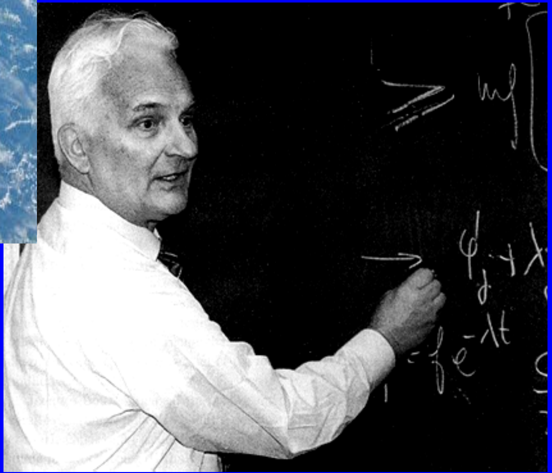
La Trilogía Universal de J.-L. Lions con el Planeta Tierra como fondo.

J.I. Díaz

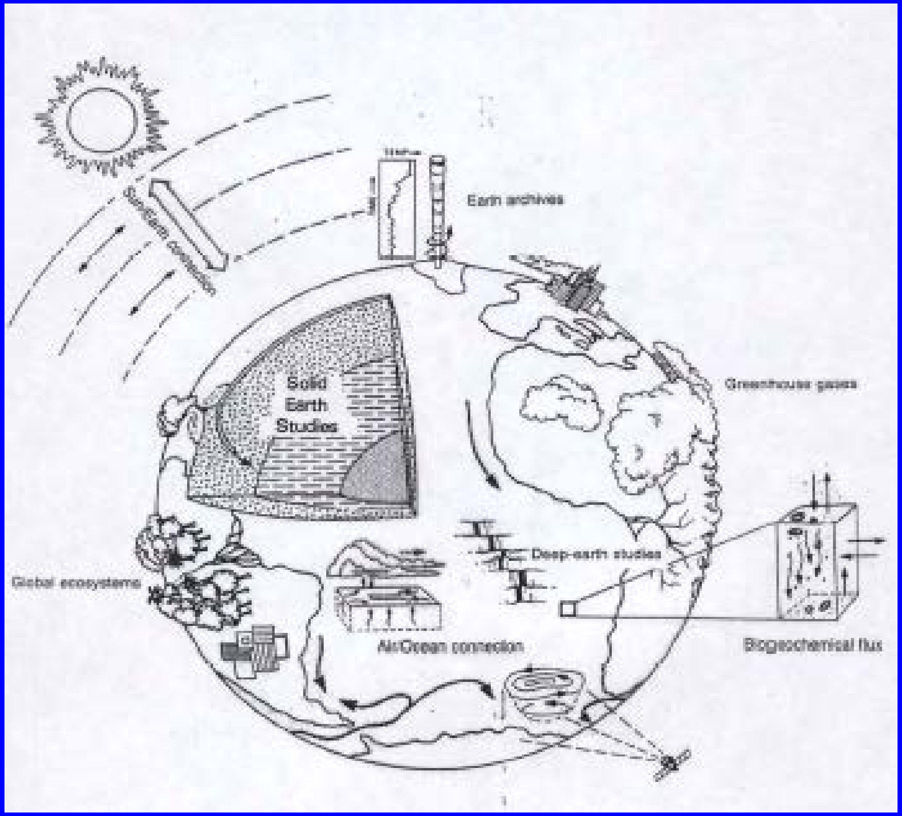
Real Academia de Ciencias,
8 de mayo de 2013

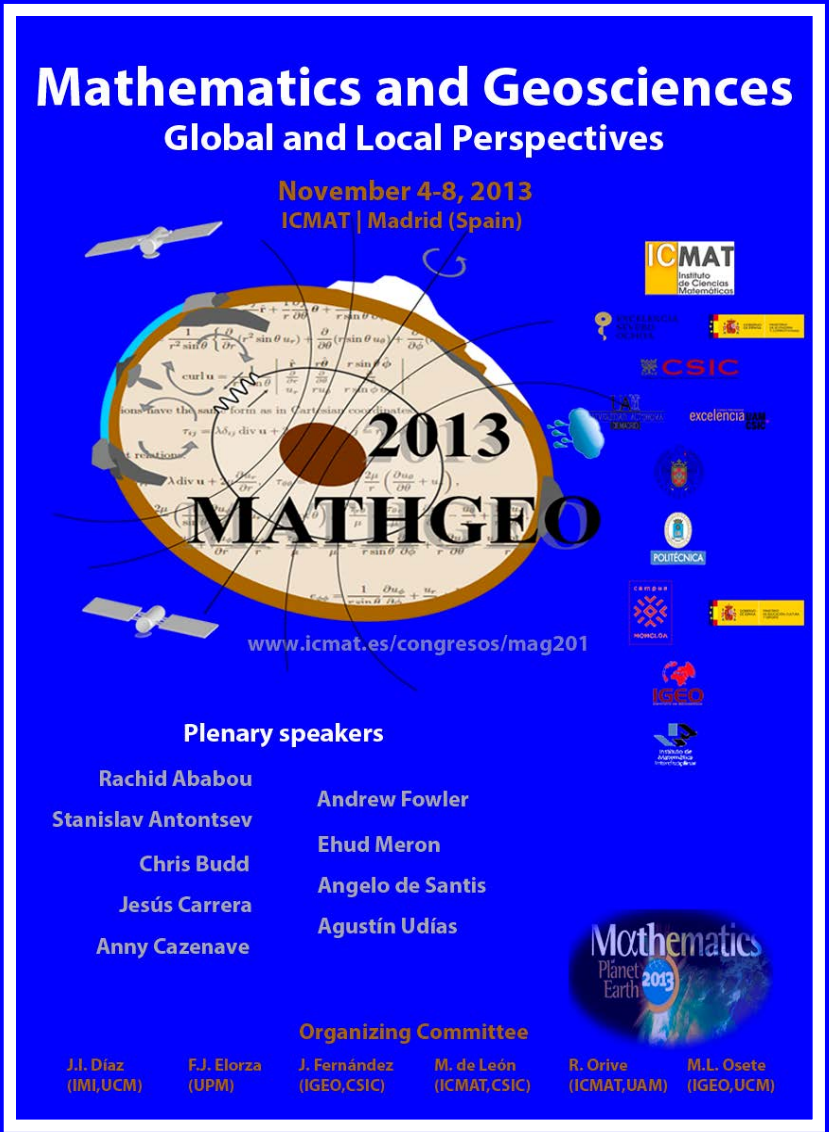


J.L. Lions (1928-2001)

1. Introducción.

El Planeta Tierra: *sistema complejo con numerosos procesos realimentantados*



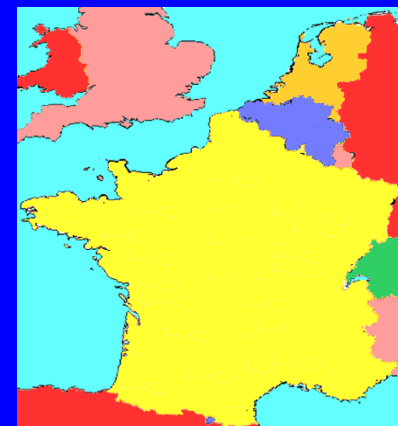


Un matemático con una visión global de la ciencia

Jacques-Louis Lions
(2 mai 1928 - 16 mai 2001)

1947-50 Élève puis agrégé pré-parateur à l'E.N.S.
1951-54 Attaché de recherches au CNRS.
Ses enseignements :
54-63 : Faculté des sciences de Nancy
63-78 : Faculté des sciences de Paris
66-86 : École Polytechnique
73-98 : Collège de France
Ses présidences :
80-84 : INRIA
84-92 : CNES
91-94 : Union Mathématique Internationale
96-98 : Académie des Sciences

Grasse –Departamento francés de los Alpes Marítimos- Costa Azul



Padre, André, Resistencia

Estudios secundarios en Niza,

Proclamó el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas.

Su obra matemática

1955, Tesis de Estado (U. París) bajo la dirección de Laurent Schwartz (medalla Fields, en 1950, por su Teoría de las Distribuciones).

En contraste con el enfoque matemático del grupo Bourbaki, Lions se interesó por el tratamiento matemático de problemas surgidos de la “vida real”, formulando su modelización, completando el análisis matemático mediante algoritmos numéricos para los más potentes ordenadores y analizando las posibilidades de control sobre el sistema en estudio.

Reconocimiento histórico.

Le Verrier, Urbain (450*)	Leimanis, Eizens (835)	Levi ben Gerson (268)
Lebesgue, Henri (1202*)	Lemaître, Georges (2055*)	Levi-Civita, Tullio (2160*)
Ledermann, Walter (1901*)	Lemoine, Emile (605*)	Levinson, Norman (2320*)
Leech, John (582*)	Leonardo da Vinci (704*)	Levy, Hyman (902)
Leffler, Magnus Mittag- (2302*)	Lepaute, Nicole-Reine (1022*)	Lévy, Paul (714*)
Lefschetz, Solomon (2083*)	Leonardo of Pisa (Fibonacci) (2223*)	Levytsky, Volodymyr (296*)
Legendre, Adrien-Marie (1953*)	Leray, Jean (990*)	Lewy, Hans (1074*)
Léger, Emile (186)	Lerch, Mathias (470*)	Lexell, Anders (861*)
Lehmer, Derrick H (1715*)	Leslie, John (1703*)	Lexis, Wilhelm (562*)
L'Hôpital, Guillaume de (204*)	Lidstone, George (1106)	Lions, Pierre-Louis (1423*)
Lhuilier, Simon (1091)	Lie, Sophus (2699*)	Liouville, Joseph (1968*)
Li Chih (2015)	Lifshitz, Evgenii (441*)	Lipschitz, Rudolf (562*)
Libermann, Paulette (1460)	Lighthill, James (2081*)	Lissajous, Jules (1092*)
Li Chunfeng (917)	Lindelöf, Ernst (592*)	Listing, Johann (1666*)
Li Rui (607)	Lindemann, Ferdinand von (895*)	Littlewood, Dudley (908*)
Li Shanlan (1807*)	Linfoot, Hubert (1856*)	Littlewood, John E (2326*)
Li Ye (2015)	Linnik, Yuri (2104*)	Liu Hong (304)
Li Zhi (2015)	Lint, Jack van (2063*)	Liu, Hui (1922*)
Libri Guglielmo (2016*)	Lions, Jacques-Louis (2154*)	Livsic, Moshe (626*)
Ljunggren, Wilhelm (986*)	Loria, Gino (2411*)	Lukacs, Eugene (1185*)
Llull, Ramon (348*)	Lovász, Laszlo (2775*)	Lukasiewicz, Jan (600*)
Löb, Martin (645*)	Love, Augustus (738*)	Luke, Yudell (1143*)
Lobachevsky, Nikolai (2143*)	Lovelace, Augusta Ada (2243*)	Lumsden, Thomas (288)
Lockhart, James (365*)	Löwenheim, Leopold (1329*)	Luoxia Hong (440)
Loewner, Karl (1807*)	Löwner, Karl (1807*)	Lupas, Alexandru (1194*)

Relación con España

Primera visita a España en 1963 (Embajada de Francia: Barcelona, Zaragoza y Madrid). Conoce a **A. Dou**. Notas escritas

Lions, J.-L., Ecuaciones Diferenciales y Problemas en los Límites. Notas de tres conferencias impartidas (los días 21.22 y 23 de Marzo de 1963) en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona. Publ. Seminario Matemático de Barcelona. Abril 1963.

Alumnos "directos"

Antonio Valle Sánchez

J.A. Fernández Viña, J. L. Andrés Yebra, C. Fernández Pérez y M. Lobo Hidalgo

Contactos con muchos otros españoles:

A.Bermúdez de Castro, J.Hernández, F. Michavila, J.M. Viaño, E. Fernández Cara, E. Zuazua, E. Casas, C. Parés, …

Doctor Honoris Causa por: U. Complutense (1976), U. Politécnica de Madrid (1982), U. Santiago de Compostela (1988), U. de Málaga (1994). *Real Academia de Ciencias:* (1999)

J.-L. Lions, Le simulateur de la Terre,
Rev. R. Acad. Cien. Exact. Fis. Nat., **92**, 1998, 71-85.

Congreso de los Diputados:

21 de enero de 2000

Periodo de actividad mágica: problemas no homogéneos, control y problemas no lineales

3 libros en 1968, 1 en 1969 y otro en 1970.

Lions, J.-L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogénes et applications*, Dunod, Paris, Vol.1 1968, Vol.2 1968, Vol. 3, 1970.

Comienzos en Teoría de control (actividad central: cátedra del Collège de France (1973-1998): *Analyse Mathématique des Systémes et de leur Contrôle*)

Antes de Lions: *principio del máximo de Pontryaguin*, *el de la programación dinámica de Bellman y la teoría del filtro de R. Kalman.* **Aplicación a ec. dif. ordinarias.**

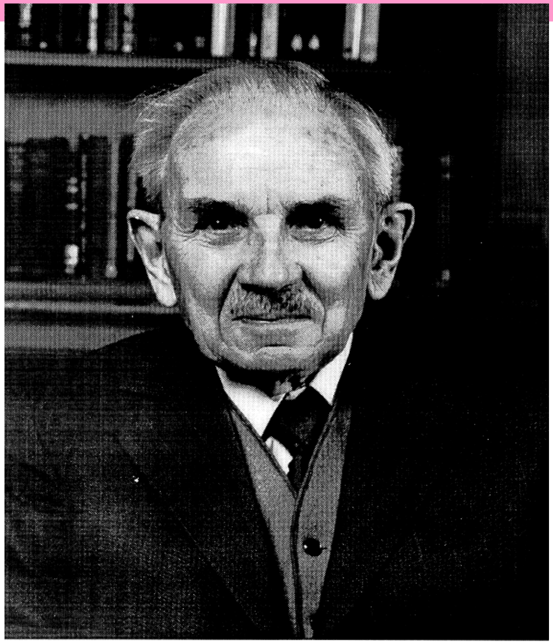
¿es posible "controlar" los sistemas regidos por ecuaciones en derivadas parciales?

3 Notas CRAS (1966): Lions, J.-L., *Sur le contrôle optimal de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1968.

Y más aún:

Lions, J.-L., ***Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires***, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1969.

1959: sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que modela la dinámica de los fluidos incompresibles



Jean Leray (1906-1998)

Lions-G. Prodi (1959): unicidad dimension2

Fundación Clay (2000): 1 millón de dolares.

Libro organizado por métodos: no por ecuaciones

Operadores de Leray-Lions del Cálculo de Variaciones (1966)

Operadores “pseudo-monótonos”. Haïm Brezis

Duvaut, G., Lions, J.-L., ***Les inéquations en Mécanique et en Physique***, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1972.

contextos insospechados: climatización, flujos de fluidos no-newtonianos (como los polímeros, la lava, los glaciares, etc.), hasta problemas de antenas (ecuaciones de Maxwell)...

Bensoussan, A., Lions, J.-L., ***Applications des inéquations variationnelles en Contrôle stochastique***, Dunod-Bordas, Collection M.M.I., Paris, 1978.

Bensoussan, A., Lions, J.-L., ***Contrôle impulsionnel et inéquations variationnelles***, Dunod-Bordas, Collection M.M.I., Paris, 1982.

1972: creación por Lions del (LABORIA: Director) del IRIA (más tarde INRIA: Presidente 1980-1984).

problemas planteados en Economía (premios Nobel)

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi y problemas de la teoría de juegos asociados a procesos de control estocástico

Pierre-Louis Lions: soluciones de viscosidad,.....(Medalla Fields, 1994)

El interés de Lions por modelos de la Economía se mantendría a lo largo de su vida (equilibrios de Pareto 1986-Pareto), de Nash y de von Stakelberg (1994) y Díaz-Lions (1999).

Análisis numérico de EDPs

Lions: asociado a “tratamiento matemático de los mayores problemas tecnológicos”: INRIA, CNES, CEA, EDF, ...

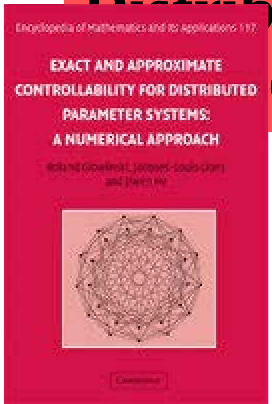
Sistemas complejos: aproximación cuantitativa en términos de algoritmos

Cursos en Nancy (1954-62), Instituto del CNRS Blaise Pascal
Lions, J.-L., Méthodes d'approximation numérique des problémes aux limites de la Physique Mathématique, Publications du CNRS, Institut Blaise Pascal, tome 1 1962, tome 2 1962, tome 3 1963. “Diplodocus”

Diferencias finitas, Elementos Finitos (Tesis de Cea 1960, Ingeniería), Estabilidad de algoritmos (Raviart, 1965), Métodos de descomposición (paralelismo; trabajos con Temam y Bensoussan), Notas del curso en la Ecole Polytechnique (1966-86),...

Métodos de aproximación para las inecuaciones variacionales: Glowinski, R., Lions, J. L., Tremolieres, R., Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, 2 volúmenes, Dunod, París, 1976

Métodos de aproximación en Control de EDPS: Glowinski R., Lions J.-L., Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Numerica*, 1994, 269-378, 1995, 159-333. **Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems - A Numerical Approach** Cambridge Univ. Press, 2008.

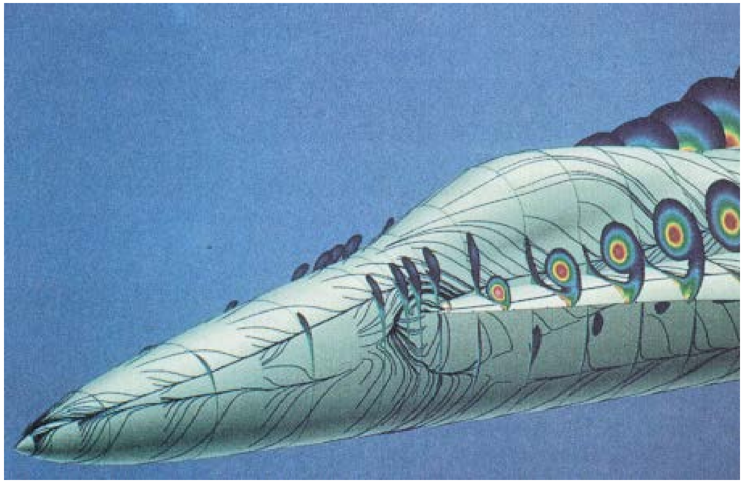


Cálculo paralelo: Serie de CRAS con O. Pironneau, R. Glowinski,...(anuncio de libro)

Perturbaciones singulares y Homogeneización

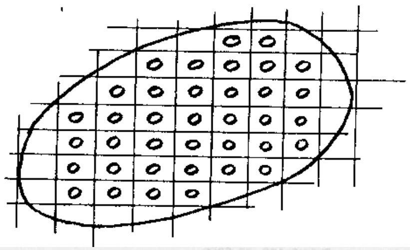
Curso 1970-71: Paso al límite (riguroso) en un pequeño parámetro, en (término independiente, datos en el contorno, operador diferencial, dominio, etc.)

Capa límite de Prandtl (1904)



Lions, J. L., ***Perturbations singuliéres dans les problémes aux limites et en contrôle optimal***, Lecture Notes in Math., 323, Springer, 1973.

Bensoussan, A., Lions, J. L., Papanicolau, G.,Asymptotic Methods in Periodic Structures, North Holland, Amsterdam, 1978.



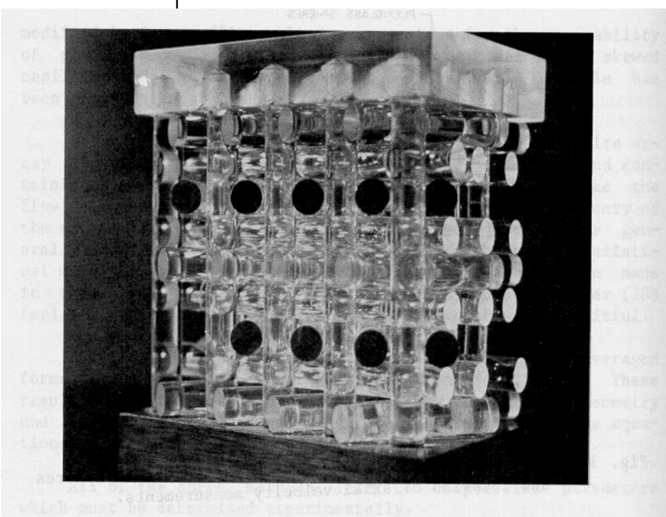
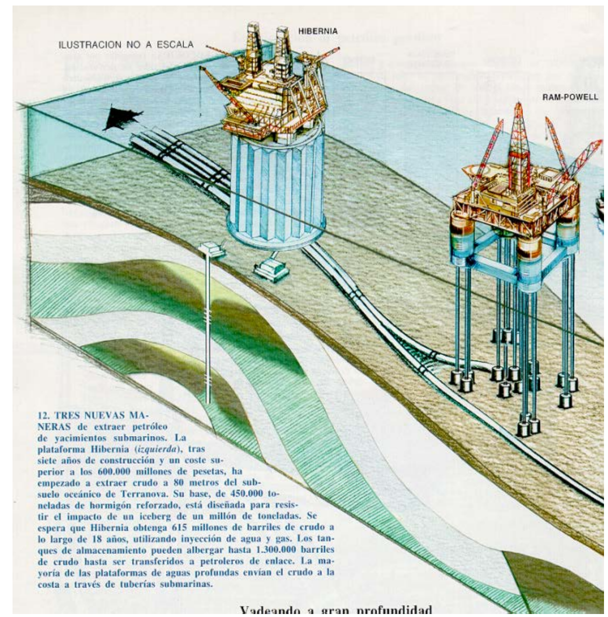


Fig. 3.2 Photograph of half-scale model of complex rod structure porous medium.



Escalas múltiples: A. Liñán, E. Sánchez-Palencia,...

Controlabilidad: el método HUM

1980 Curso en el Collège de France sobre el control de sistemas distribuidos singulares (inestabilidades, fenómenos de explosión en tiempo finito, soluciones múltiples, fenómenos de bifurcación, etc.)

Lions, J. L., ***Contrôle des systémes distribués singuliérs***, Gauthier-Villars, París, 1983.

Filosofía: a medida que un sistema genera más inestabilidades es más fácil de controlar

Lions-Zuazua (1997), Díaz-Lions (1998,99),...

Lions, J. L., ***Contròlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systémes Distribués***, tomo 1, ***Contrôlabilité Exacte***, tomo 2, ***Perturbations***, Masson, Paris, 1988.

Lagnese, J.E., Lions, J.-L., ***Modelling. Analysis and Control of Thin Plates***, Masson, Paris, 1988.

Caso de ecuaciones parabólicas:

J.-L. Lions, Remarques sur la contrôlabilité approchée. En ***Jornadas Hispano-Francesas sobre control de sistemas distribuidos***, Univ. de Málaga, 1991, 77--87.

Conjeturas sobre controlabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes:........

Serie H. Brezis J.L. Lions en Pitman-Longman

Seminario del Collège de France, 12 volúmenes

Series: P.G. Ciarlet, J.L. Lions en Masson, Paris:

Mathématiques Apliquées pour la Maítrise, 21 volúmenes,

Recherches en Mathématiques Appliquées, 42 volúmenes.

Handbook of Numerical Analysis, en North-Holland, 9 volúmenes

Enciclopedias: Dautray y Ciarlet.

Dautray, R., Lions, J.-L., ***Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques***, En 3 volumenes, Collection du C.E.A., Série scientifique, Masson, Paris, 1984 y 1985, reedición en 9 volumes, Masson, Paris, 1988. Traducción inglesa: ***Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology***, 6 volúmenes, Springcr Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988-1990.

Visión actualizada del Courant y Hilbert (1953)

Medio Ambiente (Meteorología, Climatología, Oceanografia, Ecología, etc.): Présidence de l'Assemblée Nationale, París, marzo de 1989

El primer testimonio oficial del interés de Lions por temas de Medio Ambiente (entendido en un sentido amplio que incluye campos tales como la Meteorología, Climatología, Oceanografía, Ecología, etc.) parece ser que fue su conferencia
Pollution, Atmosphère et Climat
impartida en el Colloque Présidence de l'Assemblée Nationale, Hôtel de Lassay, París, el 4 de marzo de 1989.

Desde el punto de vista matemático, su interés se acrecentó a medida que iba desarrollando la teoría de los centinelas que introdujo para el tratamiento de sistemas con datos incompletos (característicos en procesos del Medio Ambiente) en una serie de Notas en las Comptes Rendus comenzando en 1988 y que más tarde darían lugar a su libro

Lions, J. L., ***Sentinelles pour les systémes distribués à données incomplètes***, Masson, Paris, 1992.

Roger Temam subraya en Siam (2012) que quizás fuese el hecho de presidir, en 1990, el CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) y el Consejo Científico de la Agencia Meterorológica francesa lo que le llevase a ocuparse de ese tipo de temas.

En todo caso, lo que me parece digno de reseñar es que fue con motivo del curso que impartió en el Instituto de España, del 15 al 19 de enero de 1990, con el que aparecería el primer trabajo de Lions al respecto.

Las notas de su curso (que él trajo previamente mecanografiadas en francés) darían lugar a su libro de divulgación El Planeta Tierra: el papel de las matemáticas y los superordenadores que tuve el honor y el placer de traducir al castellano (junto a Miguel Artola).
Ello me dio la oportunidad de sugerirle algunos comentarios. El libro apareció publicado en Espasa-Calpe (<cite>Lions-Espasa</cite>) junto a un apéndice, de carácter más técnico, para el que solicitó mi colaboración.

Instituto de España,
Enero 1990

El Presidente del Instituto de España
se complace en invitarle
al ciclo de conferencias de

Jacques-Louis Lions

LA PLANETE TERRE
Rôle des Mathématiques et des Super Ordinateurs

*

Del lunes 15 al viernes 19 de enero
a las 7,30 de la tarde 1991

- Etude globale de la Planète Terre: de J.B. FOURIER (1824) aux présentes interrogations
- La Trilogie Universelle de la Théorie des Systèmes
- Modélisation Mathématique: des briques de base aux immeubles
- Les predictions de systèmes imprédicibles
- Contrôle et scénarios de décisions

*

D ....

San Bernardo, 49. Madrid.

Se requiere invitación

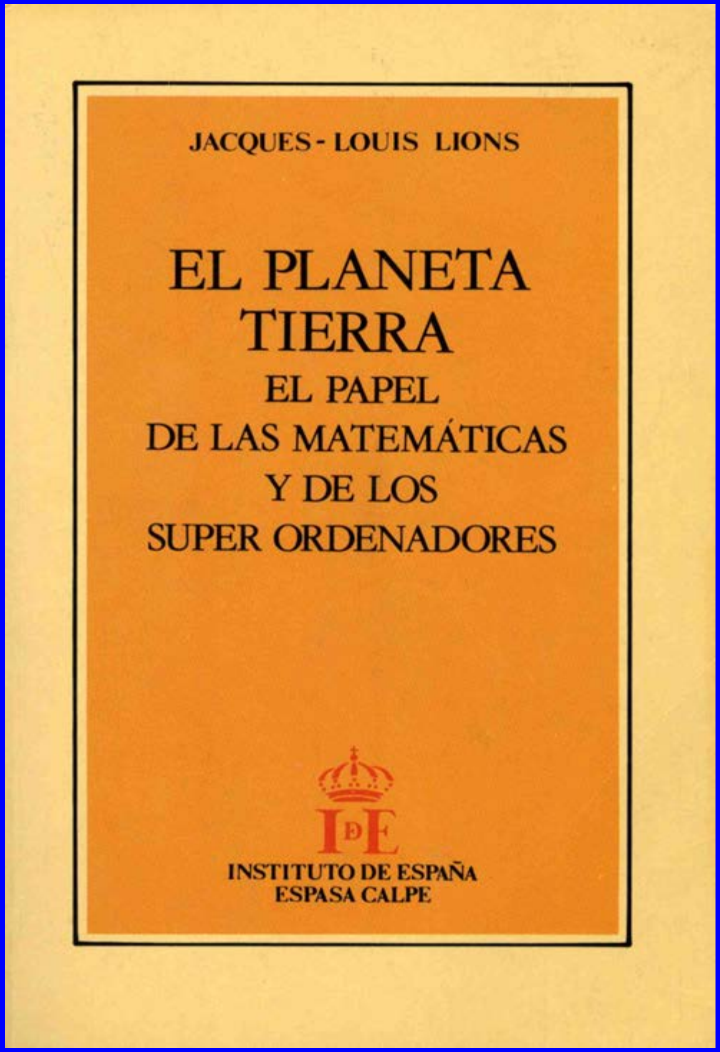
Nunca, desde hace miles de años, ha aumentado tan rápidamente el contenido de gas carbónico en la atmósfera: los resultados de análisis de los hielos del Antártico así lo demuestran. Como también queda demostrada la correlación entre temperatura media y concentración de gas carbónico. Es el efecto invernadero. Todas las observaciones, de las que las obtenidas por medios espaciales completadas por observaciones locales constituyen la piedra maestra, prueban el carácter *global* de la cuestión. Todo está correlacionado: atmósfera, océano, casquetes glaciares, vegetación...

Ya en 1824, J.B. Fourier se preguntaba sobre las «consecuencias de las acciones humanas» en la «temperatura media» y en «zonas muy amplias». Su pregunta se ha convertido en inquietud. La cuestión queda, pues, planteada: *¿es posible* —gracias a observaciones suplementarias establecidas en particular por medios espaciales— prever la evolución climática en un horizonte de 10 a 100 años? Previsiones, o más bien planes de acción, establecidas a partir de diversas hipótesis de «acciones humanas», que llevan a una herramienta de ayuda en la decisión política.

Todo se basa en último término en la siguiente cuestión: admitiendo que los especialistas de las numerosas disciplinas afectadas establezcan *modelos matemáticos* del Planeta Tierra, ¿se podrán, mediante *análisis* y con *superordenadores*, obtener planes de acción fiables, que permitan decisiones, y su *control*? Se plantean así los términos de la aplicación de la *Trilogía Universal: Modelización, Análisis, Control* al sistema del Planeta Tierra.

Después de haber recordado las condiciones históricas, científicas y técnicas del establecimiento de tal *Trilogía*, evidenciaremos cómo ésta puede aplicarse al Planeta Tierra.

Jacques-Louis Lions
Profesor del Collège de France
Presidente del Centre National d'Études Spatiales (CNES)



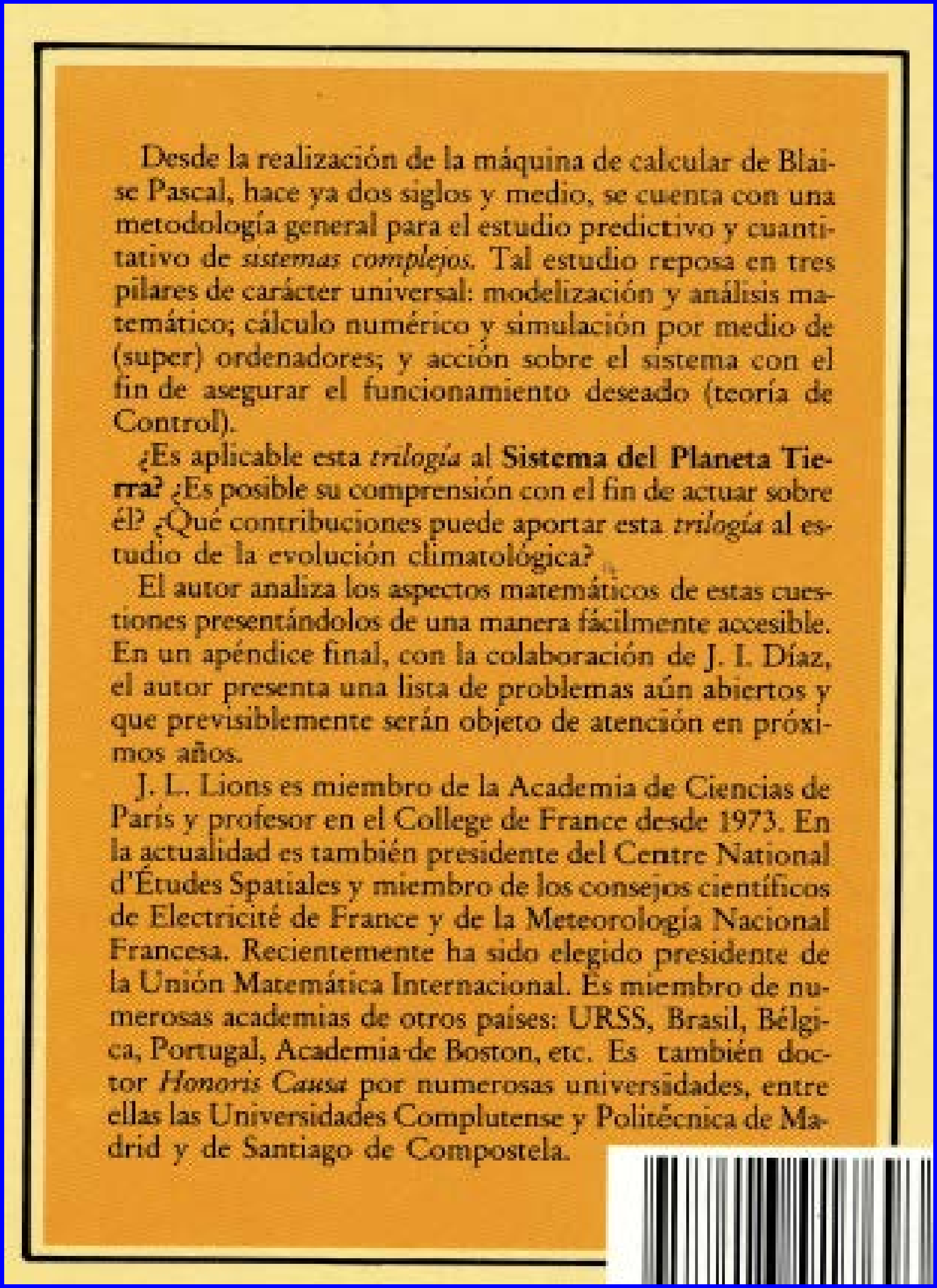
JACQUES - LOUIS LIONS

EL PLANETA TIERRA

EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LOS SUPER ORDENADORES

INSTITUTO DE ESPAÑA
ESPASA CALPE

Lions, J.-L., El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores. Espasa-Calpe, Madrid, 1990 (M.Artola, J.I.D.)



Desde la realización de la máquina de calcular de Blaise Pascal, hace ya dos siglos y medio, se cuenta con una metodología general para el estudio predictivo y cuantitativo de *sistemas complejos.* Tal estudio reposa en tres pilares de carácter universal: modelización y análisis matemático; cálculo numérico y simulación por medio de (super) ordenadores; y acción sobre el sistema con el fin de asegurar el funcionamiento deseado (teoría de Control).

¿Es aplicable esta *trilogía* al **Sistema del Planeta Tierra?** ¿Es posible su comprensión con el fin de actuar sobre él? ¿Qué contribuciones puede aportar esta *trilogía* al estudio de la evolución climatológica?

El autor analiza los aspectos matemáticos de estas cuestiones presentándolos de una manera fácilmente accesible. En un apéndice final, con la colaboración de J. I. Díaz, el autor presenta una lista de problemas aún abiertos y que previsiblemente serán objeto de atención en próximos años.

J. L. Lions es miembro de la Academia de Ciencias de París y profesor en el College de France desde 1973. En la actualidad es también presidente del Centre National d'Études Spatiales y miembro de los consejos científicos de Electricité de France y de la Meteorología Nacional Francesa. Recientemente ha sido elegido presidente de la Unión Matemática Internacional. Es miembro de numerosas academias de otros paises: URSS, Brasil, Bélgica, Portugal, Academia de Boston, etc. Es también doctor *Honoris Causa* por numerosas universidades, entre ellas las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid y de Santiago de Compostela.

Colaboración con Lions: Cursos de verano de la UCM

(El Escorial 1992, Almería 1993)

Díaz, J.I., Lions, J.-L., eds., ***Mathematics, Climate and Environment***, Research Notes in Applied Mathematics 27, Masson, Paris, 1993.

Environment, ***Economics and Their Mathematical Models***, Research Notes in Applied Mathematics 35, Masson, Paris, 1994.

Advanced Institute de la NATO (Santa Cruz de Tenerife, del 11 al 21 de enero de 1995).

Díaz, J. I., ed., ***The Mathematics of Models for Climatology and Environement***, NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997.

En su fax de 29 de julio
(Lions desplegaba una correspondencia sorprendente por medio del fax de mensajes que solía escribir personalmente de su puño y letra: conservo, como un tesoro, más de cuatrocientas páginas)
me informaba que le habían propuesto publicar una segunda edición de su libro del Planeta Tierra (agotado en menos de dos años) pero que su intención era la de preparar todo un nuevo libro incorporando referencias aparecidas desde 1990 y añadiendo varios capítulos complementarios .
Me proponía que llevásemos a cabo tal tarea de forma conjunta dada la cercanía de alguno de mis trabajos y mi participación en la preparación del texto original. Desde entonces trabajamos duramente en aquel proyecto.
El texto estaba prácticamente acabado a finales del 2000, unos meses antes de su fallecimiento.

Díaz, J.I., Lions, J.-L., Matemáticas, superordenadores y control para el planeta Tierra
Contrato con la Editorial de la UCM, 2002 (inacabado)

Lions hizo explicita mención al libro conjunto en uno de sus últimos artículos

Lions J.-L., Some Remarks on the Mathematical Modelling of Planet Earth System**,**
*Atti dei Convegni Lincei, Accademia Nazionale dei Lincei***, 158**, 2000, 73-93**.**

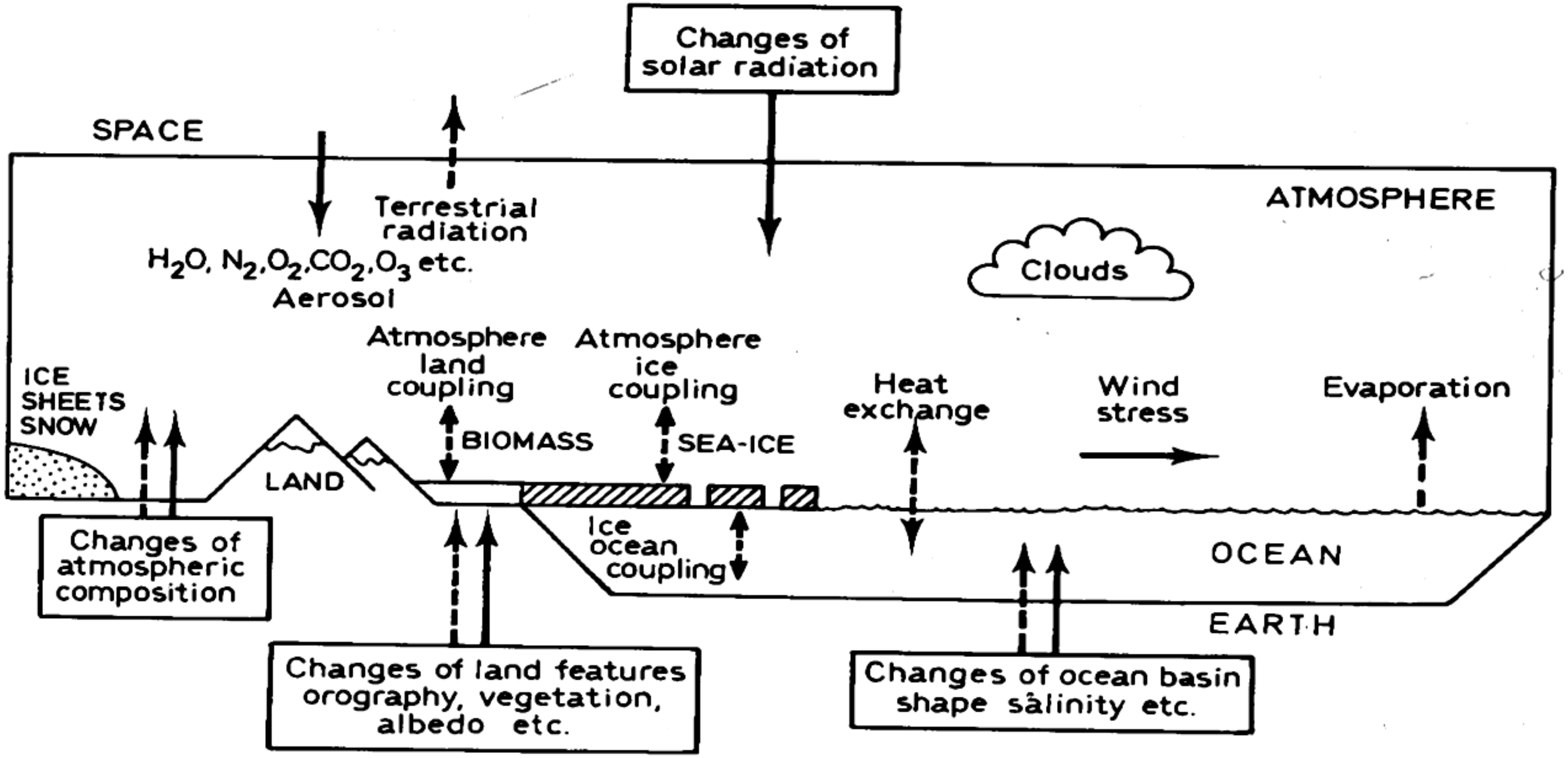
La "Trilogía Universal" de la Matemática Aplicada

Sistema real

Predicción

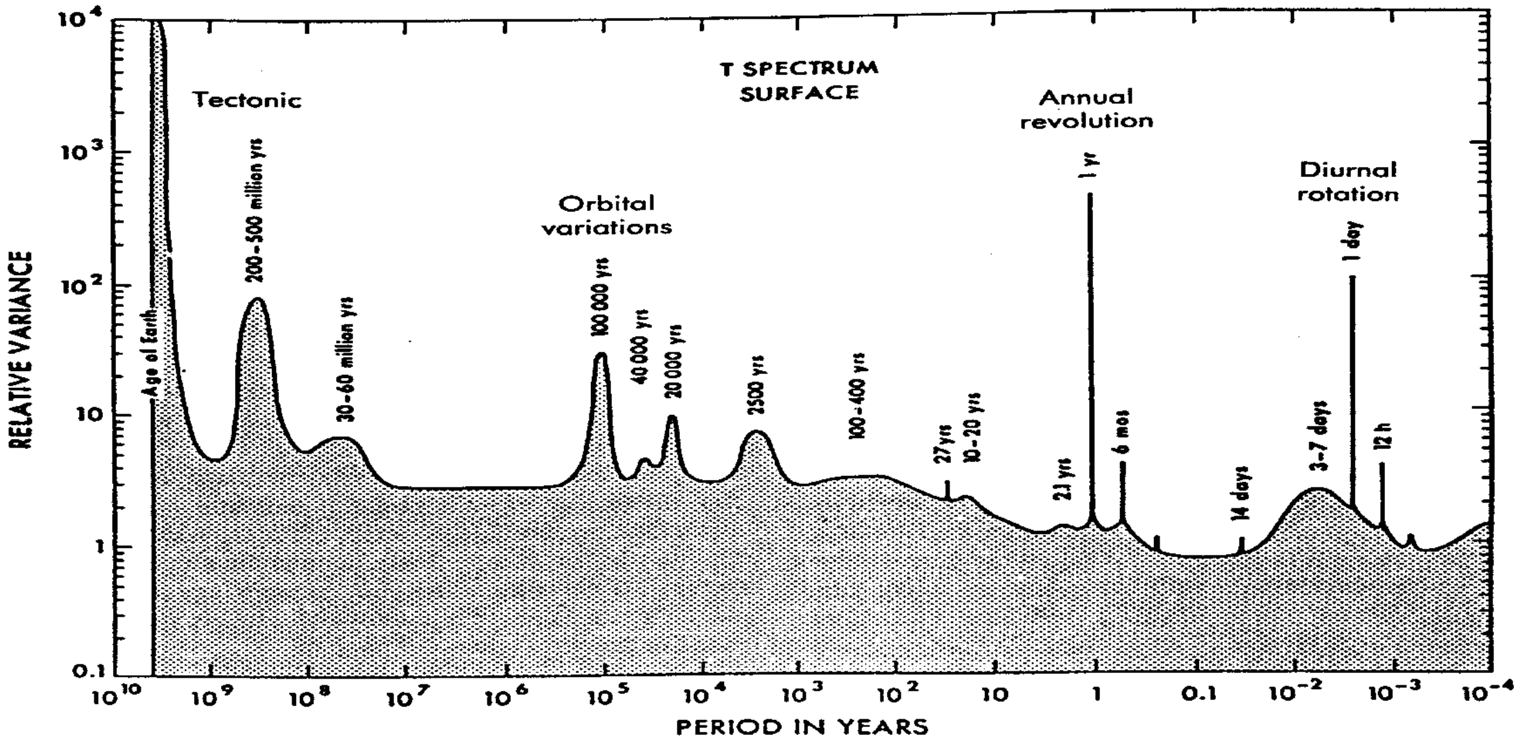
Modelización matemática

El problema real = CLIMA: componentes externos e internos del sistema climático



Escalas temporales y espaciales: Jerarquía de Modelos

Climatología / Meteorología

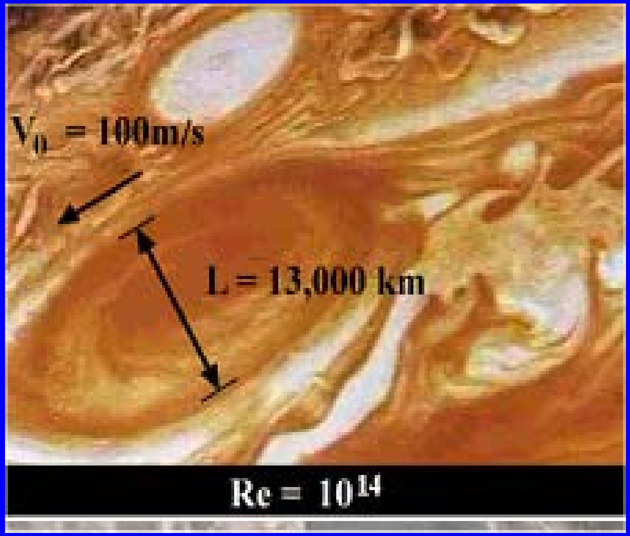


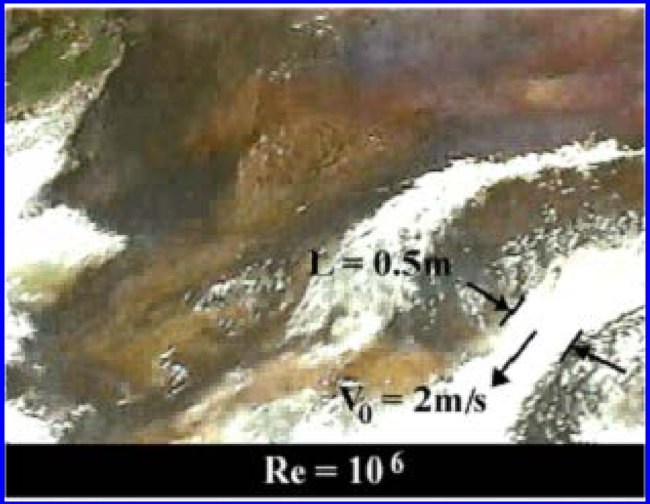
Espectro de variaciones climáticas

Importancia fundamental de las escalas

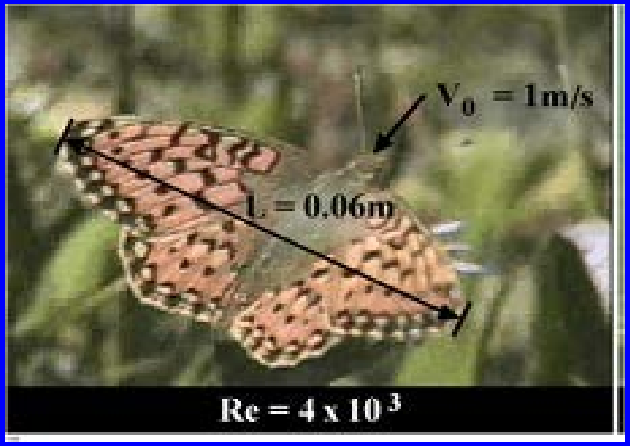
Richard Feymann:

Peso/tensión superficial

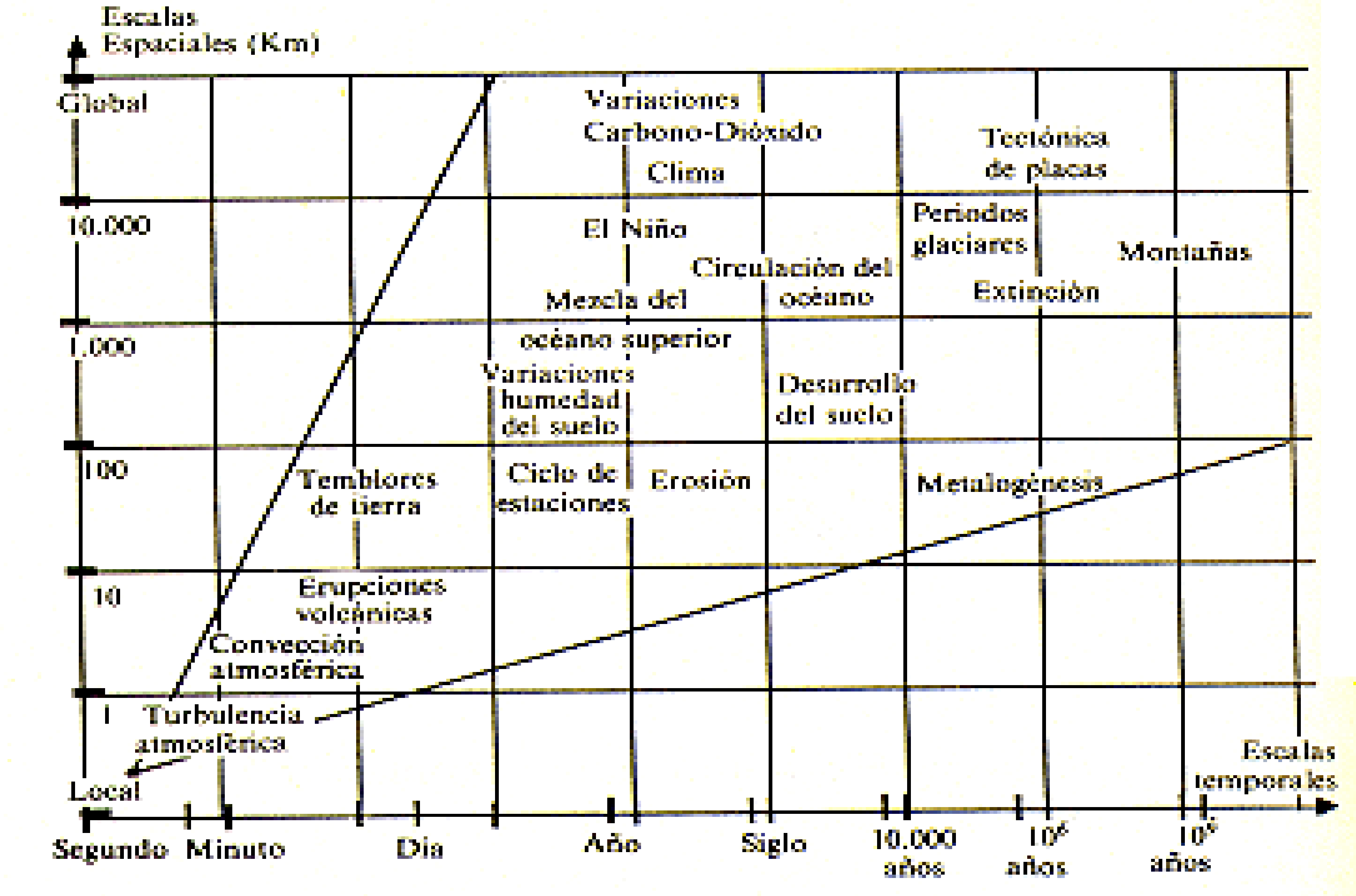




$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}$$



Algunas escalas características



Modelos globales / locales.
Modelos globales de Balance de Energía.

Clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider,1992)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau\left|B(x)\right|}\int_{t-\tau}^{t+\tau}\int_{B(x)} T(y,s)\,dy\,ds$$

Predicción del tiempo meteorológico

Modelos climáticos

Pronóstico

Modelos realistas

Métodos computacionales

Diagnóstico

Modelos simplificados

Métodos cualitativos

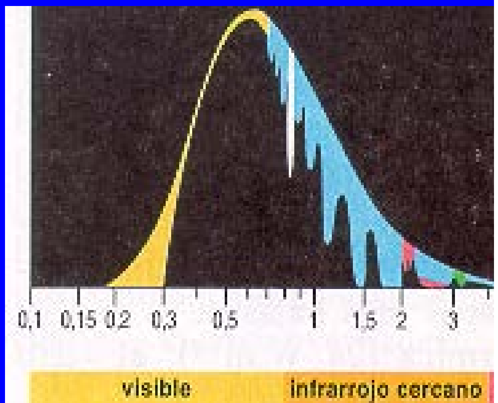
Balance de radiación de energía

S. Arrhenius (1896), ...

ers(1969),

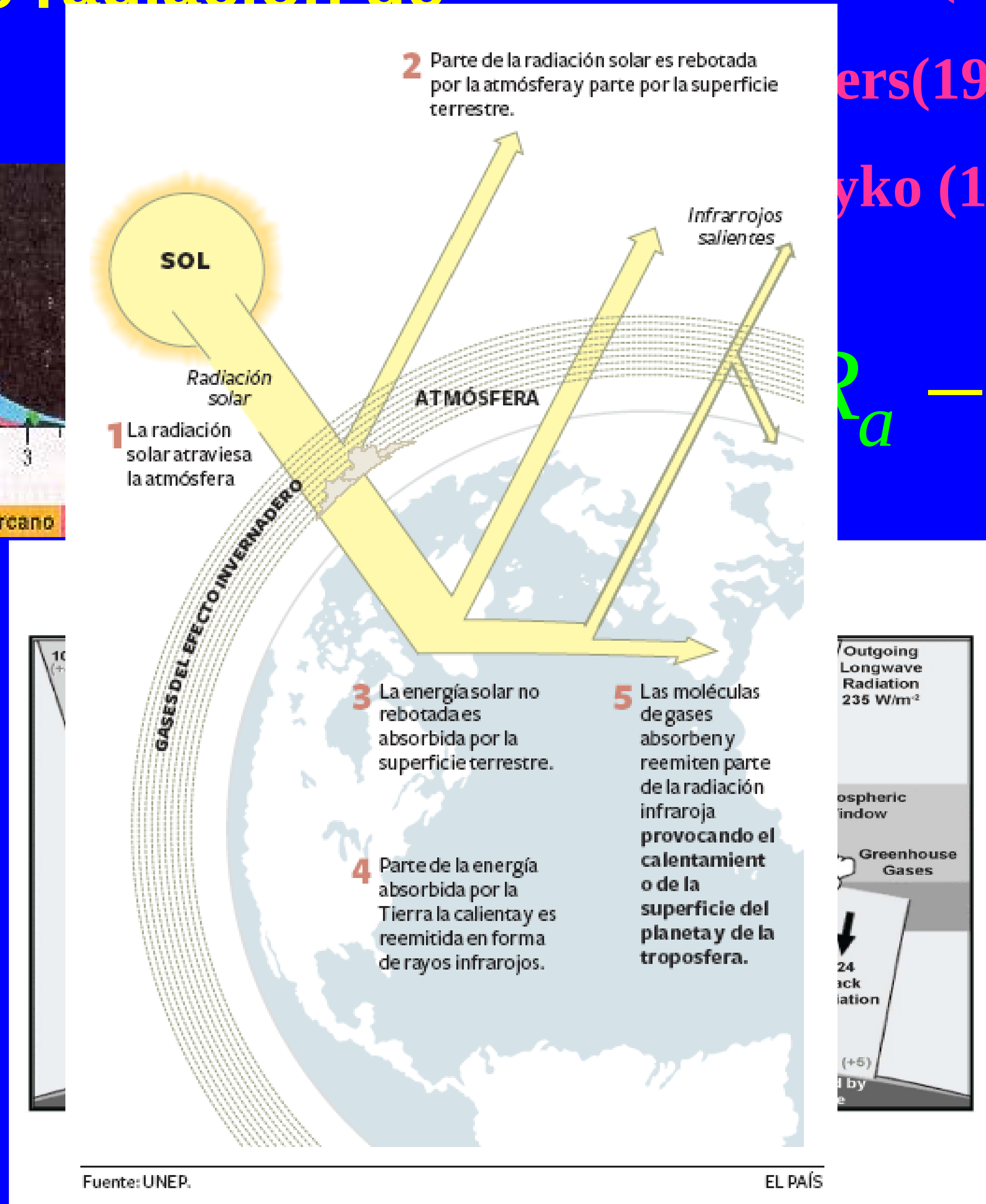
yko (1969),....

$$R_a - R_e + D$$



R_a

Albedo



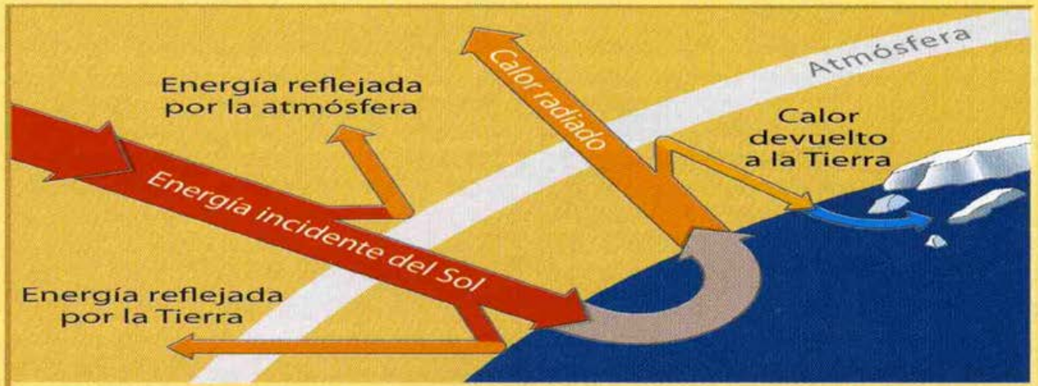
R_e

Efecto invernadero

D

DESEQUILIBRIO ENERGÉTICO DE LA TIERRA

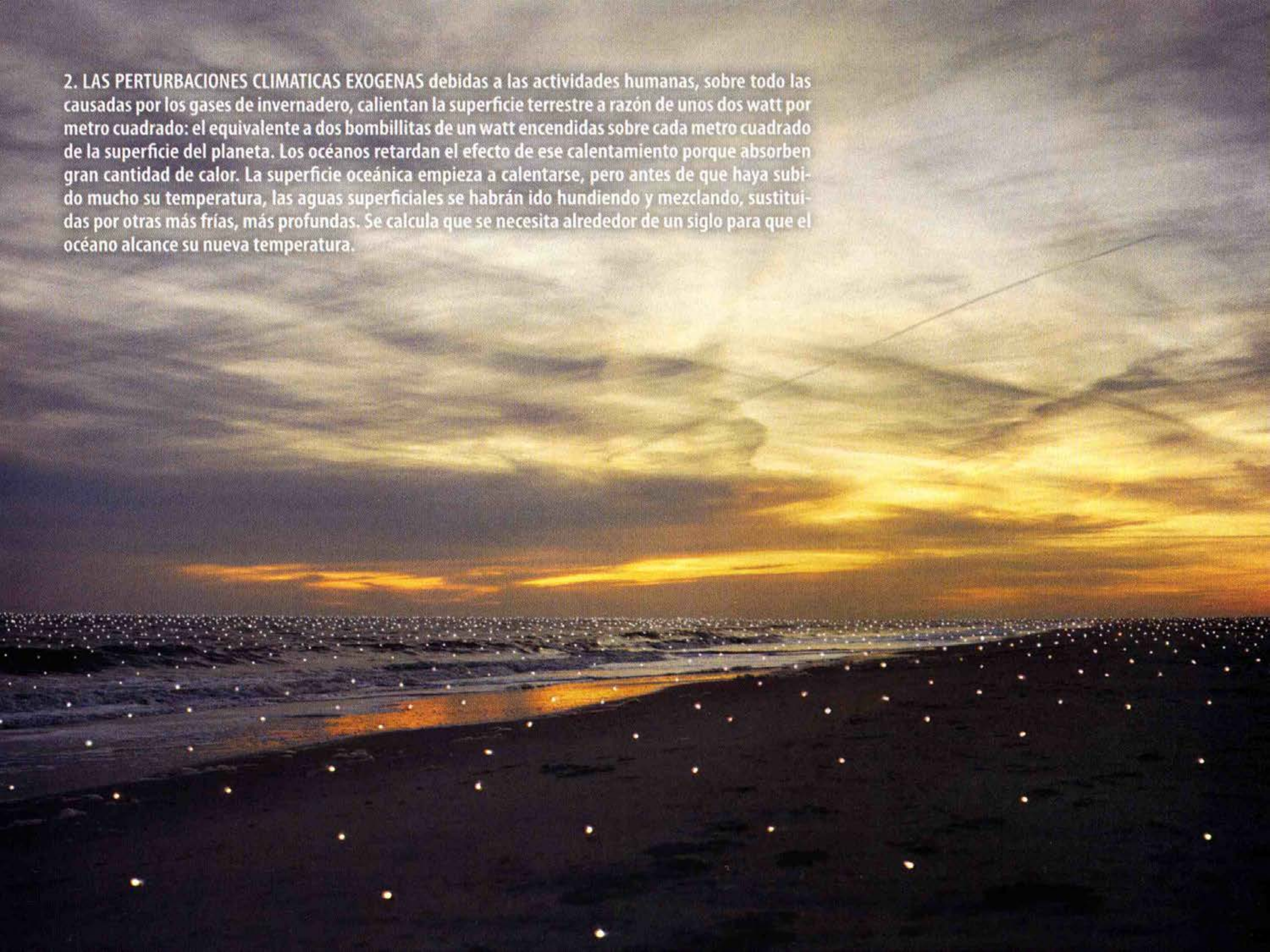
LA ENERGIA DE LA TIERRA está en equilibrio cuando el calor que emite es igual a la energía que recibe del Sol. En la actualidad, el balance de energía se ha desequilibrado (*diagramas y tabla*). Los aerosoles antropogénicos hacen que la Tierra refleje más energía solar, pero esta reflexión queda compensada de sobra por el calor radiante que los gases de invernadero aprisionan. La energía excedente —aproximadamente un watt por metro cuadrado— calienta el océano y funde los hielos. Las mediciones del calor almacenado en los océanos confirman el desequilibrio planetario de energía que aparece en las simulaciones (*gráfico*). El desequilibrio planetario de energía es una medida fundamental: determina la perturbación exógena neta y anticipa el calentamiento global ya en puertas.



ENERGIA SOLAR TOTAL INCIDENTE	340 W/m^2
ENERGIA TOTAL SALIENTE	339 W/m^2
ENERGIA REFLEJADA (por la atmósfera y la superficie)	101 W/m^2
100 W/m^2 debido a procesos naturales	
1 W/m^2 debido a aerosoles antropogénicos	
CALOR RADIADO (por el suelo y los sumideros oceánicos)	238 W/m^2
240 W/m^2 debido a procesos naturales	
–2 W/m^2 a causa de gases antropogénicos de invernadero, que devuelven calor a la superficie	
RESULTADO NETO	1 W/m^2
1 W/m^2 de exceso de energía, que calienta los océanos y funde glaciares y capas de hielo	

DESEQUILIBRIO A LO LARGO DEL PASADO MEDIO SIGLO

2. LAS PERTURBACIONES CLIMATICAS EXOGENAS debidas a las actividades humanas, sobre todo las causadas por los gases de invernadero, calientan la superficie terrestre a razón de unos dos watt por metro cuadrado: el equivalente a dos bombillitas de un watt encendidas sobre cada metro cuadrado de la superficie del planeta. Los océanos retardan el efecto de ese calentamiento porque absorben gran cantidad de calor. La superficie oceánica empieza a calentarse, pero antes de que haya subido mucho su temperatura, las aguas superficiales se habrán ido hundiendo y mezclando, sustituidas por otras más frías, más profundas. Se calcula que se necesita alrededor de un siglo para que el océano alcance su nueva temperatura.



Leyes de estado

$$R_a = QS(x)\beta(u)$$

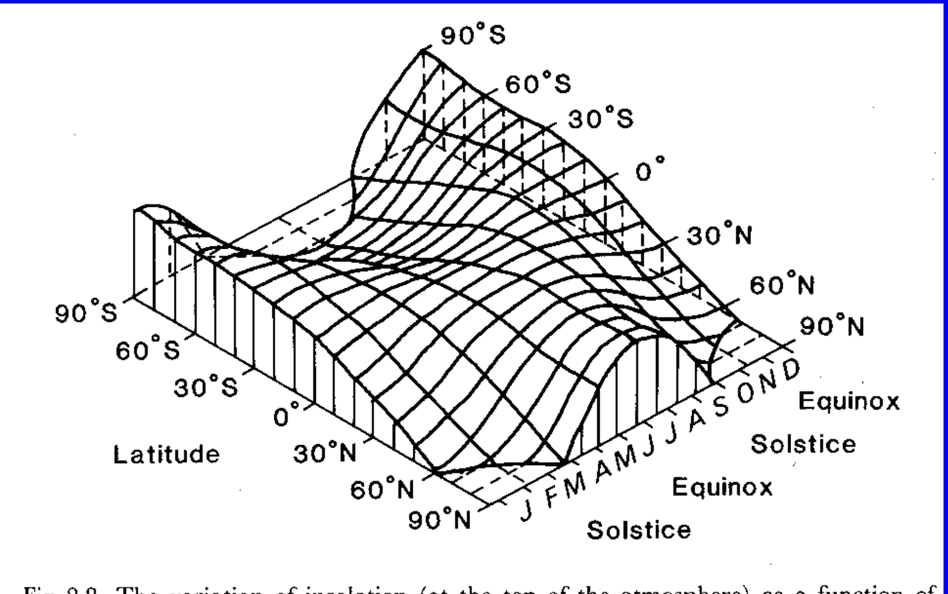
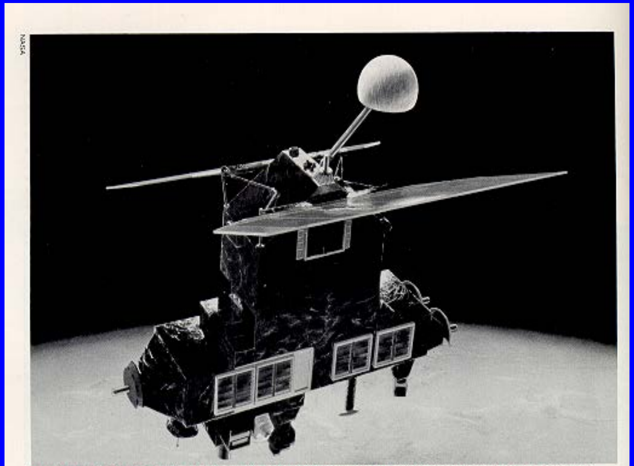


Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of



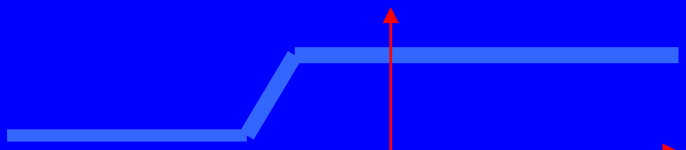
Eye in the sky. The Earth Radiation Budget Satellite, a space age effort to measure the radiation balance between the earth and the sun.

Earth Radiation Budget Satellite

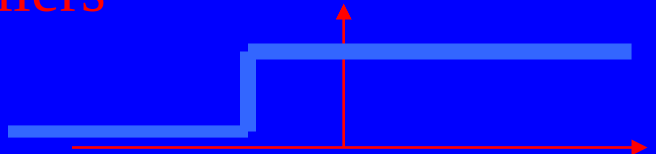
Satélite (ESA) ***Ingenio*** (CDTI),…

$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ coalbedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 \text{ si } u << -10 \\ 0.71 \text{ si } u >> -10 \end{cases}$$



Sellers



Budyko **u= -10º**

$R_e = \sigma u^4$ Ley de Stefan-Boltzman **Sellers**

$R_e = A + Bu$ Ley de enfriamento de Newton **Budyko**

Relación empírica, Depende de gases de invernadero, cambios antropogénicos,... (variables internas)

Sobre el operador de difusión *D*

Jerarquía

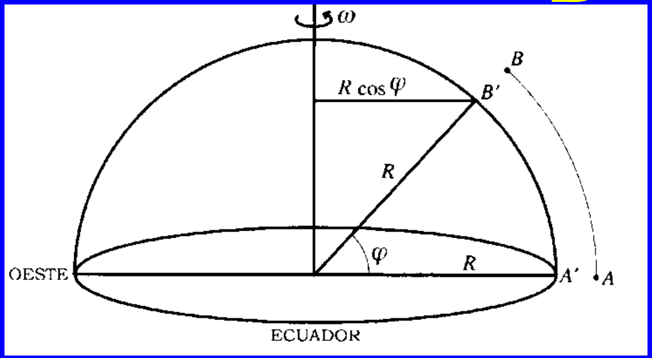
Modelo 0-dimensional *D*=0

$$c\frac{du}{dt} = Q\beta(u) - R_e(u)$$

Modelo 1-dimensional

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(k\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x}(k(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$x = \cos\varphi$$



Difusión bidimensional

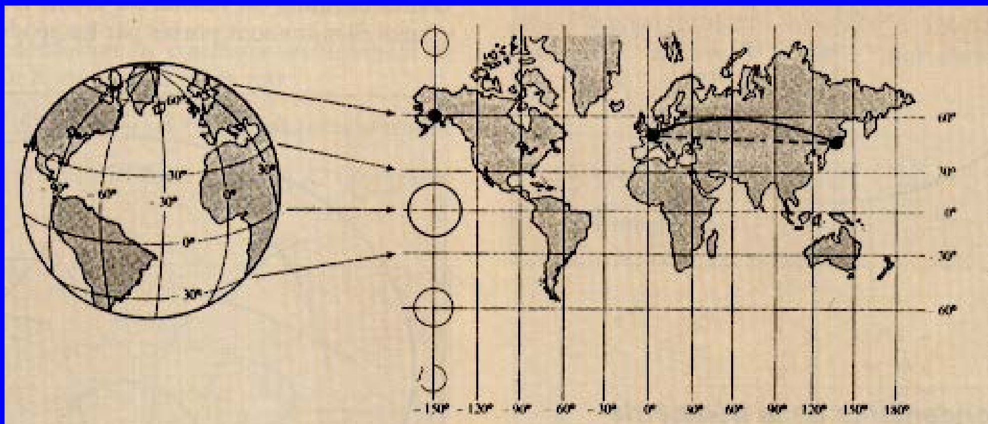
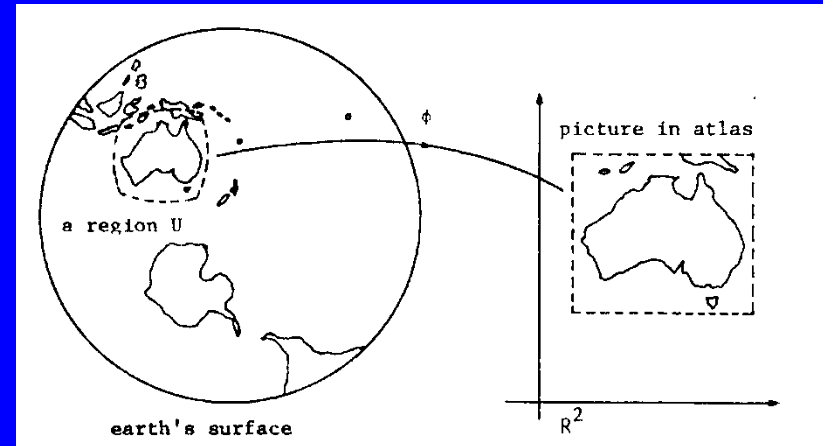
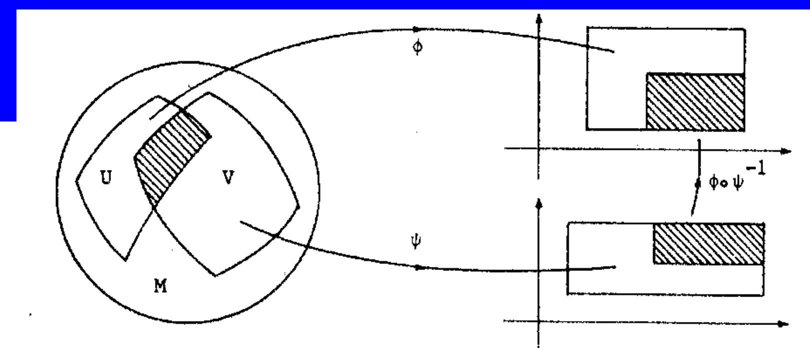
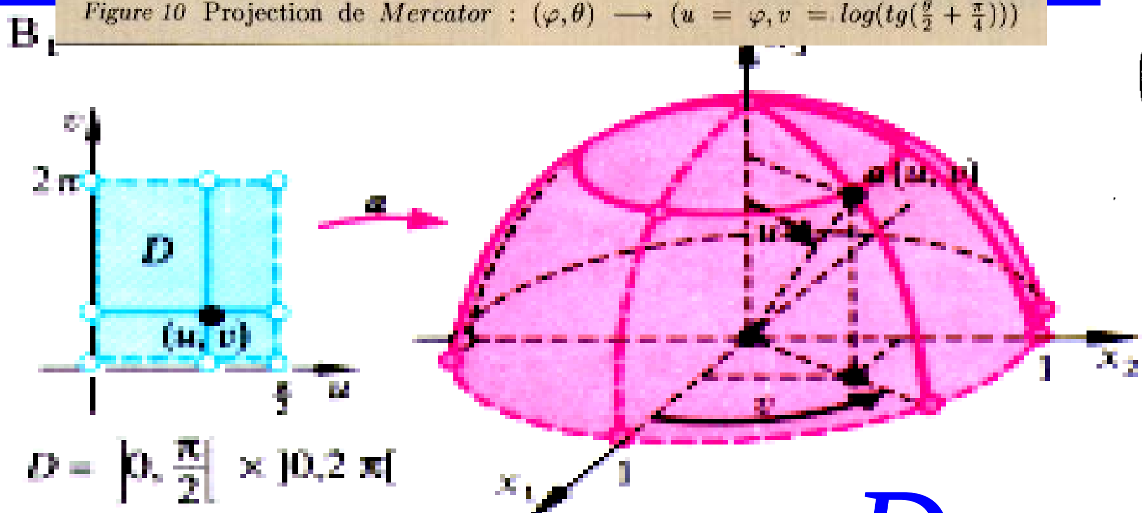


Figure 10 Projection de *Mercator* : $(\varphi,\theta) \longrightarrow (u = \varphi, v = log(tg(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})))$







$D = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, 2\pi\right[$

$a : D \to \mathbb{R}^3$ déf. par $(u, v) \mapsto a$

$$a(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$D = div(k(x)\nabla u)$$

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) + R_e(x,u) + div(k(x)\nabla u)$$

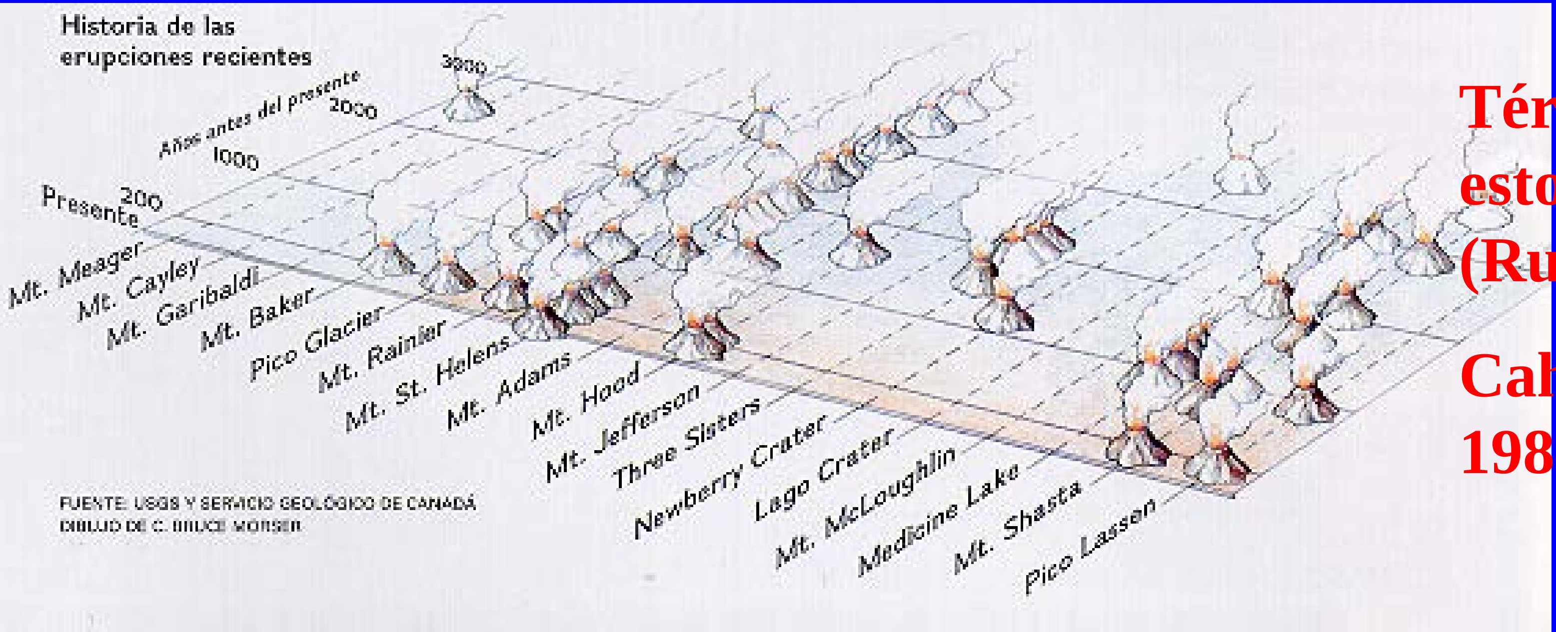
$$u(x,t_0) = u_0(x)$$

Modelos estocásticos :Volcanes

$R_e(x,u)$

Término estocástico (Ruido blanco)

Cahalan-North, 1982



$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + Bu \in QS(x)\beta(u) + h(x) + \epsilon\phi\dfrac{dW_t}{dt}, & (x,t) \in (-1,1) \times \mathbb{R} \\ u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (-1,1), \end{cases}$$

W_t is a two-dimensional scalar Wiener process in a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Modelos más complejos:

- Términos de retardo (promedios,…)
- Acoplamiento con las ecuaciones de de la energía interna del océano profundo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la dinámica de grandes masas de hielo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la Mecánica Celeste
- Acoplamiento con las ecuaciones del manto como medio visco-elástico
- Acoplamiento con modelos para la biosfera

- These climate EBM do not consider the effect of the deep ocean on the Earth surface temperature.
- Glacial–Holocene transition.
- Watts - Morantine [1990].

A model including the coupling surface/deep ocean.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \dfrac{K_H}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\dfrac{\partial U}{\partial x}) - K_V\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 & (0,T)\times\Omega, \\ wx\dfrac{\partial U}{\partial x} + K_V\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 & (0,T)\times\Gamma_H \\ D\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \mathcal{G}(U) + f(x) + K_V\frac{\partial U}{\partial n} + & wx\frac{\partial U}{\partial x} = \\ = QS(x)\beta(x,U) & (0,T)\times\Gamma_0 \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 & (0,T)\times\Gamma_1 \\ U(0,x,z) = U_0(x,z) & \Omega, \\ U(0,x,0) = u_0(x) & (-1,1). \end{cases}$$

Unknowns: – surface temperature, – ocean temperature

The governing equation for the ocean interior:

$$U_t - \underbrace{(\frac{K_H}{R^2}(1-x^2)U_x)_x - K_V U_{zz}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{wU_z}_{\text{vertical transport}} = 0 \qquad (0,T)\times(-1,1)\times(-H,0),$$

where

$$\begin{array}{lcl} U & \equiv & \text{ocean temperature,} \\ K_V & \equiv & \text{vertical thermal diffusivity in the ocean,} \\ K_H & \equiv & \text{horizontal thermal diffusivity in the ocean,} \\ w & \equiv & \text{vertical velocity,} \\ R & \equiv & \text{Earth radius.} \end{array}$$

Boundary conditions

▷ Energy balance on Γ_0 :

$$DU_t - \frac{DK_{H_0}}{R^2}((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|U_x|^{p-2}U_x)_x + \mathcal{G}(U) + K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wxU_x \in QS(x)\beta(U) + f$$

where

$\mathcal{G}(U)$	$\equiv$	emitted energy by cooling (Newton),
D	$\equiv$	depth of the mixed layer,
K_{H_0}	$\equiv$	horizontal thermal diffusivity in the mixed layer,
w	$\equiv$	vertical velocity,
$S(x)$	$\equiv$	insolation,
β	$\equiv$	coalbedo function,
Q	$\equiv$	solar constant.

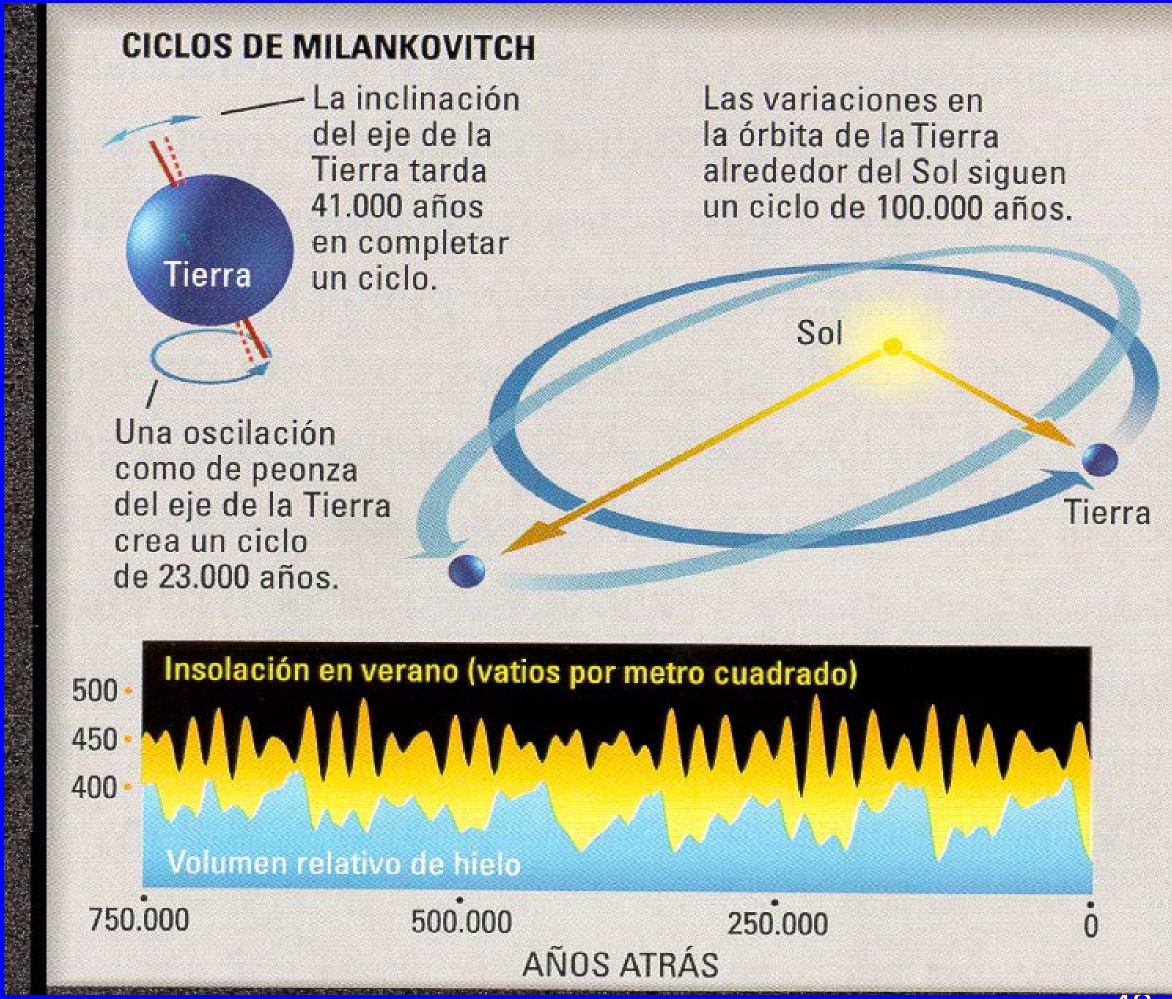
▷ At the ocean bottom Γ_H

$$wx\frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \qquad \text{on } (0,T) \times \Gamma_H$$

Initial conditions:

$$\begin{aligned} U(x,z,0) &= U_0(x,z) && \text{on } (-1,1) \times (-H,0), \\ U(x,0,0) &= u_0(x) && \text{on } (-1,1), \end{aligned}$$

Teoría de las Glaciaciones de Milankovitch (1879-1958)

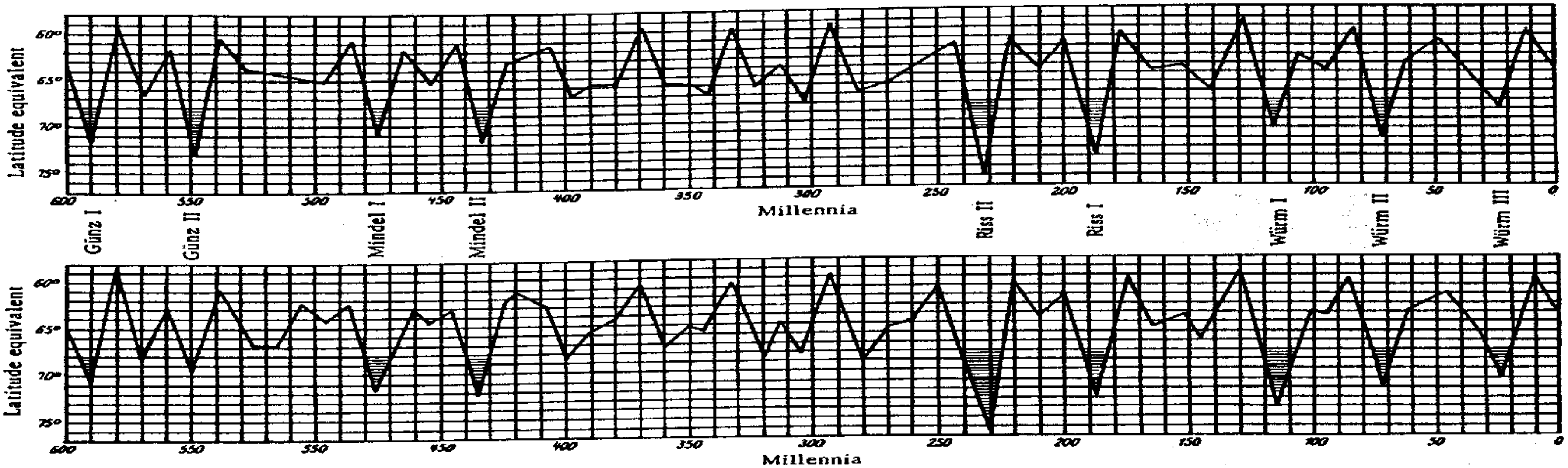


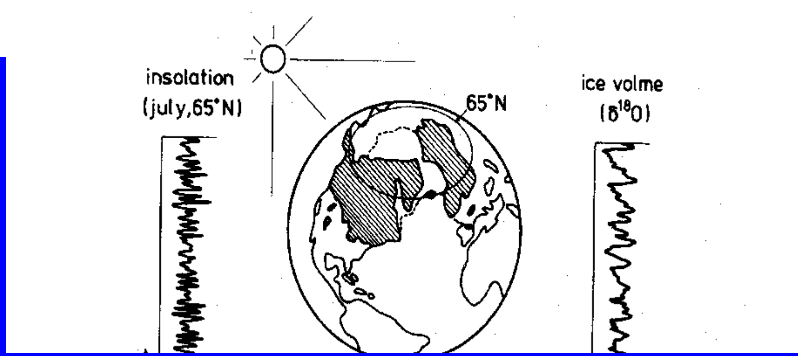
*irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,

*cálculo de tablas de gran precisión.

*estimacionesglobales sobre la evolución de lo que él llamó *el clima matemático*

Curvas de radiación de Milankovitz



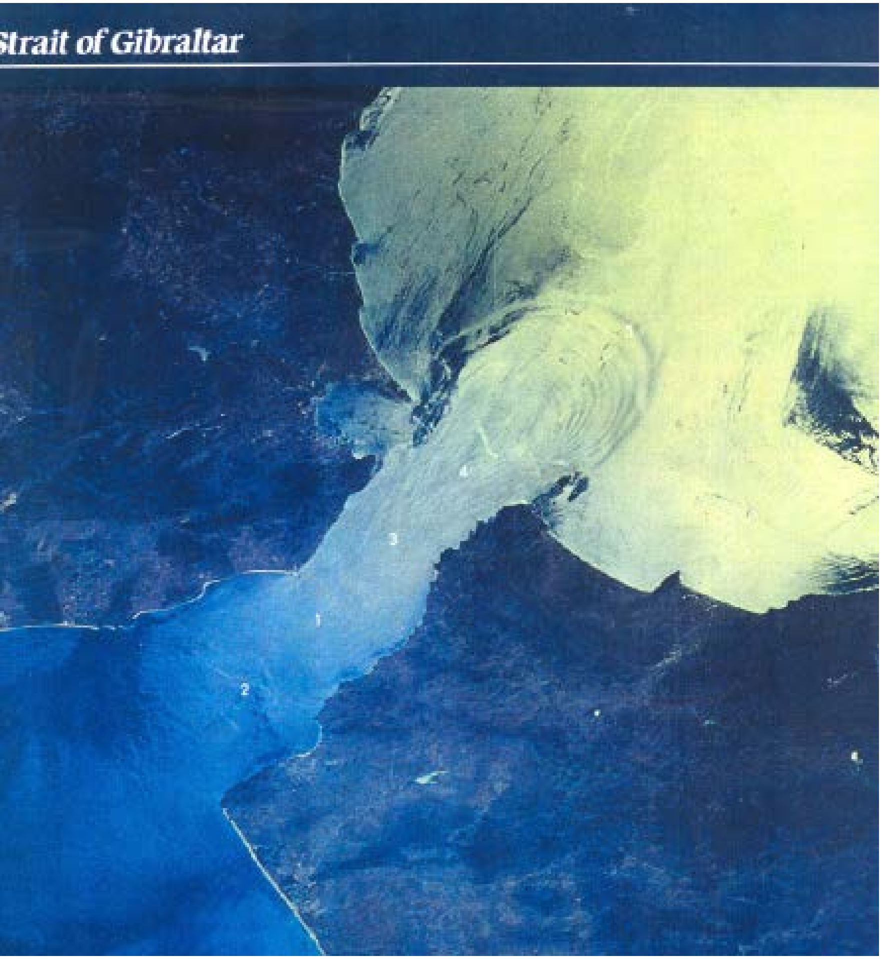


Condiciones para Glaciación

Veranos, Hem.Norte

¿Hemisferio Sur?

¿Glaciares de montaña hacia el Sur?



JACQUES-LOUIS LIONS
de l'Institut
Président du Comité [illegible]

Paris, le 13/3/00

Fax.

Prof. Carlos PARÉS
Dep. Análisis Numérico
Univ. de Málaga

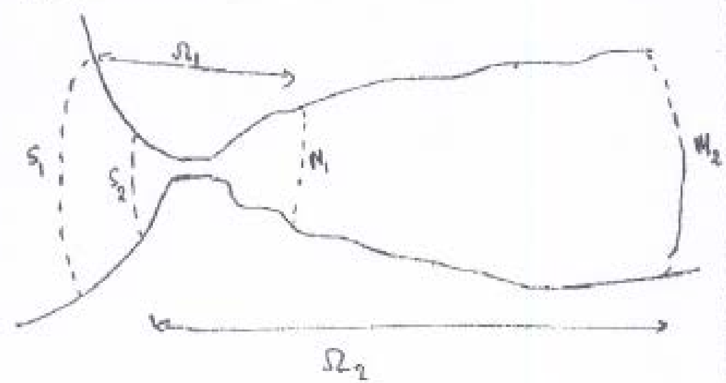
Amitiés à A. Valle et [illegible] autres

Cher Prof. Parés

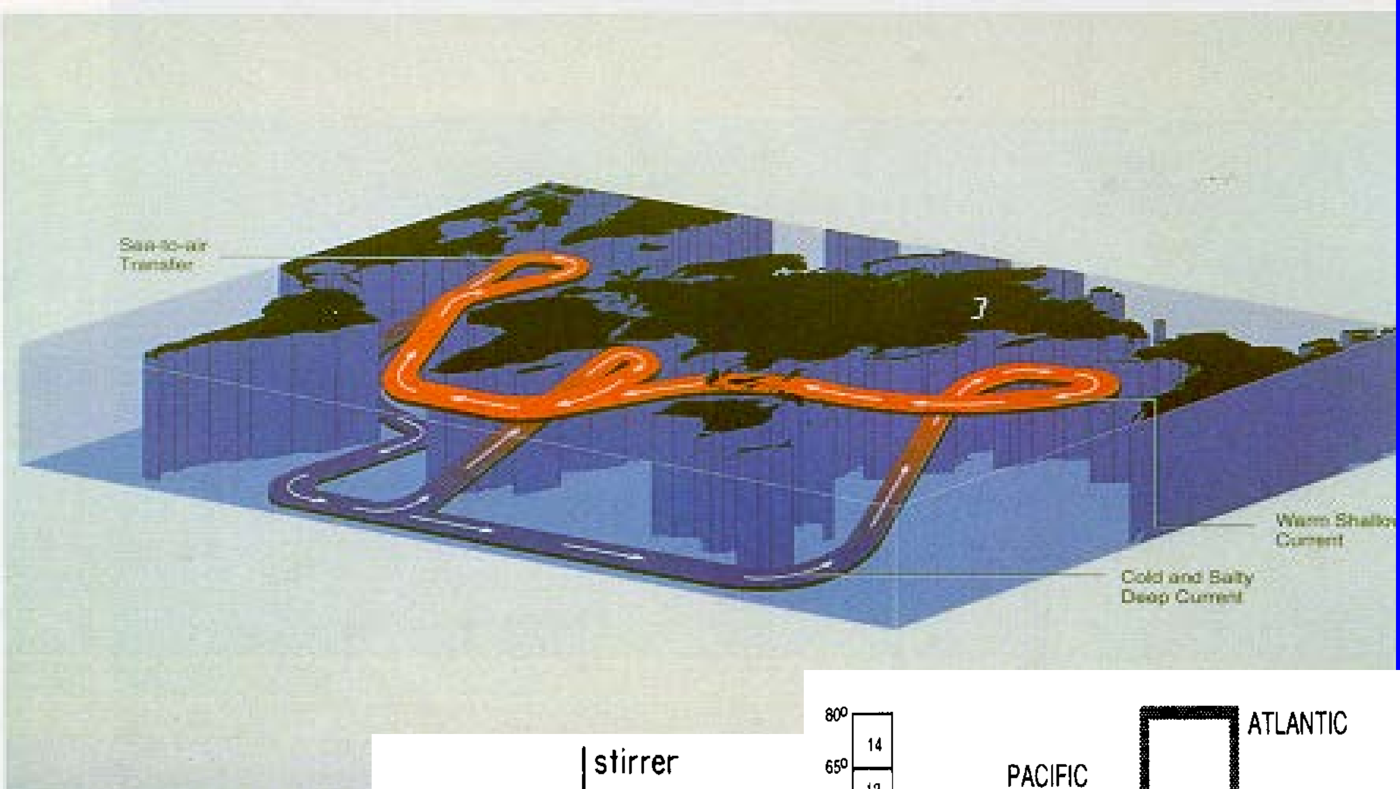
Merci beaucoup pour votre lettre, vos explications et la thèse de Jorge Macías, qui m'a [illegible]! Merci!

Merci aussi pour les commentaires sur le transport d'eau à Gibraltar.

Si il y avait un intérêt à reprendre le pb. stationnaire, on pourrait peut-être utiliser une méthode du genre suivant.

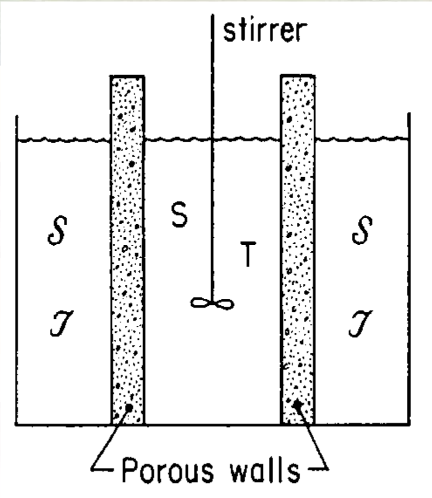


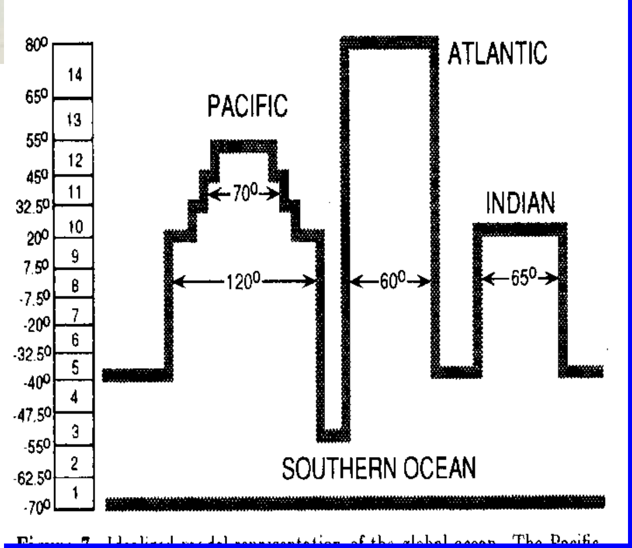
Modelos de salinidad oceánica



$$\frac{dT}{dt} = c(\mathcal{T} - T)$$

$$\frac{dS}{dt} = d(\mathcal{S} - S)$$





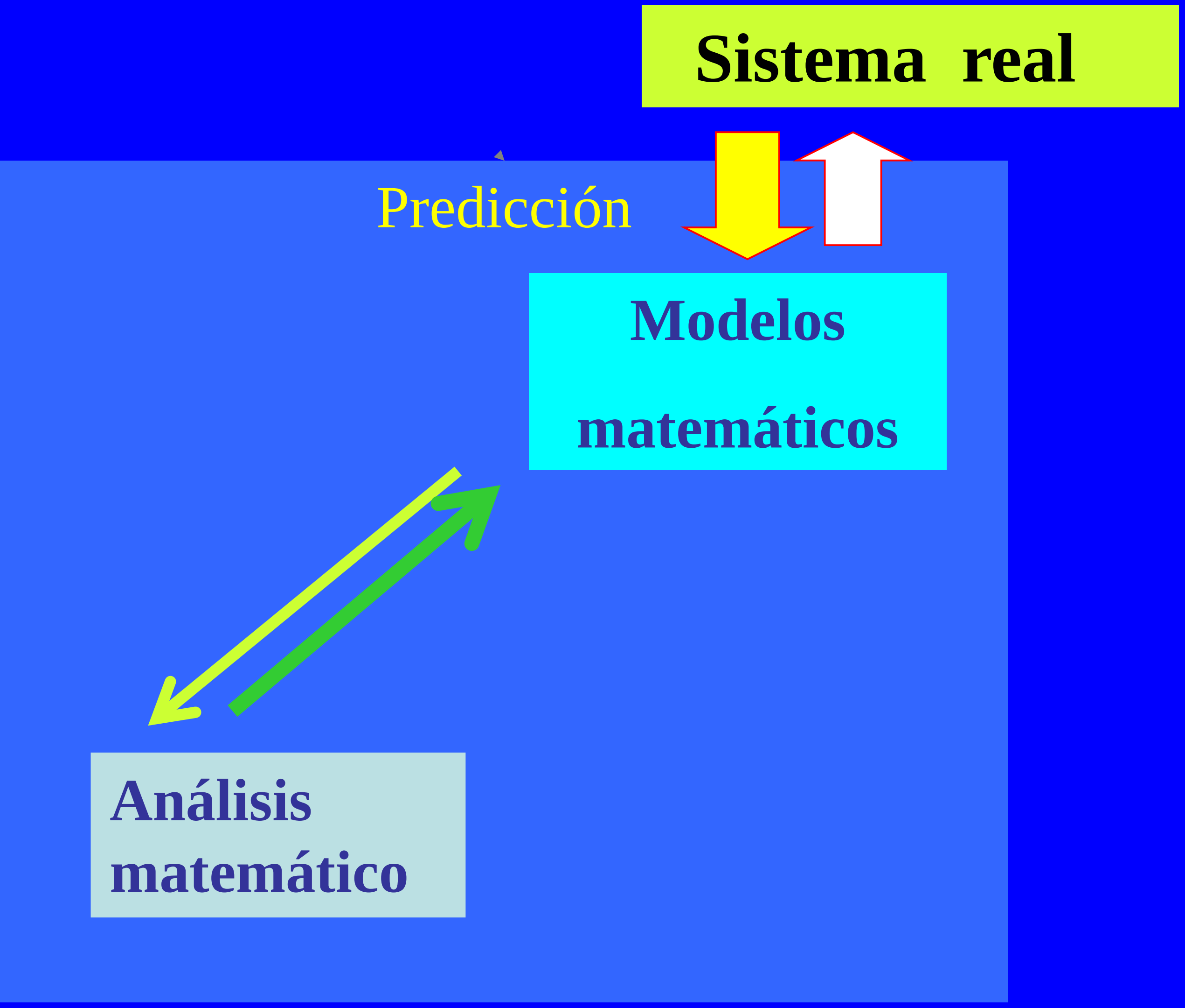
Broecker-Denton(1989)

Stommel (1961)

Rahmstorf (1995),

D(2006)

La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



Two-dimensional EBMs (formulation on manifolds).

$$\begin{cases} c(x)u_t - \mathrm{div}(k(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f \text{ on } \mathcal{M} \times (0,\infty) \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ on } \mathcal{M} \end{cases}$$

- $\mathcal{M}$ is a C^∞ 2-D connected compact oriented Riemannian manifold without boundary.
- $p \geq 2, \qquad Q > 0,$
- β is a bounded maximal monotone graph of $\mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous and increasing function such that $\mathcal{G}(0) = 0$, and $|\mathcal{G}(\sigma)| \geq C|\sigma|^r$ for some $r \geq 1$,
- $S \in C^1(\mathcal{M})$, $0 < S_2 \leq S(x) \leq S_1$, $f \in L^\infty((0,T) \times \mathcal{M})$,
- $c \in L^\infty(\mathcal{M})$, $c(x) \geq c_0 > 0$, $k \in C(\mathcal{M})$, $k(x) \geq k_0 > 0$,

Some functional spaces on manifolds

$L^p(\mathcal{M}) := \{u : \mathcal{M} \to I\!\!R$ measurable, $\int_{\mathcal{M}} |u|^p dA < +\infty\}$, $1 < p < \infty$, where

$$dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \sqrt{\mathrm{det}\mathbf{g}^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

$$\int_{\mathcal{M}} |u|^p dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda |u(\mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda))|^p \sqrt{\mathrm{det}\mathbf{g}^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

$L^\infty(\mathcal{M}) := \{u : \mathcal{M} \to I\!\!R$ measurable, ess $\sup_{\mathcal{M}} |u| < \infty\}$

$$L^p(T\mathcal{M}) := \{X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M} : \int_{\mathcal{M}} | < X, X > |^{\frac{p}{2}} dA < +\infty\}$$

$$X = X_1 \mathbf{e}_\theta + X_2 \mathbf{e}_\varphi, \qquad < \cdot, \cdot > = g(\cdot, \cdot).$$

$$V = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla u \in L^p(T\mathcal{M})\}, \quad p \geq 2$$

reflexive Banach space

$$\|u\|_V = \|u\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})}.$$

Let $\mathcal{M}$ be a 2-D compact Riemannian manifold. Then the following continuous imbedding holds:

$$\text{if} \quad p = 2, \quad V \hookrightarrow L^q(\mathcal{M}), \quad \forall q \in [2, \infty),$$

$$\text{if} \quad p > 2, \quad V \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{M}).$$

If $2 \leq p < \infty$ then the imbedding $V \subset L^2(\mathcal{M})$ is compact.

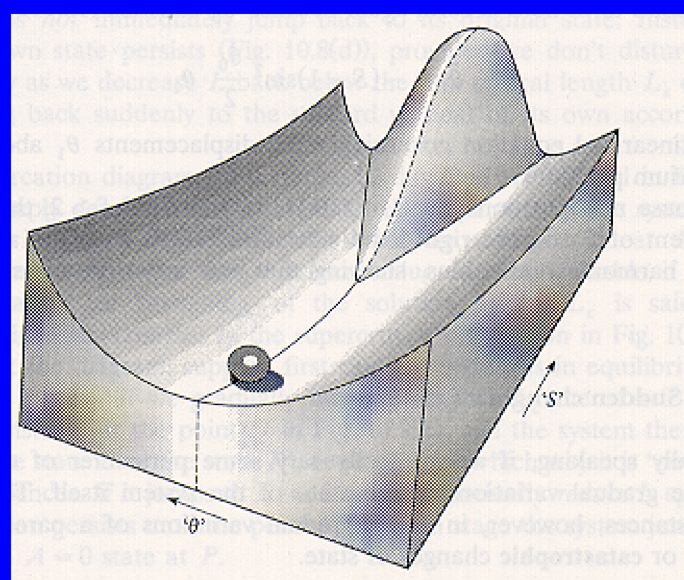
- For any $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$, there exits at least a bounded weak solution $u \in L^2((0, \infty); V)$,

$$V = \{v \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla u \in L^p(T\mathcal{M})\}.$$

- 2-D, $p \geq 2$,
  - ▷ β Lipschitz function (Sellers): uniqueness (by standard methods for nonlinear parabolic equations). Uniqueness.
  - ▷ β multivalued in $u = -10$: Nonuniqueness. Uniqueness of non-degenerate solutions.

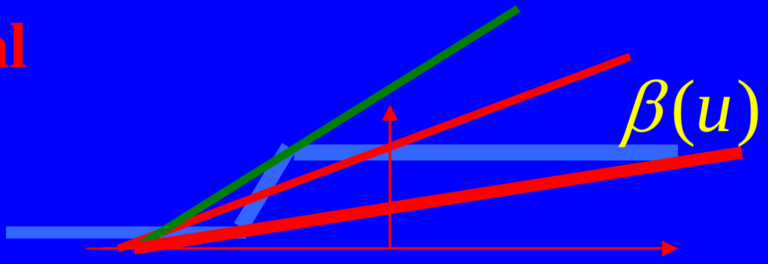
Stabilization of solutions as $t \to \infty$ to a solution of the stationary problem.

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f_\infty \text{ on } \mathcal{M}.$$

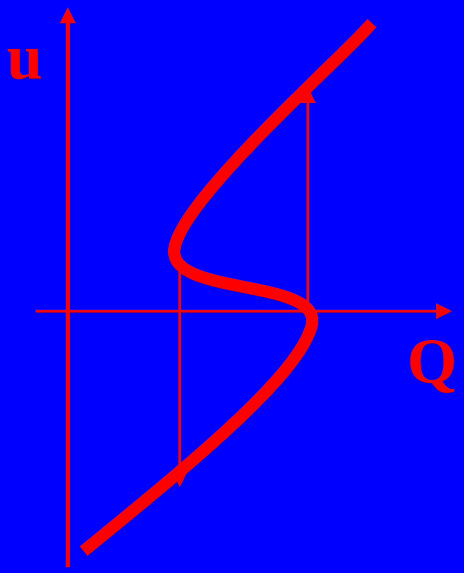


Bifurcación e Histéresis en 0-d

Equilibrios del Modelo 0-dimensional



$$A + Bu = Q\beta(u)$$



Existence of at least three solutions if Q is in a bounded interval.

Uniqueness of solution for Q small or big enough.

Existence of an unbounded connected S-shaped set $\{(Q,u)\}$.

existence of a global atractor for the mulivalued case.

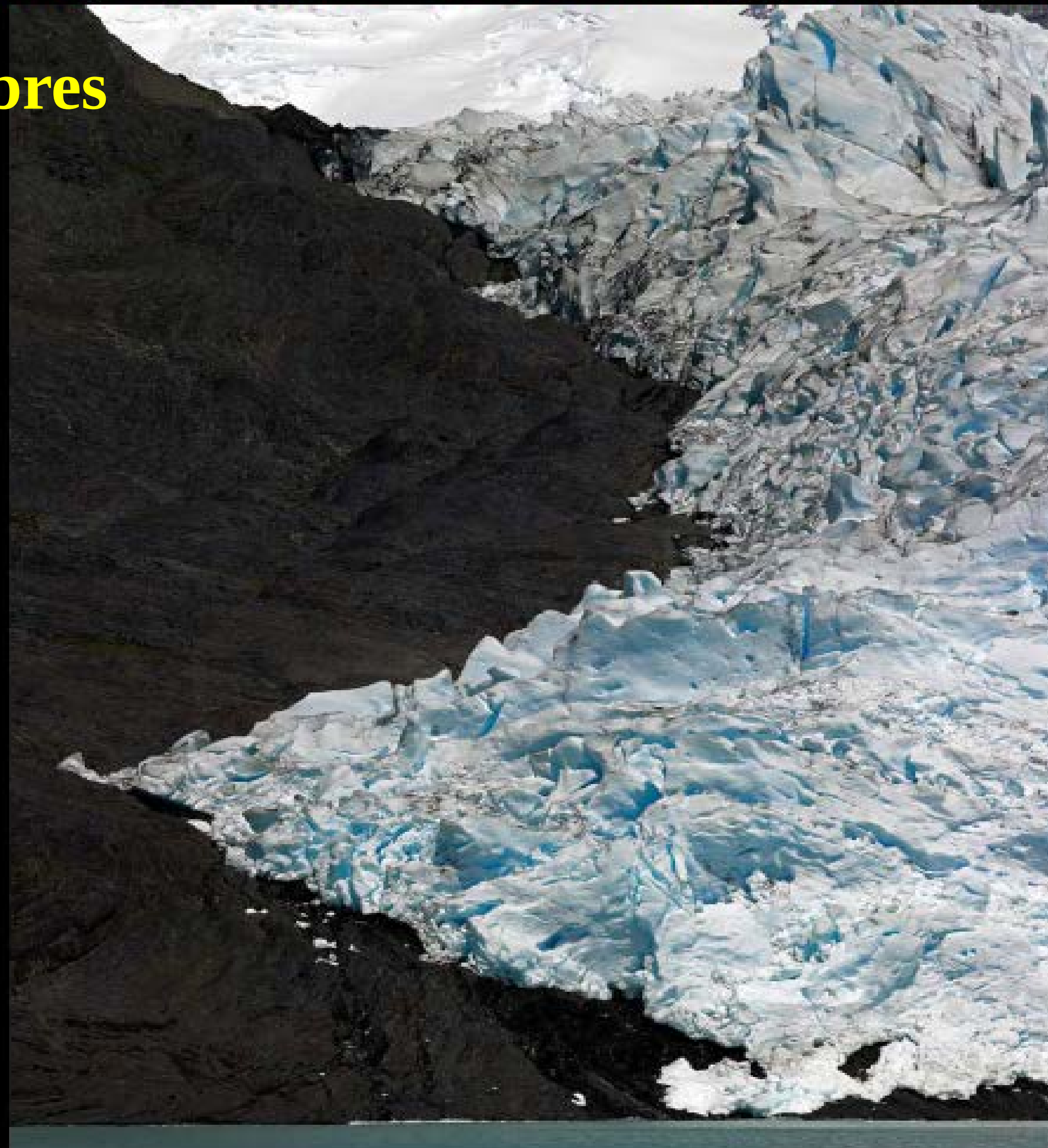
- Study the existence of infinitely many solutions of a one-dimensional model,

$$(P)\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' + \mathcal{G}(u) + C \ \in \ Q\beta(u) \ \ x \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

- The coalbedo function β is multivalued.
- $Q \in (Q_1, Q_2)$.

Las frontera libres

The Edge of the Glacier = Free Boundary of the Glacier Flow



Para todo $t \in [0, t_{\text{máx}}]$, encontrar el conjunto $\Gamma_0(t) = (S_-(t), S_+(t)) \subset (-1, 1)$ y la función

$$\eta : Q = \bigcup_{t \in [0, t_{\text{máx}}]} \Gamma_0(t) \to \mathbb{R}$$

tales que :

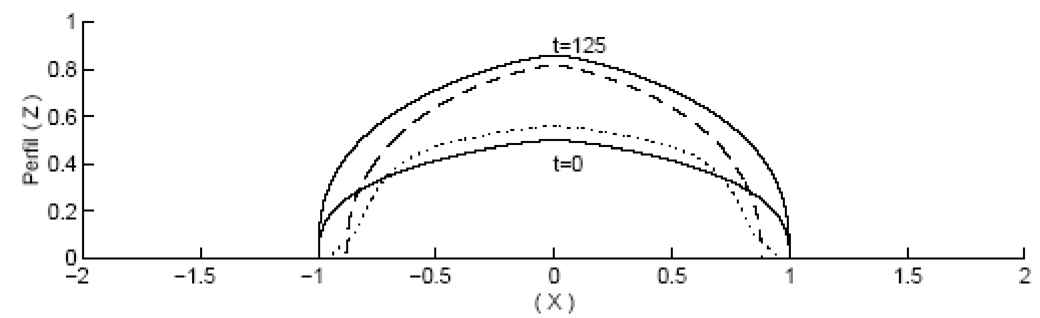
$$\begin{aligned}
&\frac{D\eta}{Dt} \geq \frac{e^{-\gamma}}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta^{n+2}}{n+2} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \quad \text{en } Q \\
&\eta \geq 0 \quad \text{en } Q \\
&\left(\frac{D\eta}{Dt} - \frac{e^{-\gamma}}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta^{n+2}}{n+2} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \right) \eta = 0 \;\; \text{en } Q \\
&\eta = 0 \quad \text{en } \{S_-(t)\} \cup \{S_+(t)\}, \quad t \in (0, t_{\text{máx}}); \quad \eta(0, x) = \eta_0(x) \quad \text{en } (-1, 1),
\end{aligned} \tag{48}$$

donde se ha utilizado para la derivada material respecto de la velocidad de deslizamiento basal, u_b, la notación

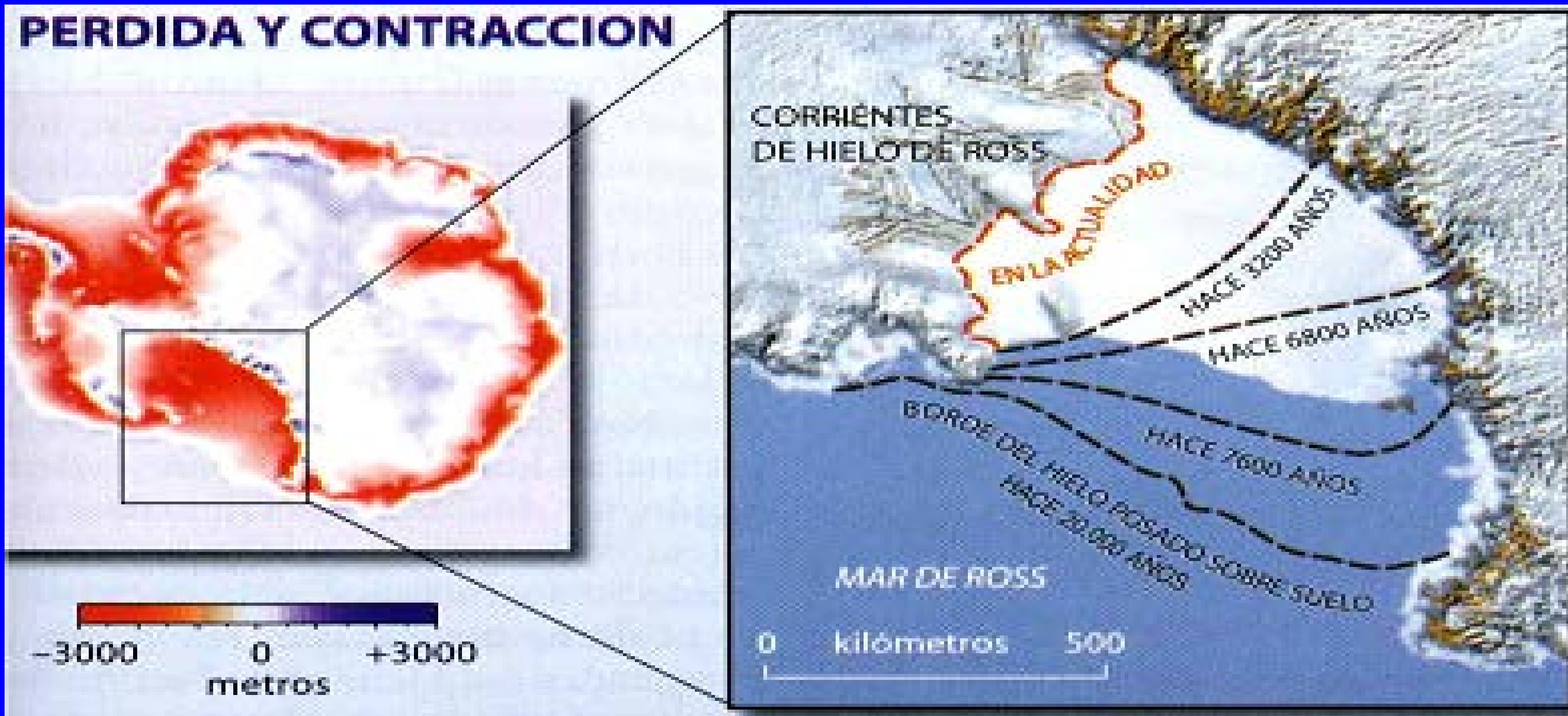
$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_b \, \eta). \tag{49}$$

Además, la función a representa la tasa de acumulación-ablación.

$$
\begin{cases}
\dfrac{D}{Dt}\left(u^{3/8}\right) - \mu\left(|u_x|^2 u_x\right)_x - a \geq 0 & \text{en} \quad (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\
\left[\dfrac{D}{Dt}\left(u^{3/8}\right) - \mu\left(|u_x|^2 u_x\right)_x - a\right] u = 0 & \text{en} \quad (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\
u \geq 0 & \text{en} \quad (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\
u = 0 & \text{en} \quad (0, t_{\text{máx}}) \times \partial\Omega \\
u = u_0(x) = \eta_0^{8/3}(x) & \text{en} \quad \Omega,
\end{cases}
$$



Movimiento de la frontera libre en EBM

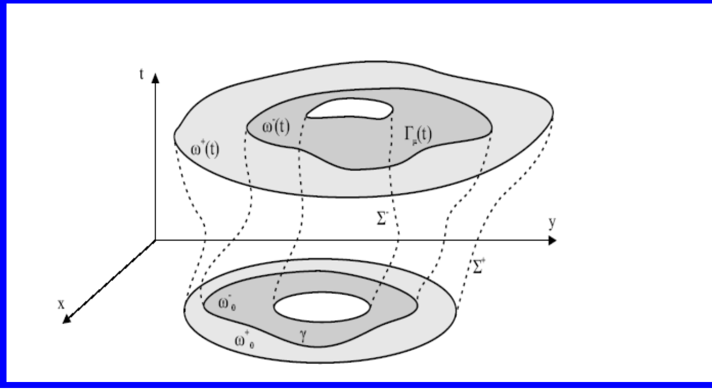


EL CAMBIO DEL ESPESOR de los hielos desde el último período glacial (*arriba, izquierda*) ha supuesto una pérdida (*rojo*) de unos 5,3 millones de kilómetros cúbicos, en gran parte en la Antártida Occidental. El borde de la capa de hielo que toca fondo marino ha retrocedido con particular rapidez en el mar de Ross (*detalle, a la derecha*) a lo largo de los últimos 7000 años; se ha retirado unos 700 kilómetros hacia el interior del continente.

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u \in a\boldsymbol{H}(u-\mu) \quad \text{in } D_T, \\
u = \phi \text{ on } S_T, \\
u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega
\end{cases}
$$

Let $\Omega \in \boldsymbol{R}^n$, $n \geq 1$, be a ring-shaped domain with the exterior boundary $\partial_e\Omega$ and the interior boundary $\partial_i\Omega$, $\partial_i\Omega \cap \partial_e\Omega = \emptyset$. Given $T > 0$, we denote by D_T the cylinder $D_T = \Omega \times (0,T]$ with the "lateral boundary"

$$
S_T = \{\partial\Omega_e \times (0,T]\} \cup \{\partial\Omega_i \times (0,T]\}
$$



$$H(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0, \\ [0,1] & \text{if } s = 0, \\ 0 & \text{if } s < 0. \end{cases}$$

The main goal of this paper is to study the dynamics and regularity of the level set Γ_μ which separates the regions

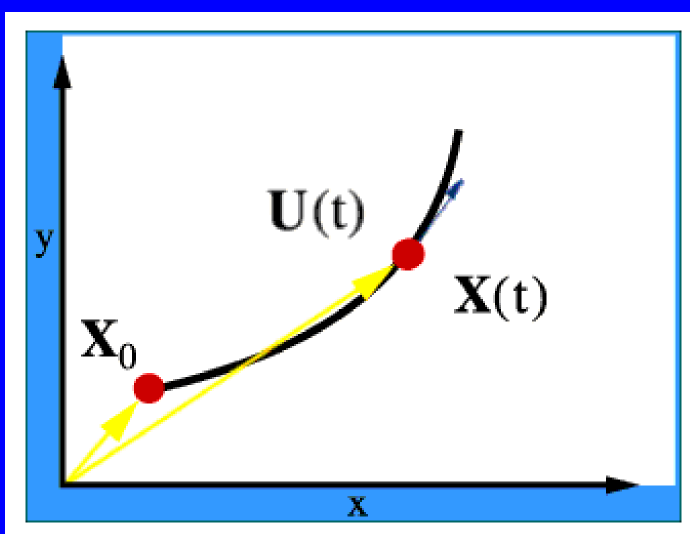
$$D_T^+ = \{(\mathbf{x},t) \in D_T : \ u(\mathbf{x},t) > \mu\} \quad \text{and} \quad D_T^- = \{(\mathbf{x},t) \in D_T : \ u(\mathbf{x},t) < \mu\}.$$

We want to answer the following questions:

1. What are the topological and regularity properties of the level set Γ_μ?
2. Given the initial function u_0, how does Γ_μ start moving at the time $t = 0$?
3. Is it possible to characterize the evolution of Γ_μ in terms of the solution u and its derivatives?

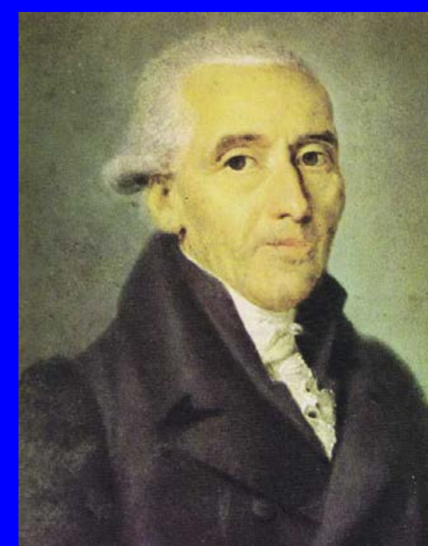
Our study of the level set Γ_μ is based on the introduction of a system of Lagrangian coordinates frequently used in Continuum Mechanics. Every positive solution of problem (3) can be formally considered as a solution of the problem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}\,(u\nabla \ln u) + a\,h_u \quad \text{in } D_T, \\ u = \phi \ \text{ on } S_T, \quad u(\mathbf{x},0) = u_0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$



$$\mathbf{U}(t;\mathbf{X}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(t;\mathbf{X}_0)}{\partial t}$$

$$\mathbf{a}(t;\mathbf{X}_0) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}(t;\mathbf{X}_0)}{\partial t^2}$$



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Theorem 4. *Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. There exists a function $U(\mathbf{y},t)$ such that $U \in W^{4,q}(\omega_0^\pm \times (0,T))$, $U_t \in W^{2,q}(\omega_0^\pm \times (0,T))$, and the surface $\Gamma_\mu(t)$ is parametrized by the bijective mapping*

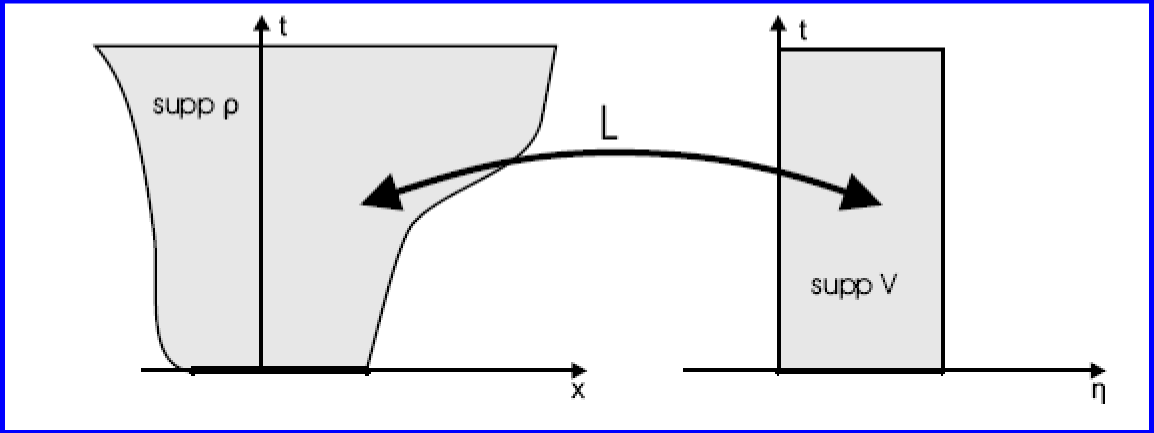
$$\gamma \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{y} + \nabla U(\mathbf{y},t) \in \Gamma_\mu(t).$$

The velocity of advancement of the surface $\Gamma_\mu(t)$ in the normal direction is given by the formulas

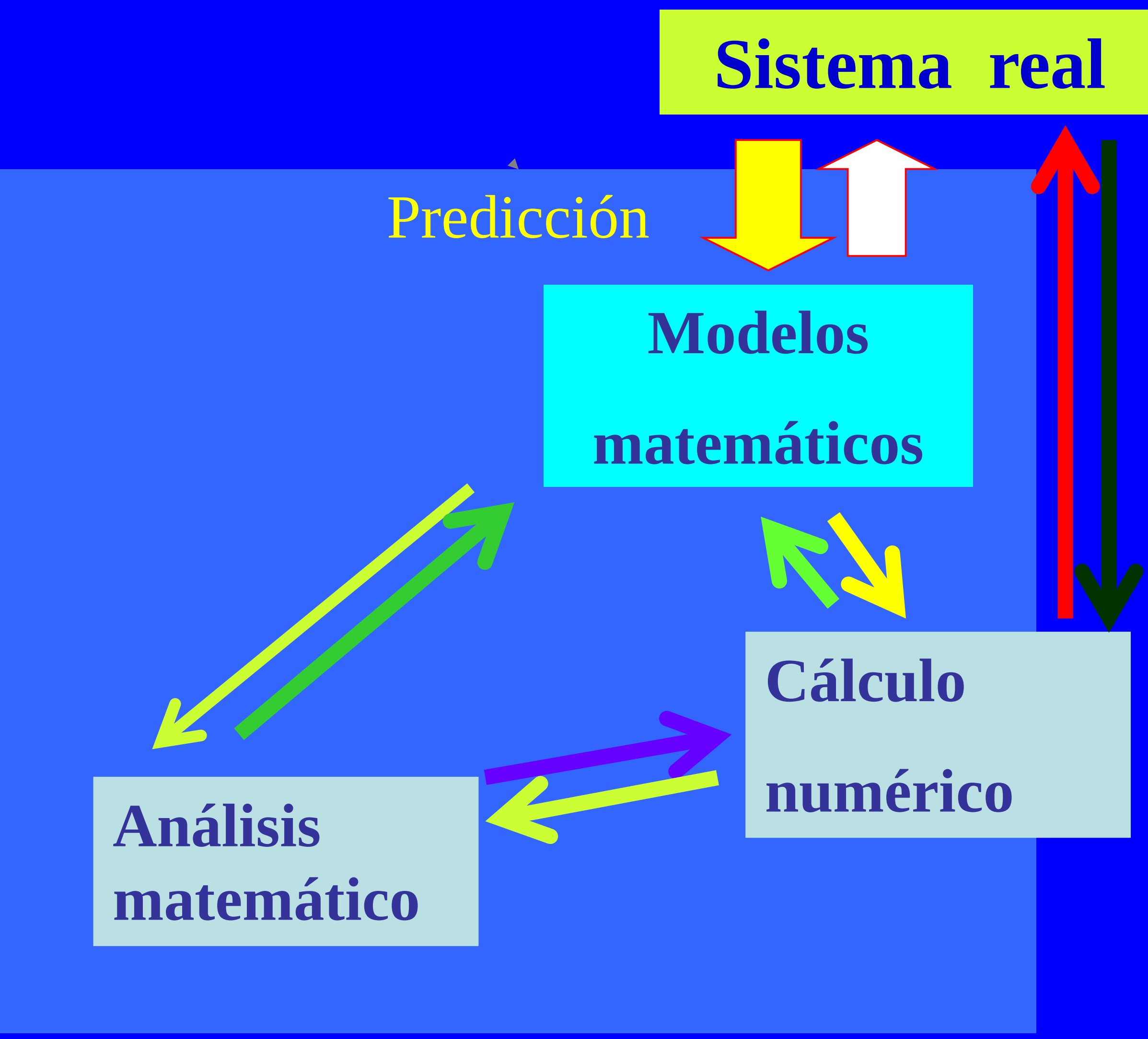
$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n} = -\lim_{\omega^\pm(t)\ni\mathbf{z}\to\mathbf{x}\in\Gamma_\mu(t)} \left[|\nabla \ln u| - \frac{\nabla p \cdot \nabla u}{|\nabla u|} \right] = \nabla_{\mathbf{y}} U_t(\mathbf{y},t)|_\gamma \cdot \mathbf{n},$$

where $\mathbf{n}$ denotes the unit normal to $\Gamma_\mu(t)$. Moreover, if $u_0 \in C^2(\Omega^\pm)$ and $\partial\omega_0^\pm \in C^2$, then the surface γ starts moving with normal velocity $\mathbf{v}(\mathbf{x},0)\cdot\mathbf{n}$, where $\mathbf{v}(\mathbf{x},0)$ is given by (11) and the function $p \equiv p_0$ is a solution of the problem

$$
\begin{cases}
\operatorname{div}(u_0 \nabla p_0) + a\boldsymbol{H}(u_0 - \mu) = 0 \quad \textit{in } \omega_0^+ \cup \omega_0^- , \\
[\nabla p_0 \cdot \mathbf{n}]\,|_\gamma = [\nabla \ln u_0 \cdot \mathbf{n}]\,|_\gamma , \\
\nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = |\nabla \ln u_0| - \dfrac{\Delta u_0 + a}{|\nabla u_0|} \quad \textit{on } \partial\omega_0^+ , \\
\nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = |\nabla \ln u_0| - \dfrac{\Delta u_0}{|\nabla u_0|} \quad \textit{on } \partial\omega_0^- .
\end{cases}
$$

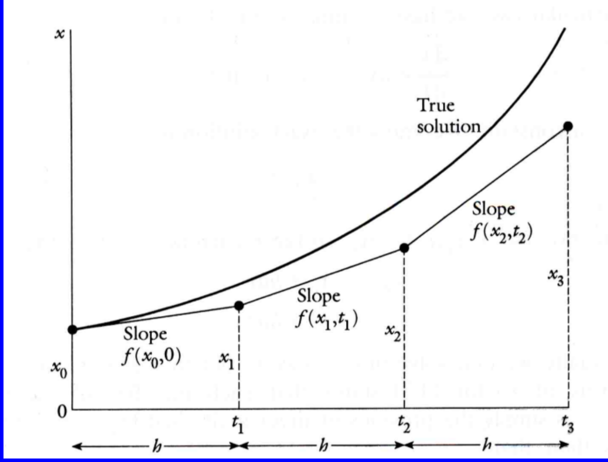


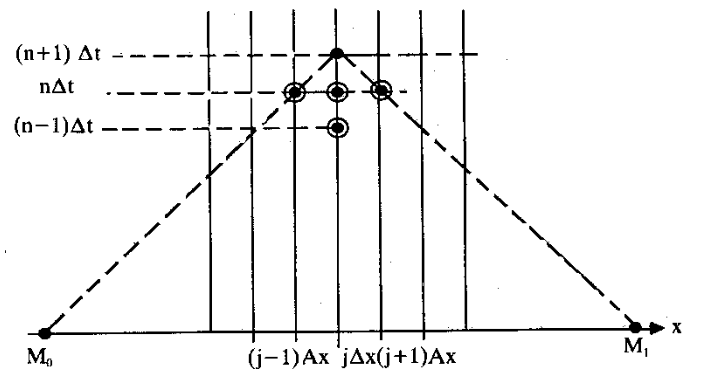
La "Trilogía Universal" de la Matemática Aplicada



Modelos discretos

- Diferencias finitas
  - En tiempo
  - En espacio
  - En ambas variables





Diferencias finitas espaciales

$N > 1$ nodos

$x_i = -1 + (i-1)h$

$h = \frac{2}{N-1}$

$y_i(t) \approx y(t, x_i)\ ,\ \ i = 1, \ldots, N$

$$y_{xx}(t, x_i) \approx \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{h^2}$$

$$y_x(t, x_N = 1) \approx \frac{y_{N+1}(t) - y_N(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_{N+1} = y_N$$

$$y_x(t, x_1 = -1) \approx \frac{y_1(t) - y_0(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_1 = y_0$$

$$y_i(0) = y(0, x_i)\ , \ \ i = 1, \ldots, N$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - k\frac{y_2 - y_1}{h^2} = R_a(-1, y_1, v) - R_e(-1, y_i)\ , \ \ i = 1\ , \\ \dot{y}_i - k\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = R_a(x_i, y_i, v) - R_e(x_i, y_i)\ , \ \ i = 2, \ldots, N-1\ , \\ \dot{y}_N - k\frac{y_{N-1} - y_N}{h^2} = R_a(1, y_i, v) - R_e(1, y_i)\ , \ \ i = N\ . \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_N(t))^T \in \mathbb{R}^N \qquad v(t) \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$(P_h) \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) + A_N \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}_a(\mathbf{y}(t), v(t)) - \mathbf{R}_e(\mathbf{y}(t))\ , \ \ t > 0\ , \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\ , \end{cases}$$

$$A_N = \frac{k}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N \times N}$$

simétrica y definida positiva

•Elementos finitos

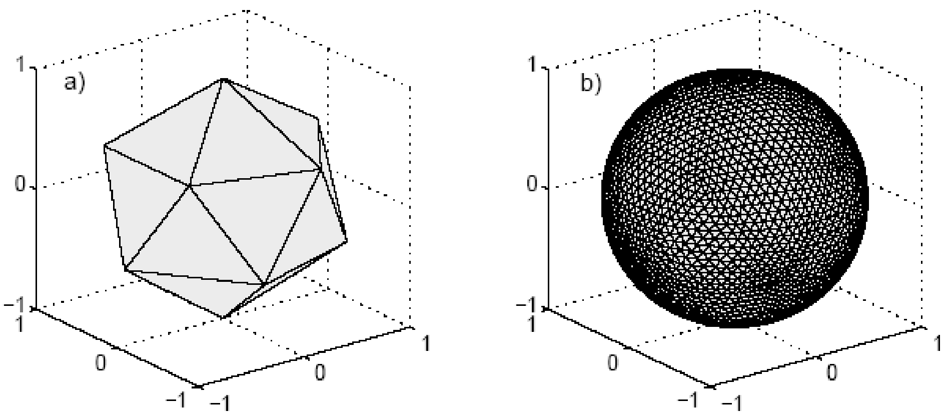


Figure 1: Initial Icosahedron and mesh after 4 refinements.

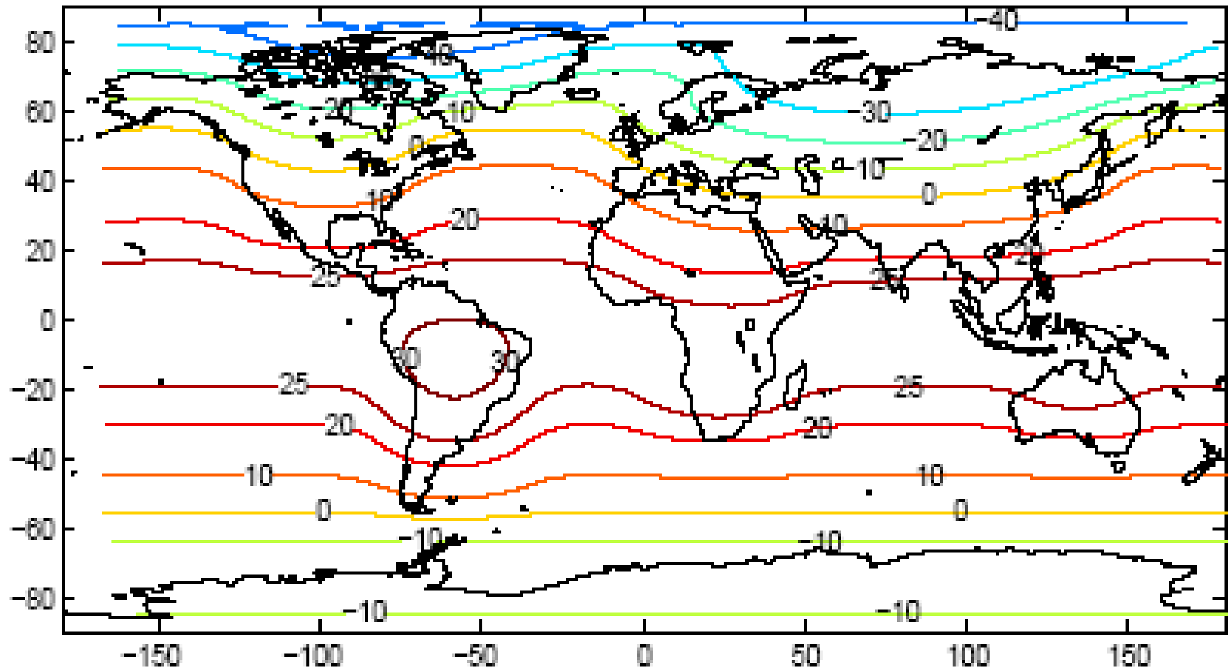
$$\mathcal{M}_h := \cup_j \Omega_j,\ \Omega_j \in D_{hk}.$$

$$\phi : \mathcal{M}_h \to \mathcal{M}$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{a\widehat{x}}{\sqrt{(\widehat{x})^2 + (\widehat{y})^2 + (\widehat{zx})^2}} \\ \dfrac{a\widehat{y}}{\sqrt{(\widehat{x})^2 + (\widehat{y})^2 + (\widehat{zx})^2}} \\ \dfrac{a\widehat{z}}{\sqrt{(\widehat{x})^2 + (\widehat{y})^2 + (\widehat{zx})^2}}. \end{pmatrix}$$

$$\widehat{V}_h = \{\widehat{v}_h \in C^0(\mathcal{M}_h) :\ \widehat{v}_h\,|_{\Omega_j} \in P_1(\Omega_j),\ 1 \le j \le N_k\},$$

$$(P_{h,\Delta t}) \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{M}} c \dfrac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} v_h dA + \int_{\mathcal{M}} \langle k \nabla_{\mathcal{M}} U^n, \nabla_{\mathcal{M}} v_h \rangle \, dA + \\[2ex] \int_{\mathcal{M}} (BU^n + C) v_h dA = \int_{\mathcal{M}} Q S^n Z^n v_h dA + \int_{\mathcal{M}} f^n v_h dA, \end{cases}$$



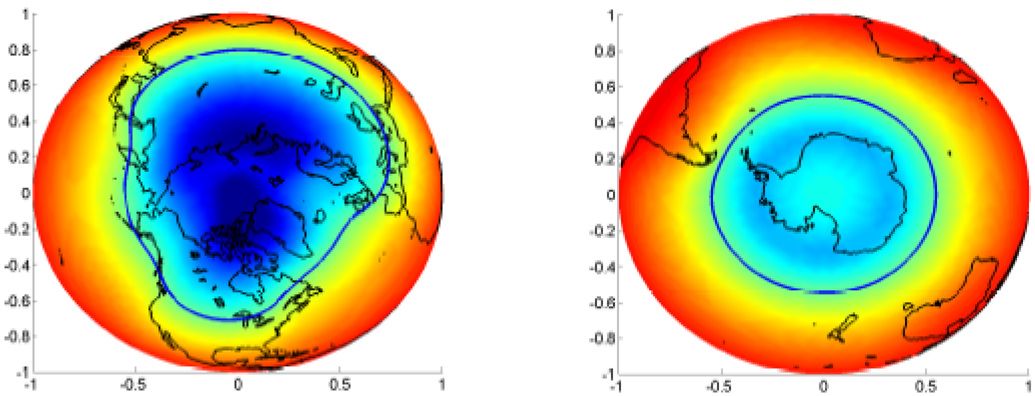


Figure 4: -2^oC January snow line. Left: northern hemisphere; right: southern hemisphere .

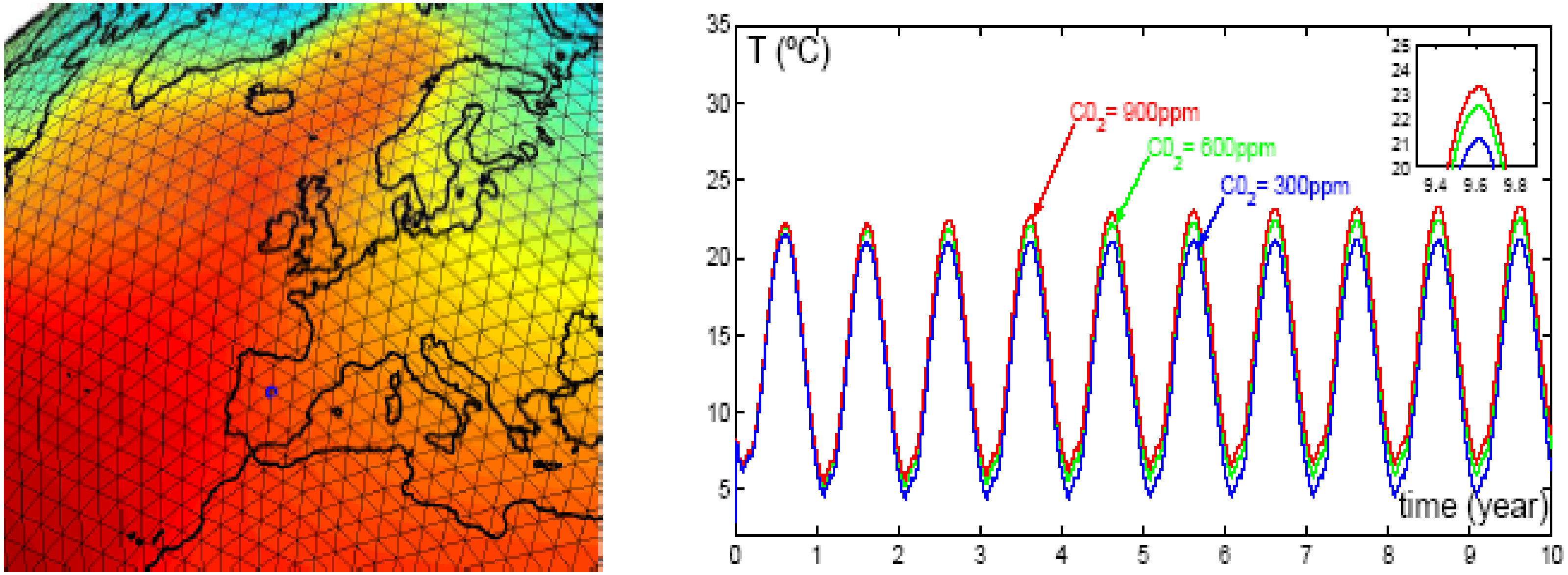
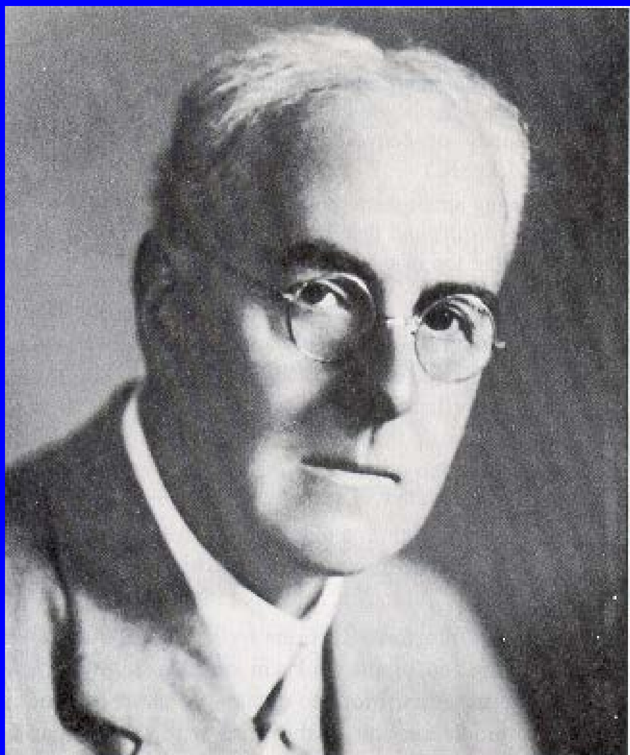


Figure 7: CO2 influence on temperature at a point near Madrid. In the box, it is shown the temperature corresponding to the month of July .

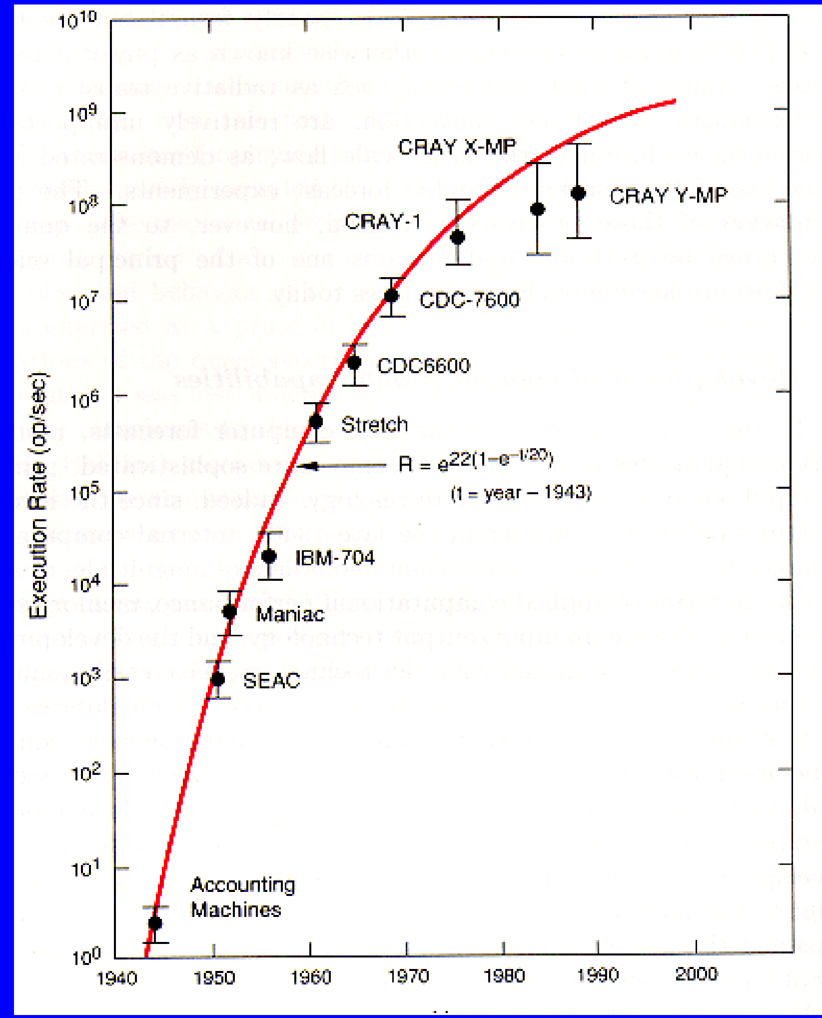
Super-odenadores: Cálculo paralelo.

Las 64.000 máquinas de Richardson



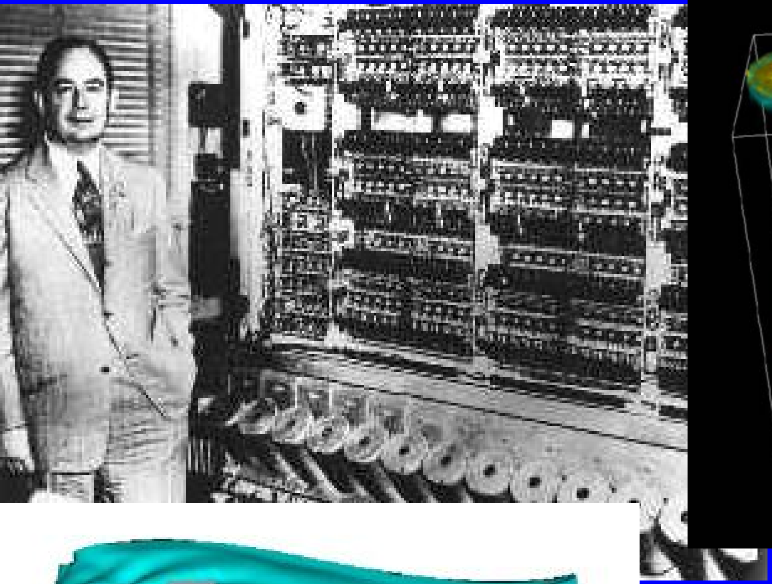
Lewis Fry Richardson

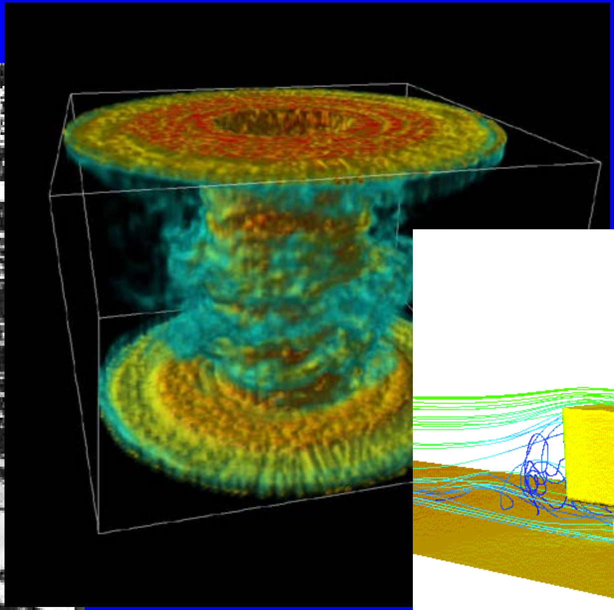
1881 – 1953

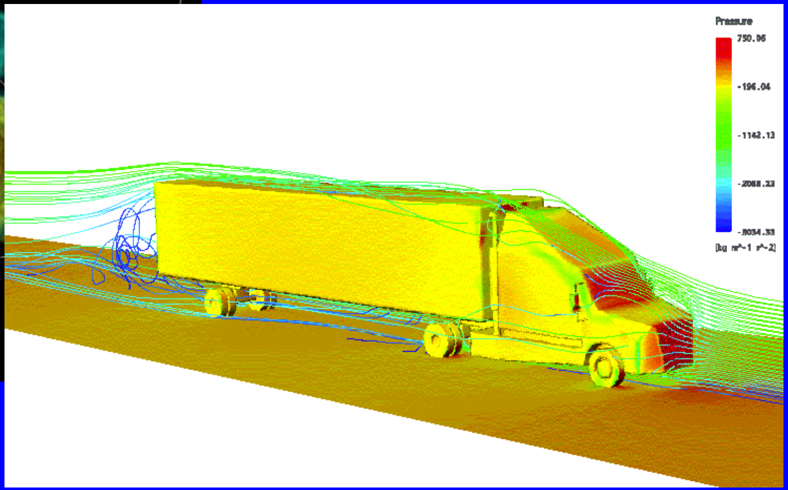


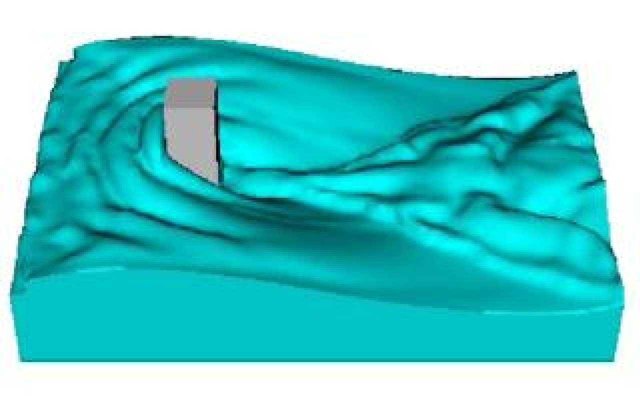
Ley de G.E. Moore (1965) : “La potencia de computación se duplica cada año”

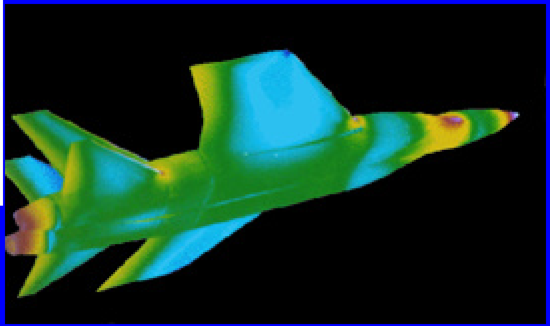
John von Neumann escogió la Meteorología Numérica como futuro banco de pruebas del ordenador del *Institut for Advanced Study* (IAS Princeton).

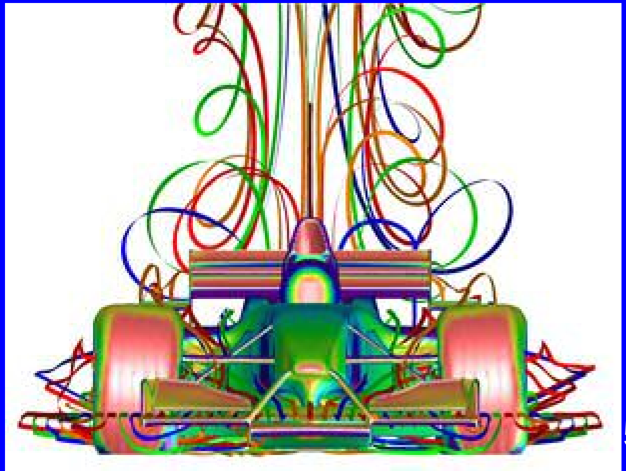




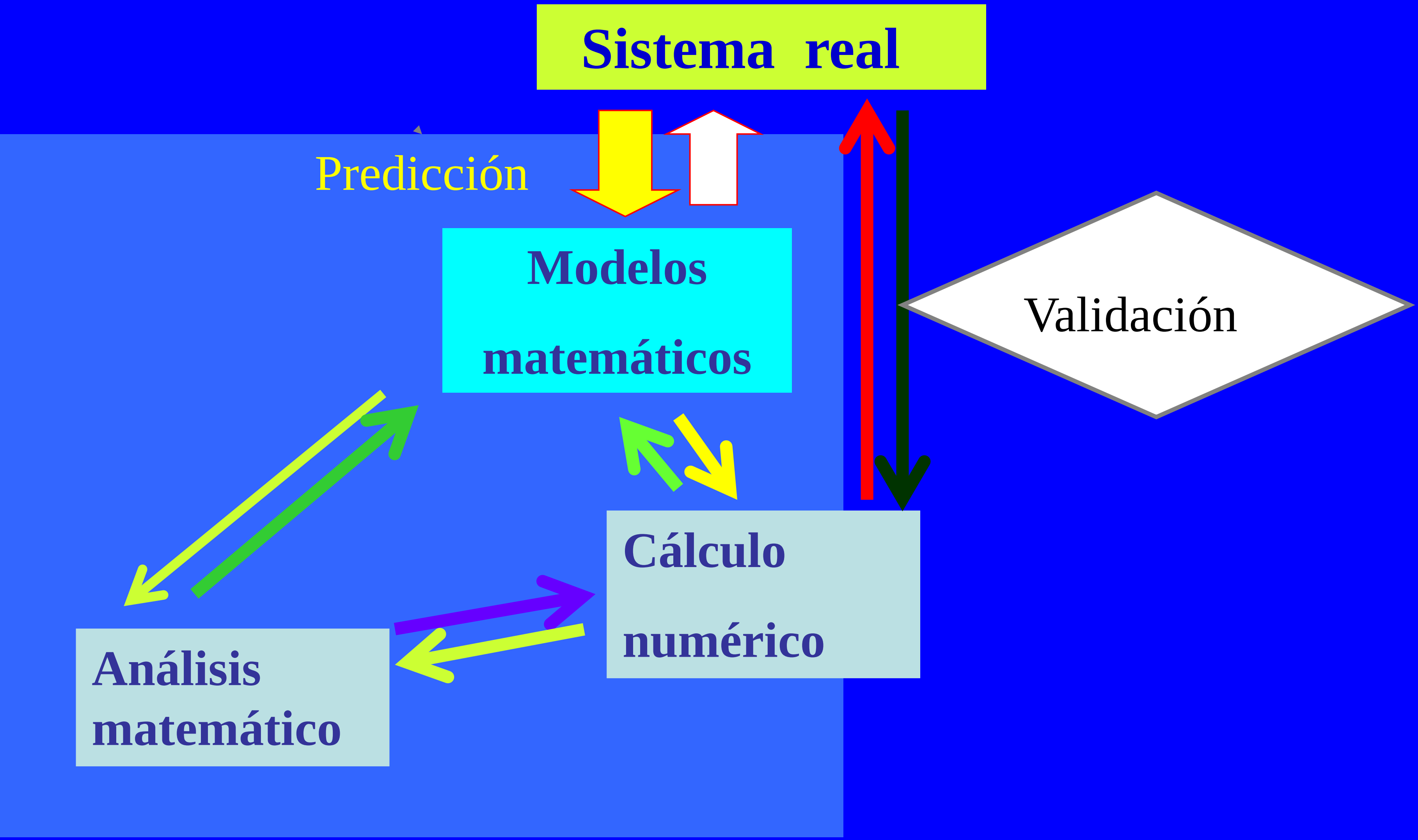






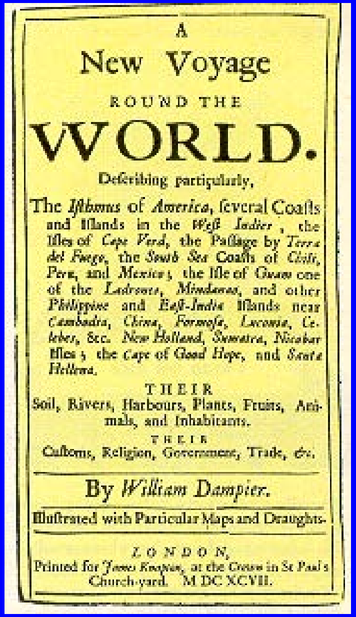


La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



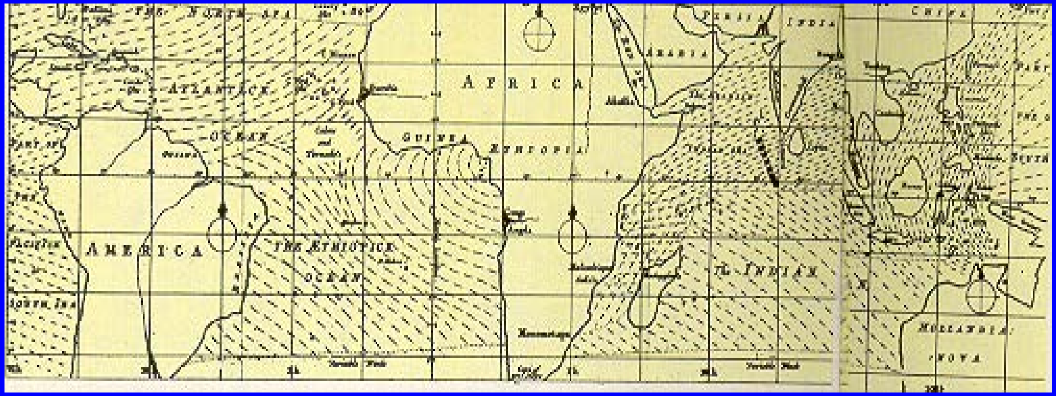
Validación: toma de datos, satélites

Transmisión de datos: Francia 1863



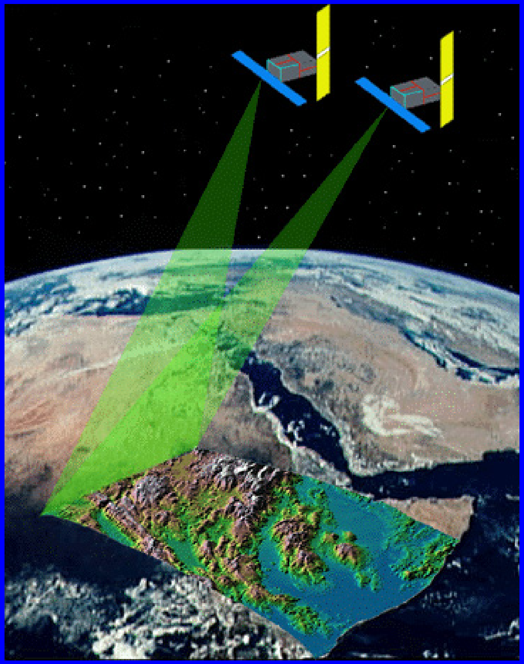
A
New Voyage
ROUND THE
WORLD.
Describing particularly,
The Isthmus of America, several Coasts and Islands in the West Indies, the Isles of Cape Verd, the Passage by Terra del Fuego, the South Sea Coasts of Chili, Peru, and Mexico; the Isle of Guam one of the Ladrones, Mindanao, and other Philippine and East-India Islands near Cambodia, China, Formosa, Luconia, Celebes, &c. New Holland, Sumatra, Nicobar Isles; the Cape of Good Hope, and Santa Hellena.
THEIR
Soil, Rivers, Harbours, Plants, Fruits, Animals, and Inhabitants.
THEIR
Customs, Religion, Government, Trade, &c.
By William Dampier.
Illustrated with Particular Maps and Draughts.
LONDON,
Printed for James Knapton, at the Crown in St Paul's Church-yard. M DC XCVII.

Datos pioneros: 1697
Capitan W. Dampier,



Edmund Halley (1686): Astrónomo, Circulación general de la atmósfera y convección térmica

Validación…



Siglo XXI

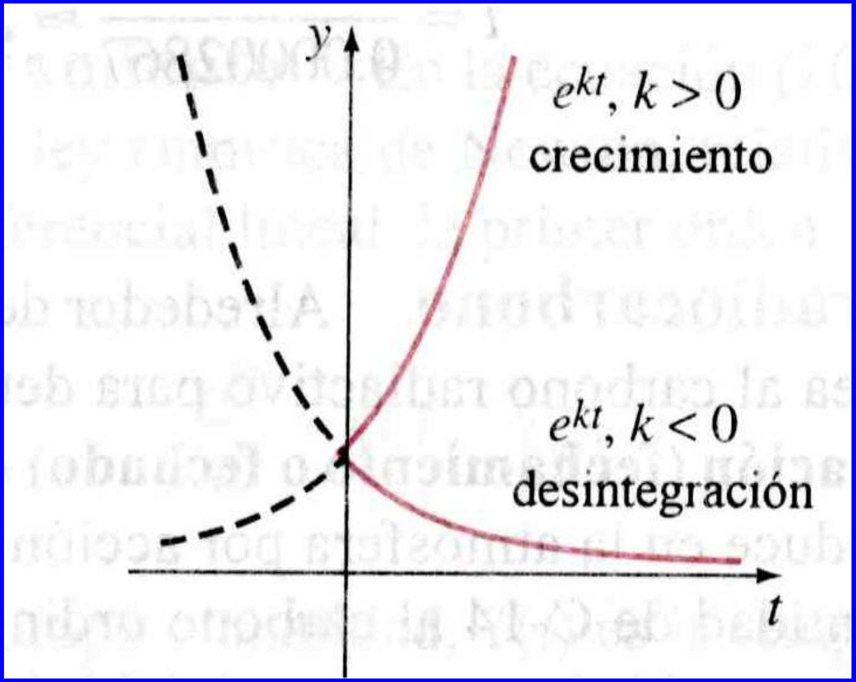
4.500 millones de años

Validación…

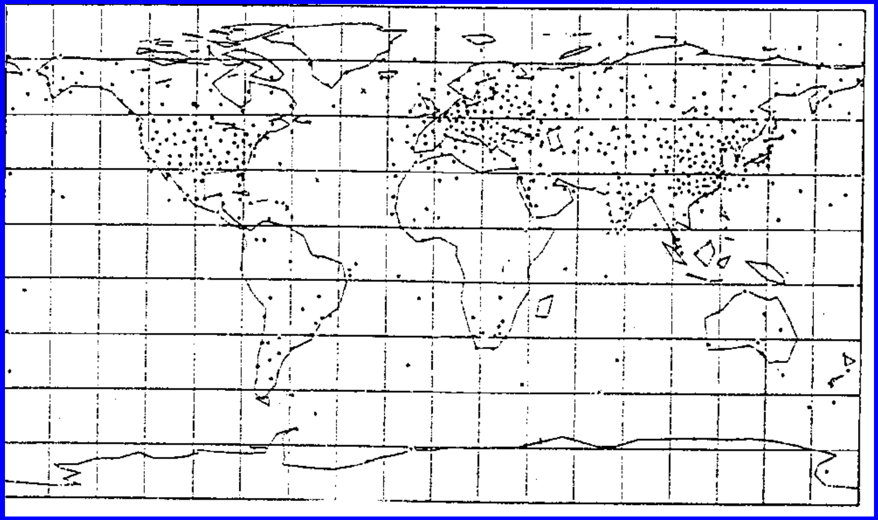
Willard Frank Libby
1947

C14: 5.730 años de vida media

U 238: 4.500 millones de años de vida media



Datos Incompletos: Teoría matemática. Centinelas, Asimilación



Radio-sondas: perfiles verticales de temperatura, viento y humedad

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f_1 + g_1$$

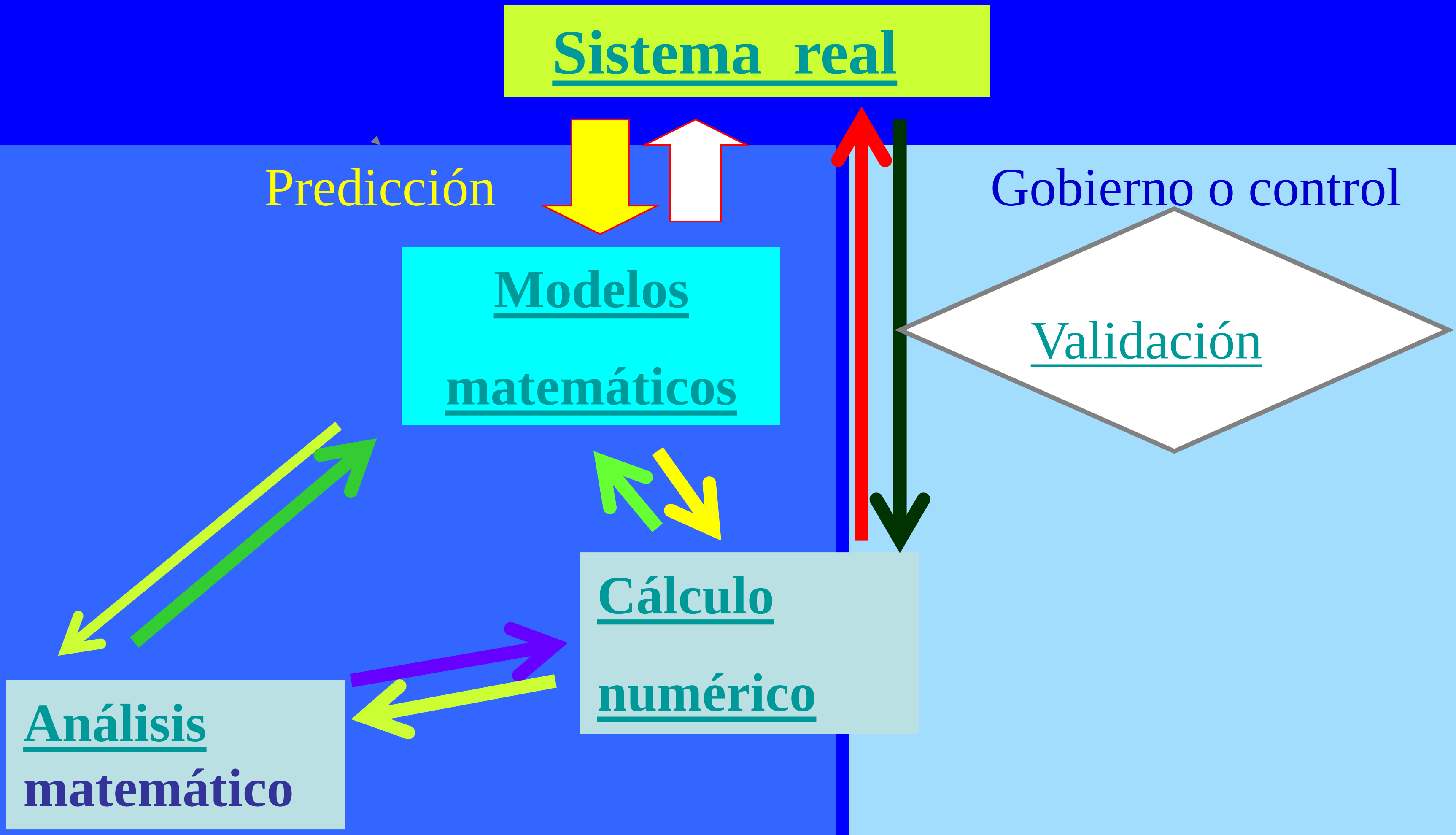
$$Bu = f_2 + g_2$$

$$u(t_0) = u_0 + g_0$$

$f_{1,}\ f_2$ y $u_0 \equiv$ datos disponibles

$g_{1,}\ g_2$ y $g_0 \equiv$ datos desconocidos

La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

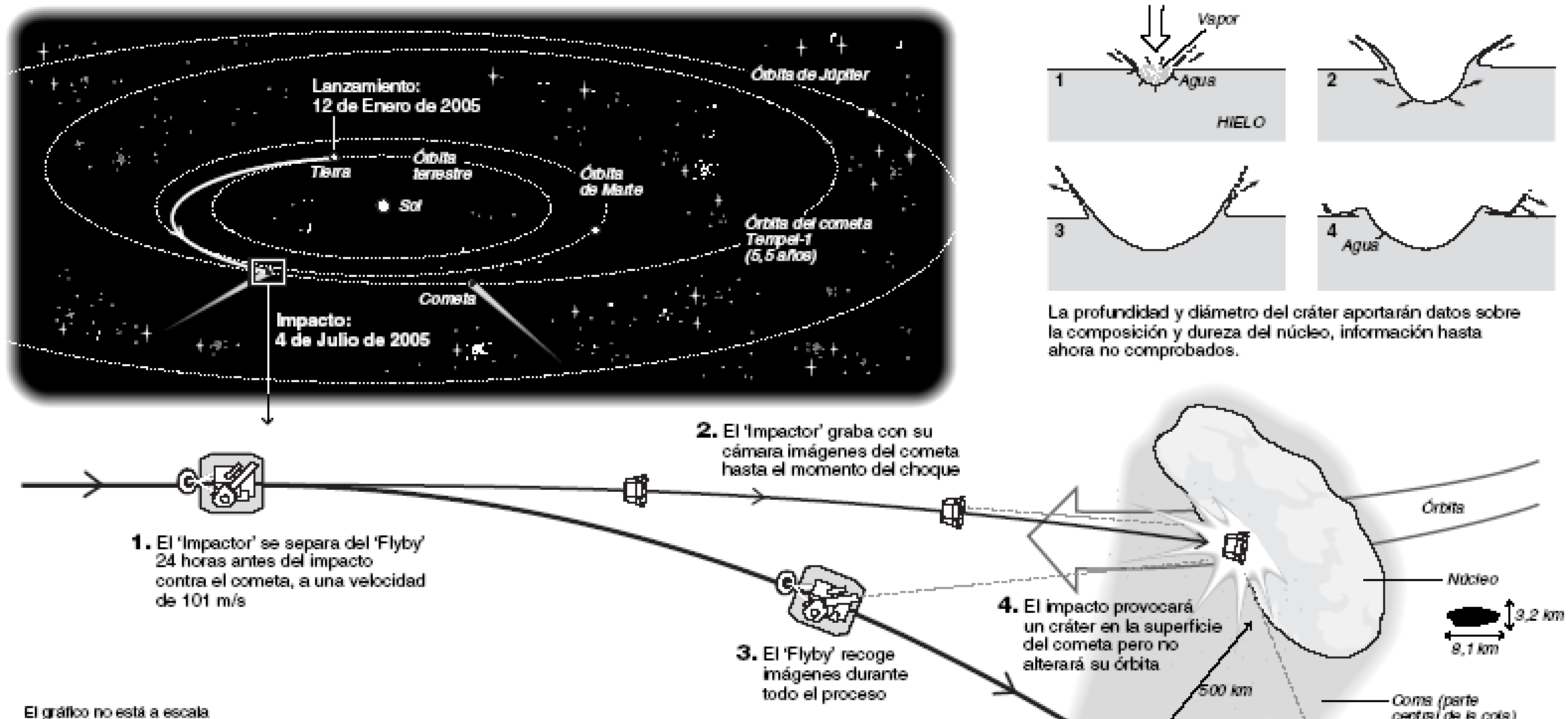


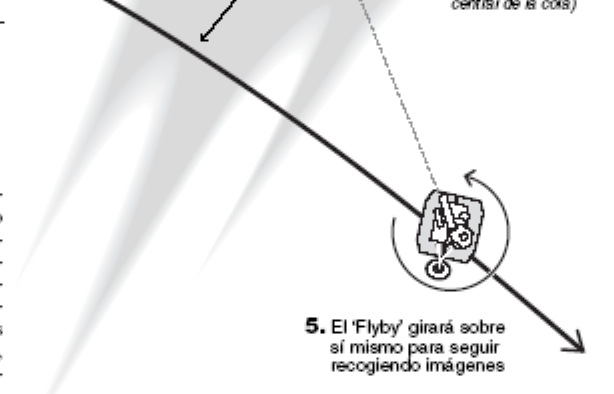
Gobierno o control

Roma 1555

Misión 'Deep Impact'

Hoy comienza la misión de la NASA que estudiará la composición del núcleo del cometa Tempel 1 al estrellar contra él un proyectil de 370 kg a una velocidad relativa de 10,2 km/s.





Impacto profundo

EE UU lanza hoy la nave 'Deep Impact', que estrellará un proyectil contra el cometa Tempel 1 para descubrir sus misterios

M. R. E., **Madrid**

Hacer un agujero en un cometa a unos 130 millones de kilómetros de la Tierra es el objetivo de la sonda que la NASA tiene previsto lanzar hoy desde Cabo Cañaveral, en Florida. Con el nombre de

proyectil hará un cráter relativamente poco profundo pero espectacular, como un estadio de béisbol". Sin embargo, explica Yeomans, si el cometa es una bola dura de hielo, el cráter será más profundo pero no tan gran-

Ejemplos de acciones sobre el medio ambiente.

Acciones locales. Siembra de nubes


...tradicionales sigue siendo objeto de controversia.

LOS EXPERIMENTOS DE SIEMBRA *de nubes con hielo seco fueron realizados por Vincent Schaefer (izquierda, delante). Actualmente, los generadores acoplados en aviones ligeros (abajo) arrojan cristales de yoduro de plata.*


EL PAÍS, jueves 13 de mayo de 1999 — DEPORTES

El Parma se corona sin rival

El **Marsella** se rinde al primer contratiempo y acaba goleado en la final de la **Copa de la UEFA**

MARSELLA	0
PARMA	3

Olímpico de Marsella: Porato; Blondeau, Issa, Blanc, Domoraud, Da Silva (Camara, m. 46); Brando, Bravo, Gourvennec, Pires; y Maurice.

Parma: Buffon; Thuram, Sensini, Cannavaro; Fuser, Dino Baggio, Boghossian, Vanoli; Verón (Fiore, m. 76); Chiesa (Balbo, m. 72) y Crespo.

Goles: 0-1. M. 26. Blanc cabecea pifiado hacia su portero, Hernán Crespo adivina la cesión, se anticipa y bate a Porato por arriba.

0-2. M. 36. Vanoli ajusta un cabezazo al palo izquierdo tras un centro preciso de Fuser.

0-3. M. 55. Verón centra desde la derecha, Crespo deja pasar el balón y Chiesa fusila a la escuadra.

Árbitro: Dallas (Escocia). Mostró tarjeta amarilla a Blondeau.

65.000 espectadores en el estadio Luzhniki de Moscú. Final de la Copa de la UEFA. Campeón, el Parma.

JOSÉ MIGUÉLEZ

No es el Parma un equipo voraz, de esos que siempre quieren más y más. Por eso la final de Moscú concluyó en 3-0. Simplemente en 3-0. La superioridad italiana fue mucho más grande que el resultado. Pero se sintió tan seguro, tan dueño de

Los jugadores del Parma celebran el triunfo con la Copa de la UEFA. / REUTERS

El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes

Siembra: hielo seco, humo de yoduro de plata.,,

10:37 LST–16,100'

11:12 LST–14,250'
26 min. después de la inseminación

11:20 LST–16,100'
34 min. después de la inseminació

11:31 LST–16,200'
45 min. después de la inseminación

1972: Cambrige, EE.UU.

Catastrofes naturales

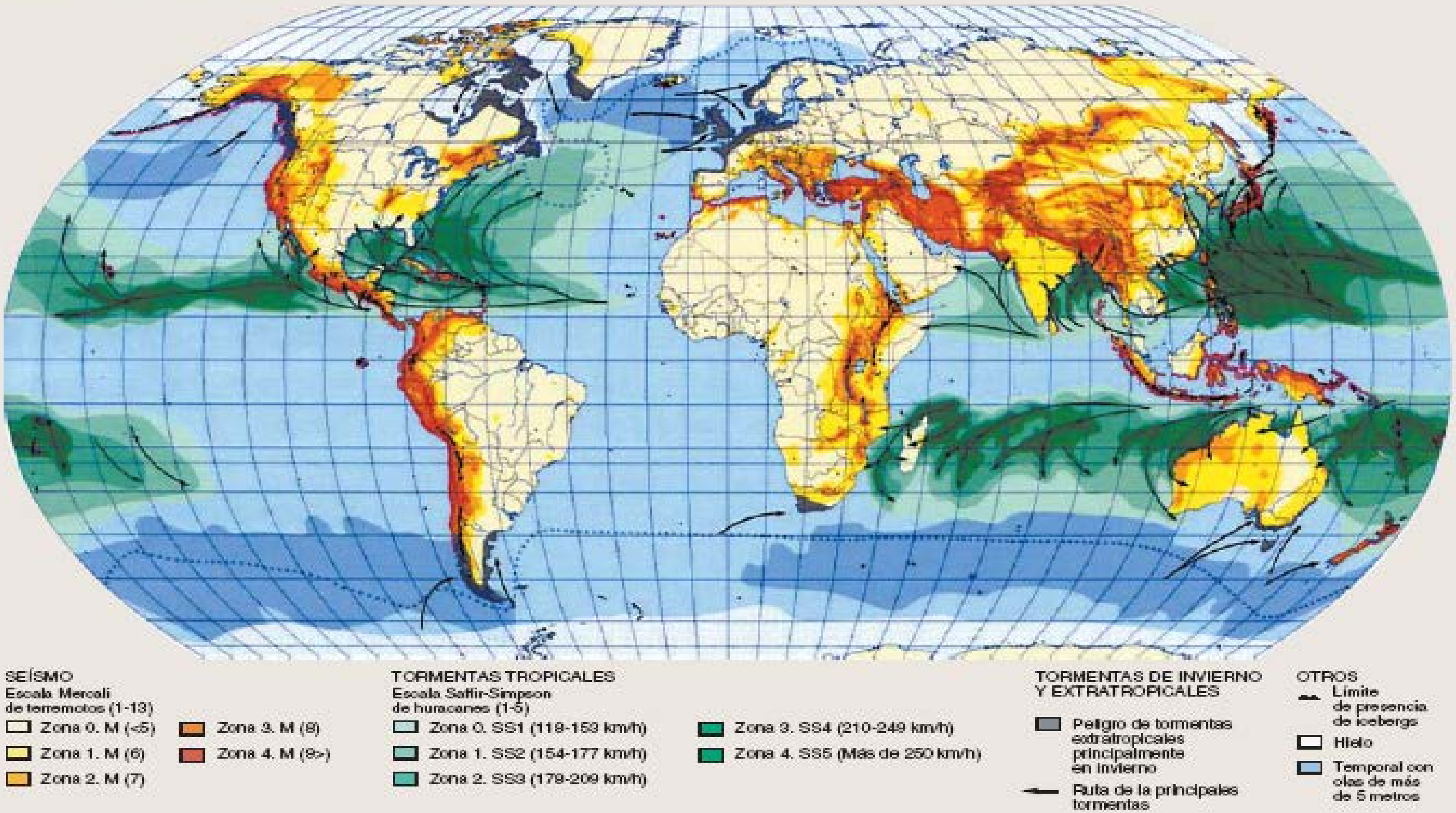
Visión pesimista

EL EFECTO DE LOS DESASTRES NATURALES AUMENTA CADA AÑO POR LA ACCIÓN DEL HOMBRE

Un mundo de catástrofes

http://www.elpais.es/suple/domingo

Atlas de los desastres naturales



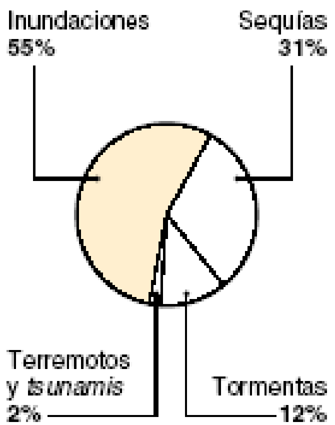
Fuente: ONU.

EL PAÍS

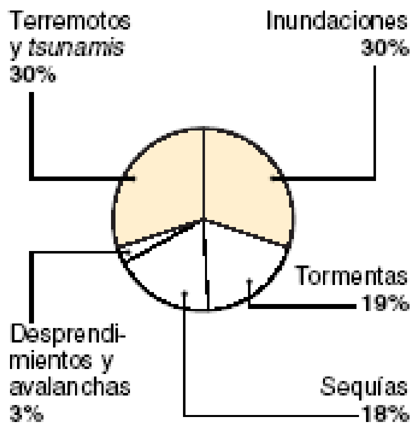
Desastres naturales

Nº de afectados	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	TOTAL
Sequías	16.946.500	26.791.404	3.620.000	7.330.100	19.882.535	30.502.145	176.477.015	86.757.493	339.901.401	70.274.114	**778.122.707**
Terremoto	790.785	1.640.722	5.501.102	1.227.462	2.139.320	6.881.400	2.408.826	8.796.841	611.608	3.955.700	**33.953.766**
Epidemias	6.564.353	445.078	643.994	334.311	879.459	476.548	1.030.908	200.976	969.159	125.956	**11.670.742**
Temperaturas extremas	1.108.184	535.278	200	614.580	36.386	725.246	27.686	213.161	103.986	1.839.908	**5.204.615**
Hambrunas	3.900.000	4.308.000	3.575.590	1.686.000	5.612.950	9.144.594	1.000.000	1.000.000	3.983.000		**34.210.134**
Inundaciones	127.687.833	198.116.395	178.451.143	44.956.366	290.072.569	149.969.693	62.505.835	34.494.674	277.408.430	166.827.751	**1.530.490.689**
Plagas		200									**200**
Desprendimientos	298.406	1.122.349	8.936	33.951	209.131	15.291	208.176	67.351	271.454	458.629	**2.693.674**
Erupciones	235.750	25.876	6.572	7.200	7.808	34.055	118.996	78.346	278.050	25.000	**817.653**
Olas gigantes			24	29.000		1.300	17.260		1.720		**49.304**
Incendios	3.067.413	11.839	5.811	53.159	166.904	18.830	39.035	5.739	26.124	8.833	**3.403.687**
Tormentas	38.311.466	13.771.290	28.144.129	13.594.067	26.784.268	23.889.154	15.459.454	30.645.189	110.694.349	10.781.408	**312.074.774**
Total afectados	**198.910.690**	**246.768.431**	**219.597.501**	**69.866.196**	**345.791.330**	**221.658.256**	**259.293.191**	**162.259.770**	**734.249.281**	**254.297.299**	**2.712.691.945**
Fallecidos	14.098	54.583	55.226	55.330	90.116	101.671	44.320	63.885	51.177	78.442	**609.638**
Número de desastres	225	263	228	274	329	385	546	459	508	380	**3.597**

AFECTADOS

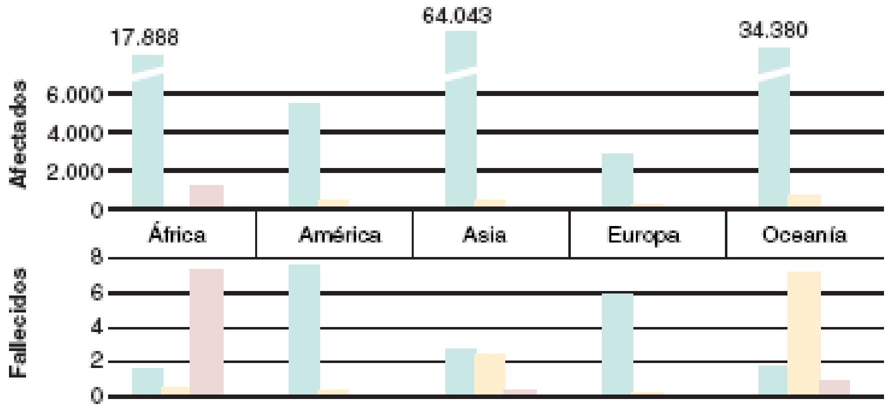


FALLECIDOS



FALLECIDOS Y AFECTADOS POR CONTINENTES

Cifras por millón de habitantes *Meteorológico* *Geológico* *Biológico*



Fuente: ONU.

EL PAÍS

Visión optimista

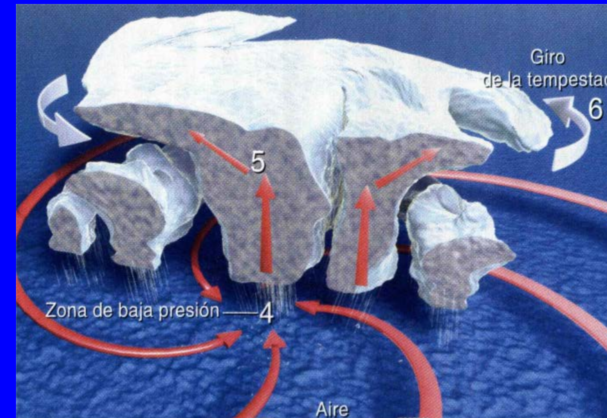
(quizá en exceso)

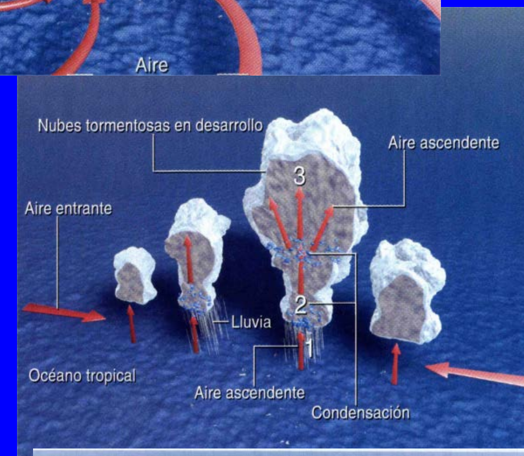

El control
de los huracanes

¿Se pueden moderar o desviar las grandes tempestades tropicales, huracanes, tifones y ciclones?

Ross N. Hoffman

GRAN HURACAN con un ojo bien desarrollado, visto desde la lanzadera espacial *Atlantis* en noviembre de 1994.



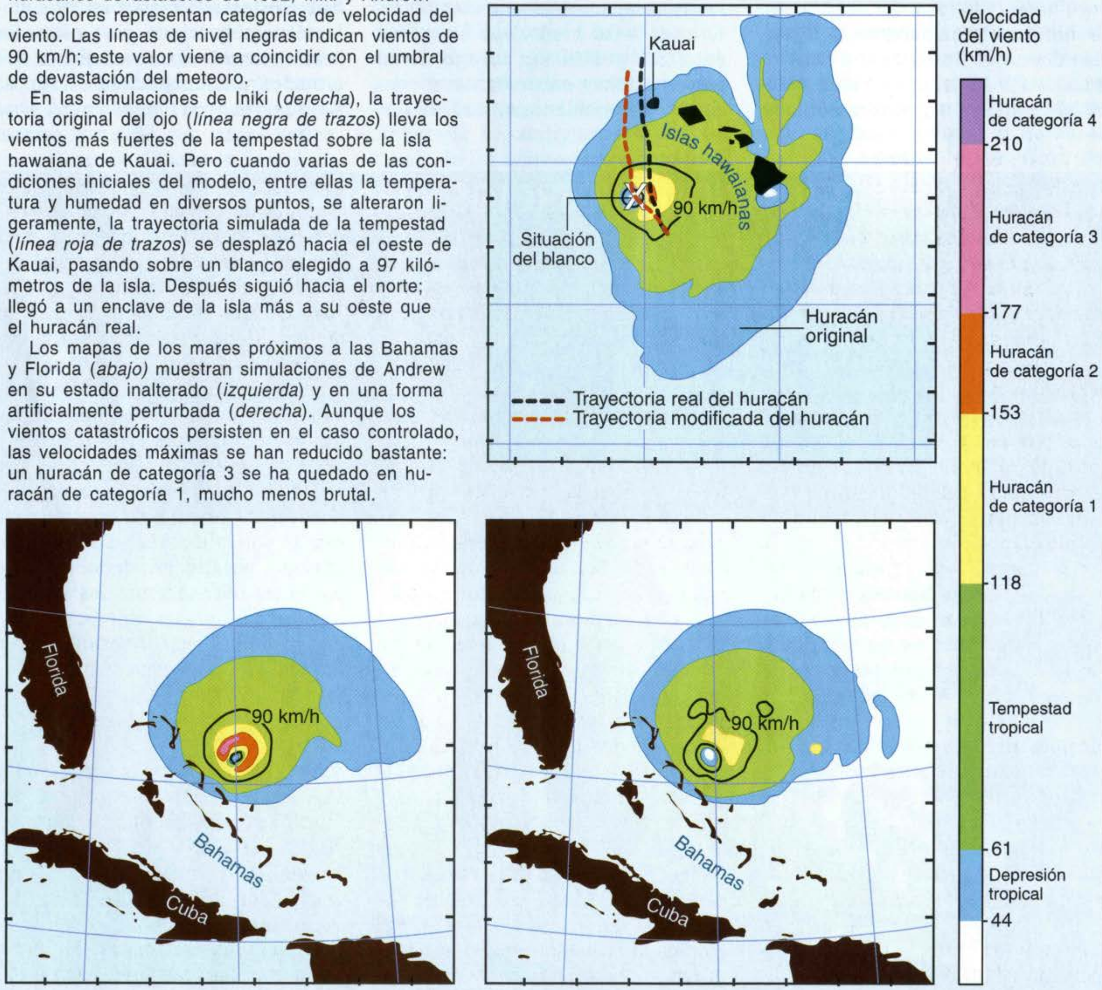


CONTROL DE HURACANES SIMULADOS

Se recurre a modelos informáticos para simular dos huracanes devastadores de 1992, Iniki y Andrew. Los colores representan categorías de velocidad del viento. Las líneas de nivel negras indican vientos de 90 km/h; este valor viene a coincidir con el umbral de devastación del meteoro.

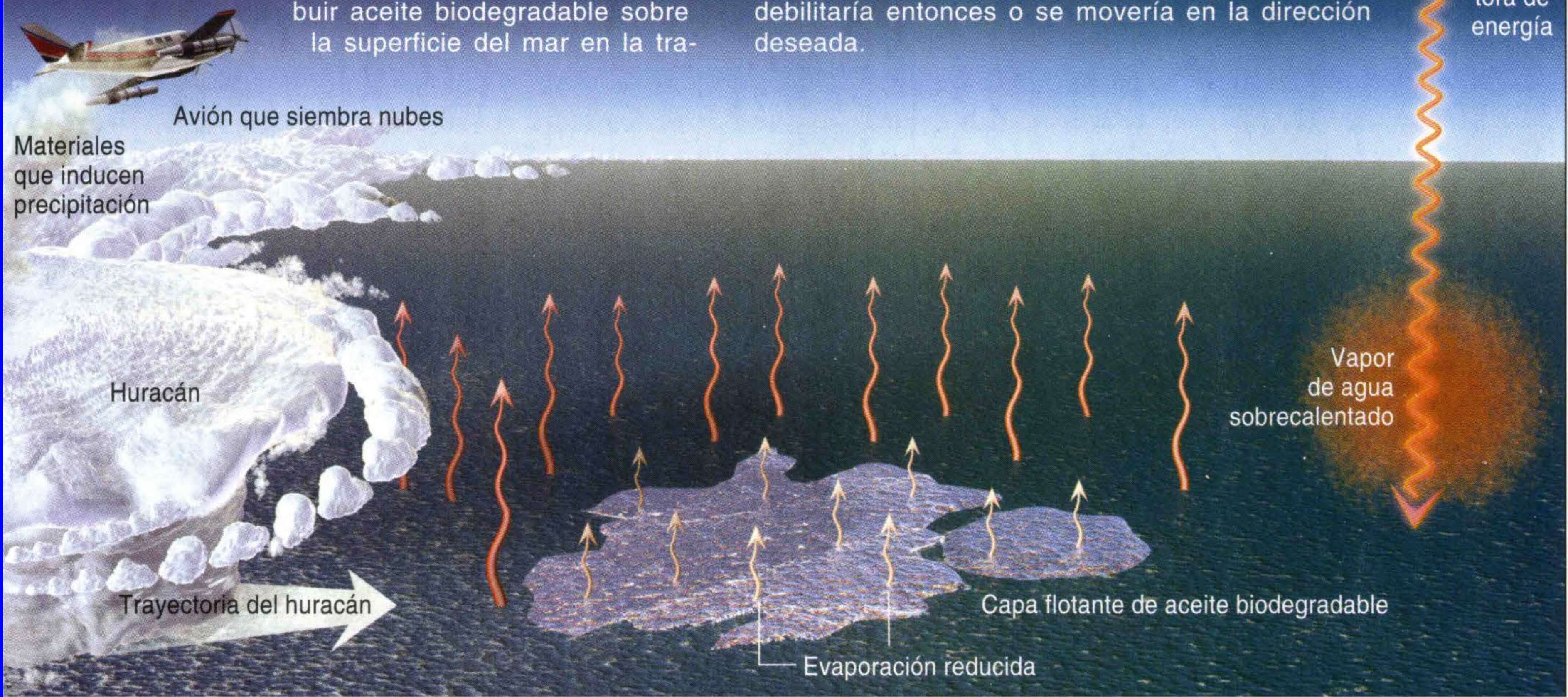
En las simulaciones de Iniki (*derecha*), la trayectoria original del ojo (*línea negra de trazos*) lleva los vientos más fuertes de la tempestad sobre la isla hawaiana de Kauai. Pero cuando varias de las condiciones iniciales del modelo, entre ellas la temperatura y humedad en diversos puntos, se alteraron ligeramente, la trayectoria simulada de la tempestad (*línea roja de trazos*) se desplazó hacia el oeste de Kauai, pasando sobre un blanco elegido a 97 kilómetros de la isla. Después siguió hacia el norte; llegó a un enclave de la isla más a su oeste que el huracán real.

Los mapas de los mares próximos a las Bahamas y Florida (*abajo*) muestran simulaciones de Andrew en su estado inalterado (*izquierda*) y en una forma artificialmente perturbada (*derecha*). Aunque los vientos catastróficos persisten en el caso controlado, las velocidades máximas se han reducido bastante: un huracán de categoría 3 se ha quedado en huracán de categoría 1, mucho menos brutal.



ACTUACIONES SOBRE LOS HURACANES

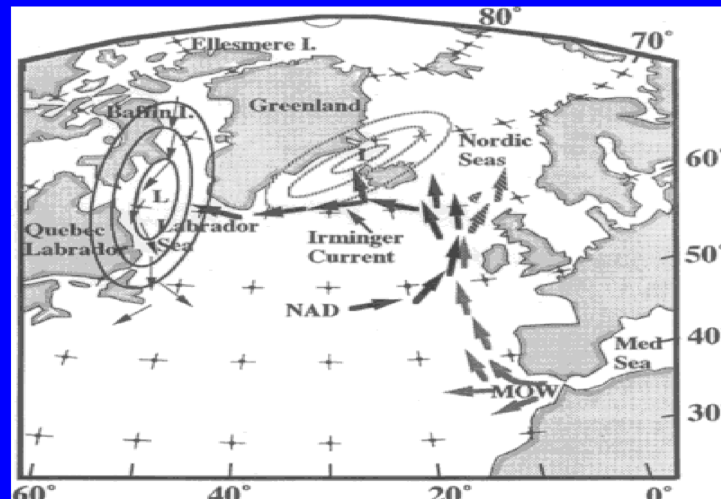
Las simulaciones informáticas de los huracanes indican que ciertas variaciones en la precipitación, evaporación y temperatura del aire podrían alterar la trayectoria de la tempestad o debilitar sus vientos. La actuación podría tomar varias formas: una siembra aérea de nubes, sobre objetivos meticulosamente seleccionados, con yoduro de plata u otros materiales inductores de precipitación podría servir para privar a la violenta pared del ojo del huracán —la característica fundamental de una gran tempestad tropical— del agua que necesita para crecer e intensificarse (*izquierda*). Se podría distribuir aceite biodegradable sobre la superficie del mar en la trayectoria del huracán para reducir la evaporación, que es la fuente de la energía de una tempestad (*centro*). Futuras estaciones orbitales de producción de electricidad mediante energía solar, que quizá recurran a grandes espejos para focalizar los rayos del sol y a paneles de células fotovoltaicas para cosechar esa energía y transferirla a la Tierra, emitirían microondas, sintonizadas de manera que las absorbiesen las moléculas de vapor de agua de la tempestad o sus alrededores (*derecha*). Las microondas harían vibrar las moléculas de agua y calentarían así el aire circundante. El huracán se debilitaría entonces o se movería en la dirección deseada.

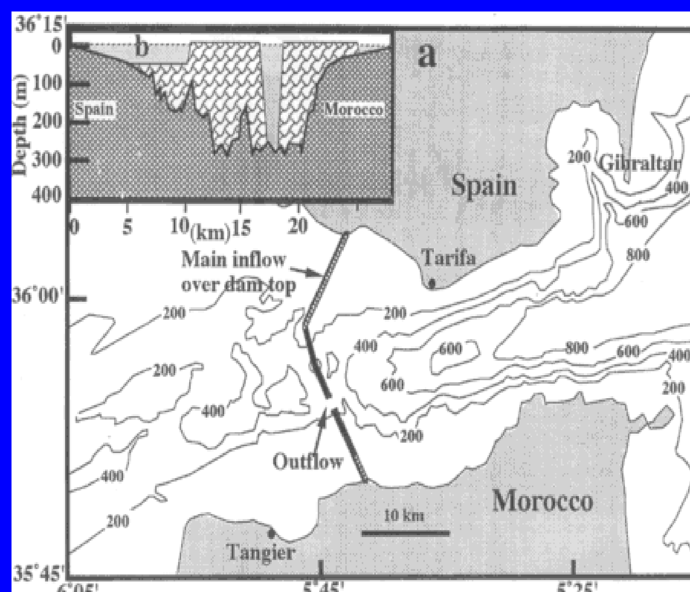


Acciones globales ¿Diques en Gibraltar?

R.G. Thomson

American Gephysocal Union, 1997





Milankovitch insolation at 25°N decreases

↓

African monsoons weaken, Nile discharge diminishes

↓

Mediterranean hydrologic deficit increases

↓

Mediterranean salinity rises, Outflow at Gibraltar increases

↓

Outflow water upwelling off Scotland increases

↓

Warm surface water diverted to Labrador Sea, cold upwelling water enters Nordic Seas

↓

Warmer Labrador Sea, greater advection of moisture into Canada

↓

Candian ice-sheet growth begins as Nordic Seas and Europe cool

J. von Neumann (1955): Modificación artificial del albedo

ELPAÍS.com Sociedad

Jueves, 15/11/2007, 00:26 h

Inicio Internacional España Deportes Economía Tecnología Cultura Gente y TV Sociedad Opinión Blogs Participa buscar

El Viajero | EPS | Domingo | Salud | Futuro | Educación

AVANCE Consulta en PDF la portada de EL PAÍS, edición nacional, del jueves 15 de noviembre

ELPAIS.com > Sociedad

16 de 16 en Sociedad anterior siguiente

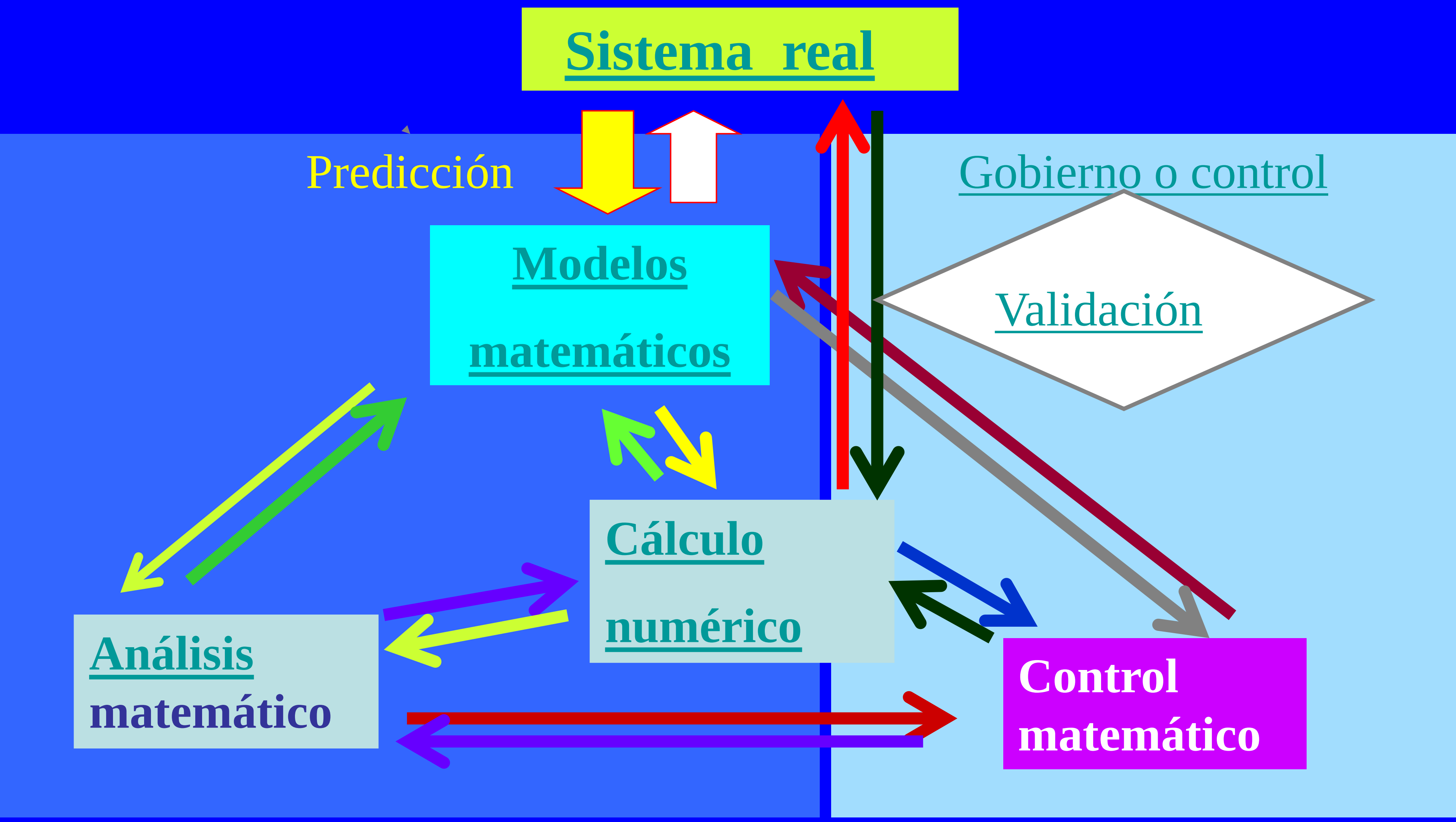
Repulsa mundial a un intento de sembrar de hierro el océano

Una empresa de EE UU pretende fertilizar el agua marina para absorber CO 2

MARÍA JOSÉ VIÑAS - Santa Cruz - 14/11/2007

Captura de CO_2 ...

La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



Teoría de Control / Teoría de juegos

- Estructura general:

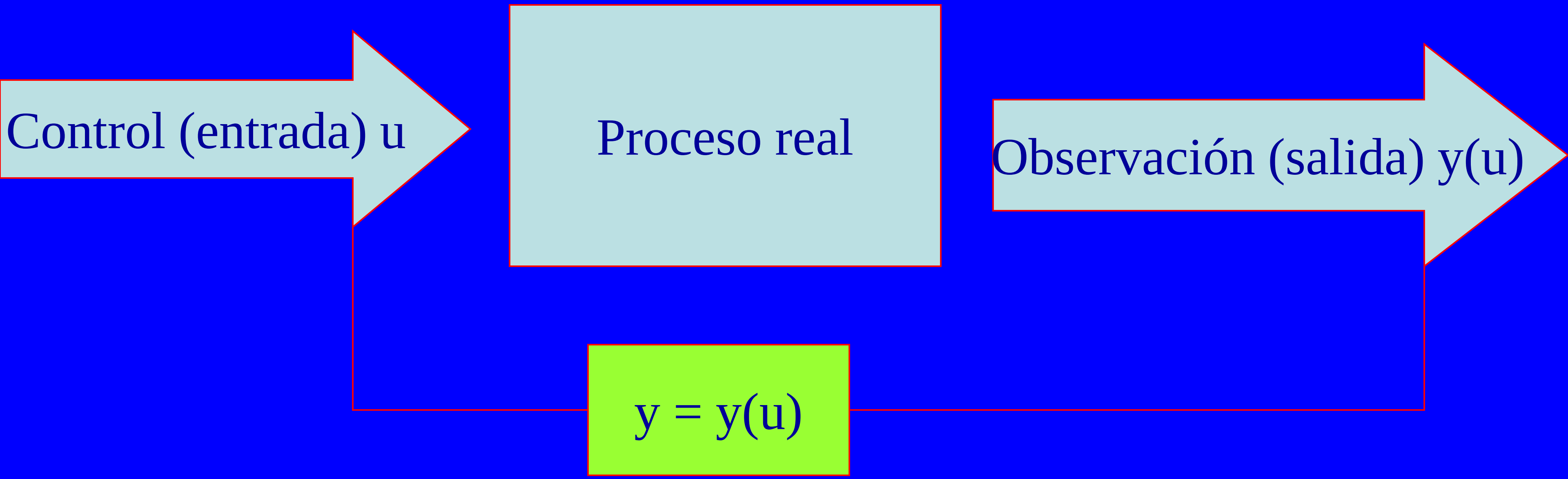
  y=estado(s), u=control(es)

  - Ley de estado: $F(y_t, Ay, Bu)=0$ (A y B operadores)
  - Funcional de observabilidad: $J(u)=g(u,y(u))$

Problema: optimizar J(u) sobre un conjunto K de posibles controles

  - Tª Control: u escalar (un único control)
  - Tª de Juegos: u con múltiples componentes
    ¡Posible conflicto de intereses!

Teoría de Control: planteamiento general



Objetivo: Encontrar el control u para que la observación y(u) sea lo "mejor posible"

Óptimos en espacios de dimensión infinita

La componente económica. Cumbres Mundiales.
Teoría de juegos. Teoría de la decisión bajo incertidumbre

Resultados rigurosos y numéricos sobre control en EBM :

$$y_t - y_{xx} + y^3 = arctgy + u(t)\delta_{1/2} \text{ en } (0,1)\times(0,T),$$

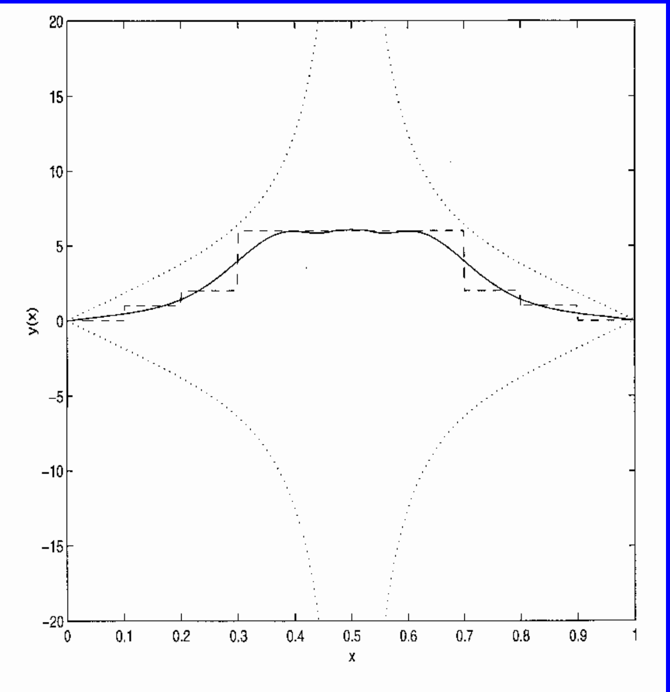
$$y(0,t) = y(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T),$$

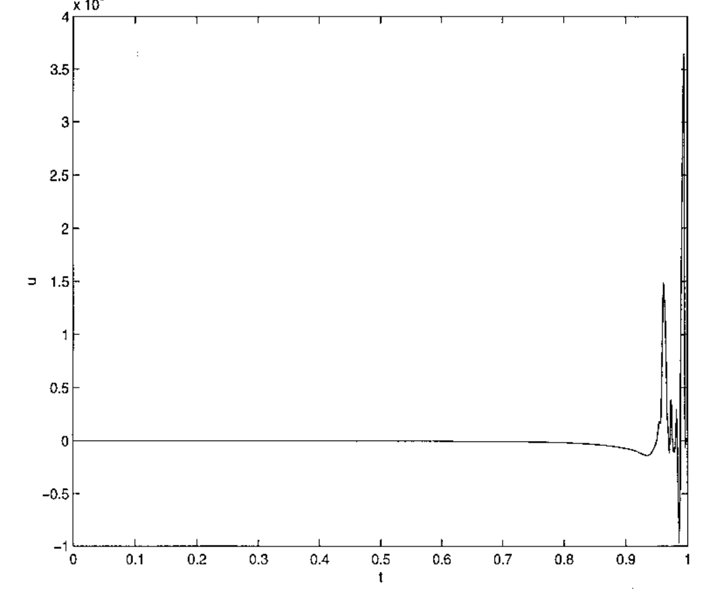
$$y(x,0) = y^0(x) \qquad x \in (0,1),$$

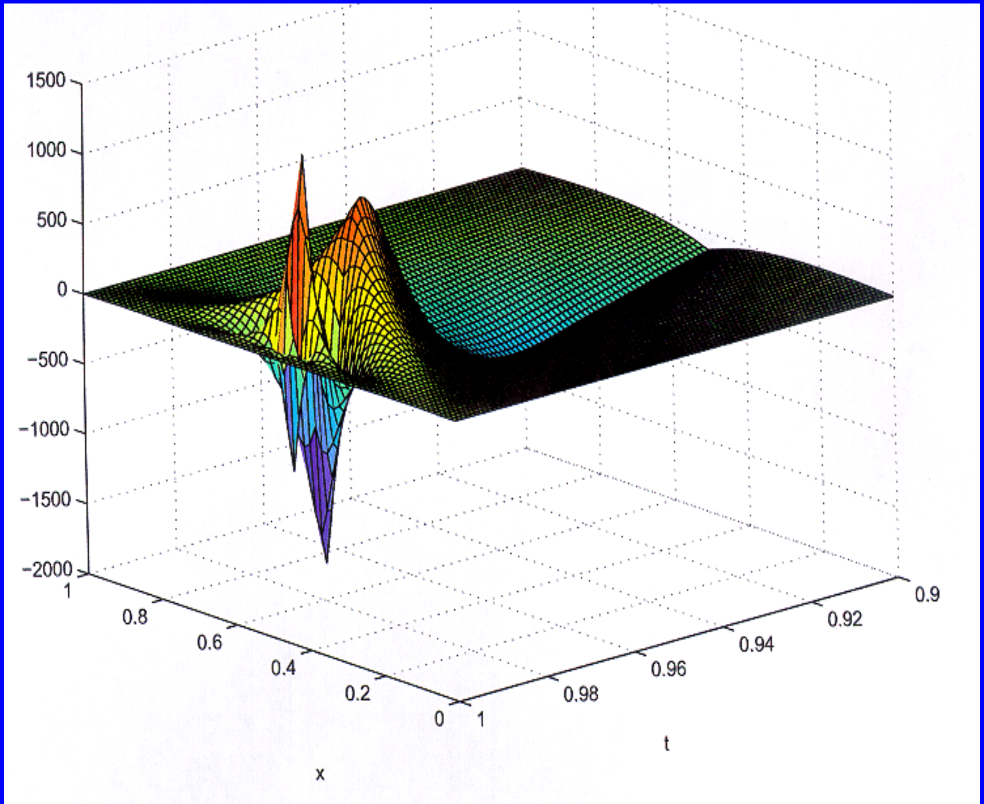
$$J_k(u) = \frac{1}{2}\| u \|_{L^2(0,T)} + \frac{k}{2}\| y(T,.:u) - y_d \|_{L^2(0,1)}$$

$$k = 10^{12}$$

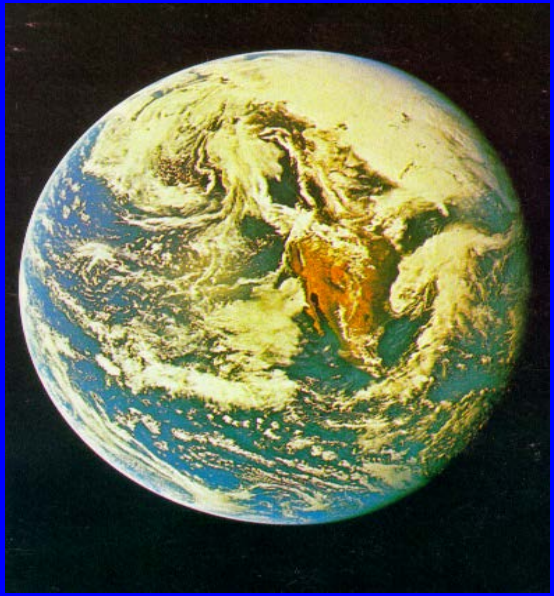
Experiencia numérica







Pese a su indudable carisma, ofrecía una accesibilidad, una generosidad científica y un temperamento tan extraordinariamente afable que colocaba a su interlocutor en el centro de su preocupación y atención. Su ejemplo será siempre un acicate para las presentes y futuras generaciones.



Gracias por vuestra atención