterios.

Los retos no han hecho más que comenzar ...

**Gracias por su
atención**