

# VII Semana de la Ciencia

Madrid 2007



## Matemáticas y Clima Global

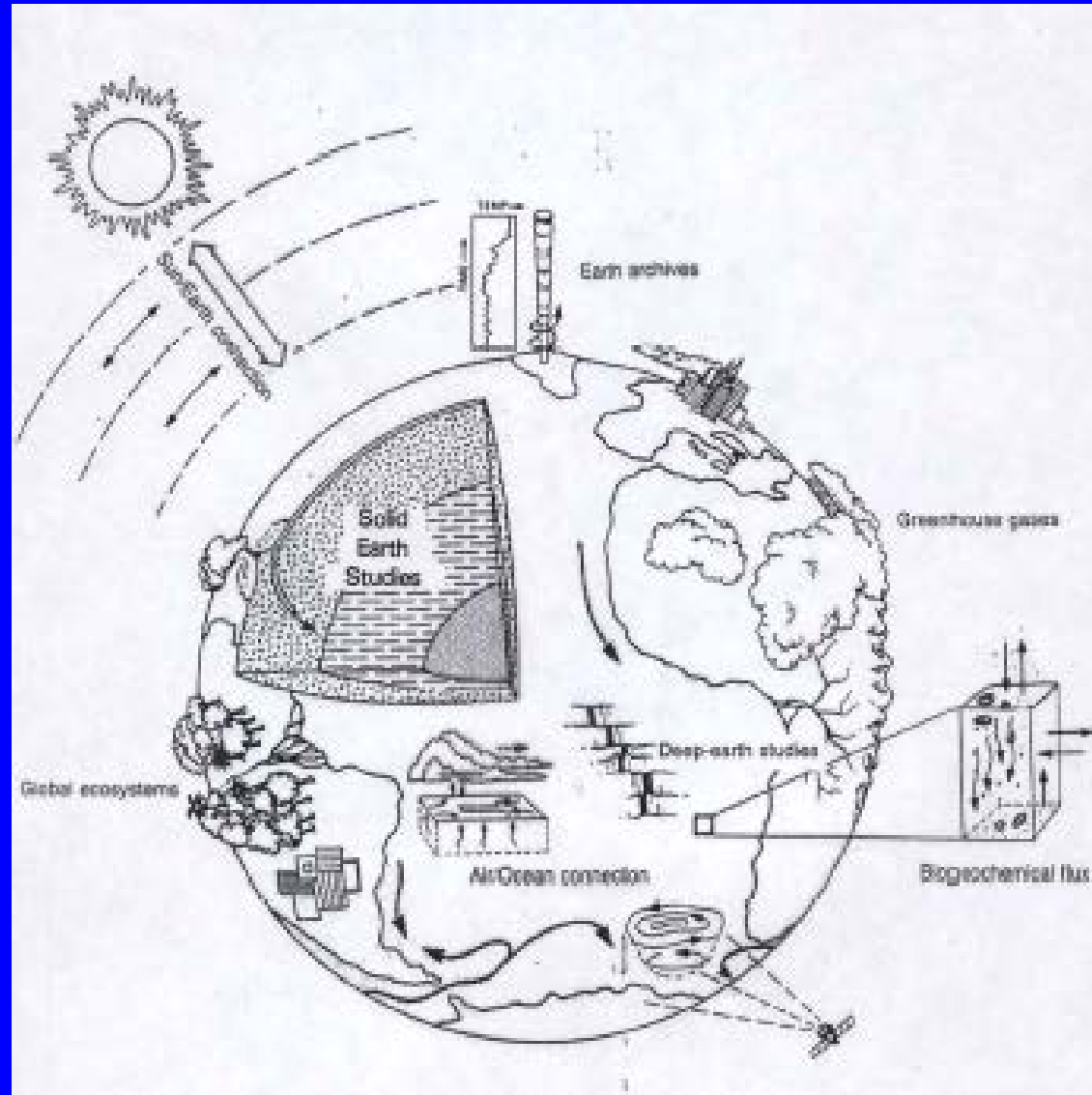
**El estudio del clima  
como fuente de nuevas matemáticas**



**J.I. Díaz**



# 1. Introducción. El clima de la Tierra: *sistema realimentado*



# Revisión de diversos componentes del clima de la mano de un matemático

- **Físicos y Geólogos con otra visión**
- **Bagaje del matemático**
- **Conferencia de divulgación**
- **Distintos niveles de la audiencia (mínimo / máximo)**

# “Matemáticos” pioneros en el estudio del clima

Convocatoria, en 1738, del Premio de Matemáticas de la Academia Francesa de Ciencias sobre “la causa del flujo y reflujo del mar”. Premiados: *Daniel Bernoulli, Euler y MacLaurin*



Daniel Bernoulli  
(1700-1782)



Leonhard Euler (1707-1783)



*Joseph Fourier*

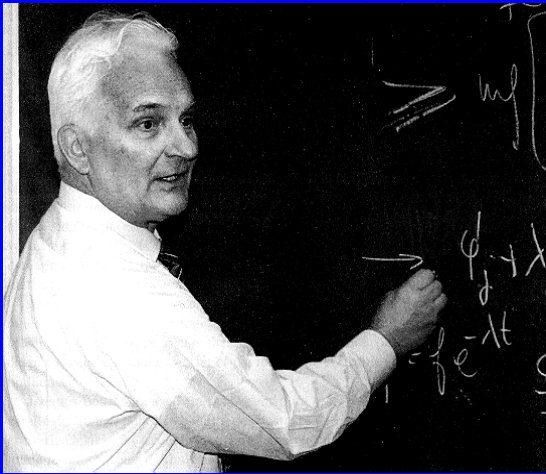
(1768-1830)

(1824)

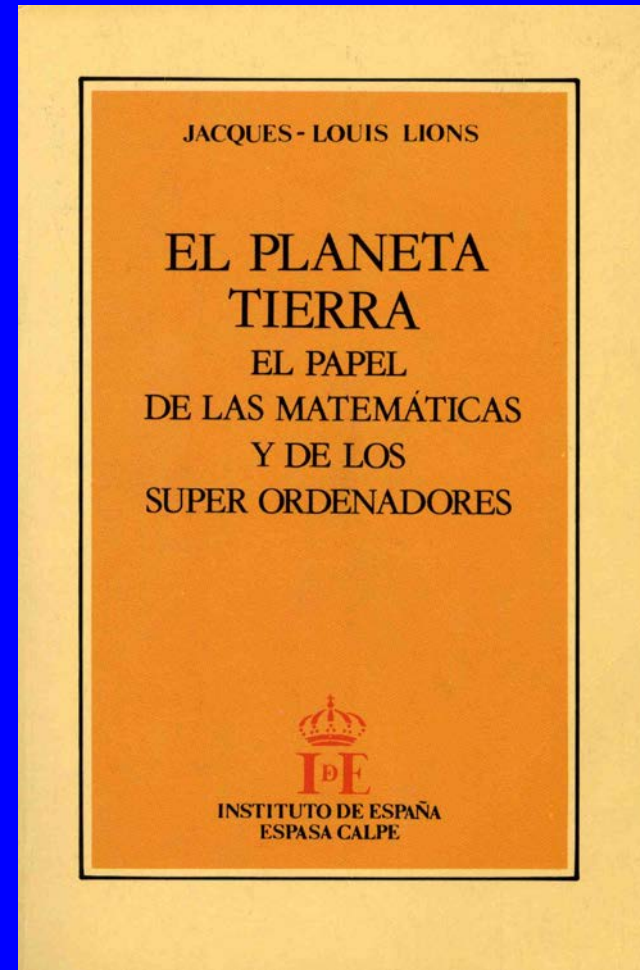
*El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el calor medio a lo largo de varios siglos ...*

Veremos que el papel activo de numerosos matemáticos en el estudio del clima es hoy día una realidad con un futuro en expansión.

## 2. Guía : “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



**J.L. Lions**  
**(1928-2001)**

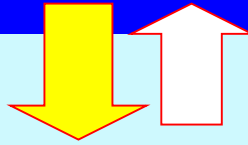


Instituto de España, Enero 1990

# La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

**Sistema real**

Predicción



**Modelización  
matemática**

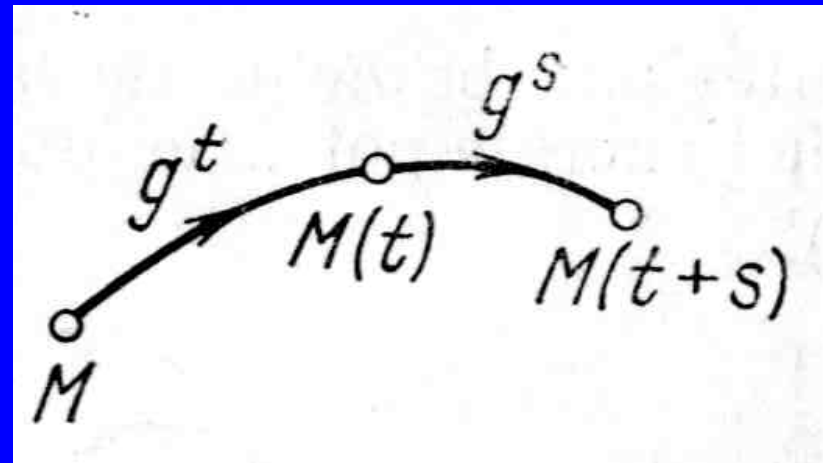
# Modelos matemáticos

- Deterministas
- Estocásticos
  - Mixtos
- Régimen transitorio (sistemas dinámicos)
- Régimen estacionario (estados de equilibrio)



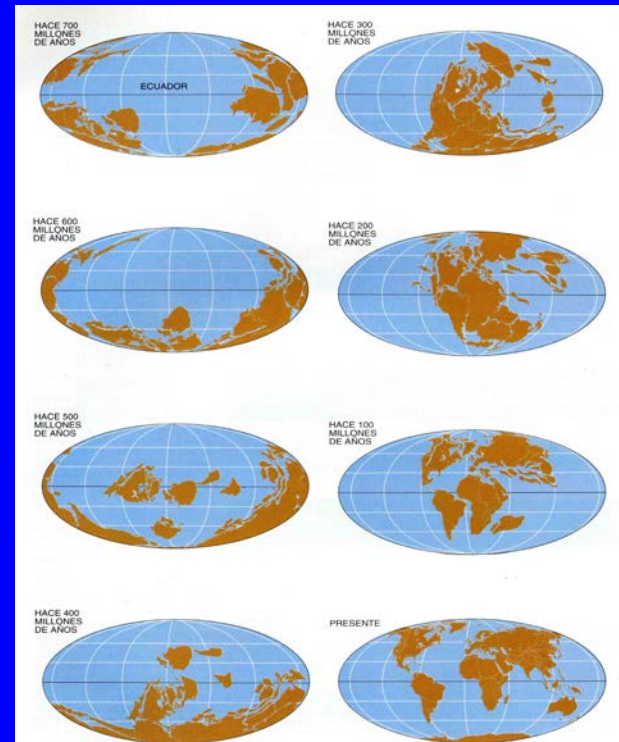
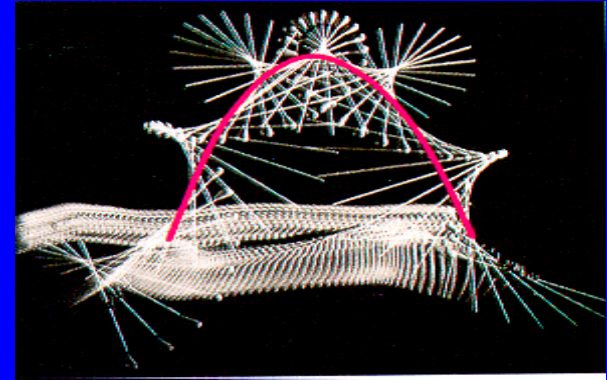
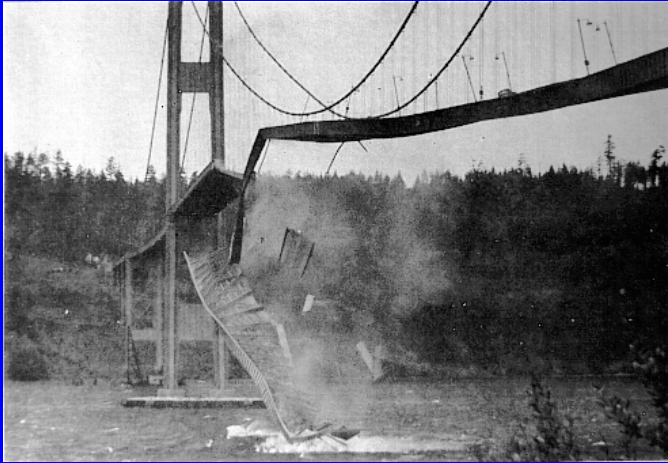
# sistemas dinámicos

- Sistema
- Dinámica



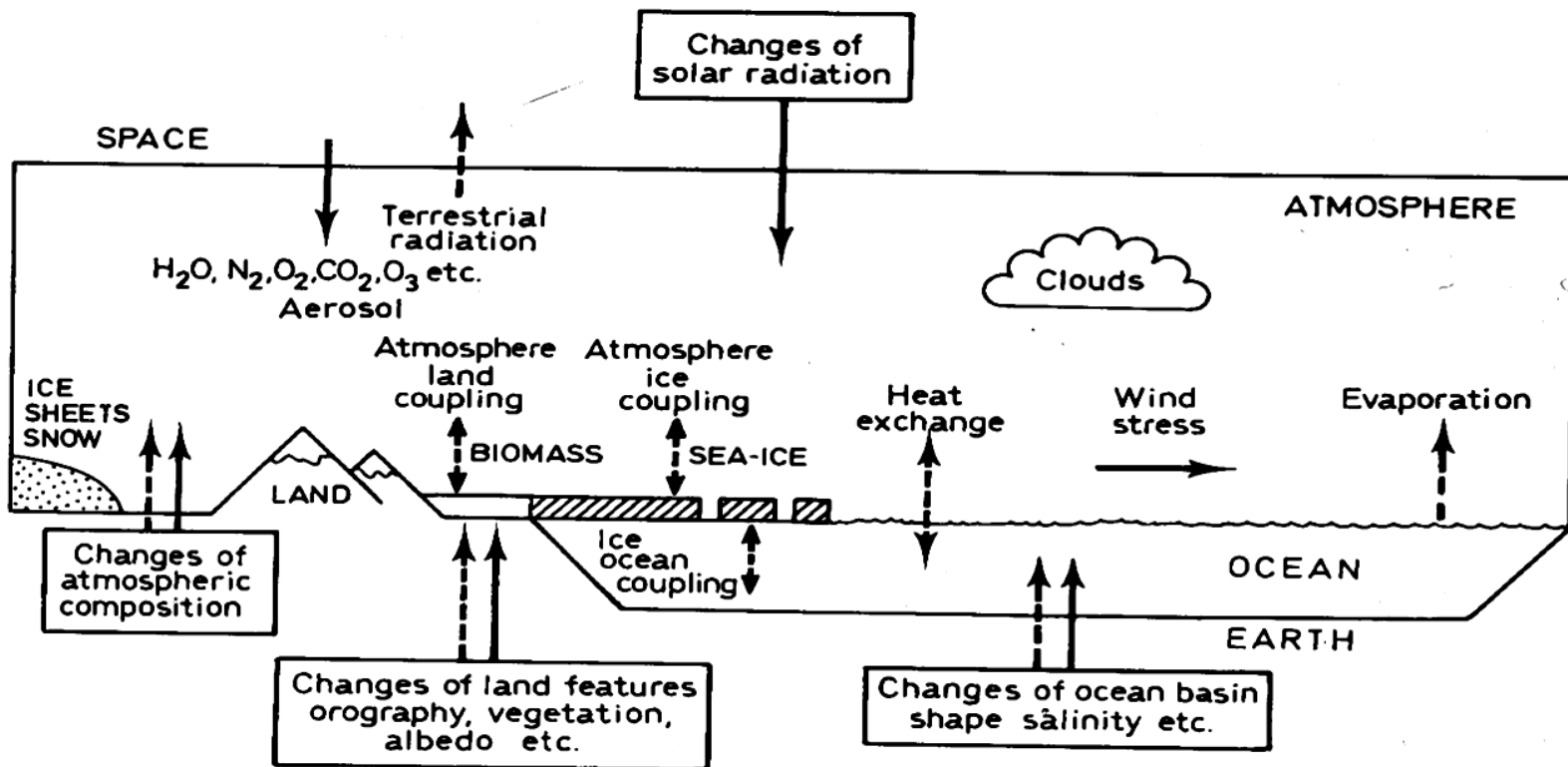
- Espacio de los estados

# Contínuos/Discretos



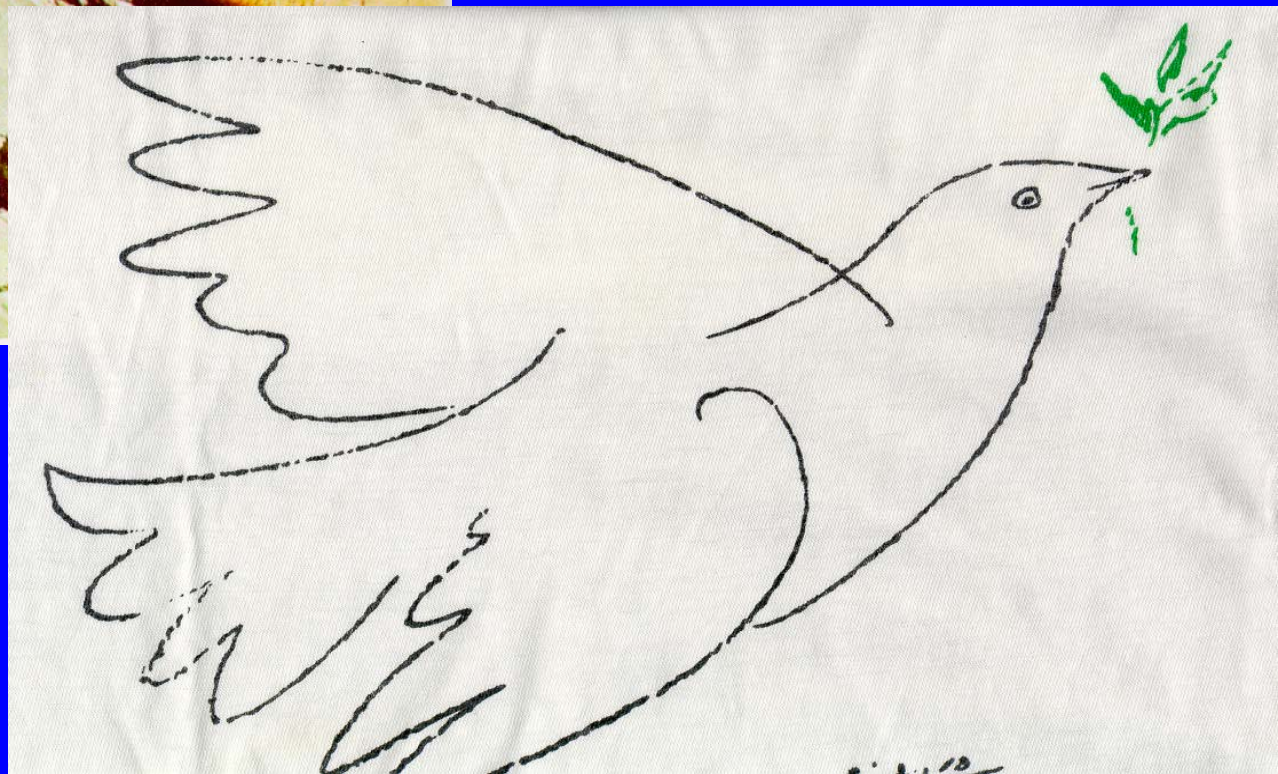
**Takoma Narrows (Washington, 1940)**

# El problema real = CLIMA: componentes externos e internos del sistema climático



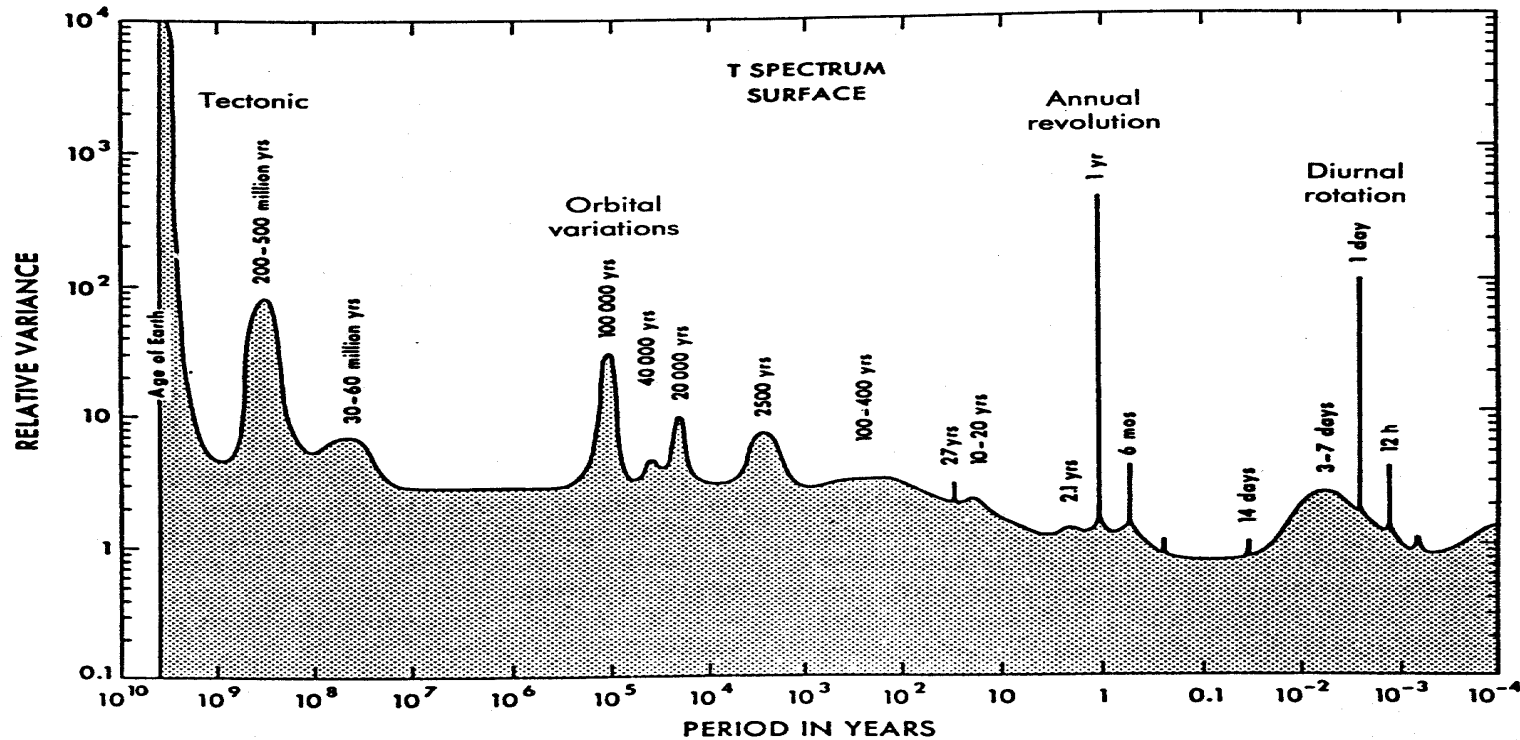
# Modelización.

## Proceso similar en el Arte



# Escalas temporales y espaciales: Jerarquía de Modelos

## Climatología / Meteorología



E  
c  
f  
i  
t  
t

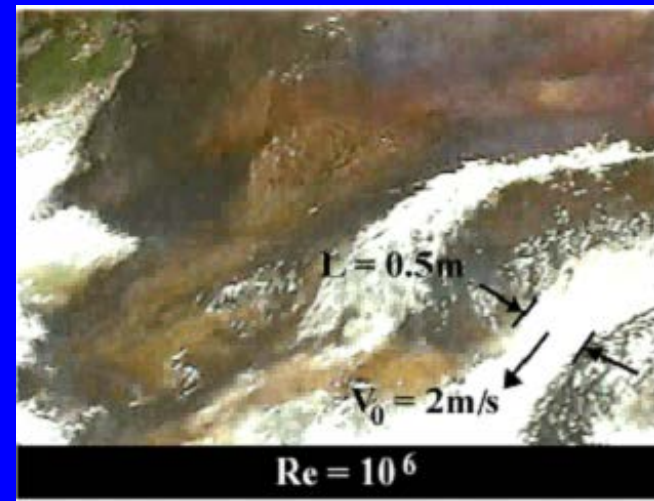
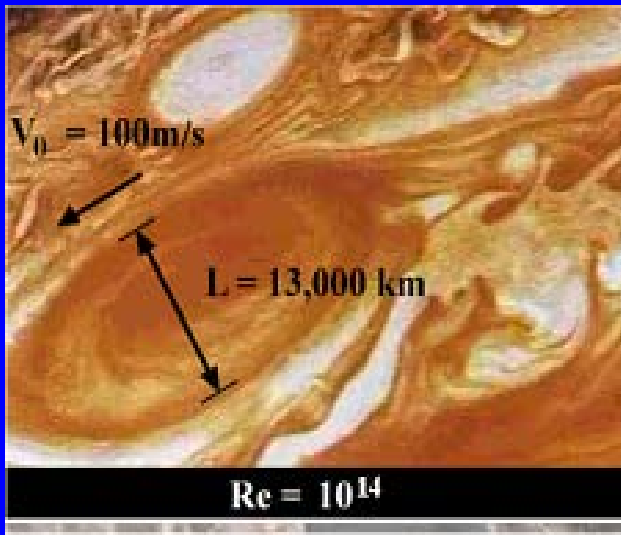
## Espectro de variaciones climáticas

# Importancia fundamental de las escalas

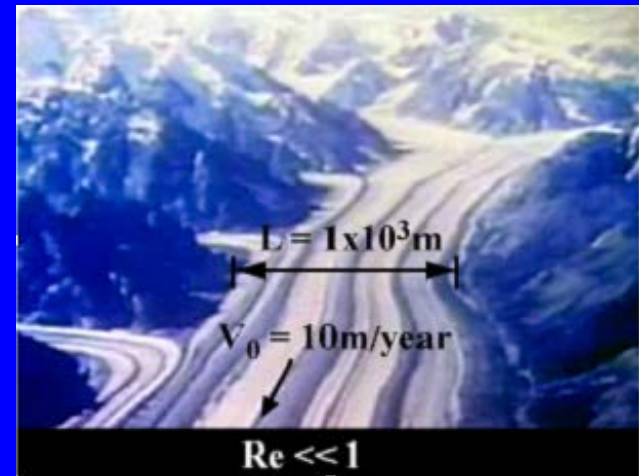
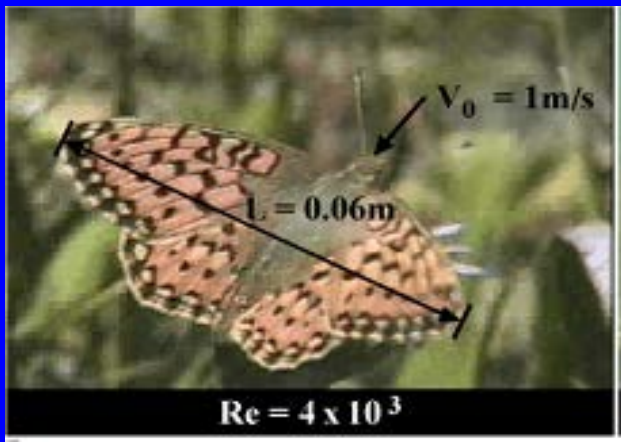
**Richard Feymann:**

**Peso/tensión superficial**

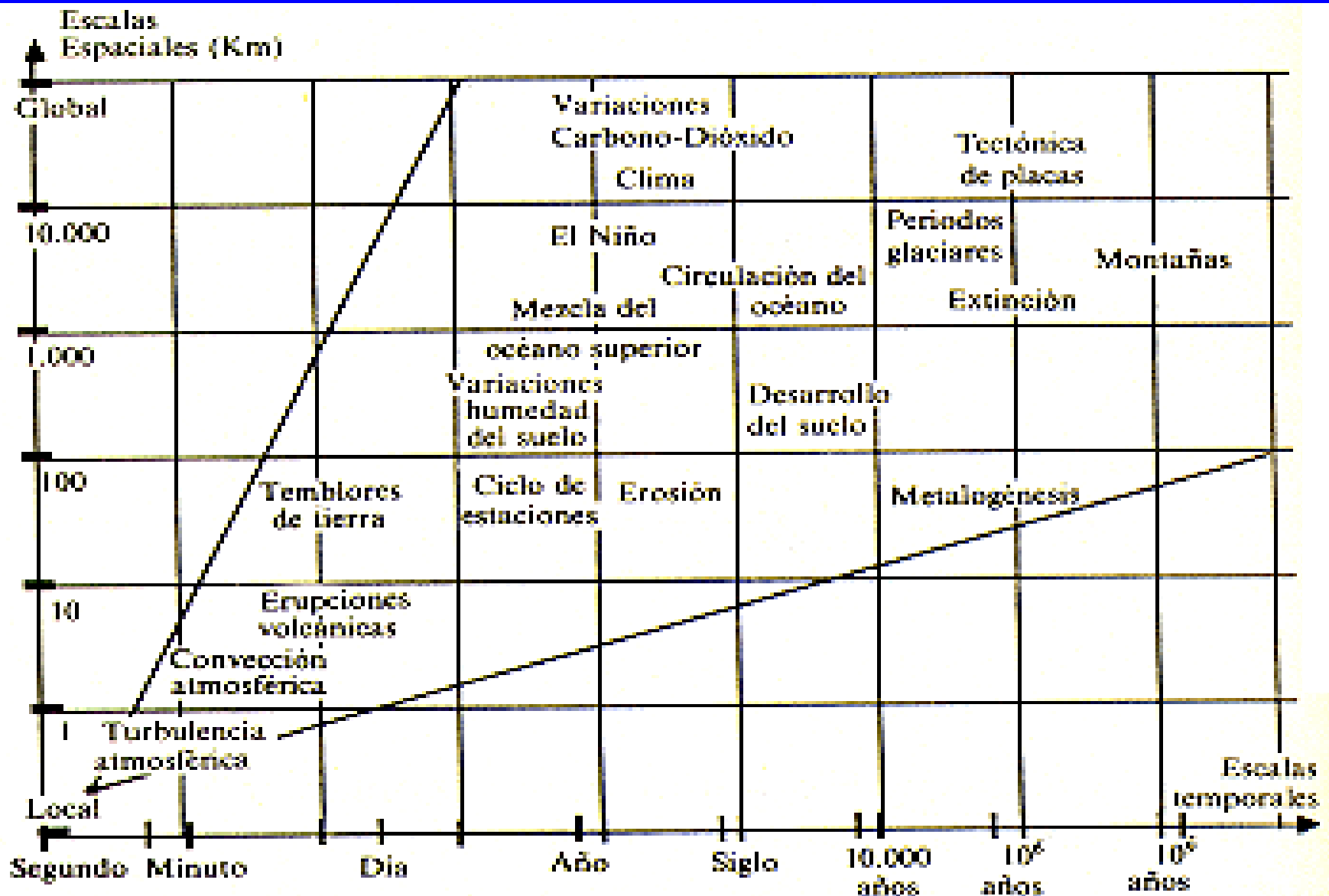




$$Re = \frac{VL}{\nu}$$



# Algunas escalas características





# Modelos globales / locales.

## Modelos globales de Balance de Energía.

**Clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider,1992)**

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

Predicción del tiempo  
meteorológico

Modelos climáticos

### **Pronóstico**

Modelos realistas

Métodos computacionales

### **Diagnóstico**

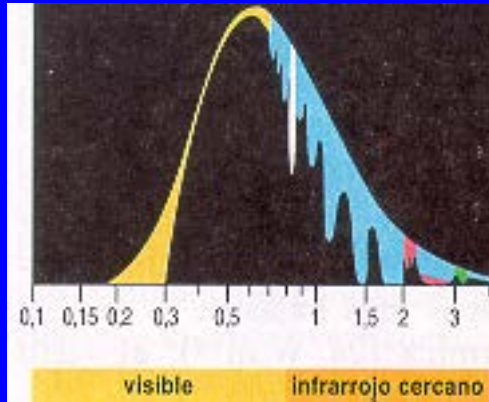
Modelos simplificados

Métodos cualitativos

# Balance de radiación de

S. Arrhenius (1896), ...

# energía



ers(1969),

yko (1969),....

$$R_a - R_e + D$$

$$R_a$$

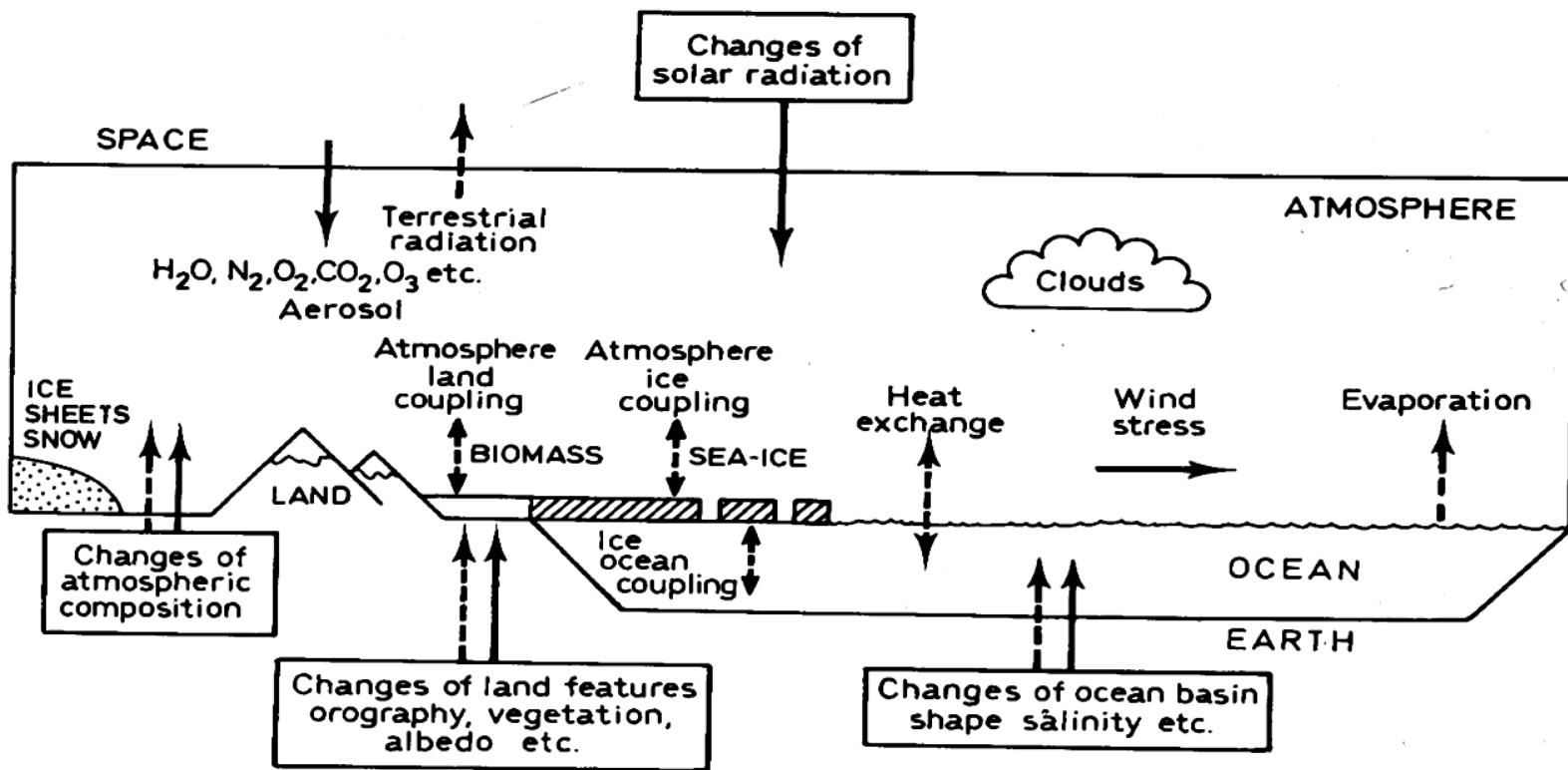
$R_e$   
Efecto invernadero

$$D$$

Albedo

Fuente: UNEP.

EL PAÍS



## DESEQUILIBRIO ENERGÉTICO DE LA TIERRA

LA ENERGÍA DE LA TIERRA está en equilibrio cuando el calor que emite es igual a la energía que recibe del Sol. En la actualidad, el balance de energía se ha desequilibrado (*diagramas y tabla*). Los aerosoles antropogénicos hacen que la Tierra refleje más energía solar, pero esta reflexión queda compensada de sobra por el calor radiante que los gases de invernadero aprisionan. La energía excedente —aproximadamente un watt por metro cuadrado— calienta el océano y funde los hielos. Las mediciones del calor almacenado en los océanos confirman el desequilibrio planetario de energía que aparece en las simulaciones (*gráfico*). El desequilibrio planetario de energía es una medida fundamental: determina la perturbación exógena neta y anticipa el calentamiento global ya en puertas.



<b>ENERGÍA SOLAR TOTAL INCIDENTE</b>	<b>340 W/m<sup>2</sup></b>
<b>ENERGÍA TOTAL SALIENTE</b>	<b>339 W/m<sup>2</sup></b>
<b>ENERGÍA REFLEJADA (por la atmósfera y la superficie)</b>	<b>101 W/m<sup>2</sup></b>
100 W/m <sup>2</sup> debido a procesos naturales	
1 W/m <sup>2</sup> debido a aerosoles antropogénicos	
<b>CALOR RADIADO (por el suelo y los sumideros oceánicos)</b>	<b>238 W/m<sup>2</sup></b>
240 W/m <sup>2</sup> debido a procesos naturales	
-2 W/m <sup>2</sup> a causa de gases antropogénicos de invernadero, que devuelven calor a la superficie	
<b>RESULTADO NETO</b>	<b>1 W/m<sup>2</sup></b>
1 W/m <sup>2</sup> de exceso de energía, que calienta los océanos y funde glaciares y capas de hielo	



2. LAS PERTURBACIONES CLIMATICAS EXOGENAS debidas a las actividades humanas, sobre todo las causadas por los gases de invernadero, calientan la superficie terrestre a razón de unos dos watt por metro cuadrado: el equivalente a dos bombillitas de un watt encendidas sobre cada metro cuadrado de la superficie del planeta. Los océanos retardan el efecto de ese calentamiento porque absorben gran cantidad de calor. La superficie oceánica empieza a calentarse, pero antes de que haya subido mucho su temperatura, las aguas superficiales se habrán ido hundiendo y mezclando, sustituidas por otras más frías, más profundas. Se calcula que se necesita alrededor de un siglo para que el océano alcance su nueva temperatura.



# Leyes de estado

$$R_a = QS(x)\beta(u)$$

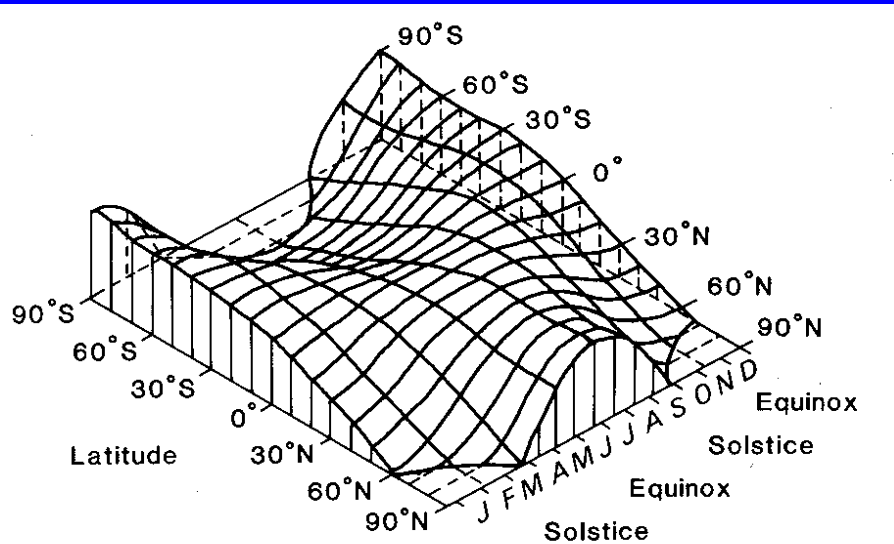
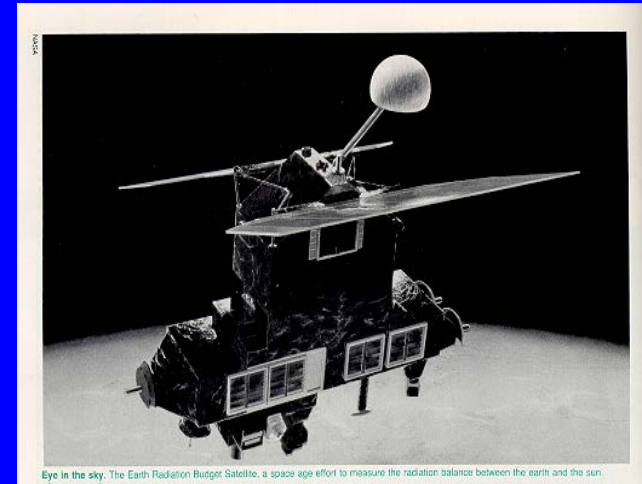


Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of

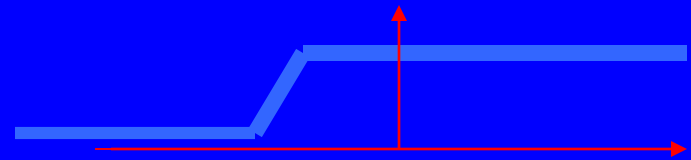
$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ coalbedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 & \text{si } u \ll -10 \\ 0.71 & \text{si } u \gg -10 \end{cases}$$

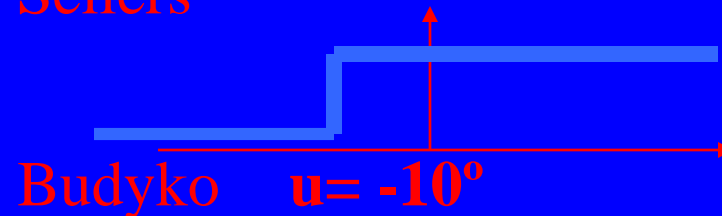


Earth Radiation Budget  
Satellite

Satélite (ESA) *Ingenio* (CDTI),...



Sellers



Budyko

$u = -10^\circ$

$R_e = \sigma u^4$  Ley de Stefan-Boltzman **Sellers**

$R_e = A + Bu$  Ley de enfriamiento de Newton **Budyko**

Relación empírica, Depende de gases de invernadero, cambios antropogénicos,... (variables internas)

## Sobre el operador de difusión $D$

### Jerarquía

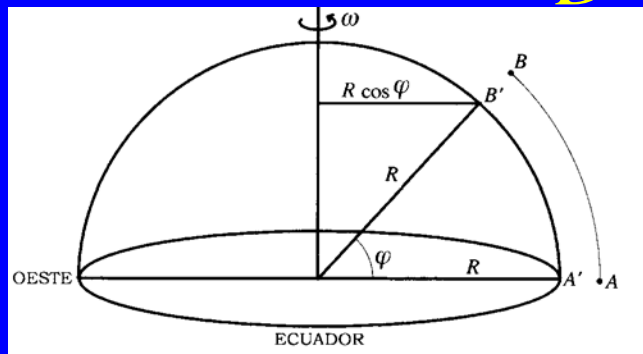
Modelo 0-dimensional  $D=0$

$$c \frac{du}{dt} = Q\beta(u) - R_e(u)$$

Modelo 1-dimensional

$$D = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(1-x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$x = \cos \varphi$$



# Difusión bidimensional

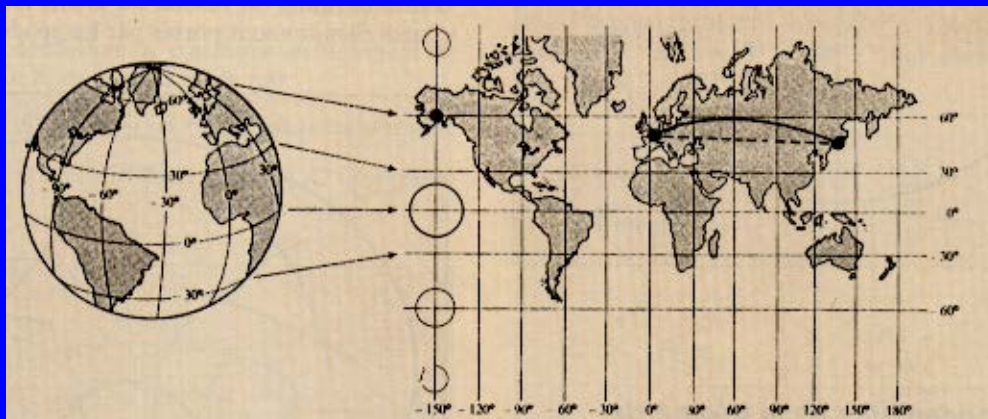
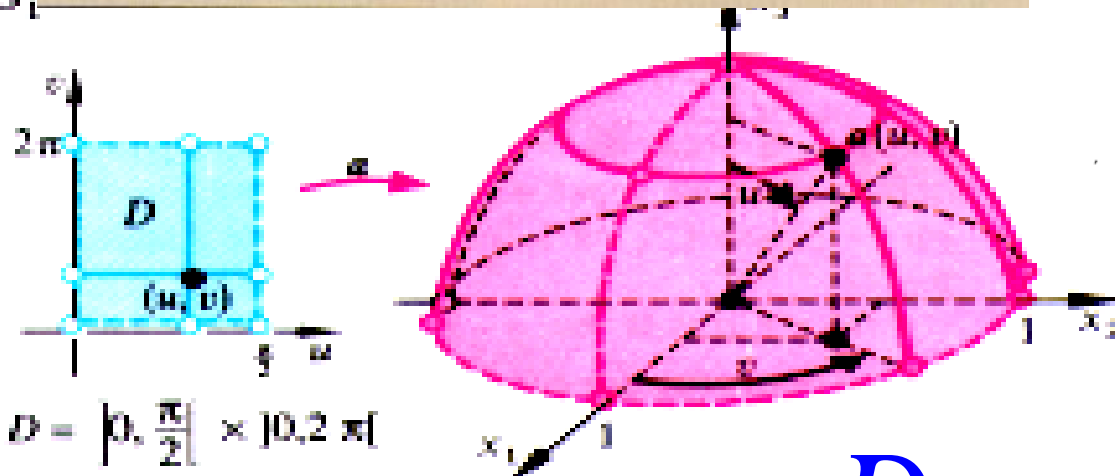
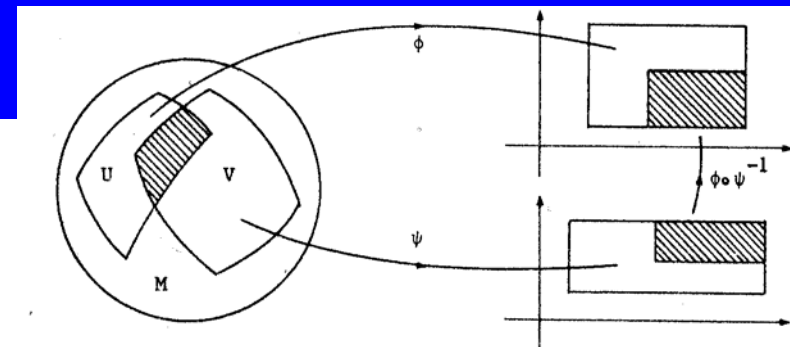
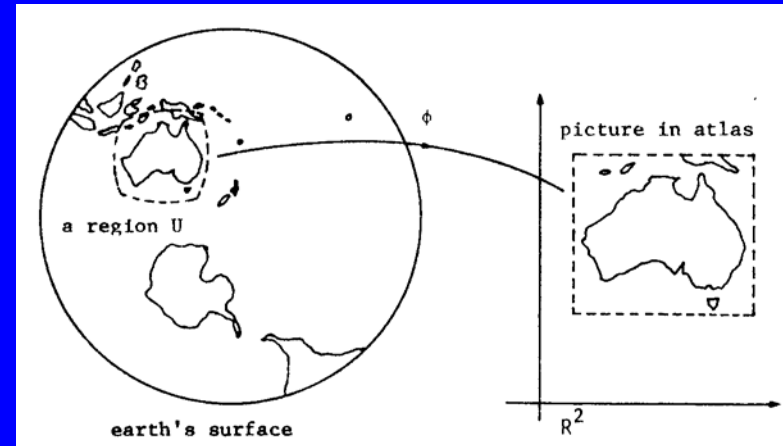


Figure 10 Projection de Mercator :  $(\varphi, \theta) \rightarrow (u = \varphi, v = \log(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})))$



$$D = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \times \left] 0, 2\pi \right[$$

$\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  déf. par  $(u, v) \mapsto \alpha$

$$\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

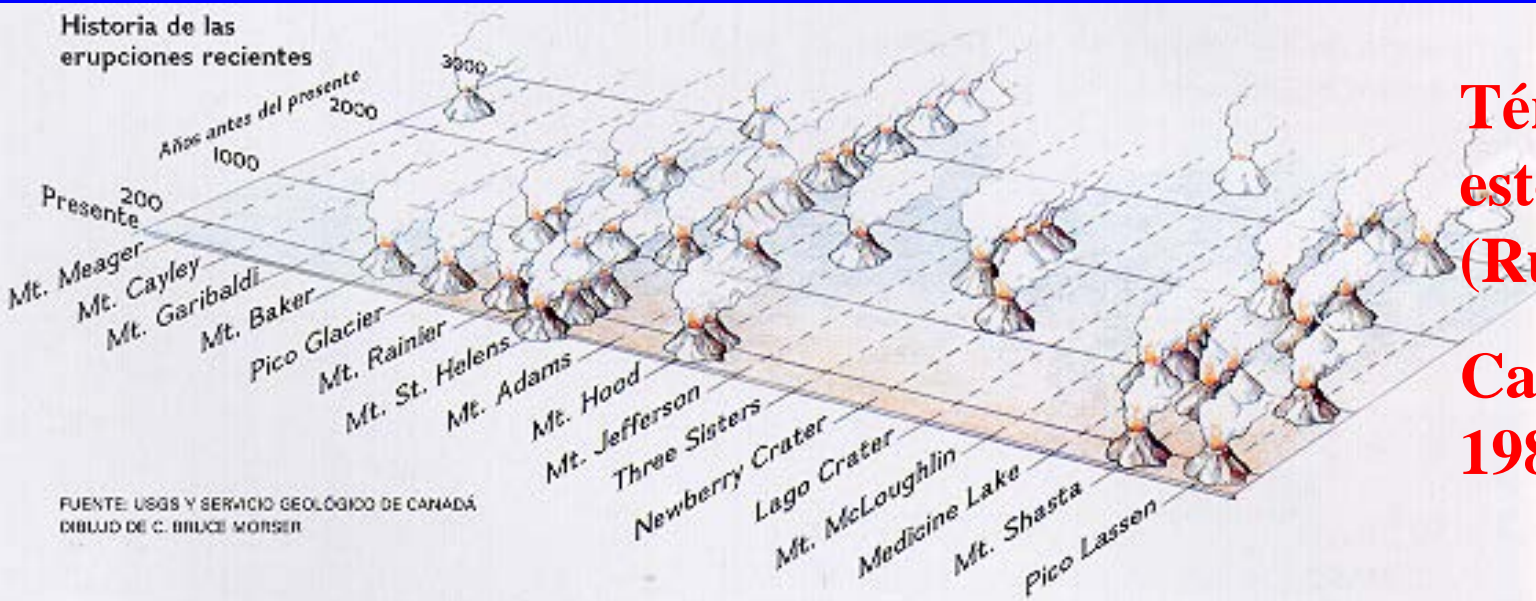
$$D = \operatorname{div}(k(x) \nabla u)$$



$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) + R_e(x, u) + \text{div}(k(x)\nabla u)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

# Modelos estocásticos : Volcanes



$R_e(x, u)$

**Término estocástico (Ruido blanco)**

**Cahalan-North, 1982**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} + Bu \in QS(x)\beta(u) + h(x) + \epsilon\phi \frac{dW_t}{dt}, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times \mathbb{R} \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (-1, 1), \end{array} \right.$$

$W_t$  is a two-dimensional scalar Wiener process in a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

# Modelos más complejos:

- Términos de retardo (promedios,...)
- Acoplamiento con las ecuaciones de de la energía interna del océano profundo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la dinámica de grandes masas de hielo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la Mecánica Celeste
- Acoplamiento con las ecuaciones del manto como medio visco-elástico
- Acoplamiento con modelos para la biosfera

- These climate EBM do not consider the effect of the deep ocean on the Earth surface temperature.
- Glacial–Holocene transition.
- Watts - Morantine [1990].

A model including the coupling surface/deep ocean.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{K_H}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( (1-x^2) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - K_V \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (0, T) \times \Omega, \\
 wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (0, T) \times \Gamma_H \\
 D \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{DK_{H0}}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \mathcal{G}(U) + f(x) + K_V \frac{\partial U}{\partial n} + wx \frac{\partial U}{\partial x} = \\
 = QS(x)\beta(x, U) \quad (0, T) \times \Gamma_0 \\
 (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (0, T) \times \Gamma_1 \\
 U(0, x, z) = U_0(x, z) \quad \Omega, \\
 U(0, x, 0) = u_0(x) \quad (-1, 1).
 \end{array} \right.$$

Unknowns: – surface temperature, – ocean temperature

The governing equation for the ocean interior:

$$U_t - \underbrace{\left(\frac{K_H}{R^2}(1-x^2)U_x\right)_x}_{\text{diffusion}} - K_V U_{zz} + \underbrace{wU_z}_{\text{vertical transport}} = 0 \quad (0, T) \times (-1, 1) \times (-H, 0),$$

where

$U$   $\equiv$  ocean temperature,

$K_V$   $\equiv$  vertical thermal diffusivity in the ocean,

$K_H$   $\equiv$  horizontal thermal diffusivity in the ocean,

$w$   $\equiv$  vertical velocity,

$R$   $\equiv$  Earth radius.

## Boundary conditions

▷ Energy balance on  $\Gamma_0$  :

$$DU_t - \frac{DK_{H_0}}{R^2} \left( (1-x^2)^{\frac{p}{2}} |U_x|^{p-2} U_x \right)_x + \mathcal{G}(U) + K_V \frac{\partial U}{\partial n} + wxU_x \in QS(x)\beta(U) + f$$

where

$\mathcal{G}(U) \equiv$  emitted energy by cooling (Newton),

$D \equiv$  depth of the mixed layer,

$K_{H_0} \equiv$  horizontal thermal diffusivity in the mixed layer,

$w \equiv$  vertical velocity,

$S(x) \equiv$  insolation,

$\beta \equiv$  coalbedo function,

$Q \equiv$  solar constant.

▷ At the ocean bottom  $\Gamma_H$

$$wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_H$$

**Initial conditions:**

$$U(x, z, 0) = U_0(x, z) \quad \text{on } (-1, 1) \times (-H, 0),$$

$$U(x, 0, 0) = u_0(x) \quad \text{on } (-1, 1),$$

# Teoría de las Glaciaciones de Milankovitch (1879-1958)



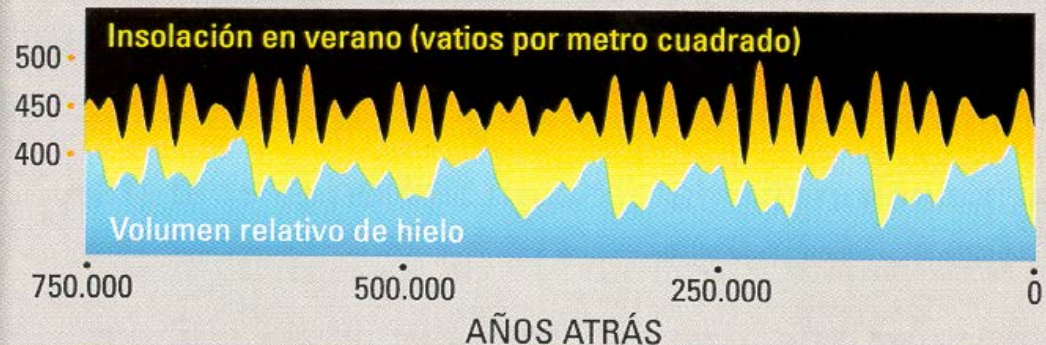
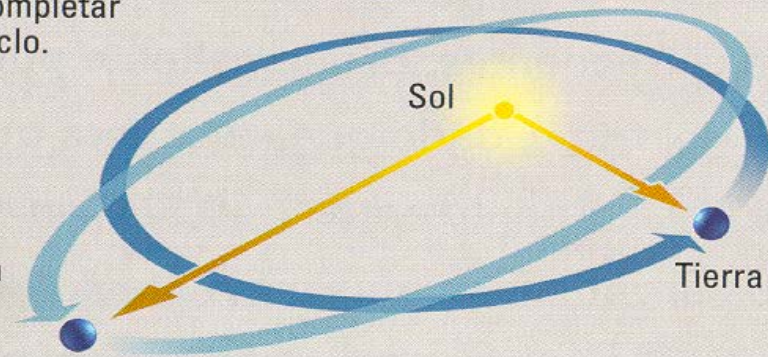
- \*irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,
- \*cálculo de tablas de gran precisión.
- \*estimaciones globales sobre la evolución de lo que él llamó *el clima matemático*

## CICLOS DE MILANKOVITCH



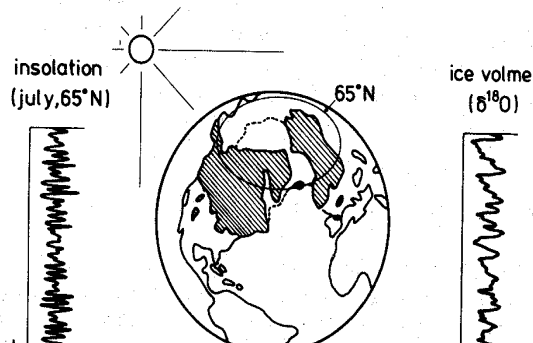
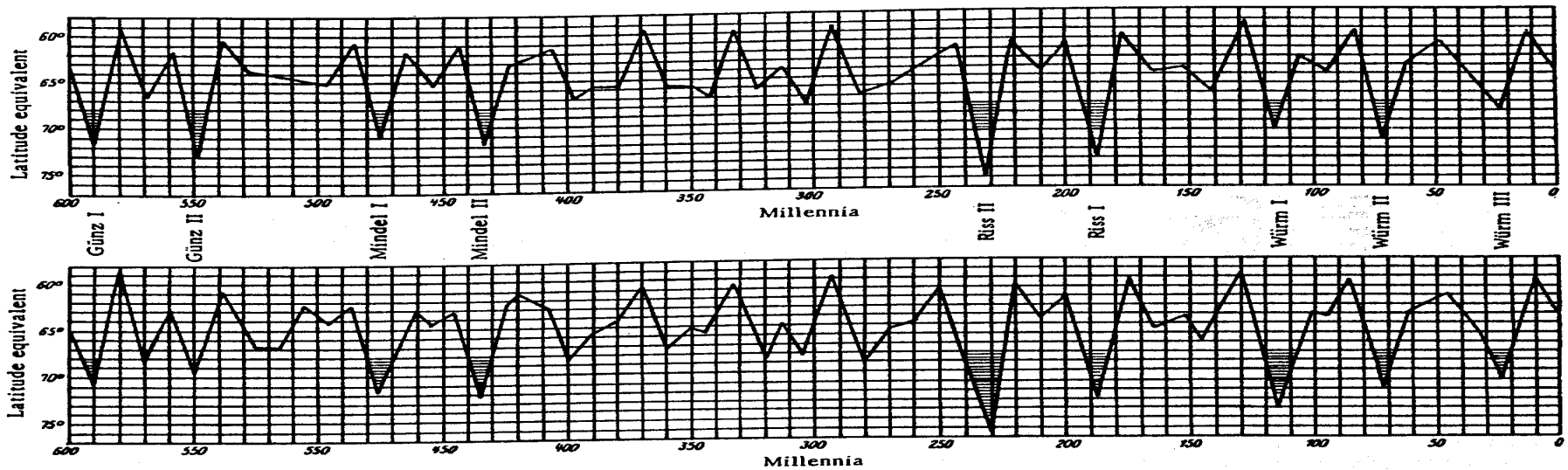
Una oscilación como de peonza del eje de la Tierra crea un ciclo de 23.000 años.

Las variaciones en la órbita de la Tierra alrededor del Sol siguen un ciclo de 100.000 años.





# Curvas de radiación de Milankovitz



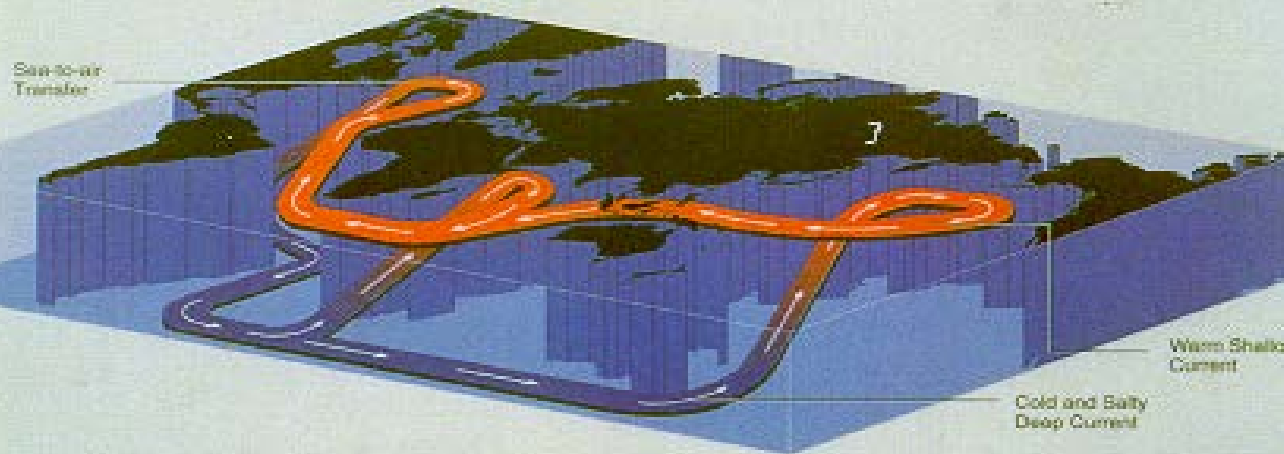
## Condiciones para Glaciación

Veranos, Hem.Norte

¿Hemisferio Sur?

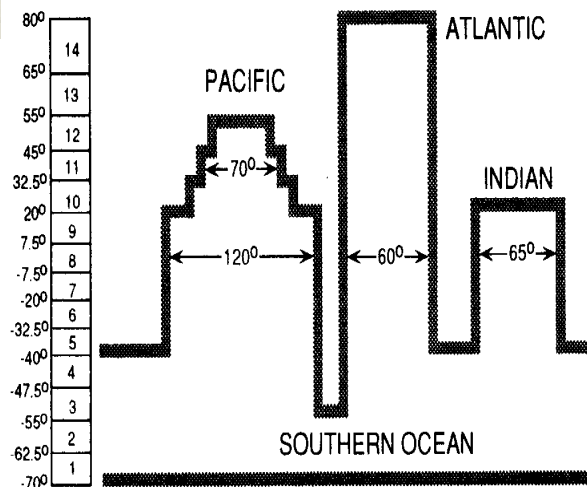
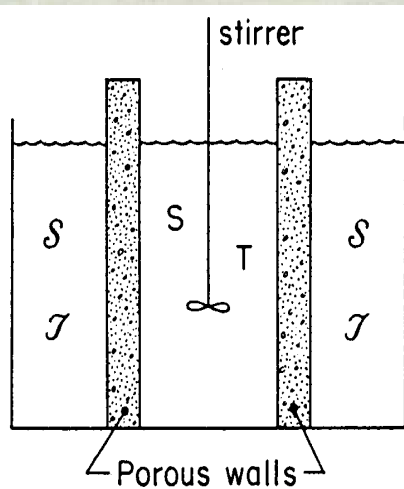
¿Glaciares de montaña hacia el Sur?

# Modelos de salinidad oceánica



$$\frac{dT}{dt} = c(T - T)$$

$$\frac{dS}{dt} = d(S - S)$$



Broecker-Denton(1989)

Stommel (1961)

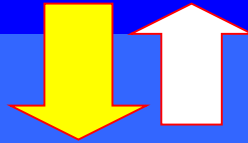
Rahmstorf (1995),

D(2006)

# La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

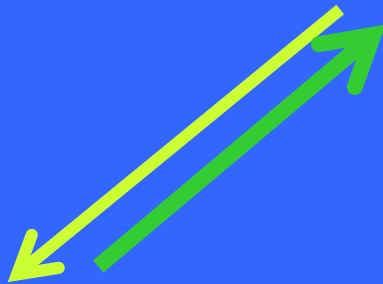
**Sistema real**

Predicción



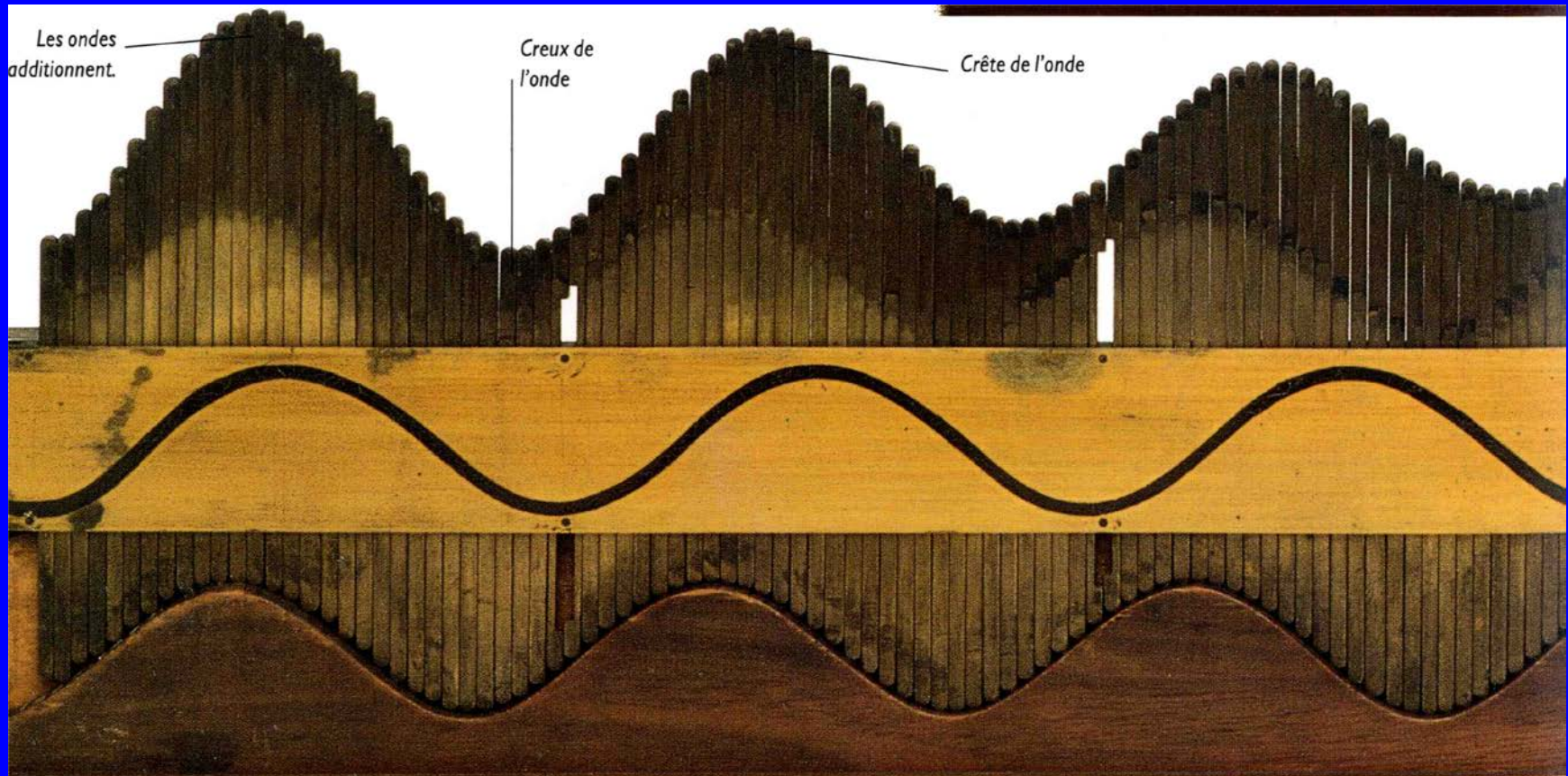
**Modelos  
matemáticos**

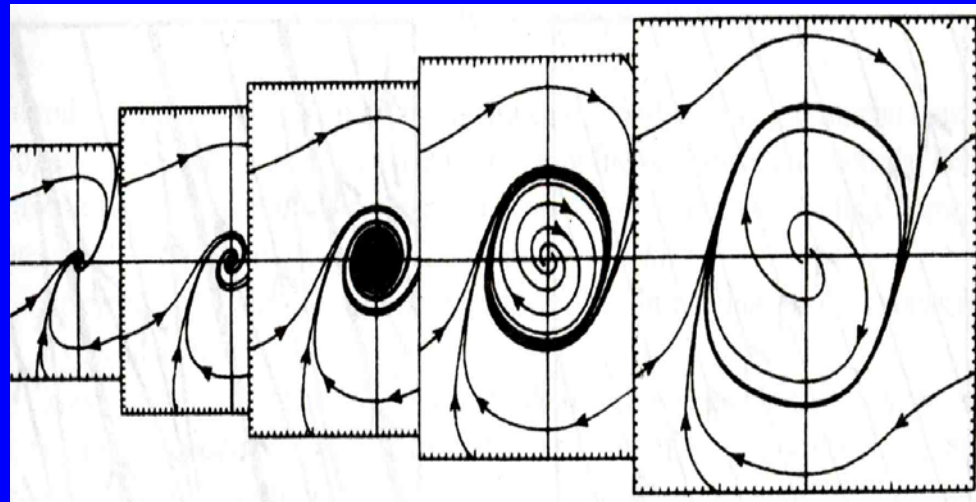
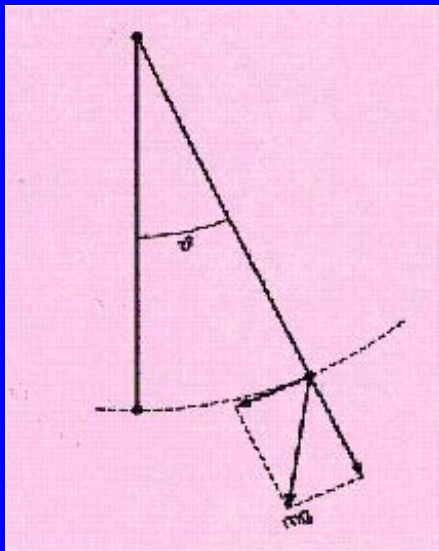
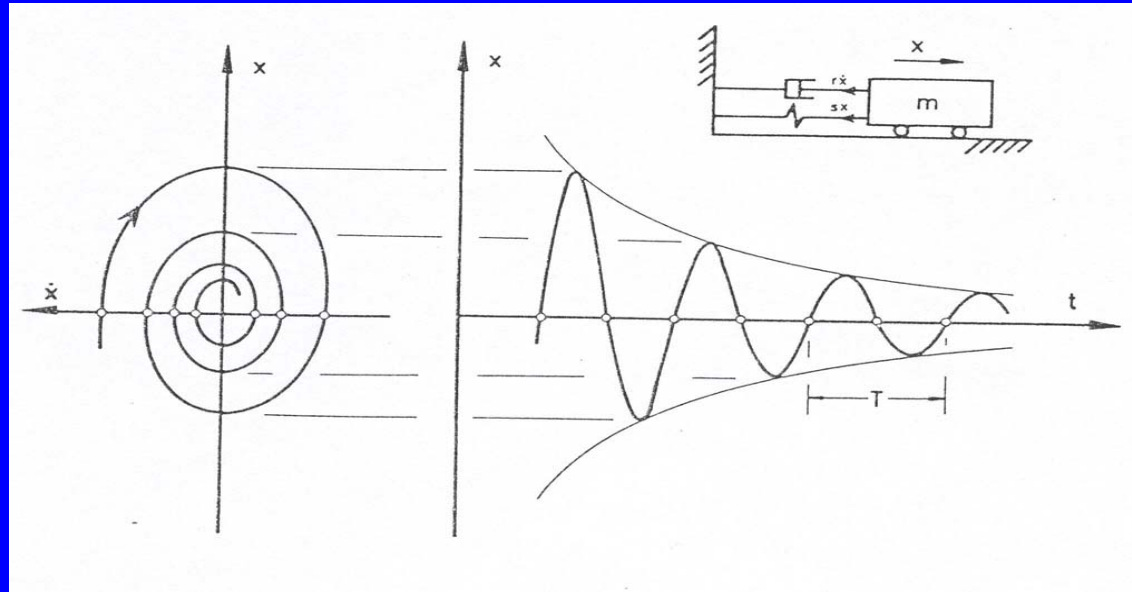
**Análisis  
matemático**



# Análisis matemático de los modelos

## Modelos Lineales / no lineales





## Two-dimensional EBM (formulation on manifolds).

$$\begin{cases} c(x)u_t - \operatorname{div}(k(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f \text{ on } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ on } \mathcal{M} \end{cases}$$

- $\mathcal{M}$  is a  $C^\infty$  2-D connected compact oriented Riemannian manifold without boundary.
- $p \geq 2$ ,  $Q > 0$ ,
- $\beta$  is a bounded maximal monotone graph of  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous and increasing function such that  $\mathcal{G}(0) = 0$ , and  $|\mathcal{G}(\sigma)| \geq C|\sigma|^r$  for some  $r \geq 1$ ,
- $S \in C^1(\mathcal{M})$ ,  $0 < S_2 \leq S(x) \leq S_1$ ,  $f \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$ ,
- $c \in L^\infty(\mathcal{M})$ ,  $c(x) \geq c_0 > 0$ ,  $k \in C(\mathcal{M})$ ,  $k(x) \geq k_0 > 0$ ,

## Some functional spaces on manifolds

$L^p(\mathcal{M}) := \{u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable, } \int_{\mathcal{M}} |u|^p dA < +\infty\},$   
 $1 < p < \infty$ , where

$$dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \sqrt{\det g^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

$$\int_{\mathcal{M}} |u|^p dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda |u(\mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda))|^p \sqrt{\det g^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

$L^\infty(\mathcal{M}) := \{u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable, } \text{ess sup}_{\mathcal{M}} |u| < \infty\}$

$L^p(T\mathcal{M}) := \{X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} : \int_{\mathcal{M}} | \langle X, X \rangle |^{\frac{p}{2}} dA < +\infty\}$

$$X = X_1 \mathbf{e}_\theta + X_2 \mathbf{e}_\varphi, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = g(\cdot, \cdot).$$

$$V = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla u \in L^p(T\mathcal{M})\}, \quad p \geq 2$$

reflexive Banach space

$$\|u\|_V = \|u\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})}.$$

Let  $\mathcal{M}$  be a 2-D compact Riemannian manifold. Then the following **continuous imbedding** holds:

$$\text{if } p = 2, \quad V \hookrightarrow L^q(\mathcal{M}), \quad \forall q \in [2, \infty),$$

$$\text{if } p > 2, \quad V \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{M}).$$

If  $2 \leq p < \infty$  then the imbedding  $V \subset L^2(\mathcal{M})$  is compact.

- For any  $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$ , there exists at least a bounded weak solution  $u \in L^2((0, \infty); V)$ ,

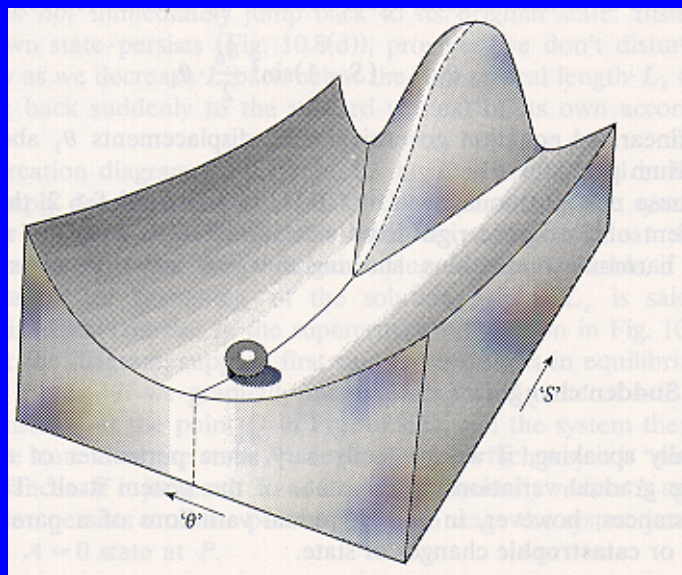
$$V = \{v \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla v \in L^p(T\mathcal{M})\}.$$



- 2-D,  $p \geq 2$ ,
  - ▷  $\beta$  Lipschitz function (Sellers): **uniqueness** (by standard methods for nonlinear parabolic equations). Uniqueness.
  - ▷  $\beta$  multivalued in  $u = -10$ : **Nonuniqueness**. Uniqueness of non-degenerate solutions.

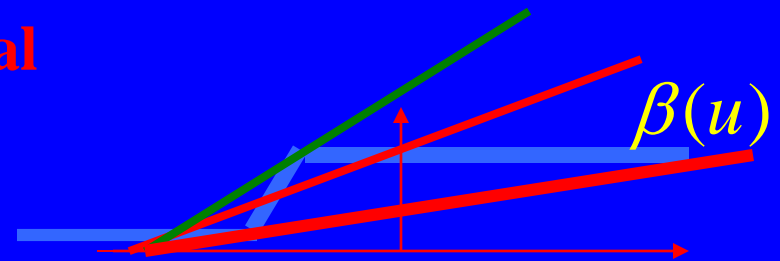
**Stabilization** of solutions as  $t \rightarrow \infty$  to a solution of the stationary problem.

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f_\infty \text{ on } \mathcal{M}.$$

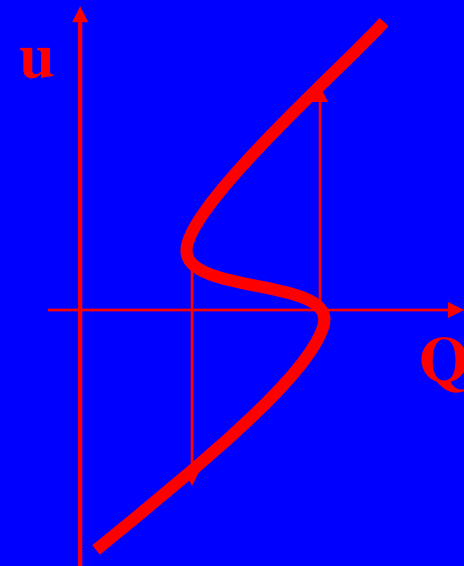


# Bifurcación e Histéresis en 0-d

Equilibrios del Modelo 0-dimensional



$$A + Bu = Q\beta(u)$$



Existence of at least **three solutions** if  $Q$  is in a bounded interval.  
Uniqueness of solution for  $Q$  small or big enough.

Existence of an unbounded connected **S-shaped set**  $\{(Q, u)\}$ .

existence of a global attractor for the multivalued case.

- Study the existence of infinitely many solutions of a one-dimensional model,

$$(P) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' + \mathcal{G}(u) + C \in Q\beta(u) & x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

- The coalbedo function  $\beta$  is multivalued.
- $Q \in (Q_1, Q_2)$ .

The Edge of the Glacier = Free Boundary of the Glacier Flow

**Las frontera libres**



Para todo  $t \in [0, t_{\text{máx}}]$ , encontrar el conjunto  $\Gamma_0(t) = (S_-(t), S_+(t)) \subset (-1, 1)$  y la función

$$\eta : \mathcal{Q} = \bigcup_{t \in [0, t_{\text{máx}}]} \Gamma_0(t) \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que :

$$\frac{D\eta}{Dt} \geq \frac{e^{-\gamma}}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta^{n+2}}{n+2} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \quad \text{en } \mathcal{Q}$$

$$\eta \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}$$

(48)

$$\left( \frac{D\eta}{Dt} - \frac{e^{-\gamma}}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta^{n+2}}{n+2} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a \right) \eta = 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}$$

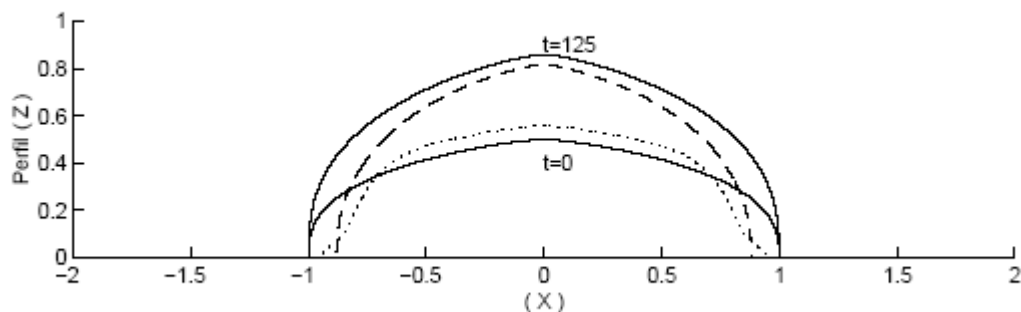
$$\eta = 0 \quad \text{en } \{S_-(t)\} \cup \{S_+(t)\}, \quad t \in (0, t_{\text{máx}}); \quad \eta(0, x) = \eta_0(x) \quad \text{en } (-1, 1),$$

donde se ha utilizado para la derivada material respecto de la velocidad de deslizamiento basal,  $u_b$ , la notación

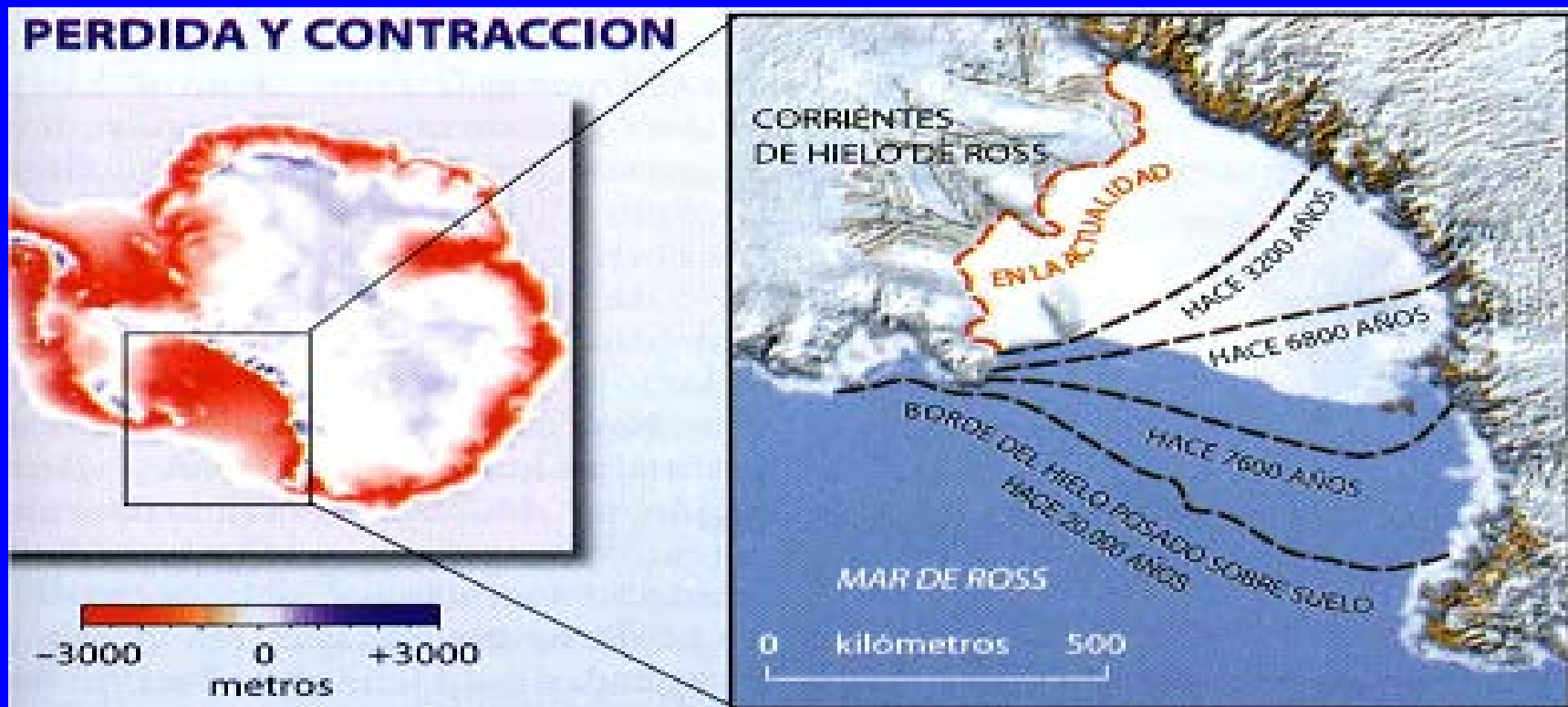
$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_b \eta). \quad (49)$$

Además, la función  $a$  representa la tasa de acumulación-ablación.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D}{Dt} \left( u^{3/8} \right) - \mu \left( |u_x|^2 u_x \right)_x - a \geq 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\ \left[ \frac{D}{Dt} \left( u^{3/8} \right) - \mu \left( |u_x|^2 u_x \right)_x - a \right] u = 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } (0, t_{\text{máx}}) \times \partial\Omega \\ u = u_0(x) = \eta_0^{8/3}(x) & \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$



# Movimiento de la frontera libre en EBM



EL CAMBIO DEL ESPESOR de los hielos desde el último período glacial (*arriba, izquierda*) ha supuesto una pérdida (*rojo*) de unos 5,3 millones de kilómetros cúbicos, en gran parte en la Antártida Occidental. El borde de la capa de hielo que toca fondo marino ha retrocedido con particular rapidez en el mar de Ross (*detalle, a la derecha*) a lo largo de los últimos 7000 años; se ha retirado unos 700 kilómetros hacia el interior del continente.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u \in a \mathbf{H}(u - \mu) \quad \text{in } D_T, \\ u = \phi \quad \text{on } S_T, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \end{array} \right.$$

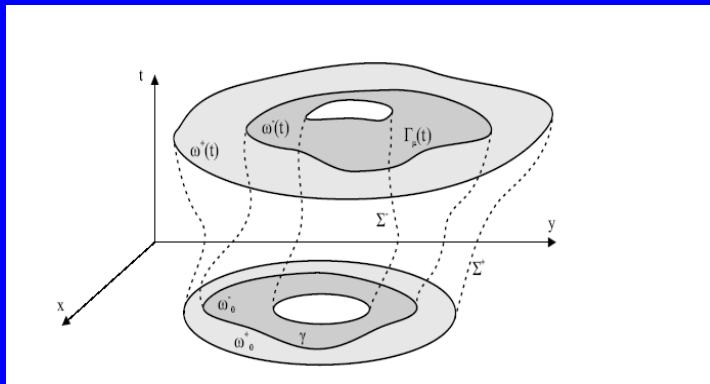
Let  $\Omega \in \mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , be a ring-shaped domain with the exterior boundary  $\partial_e \Omega$

and the interior boundary  $\partial_i \Omega$ ,  $\partial_i \Omega \cap \partial_e \Omega = \emptyset$ . Given  $T > 0$ , we denote by  $D_T$  the

cylinder  $D_T = \Omega \times (0, T]$  with the “lateral boundary”

$$S_T = \{\partial \Omega_e \times (0, T]\} \cup \{\partial \Omega_i \times (0, T]\}$$





$$\mathbf{H}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0, \\ [0, 1] & \text{if } s = 0, \\ 0 & \text{if } s < 0. \end{cases}$$

The main goal of this paper is to study the dynamics and regularity of the level set  $\Gamma_\mu$  which separates the regions

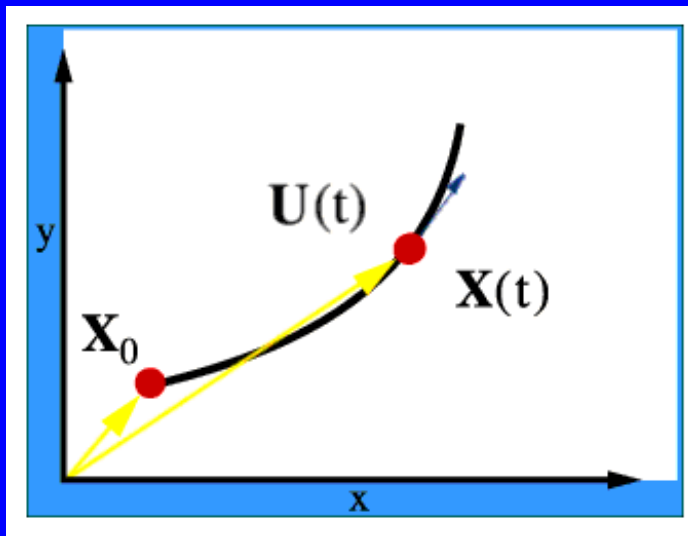
$$D_T^+ = \{(\mathbf{x}, t) \in D_T : u(\mathbf{x}, t) > \mu\} \quad \text{and} \quad D_T^- = \{(\mathbf{x}, t) \in D_T : u(\mathbf{x}, t) < \mu\}.$$

We want to answer the following questions:

1. What are the topological and regularity properties of the level set  $\Gamma_\mu$ ?
2. Given the initial function  $u_0$ , how does  $\Gamma_\mu$  start moving at the time  $t = 0$ ?
3. Is it possible to characterize the evolution of  $\Gamma_\mu$  in terms of the solution  $u$  and its derivatives?

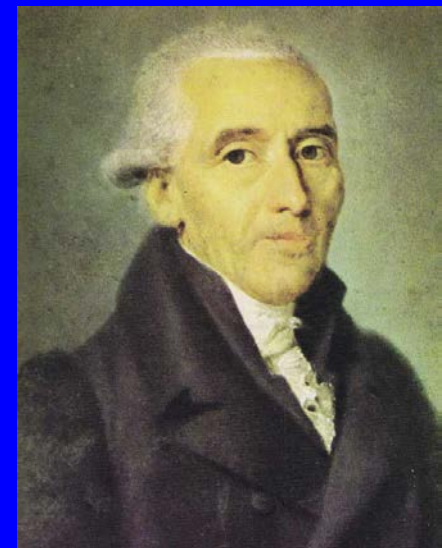
Our study of the level set  $\Gamma_\mu$  is based on the introduction of a system of Lagrangian coordinates frequently used in Continuum Mechanics. Every positive solution of problem (3) can be formally considered as a solution of the problem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div} (u \nabla \ln u) + a h_u & \text{in } D_T, \\ u = \phi \text{ on } S_T, \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (7)$$



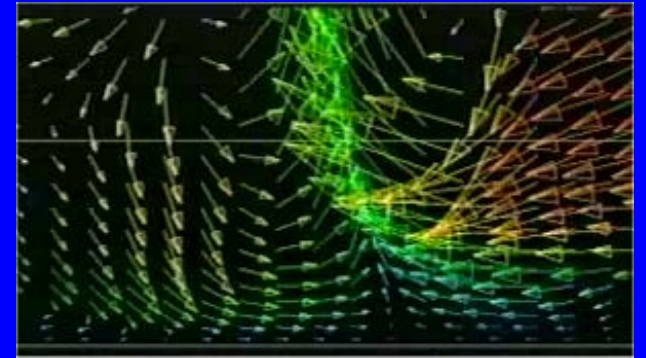
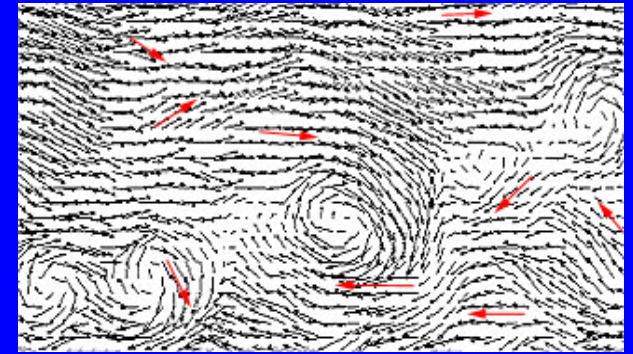
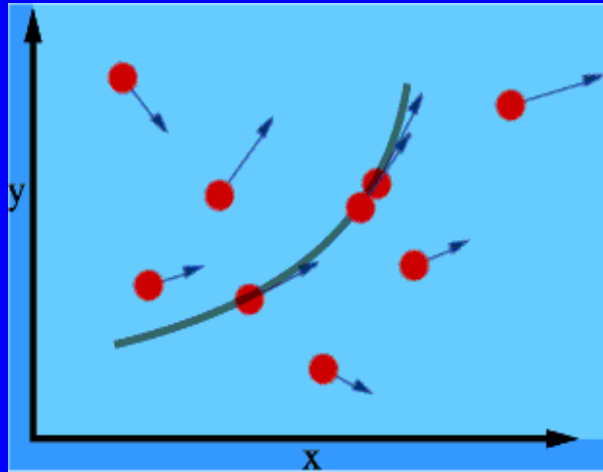
$$\mathbf{U}(t; \mathbf{X}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)}{\partial t}$$

$$\mathbf{a}(t; \mathbf{X}_0) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)}{\partial t^2}$$



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

# Descripción espacial o Euleriana



**Leonhard Euler (1707-1783)**

**Theorem 4.** *Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. There exists a function  $U(\mathbf{y}, t)$  such that  $U \in W^{4,q}(\omega_0^\pm \times (0, T))$ ,  $U_t \in W^{2,q}(\omega_0^\pm \times (0, T))$ , and the surface  $\Gamma_\mu(t)$  is parametrized by the bijective mapping*

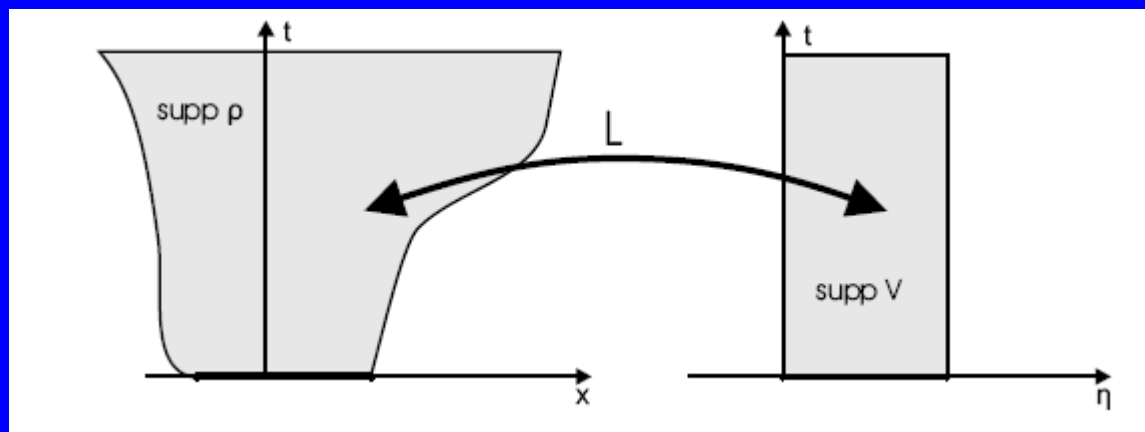
$$\gamma \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{y} + \nabla U(\mathbf{y}, t) \in \Gamma_\mu(t).$$

*The velocity of advancement of the surface  $\Gamma_\mu(t)$  in the normal direction is given by the formulas*

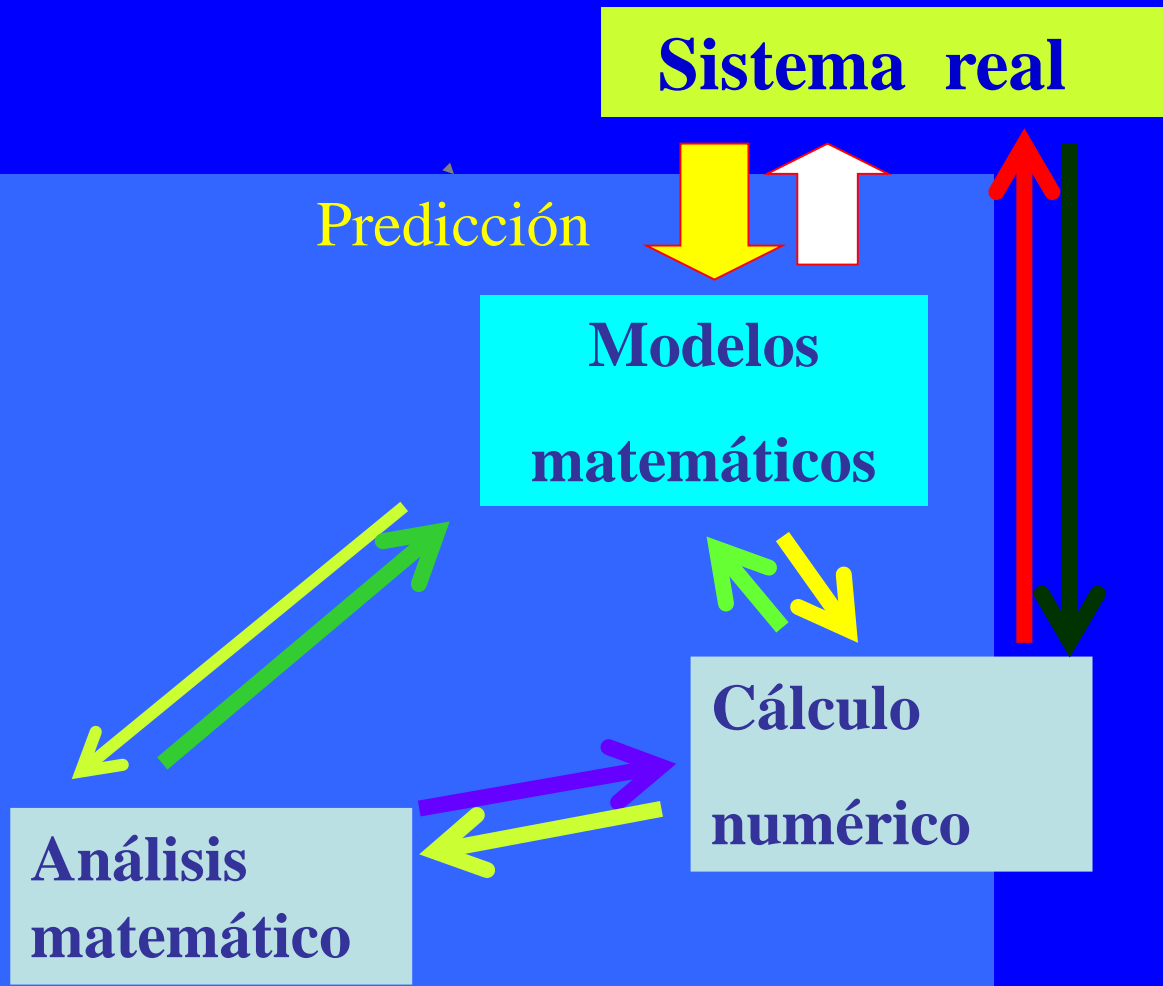
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\omega^\pm(t) \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_\mu(t)} \left[ |\nabla \ln u| - \frac{\nabla p \cdot \nabla u}{|\nabla u|} \right] = \nabla_{\mathbf{y}} U_t(\mathbf{y}, t)|_\gamma \cdot \mathbf{n},$$

*where  $\mathbf{n}$  denotes the unit normal to  $\Gamma_\mu(t)$ . Moreover, if  $u_0 \in C^2(\Omega^\pm)$  and  $\partial\omega_0^\pm \in C^2$ , then the surface  $\gamma$  starts moving with normal velocity  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{n}$ , where  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$  is given by (11) and the function  $p \equiv p_0$  is a solution of the problem*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(u_0 \nabla p_0) + a \mathbf{H}(u_0 - \mu) = 0 \quad \text{in } \omega_0^+ \cup \omega_0^-, \\ [\nabla p_0 \cdot \mathbf{n}]|_\gamma = [\nabla \ln u_0 \cdot \mathbf{n}]|_\gamma, \\ \nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = |\nabla \ln u_0| - \frac{\Delta u_0 + a}{|\nabla u_0|} \quad \text{on } \partial \omega_0^+, \\ \nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = |\nabla \ln u_0| - \frac{\Delta u_0}{|\nabla u_0|} \quad \text{on } \partial \omega_0^-. \end{array} \right.$$



# La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada

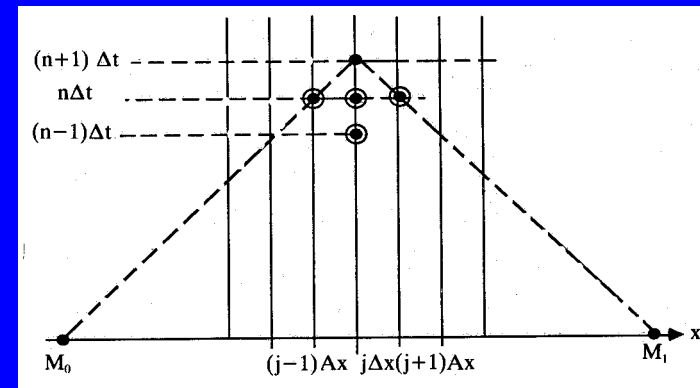
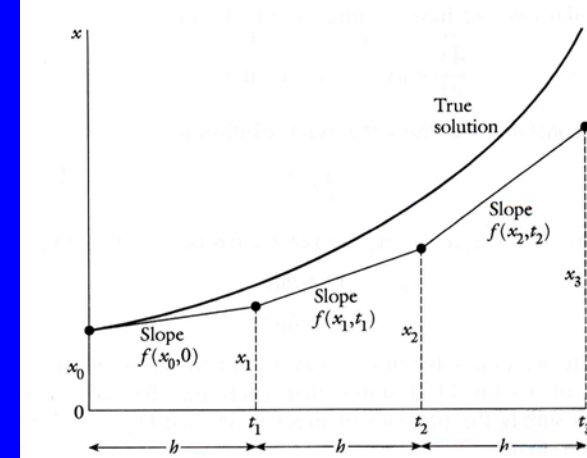


# Modelos discretos

## •Diferencias finitas

- En tiempo
- En espacio
- En ambas variables

## Diferencias finitas espaciales



$$N > 1 \text{ nodos}$$

$$x_i = -1 + (i - 1)h$$

$$h = \frac{2}{N-1}$$

$$y_i(t) \approx y(t, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$y_{xx}(t, x_i) \approx \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{h^2}$$

$$y_x(t, x_N = 1) \approx \frac{y_{N+1}(t) - y_N(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_{N+1} = y_N$$

$$y_x(t, x_1 = -1) \approx \frac{y_1(t) - y_0(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_1 = y_0$$

$$y_i(0) = y(0, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - k \frac{y_2 - y_1}{h^2} = R_a(-1, y_1, v) - R_e(-1, y_1), & i = 1, \\ \dot{y}_i - k \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = R_a(x_i, y_i, v) - R_e(x_i, y_i), & i = 2, \dots, N-1, \\ \dot{y}_N - k \frac{y_N - 1 - y_N}{h^2} = R_a(1, y_N, v) - R_e(1, y_N), & i = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))^T \in \mathbb{R}^N \quad v(t) \in \mathbb{R}$$



$$(P_h) \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) + A_N \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}_a(\mathbf{y}(t), v(t)) - \mathbf{R}_e(\mathbf{y}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

$$A_N = \frac{k}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N \times N}$$

simétrica y definida positiva



# •Elementos finitos

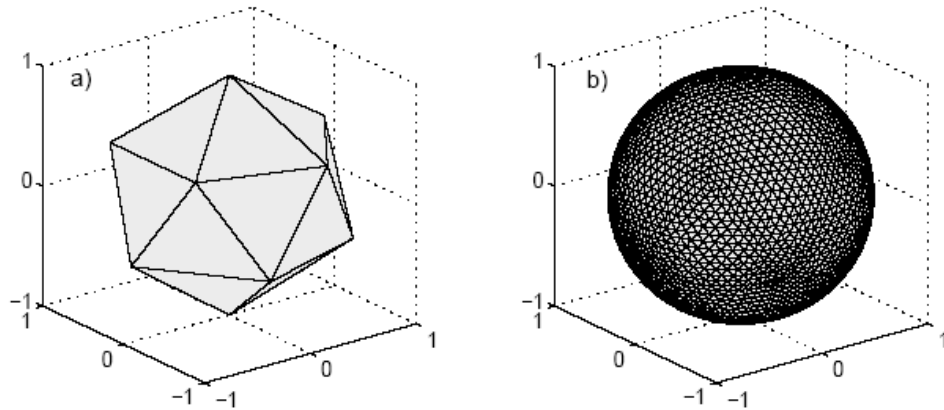


Figure 1: Initial Icosahedron and mesh after 4 refinements.

$$\mathcal{M}_h := \cup_j \Omega_j, \quad \Omega_j \in \mathcal{D}_{hk}.$$

$$\phi : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}$$

$$\hat{V}_h = \{\hat{v}_h \in C^0(\mathcal{M}_h) : \hat{v}_h|_{\Omega_j} \in P_1(\Omega_j), 1 \leq j \leq N_k\},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a\hat{x}}{\sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + (z\hat{x})^2}} \\ \frac{a\hat{y}}{\sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + (z\hat{x})^2}} \\ \frac{a\hat{z}}{\sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + (z\hat{x})^2}} \end{pmatrix}$$

$$(P_{h,\Delta t}) \begin{cases} \int_{\mathcal{M}} c \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} v_h dA + \int_{\mathcal{M}} \langle k \nabla_{\mathcal{M}} U^n, \nabla_{\mathcal{M}} v_h \rangle dA + \\ \int_{\mathcal{M}} (BU^n + C)v_h dA = \int_{\mathcal{M}} QS^n Z^n v_h dA + \int_{\mathcal{M}} f^n v_h dA, \end{cases}$$

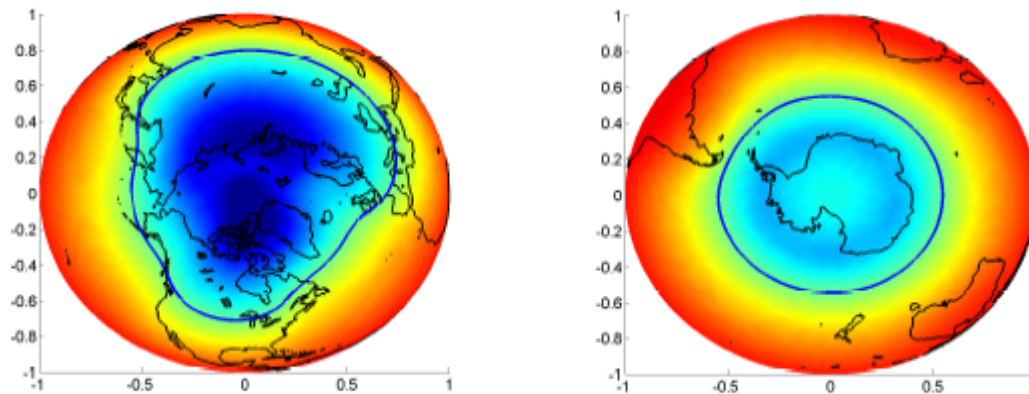
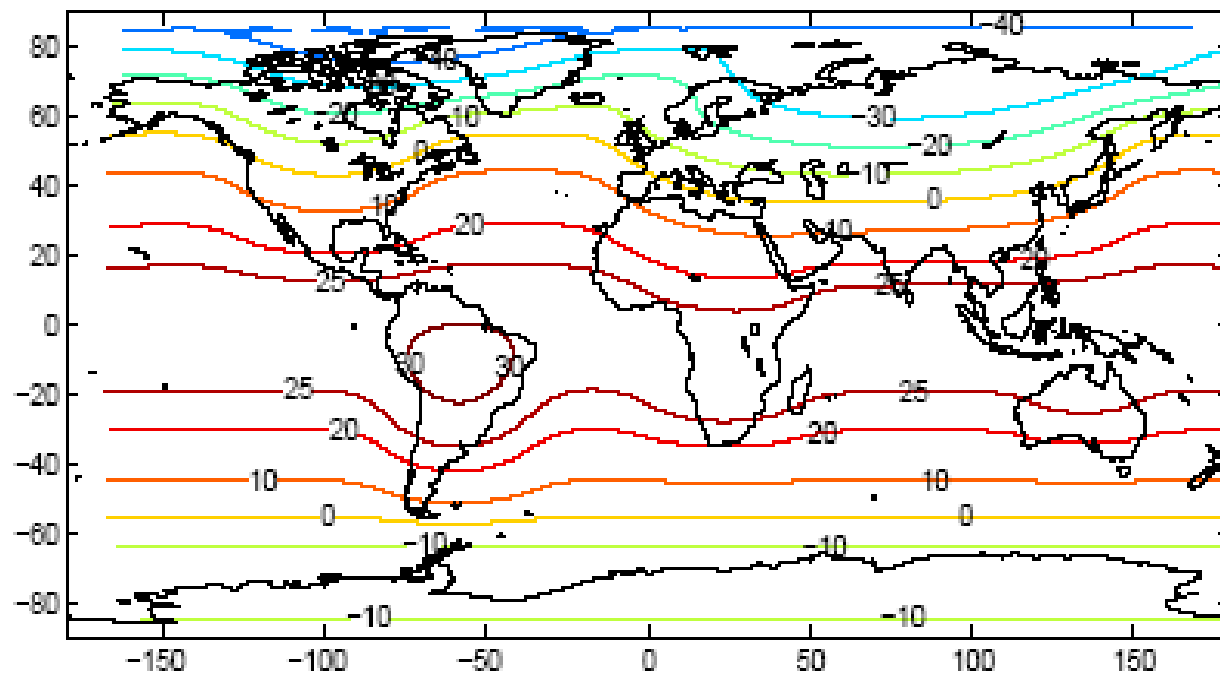


Figure 4:  $-2^{\circ}\text{C}$  January snow line. Left: northern hemisphere; right: southern hemisphere .

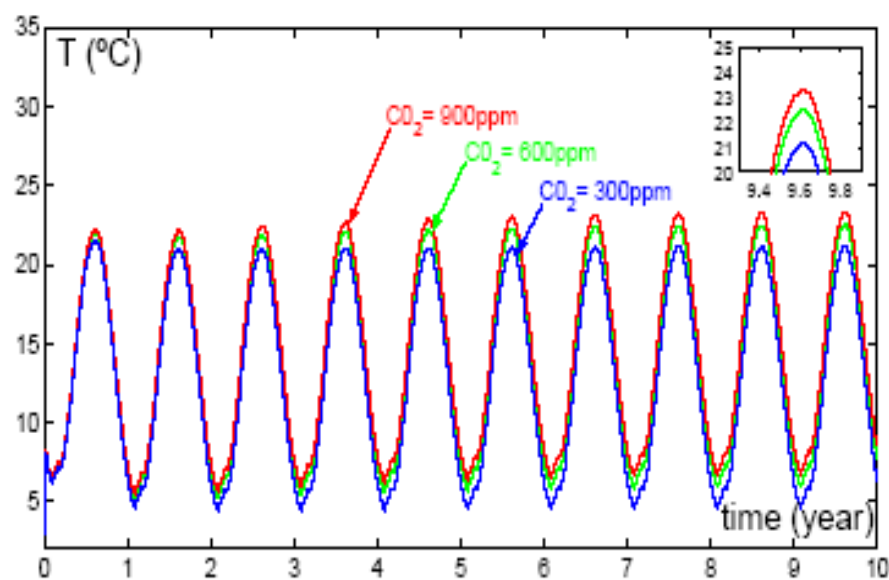
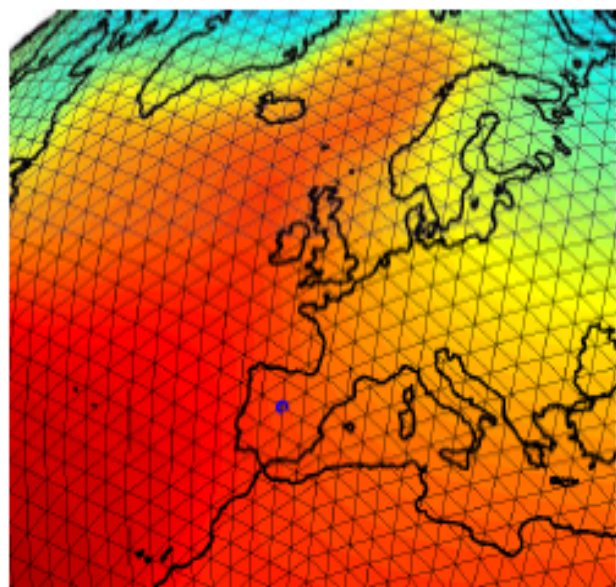
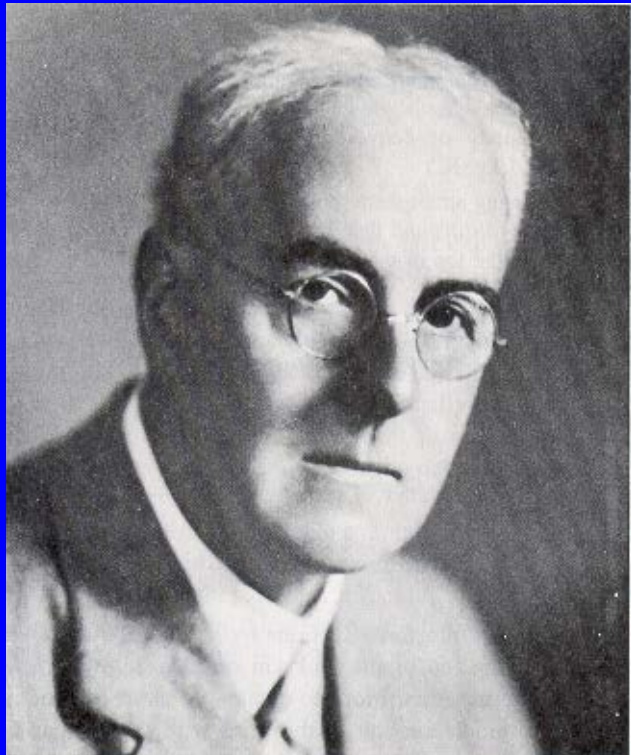


Figure 7: CO<sub>2</sub> influence on temperature at a point near Madrid. In the box, it is shown the temperature corresponding to the month of July .

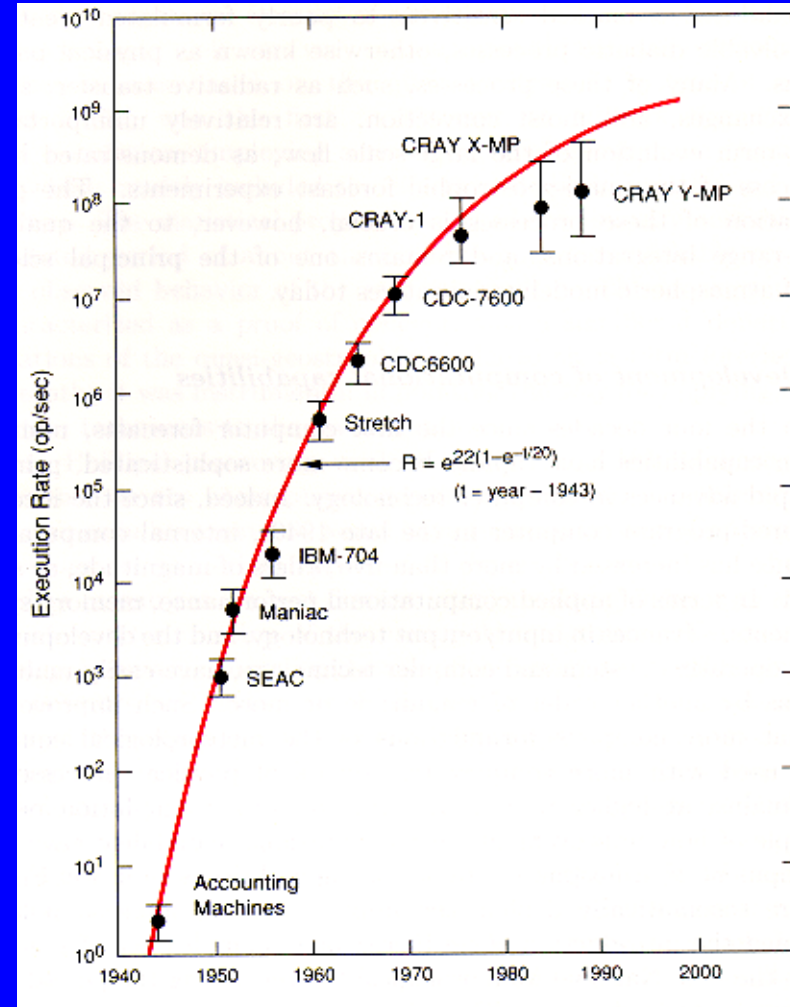
# Super-ordenadores: Cálculo paralelo.

Las 64.000 máquinas de  
Richardson



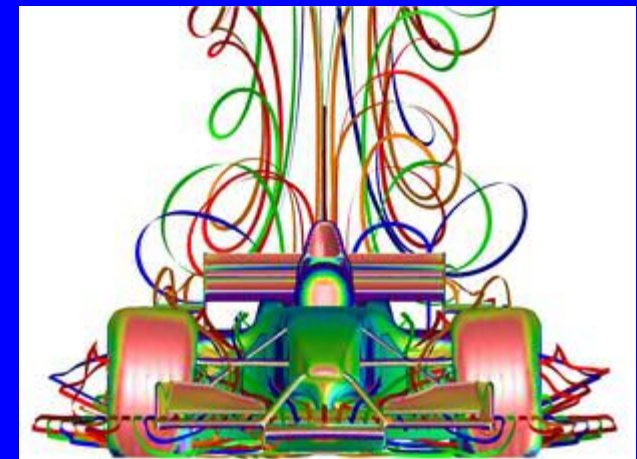
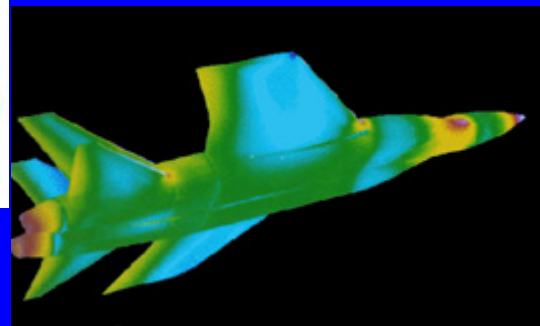
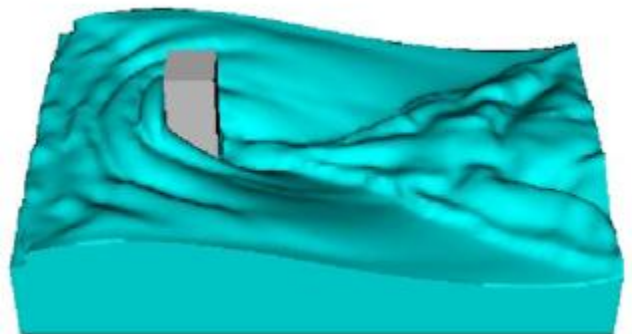
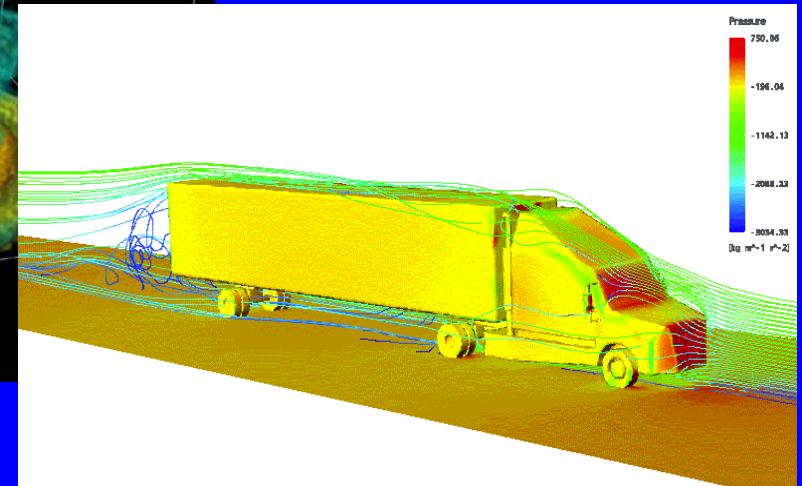
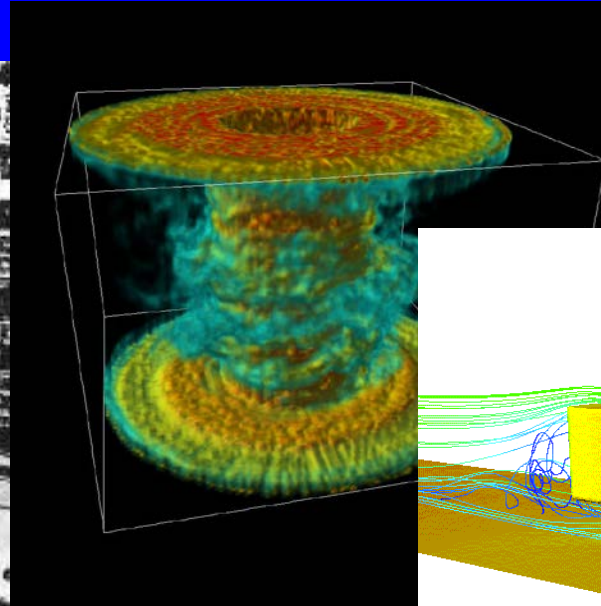
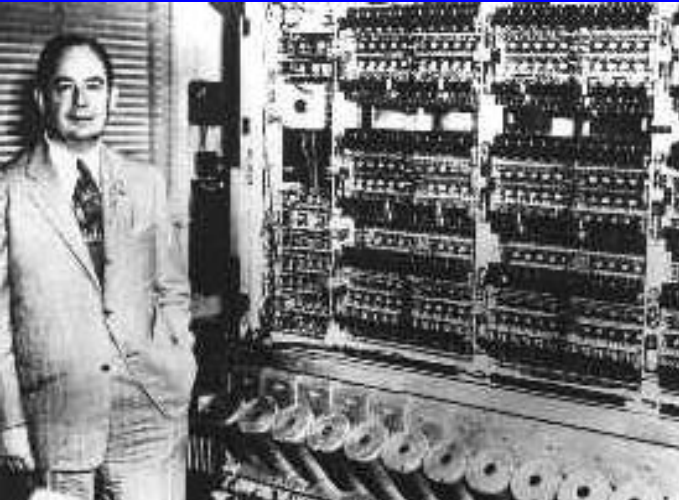
Lewis Fry Richardson

1881 - 1953

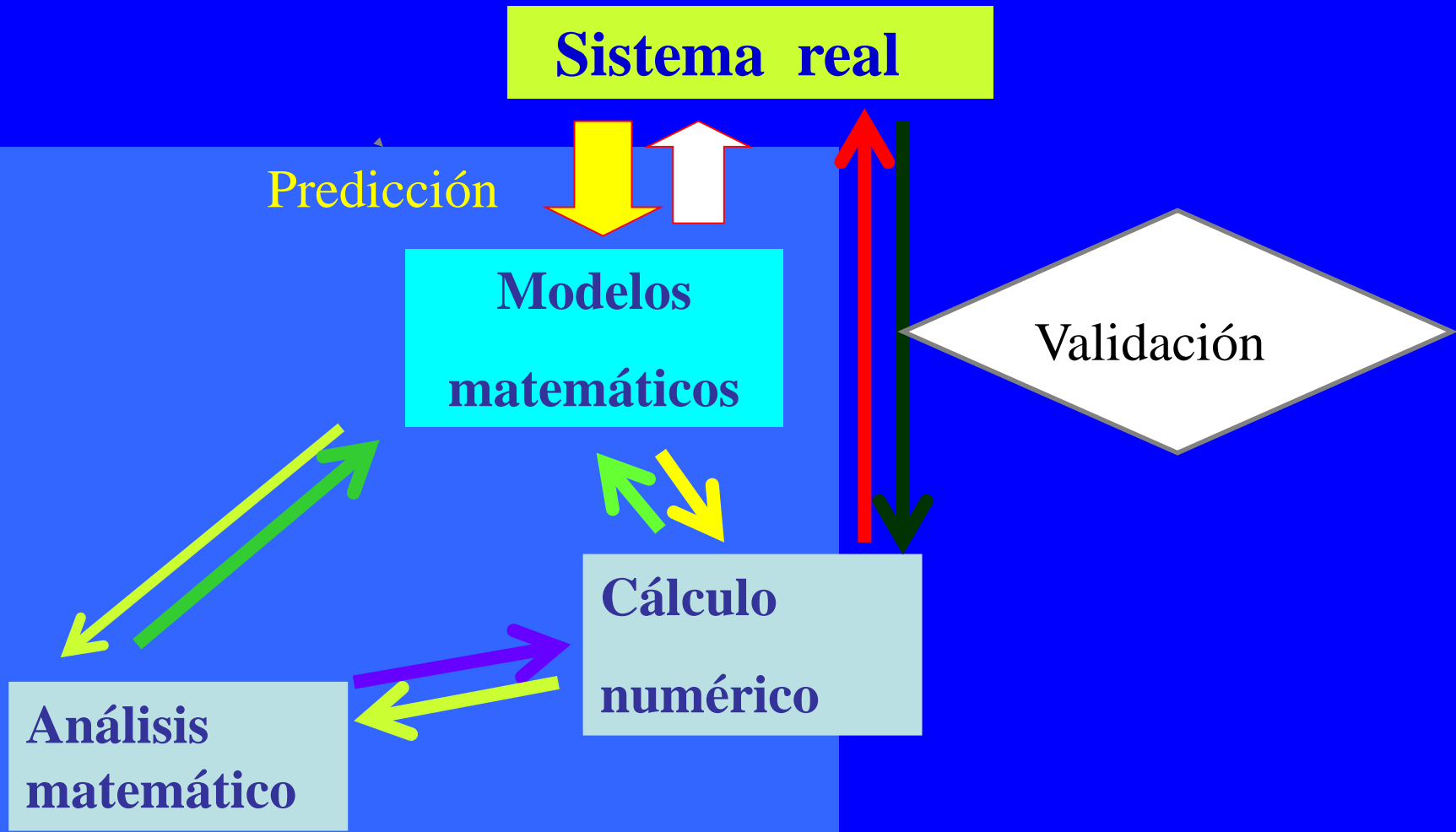


Ley de G.E. Moore (1965) : “La  
potencia de computación se duplica  
cada año”

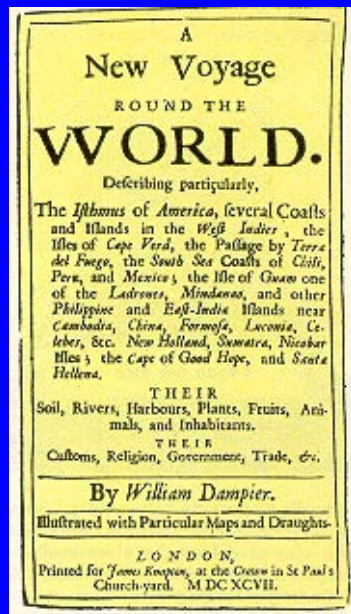
John von Neumann escogió la Meteorología Numérica como futuro banco de pruebas del ordenador del *Institut for Advanced Study (IAS Princeton)*.



# La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



# Validación: toma de datos, satélites



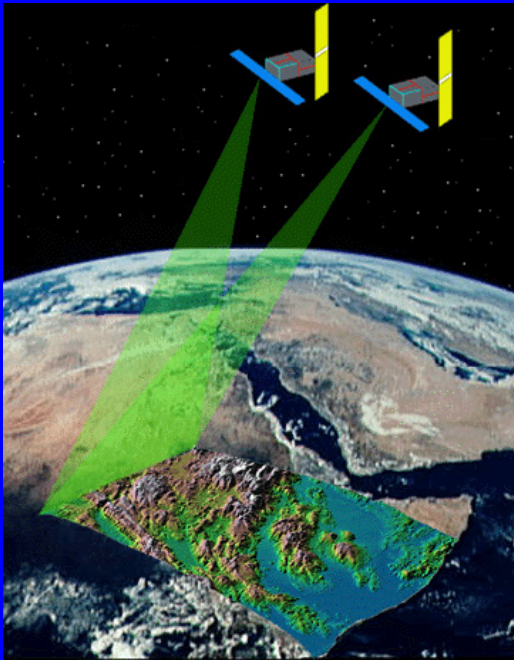
## Transmisión de datos: Francia 1863



Datos pioneros: 1697  
Capitan W. Dampier,

Edmund Halley (1686): Astrónomo, Circulación  
general de la atmósfera y convección térmica

# Validación...



**Siglo XXI**



**4.500 millones de años**

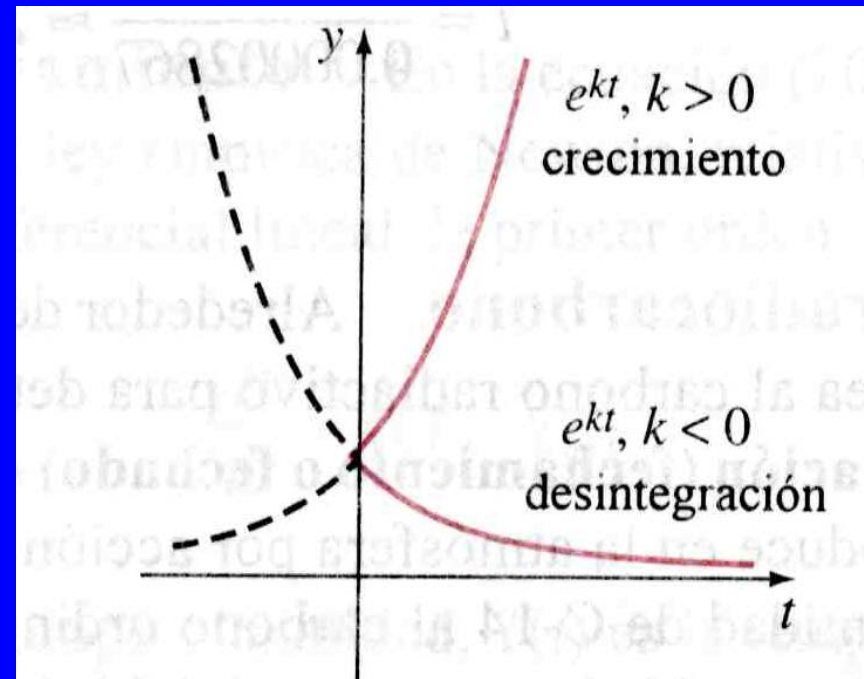


# Validación...

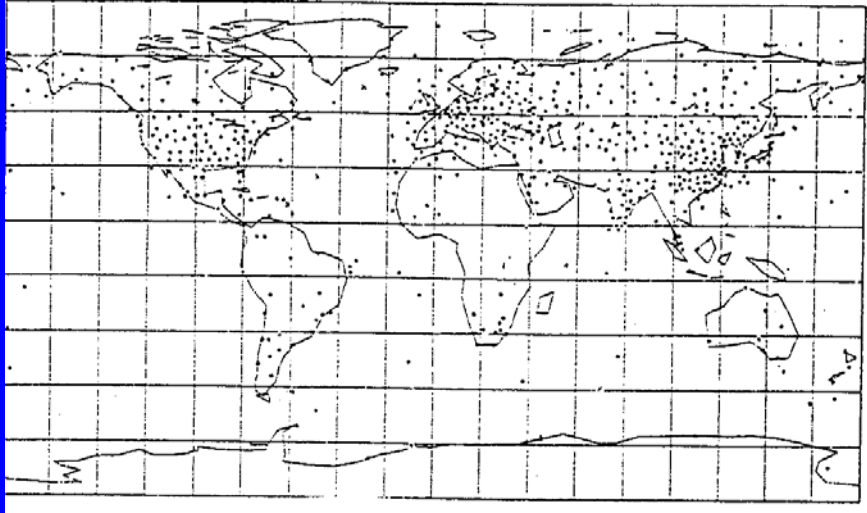
**Willard Frank Libby**  
**1947**

C14: 5.730 años de vida media

U 238: 4.500 millones de años  
de vida media



# Datos Incompletos: Teoría matemática. Centinelas, Asimilación



Radio-sondas: perfiles  
verticales de temperatura,  
viento y humedad

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f_1 + g_1$$

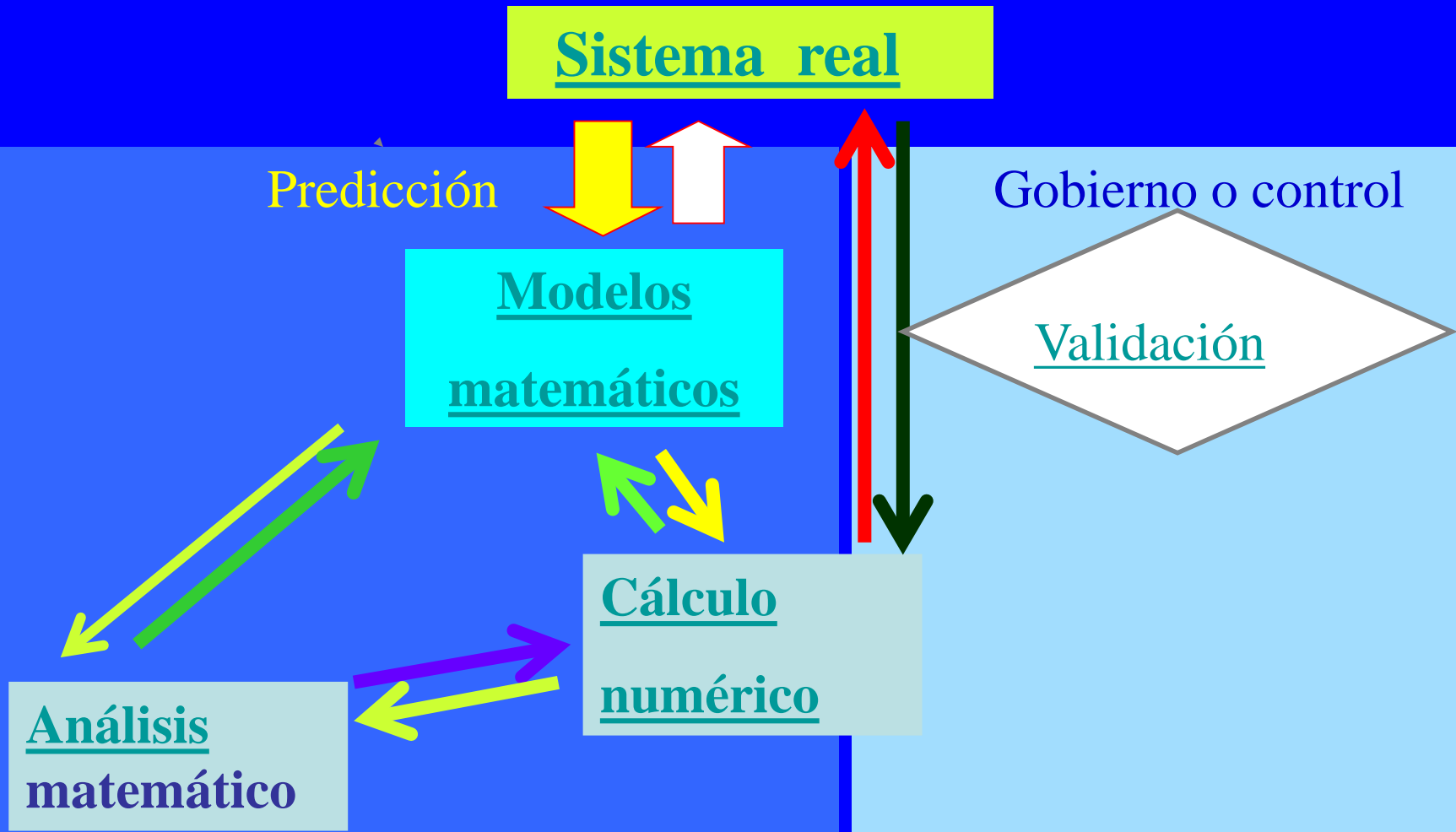
$$Bu = f_2 + g_2$$

$$u(t_0) = u_0 + g_0$$

$f_1$ ,  $f_2$  y  $u_0 \equiv$  datos disponibles

$g_1$ ,  $g_2$  y  $g_0 \equiv$  datos desconocidos

# La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



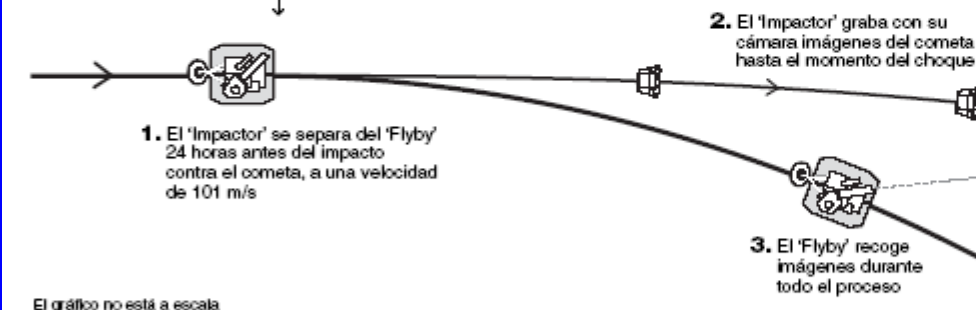
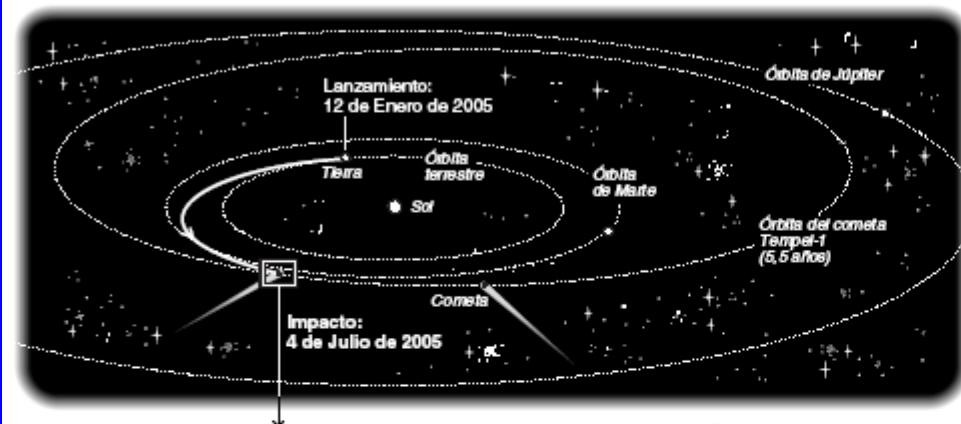
# Gobierno o control



Roma 1555

## Misión 'Deep Impact'

Hoy comienza la misión de la NASA que estudiará la composición del núcleo del cometa Tempel 1 al estrellar contra él un proyectil de 370 kg a una velocidad relativa de 10,2 km/s.



El gráfico no está a escala

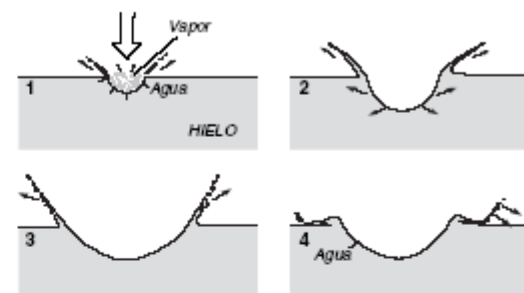
# Impacto profundo

M. R. E., Madrid  
Hacer un agujero en un cometa a unos 130 millones de kilómetros de la Tierra es el objetivo de la sonda que la NASA tiene previsto lanzar hoy desde Cabo Cañaveral, en Florida. Con el nombre de

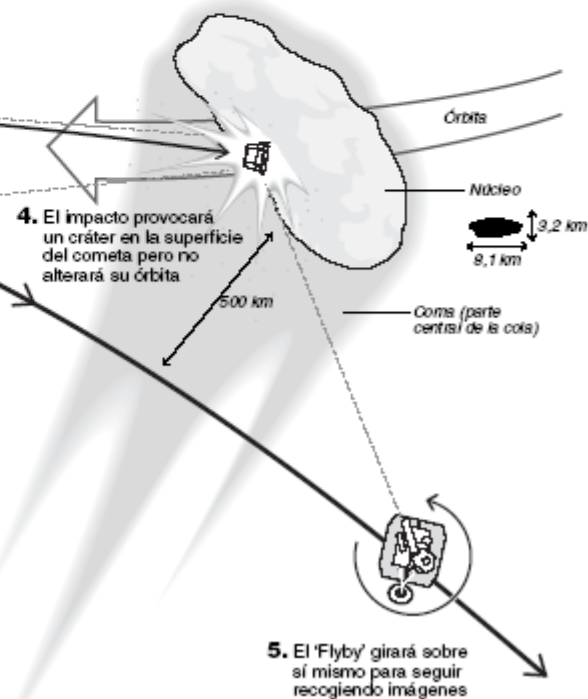
EE UU lanza hoy la nave 'Deep Impact', que estrellará un proyectil contra el cometa Tempel 1 para descubrir sus misterios

proyectil hará un cráter relativamente poco profundo pero espectacular, como un estadio de béisbol". Sin embargo, explica Yeomans, si el cometa es una bola dura de hielo, el cráter será más profundo pero no tan gran-

## SECUENCIA DEL IMPACTO

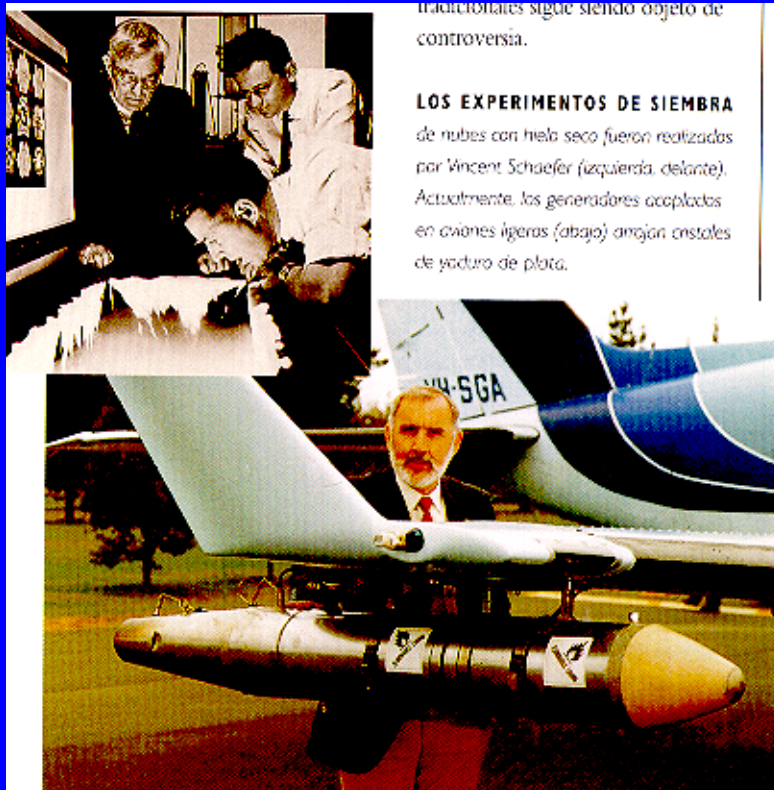


La profundidad y diámetro del cráter aportarán datos sobre la composición y dureza del núcleo, información hasta ahora no comprobados.



# Ejemplos de acciones sobre el medio ambiente.

## Acciones locales. Siembra de nubes



tradicional sigue siendo objeto de controversia.

**LOS EXPERIMENTOS DE SIEMBRA** de nubes con hielo seco fueron realizadas por Vincent Schaefer (izquierda, delante). Actualmente, los generadores acoplados en aviones ligeros (abajo) arrojan cristales de yoduro de plata.

EL PAÍS, jueves 13 de mayo de 1999

DEPORTES

## El Parma se corona sin rival

El **Marsella** se rinde al primer contratiempo y acaba goleado en la final de la **Copa de la UEFA**

MARSELLA	0
PARMA	3

**Olimpico de Marsella:** Porato; Blondeau, Issa, Blanc, Domoraud, Da Silva (Camara, m. 46); Brando, Bravo, Gourvenec, Pires; y Maurice.

**Parma:** Buffon; Thuram, Sensi, Cannavaro; Fuser, Dino Baggio, Boghossian, Vanoli; Verón (Fiore, m. 76); Chiesa (Balbo, m. 72) y Crespo.

**Goles:** 0-1. M. 26. Blanc cabecea pillado hacia su portero, Hernán Crespo adivina la cesión, se anticipa y bate a Porato por arriba.

0-2. M. 36. Vanoli ajusta un cabezazo al palo izquierdo tras un centro preciso de Fuser.

0-3. M. 55. Verón centra desde la derecha, Crespo deja pasar el balón y Chiesa fusila a la escuadra.

**Árbitro:** Dallas (Escocia). Mostró tarjeta amarilla a Blondeau.

65.000 espectadores en el estadio Luzhnikí de Moscú. Final de la Copa de la UEFA. Campeón, el Parma.

JOSÉ MIGUÉLEZ  
No es el Parma un equipo voraz, de esos que siempre quieren más y más. Por eso la final de Moscú concluyó en 3-0. Simplemente en 3-0. La superioridad italiana fue mucho más grande que el resultado. Pero se sintió tan seguro, tan dueño de



Los jugadores del Parma celebran el triunfo con la Copa de la UEFA. / REUTERS

**El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes**

# Siembra: hielo seco, humo de yoduro de plata.,.,



10:37 LST-16,100'



11:12 LST-14,250'  
26 min. después de la inseminación



11:20 LST-16,100'  
34 min. después de la inseminación



11:31 LST-16,200'  
45 min. después de la inseminación

1972:  
Cambrige,  
EE.UU.

# Catastrofes naturales

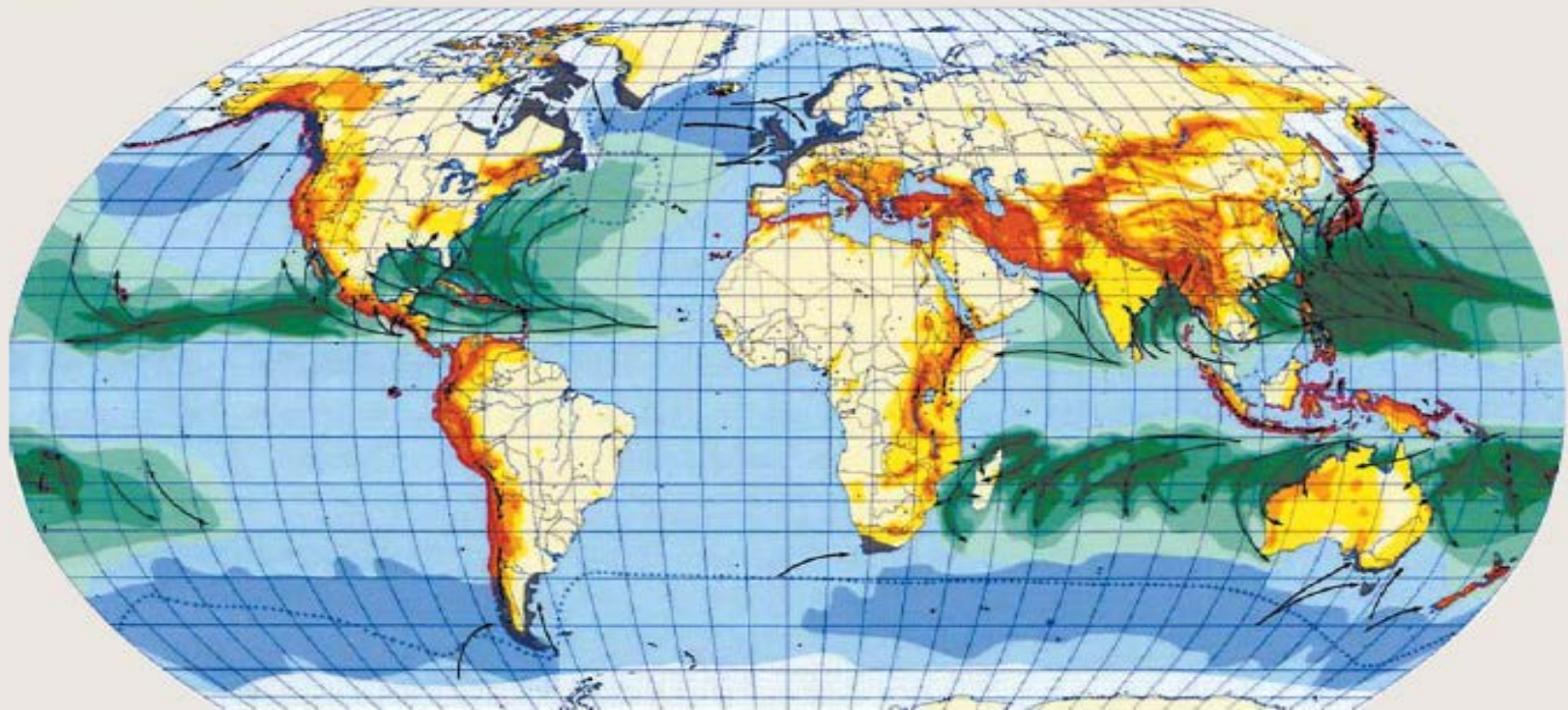
Visión pesimista

EL EFECTO DE LOS DESASTRES NATURALES AUMENTA CADA AÑO POR LA ACCIÓN DEL HOMBRE

## Un mundo de catástrofes

<http://www.elpais.es/suplaydomingo>

### Atlas de los desastres naturales



#### SEÍSMO

Escala Mercalli

de terremotos (1-13)

□ Zona 0. M (<5)

□ Zona 1. M (6)

□ Zona 2. M (7)

□ Zona 3. M (8)

□ Zona 4. M (9->)

#### TORMENTAS TROPICALES

Escala Saffir-Simpson

de huracanes (1-5)

□ Zona 0. SS1 (118-153 km/h)

□ Zona 1. SS2 (154-177 km/h)

□ Zona 2. SS3 (178-209 km/h)

□ Zona 3. SS4 (210-249 km/h)

□ Zona 4. SS5 (Más de 250 km/h)

#### TORMENTAS DE INVIERNO Y EXTRATROPICALES

□ Peligro de tormentas extratropicales principalmente en invierno

— Ruta de la principales tormentas

#### OTROS

▲ Límite de presencia de icebergs

□ Hielo

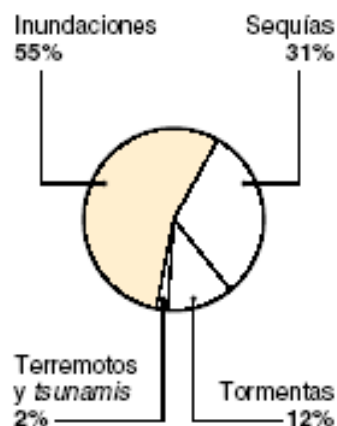
□ Temporal con olas de más de 5 metros



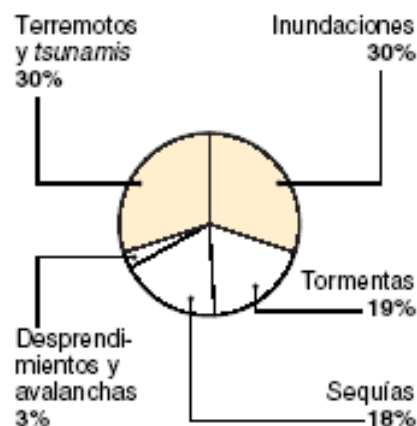
# Desastres naturales

N° de afectados	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	TOTAL
Sequías	16.946.500	26.791.404	3.620.000	7.330.100	19.882.535	30.502.145	176.477.015	86.757.493	339.901.401	70.274.114	778.122.707
Terremoto	790.785	1.640.722	5.501.102	1.227.462	2.139.320	6.881.400	2.408.826	8.796.841	611.608	3.955.700	33.953.766
Epidemias	6.564.353	445.078	643.994	334.311	879.459	476.548	1.030.908	200.976	969.159	125.956	11.670.742
Temperaturas extremas	1.108.184	535.278	200	614.580	36.386	725.246	27.686	213.161	103.986	1.839.908	5.204.615
Hambrunas	3.900.000	4.308.000	3.575.590	1.686.000	5.612.950	9.144.594	1.000.000	1.000.000	3.983.000		34.210.134
Inundaciones	127.687.833	198.116.395	178.451.143	44.956.366	290.072.569	149.969.693	62.505.835	34.494.674	277.408.430	166.827.751	1.530.490.689
Plagas		200									200
Desprendimientos	298.406	1.122.349	8.936	33.951	209.131	15.291	208.176	67.351	271.454	458.629	2.693.674
Erupciones	235.750	25.876	6.572	7.200	7.808	34.055	118.996	78.346	278.050	25.000	817.653
Olas gigantes			24	29.000		1.300	17.260		1.720		49.304
Incendios	3.067.413	11.839	5.811	53.159	166.904	18.830	39.035	5.739	26.124	8.833	3.403.687
Tormentas	38.311.466	13.771.290	28.144.129	13.594.067	26.784.268	23.889.154	15.459.454	30.645.189	110.694.349	10.781.408	312.074.774
<b>Total afectados</b>	<b>198.910.690</b>	<b>246.768.431</b>	<b>219.597.501</b>	<b>69.866.196</b>	<b>345.791.330</b>	<b>221.658.256</b>	<b>259.293.191</b>	<b>162.259.770</b>	<b>734.249.281</b>	<b>254.297.299</b>	<b>2.712.691.945</b>
Fallecidos	14.098	54.583	55.226	55.330	90.116	101.671	44.320	63.885	51.177	78.442	609.638
Número de desastres	225	263	228	274	329	385	546	459	508	380	3.597

## ■ AFECTADOS

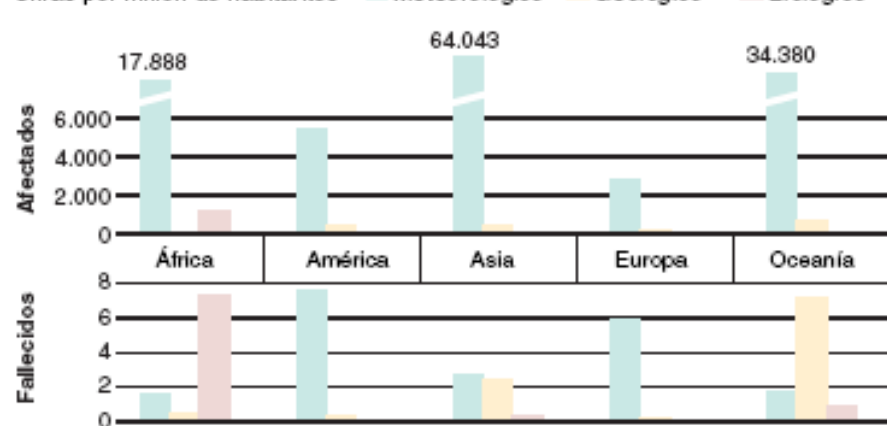


## ■ FALLECIDOS



## ■ FALLECIDOS Y AFECTADOS POR CONTINENTES

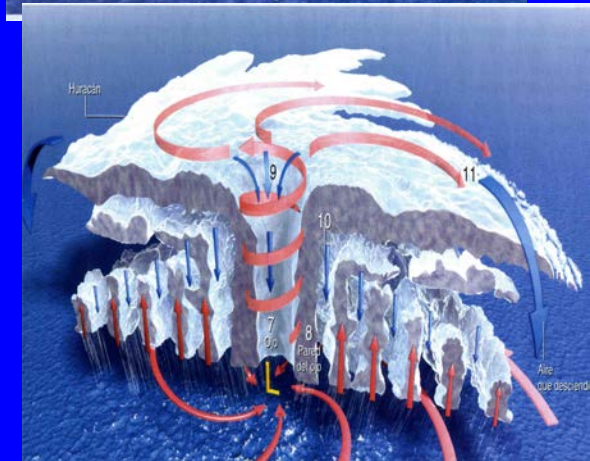
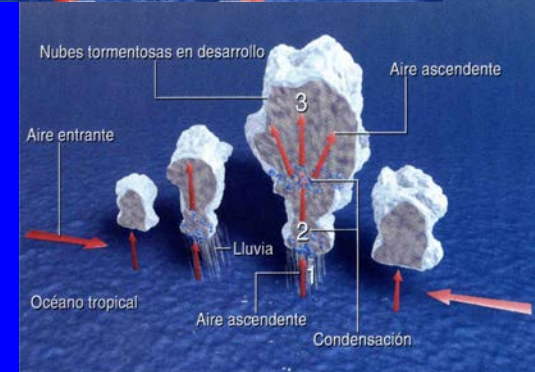
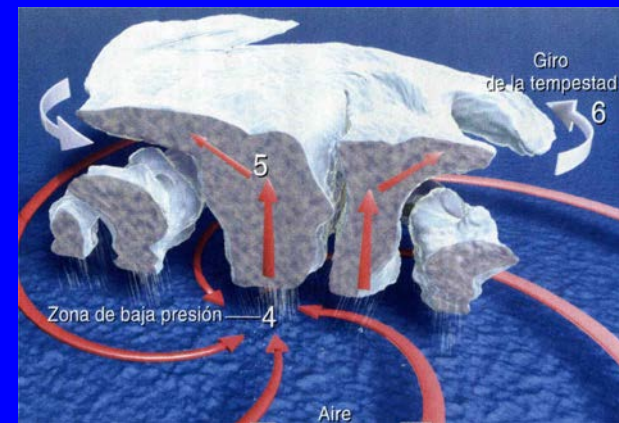
Cifras por millón de habitantes



Fuente: ONU.

EL PAÍS

# Visión optimista (quizá en exceso)

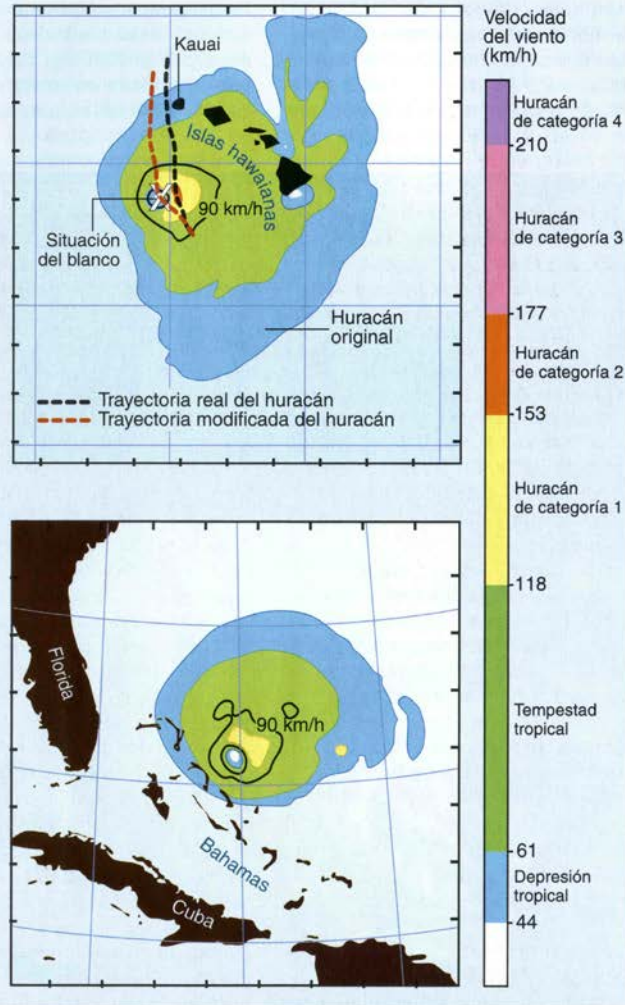


## CONTROL DE HURACANES SIMULADOS

Se recurre a modelos informáticos para simular dos huracanes devastadores de 1992, Iniki y Andrew. Los colores representan categorías de velocidad del viento. Las líneas de nivel negras indican vientos de 90 km/h; este valor viene a coincidir con el umbral de devastación del meteoro.

En las simulaciones de Iniki (*derecha*), la trayectoria original del ojo (*línea negra de trazos*) lleva los vientos más fuertes de la tempestad sobre la isla hawaiana de Kauai. Pero cuando varias de las condiciones iniciales del modelo, entre ellas la temperatura y humedad en diversos puntos, se alteraron ligeramente, la trayectoria simulada de la tempestad (*línea roja de trazos*) se desplazó hacia el oeste de Kauai, pasando sobre un blanco elegido a 97 kilómetros de la isla. Después siguió hacia el norte; llegó a un enclave de la isla más a su oeste que el huracán real.

Los mapas de los mares próximos a las Bahamas y Florida (*abajo*) muestran simulaciones de Andrew en su estado inalterado (*izquierda*) y en una forma artificialmente perturbada (*derecha*). Aunque los vientos catastróficos persisten en el caso controlado, las velocidades máximas se han reducido bastante: un huracán de categoría 3 se ha quedado en huracán de categoría 1, mucho menos brutal.



# ACTUACIONES SOBRE LOS HURACANES

Las simulaciones informáticas de los huracanes indican que ciertas variaciones en la precipitación, evaporación y temperatura del aire podrían alterar la trayectoria de la tempestad o debilitar sus vientos. La actuación podría tomar varias formas: una siembra aérea de nubes, sobre objetivos meticulosamente seleccionados, con yoduro de plata u otros materiales inductores de precipitación podría servir para privar a la violenta pared del ojo del huracán —la característica fundamental de una gran tempestad tropical— del agua que necesita para crecer e intensificarse (*izquierda*). Se podría distribuir aceite biodegradable sobre la superficie del mar en la tra-

yectoria del huracán para reducir la evaporación, que es la fuente de la energía de una tempestad (*centro*). Futuras estaciones orbitales de producción de electricidad mediante energía solar, que quizá recurran a grandes espejos para focalizar los rayos del sol y a paneles de células fotovoltaicas para cosechar esa energía y transferirla a la Tierra, emitirían microondas, sintonizadas de manera que las absorbiesen las moléculas de vapor de agua de la tempestad o sus alrededores (*derecha*). Las microondas harían vibrar las moléculas de agua y calentarían así el aire circundante. El huracán se debilitaría entonces o se movería en la dirección deseada.

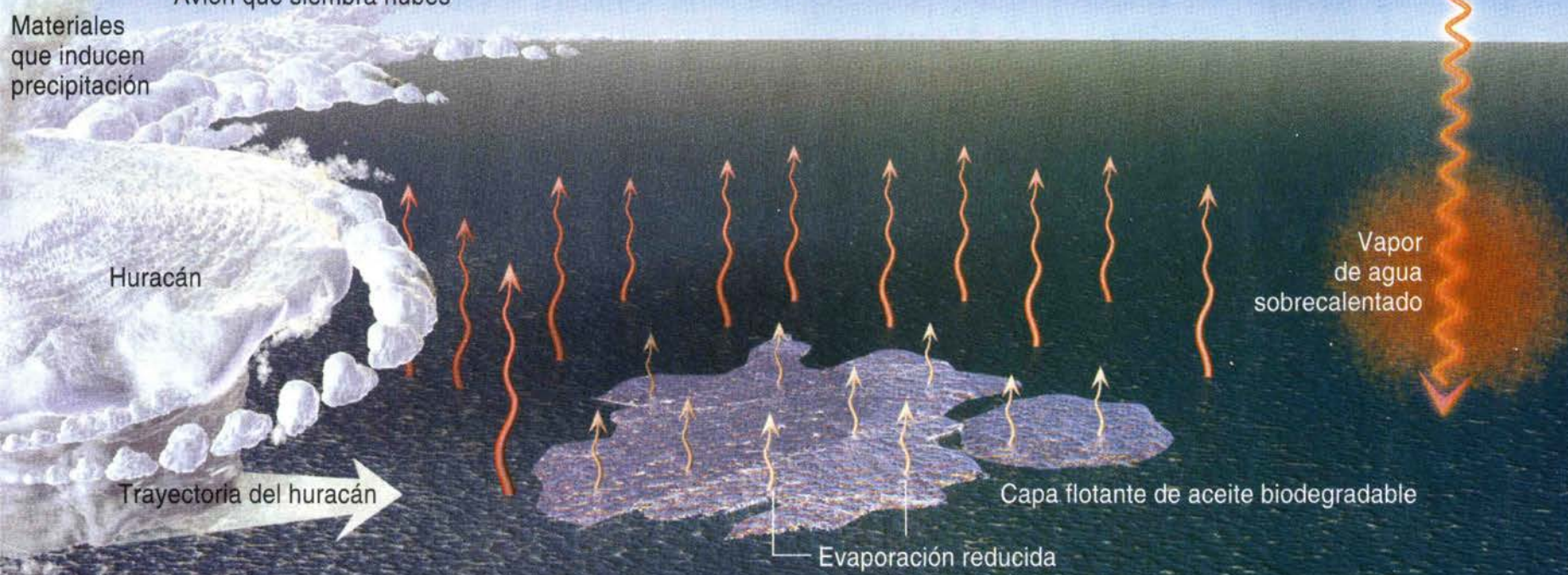


Avión que siembra nubes

Materiales que inducen precipitación

Huracán

Trayectoria del huracán



Estación orbital productora de energía

Vapor de agua sobrecalentado

Capa flotante de aceite biodegradable

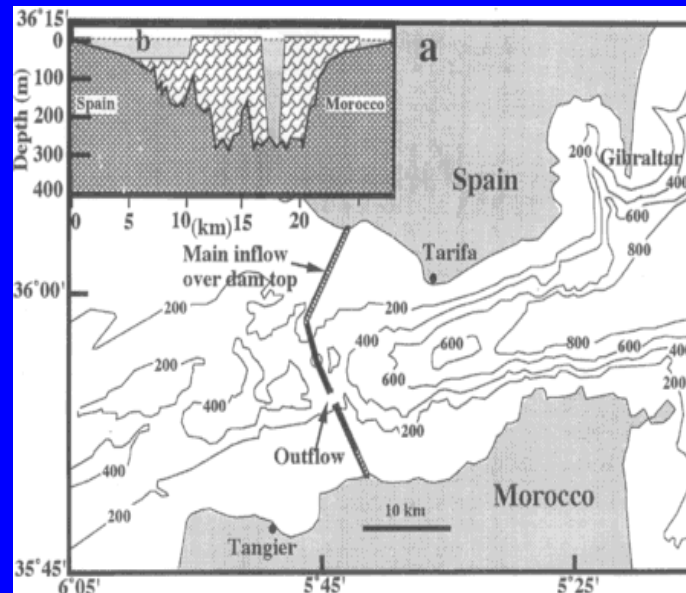
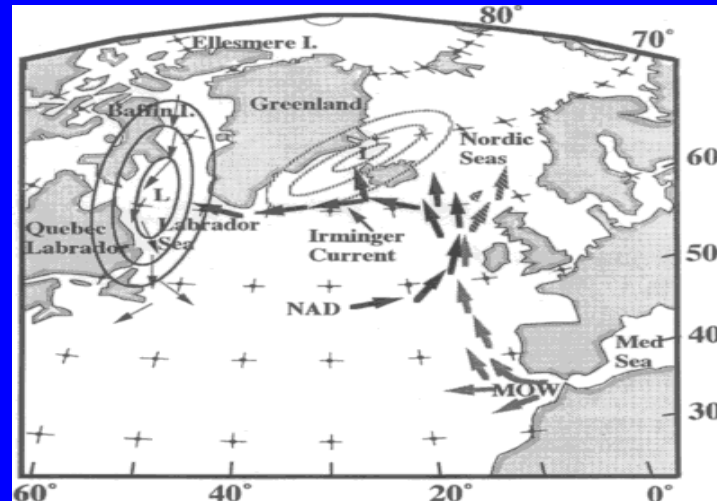
Evaporación reducida

# Acciones globales

## ¿Diques en Gibraltar?

R.G. Thomson

American  
Geophysical  
Union, 1997



Milankovitch insolation at 25°N decreases

African monsoons weaken, Nile discharge diminishes

Mediterranean hydrologic deficit increases

Mediterranean salinity rises, Outflow at Gibraltar increases

Outflow water upwelling off Scotland increases

Warm surface water diverted to Labrador Sea, cold upwelling water enters Nordic Seas

Warmer Labrador Sea, greater advection of moisture into Canada

Canadian ice-sheet growth begins as Nordic Seas and Europe cool

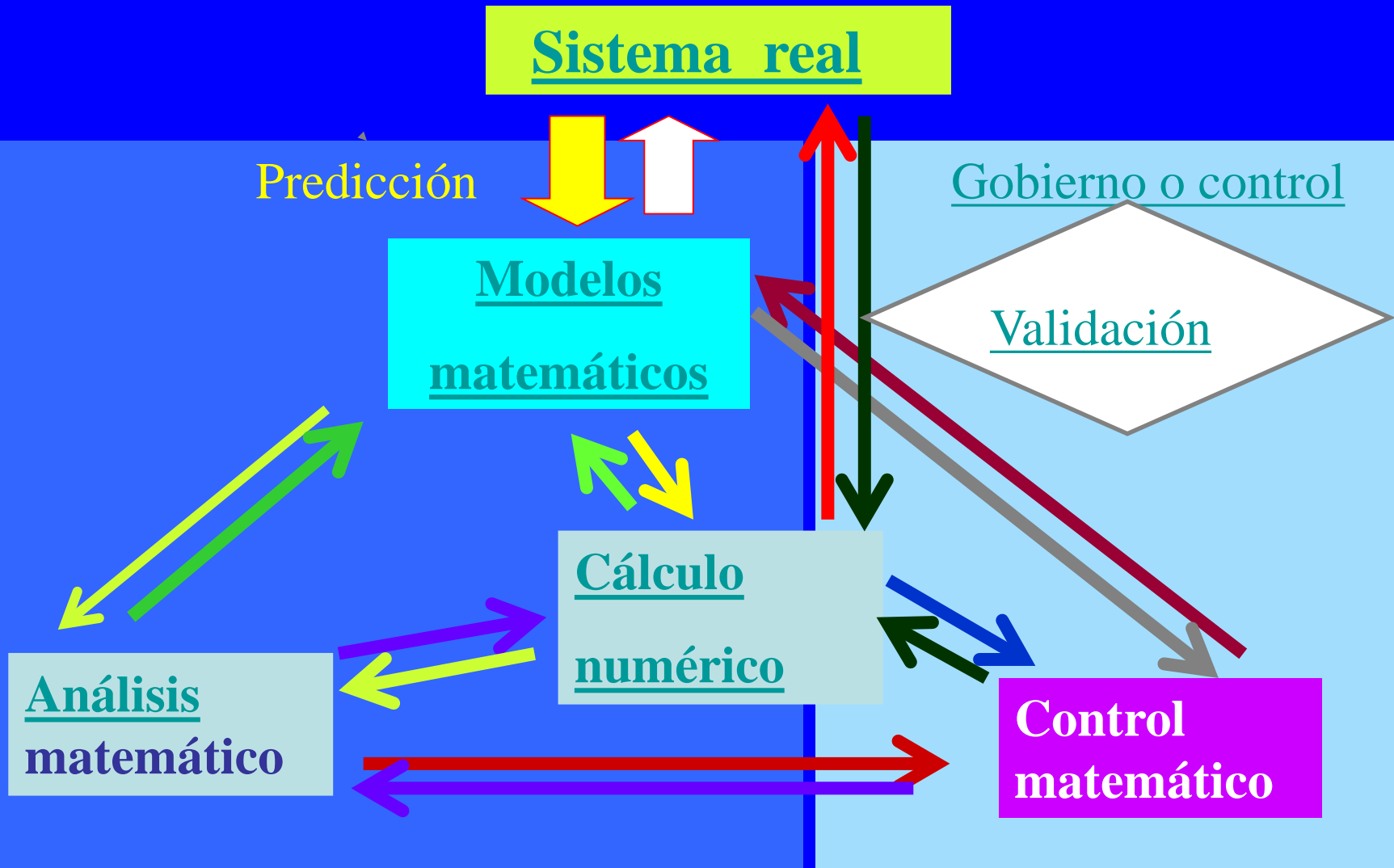
# J. von Neumann (1955): Modificación artificial del albedo



The screenshot shows the EL PAÍS website interface. At the top, the logo 'EL PAÍS.COM' is followed by the section 'Sociedad'. The date 'Jueves, 15/11/2007, 00:26 h' is displayed in the top right. A navigation bar includes links for 'Inicio', 'Internacional', 'España', 'Deportes', 'Economía', 'Tecnología', 'Cultura', 'Gente y TV', 'Sociedad', 'Opinión', 'Blogs', and 'Participa'. Below this, there are links for 'El Viajero', 'EPS', 'Domingo', 'Salud', 'Futuro', and 'Educación'. A banner for 'AVANCE' offers a PDF of the newspaper's cover. The main article title is 'Repulsa mundial a un intento de sembrar de hierro el océano', with a subtitle 'Una empresa de EE UU pretende fertilizar el agua marina para absorber CO 2'. The author is listed as 'MARÍA JOSÉ VIÑAS - Santa Cruz - 14/11/2007'.

Captura de CO<sub>2</sub> ...

# La “Trilogía Universal” de la Matemática Aplicada



# Teoría de Control / Teoría de juegos

- Estructura general:

$y = \text{estado}(s)$ ,  $u = \text{control}(es)$

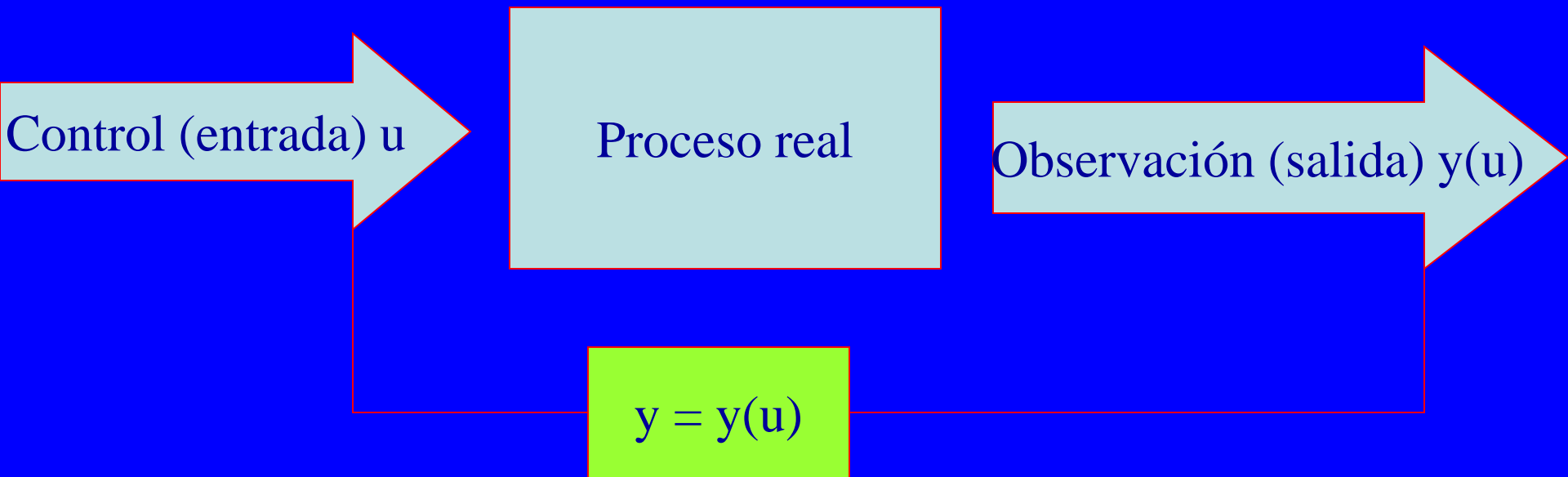
- Ley de estado:  $F(y_t, Ay, Bu) = 0$  (A y B operadores)
- Funcional de observabilidad:  $J(u) = g(u, y(u))$

**Problema: optimizar  $J(u)$  sobre un conjunto  $K$  de posibles controles**

- T<sup>a</sup> Control:  $u$  escalar (un único control)
- T<sup>a</sup> de Juegos:  $u$  con múltiples componentes  
¡Posible conflicto de intereses!



# Teoría de Control: planteamiento general



**Objetivo:** Encontrar el control  $u$  para que la observación  $y(u)$  sea lo “mejor posible”

Óptimos en espacios de dimensión infinita

**La componente económica. Cumbres Mundiales.**

**Teoría de juegos. Teoría de la decisión bajo incertidumbre**<sub>82</sub>

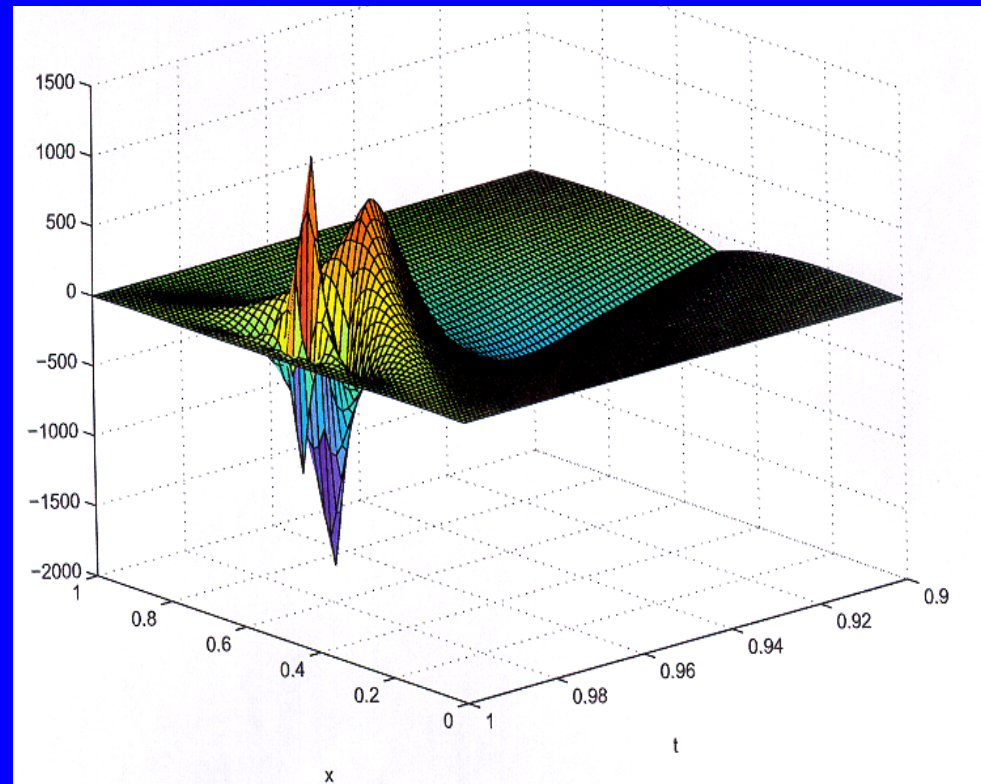
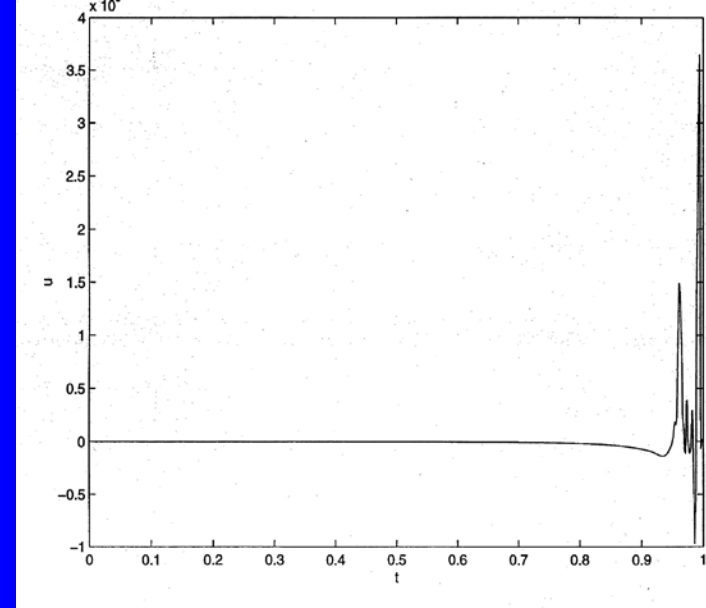
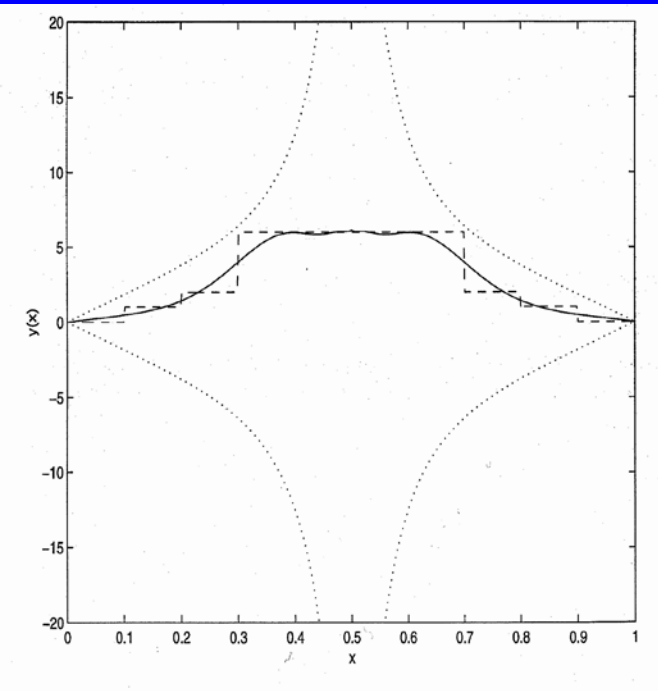
# Resultados rigurosos y numéricos sobre control en EBM :

$$\begin{aligned}y_t - y_{xx} + y^3 &= \arctgy + u(t)\delta_{1/2} \text{ en } (0,1) \times (0,T), \\y(0,t) = y(1,t) &= 0 \quad t \in (0,T), \\y(x,0) &= y^0(x) \quad x \in (0,1),\end{aligned}$$

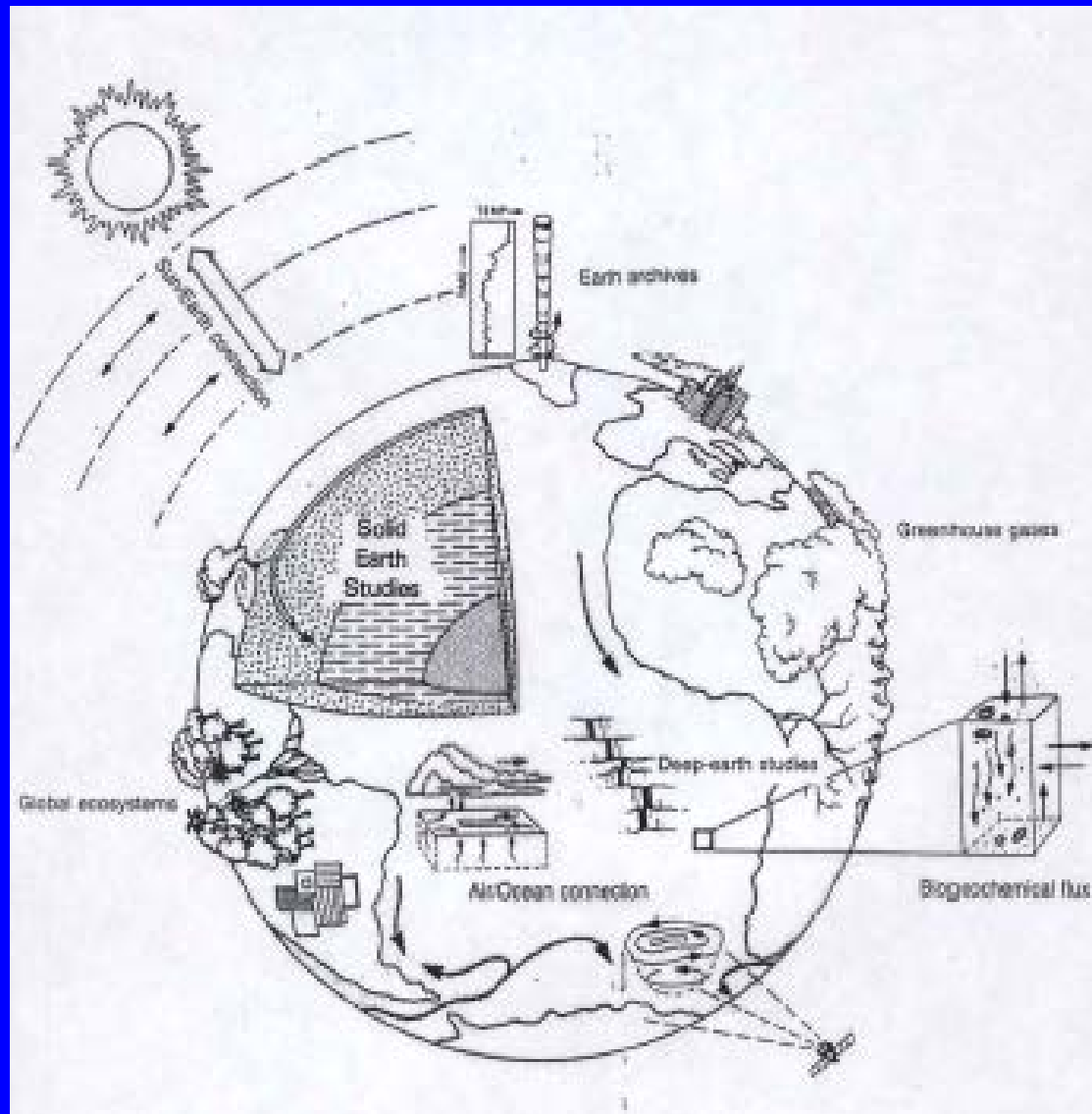
$$J_k(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{k}{2} \|y(T, \cdot; u) - y_d\|_{L^2(0,1)}^2$$

$$k = 10^{12}$$

# Experiencia numérica



# Planeta Tierra: sistema complejo





**Gracias por vuestra atención**



