

*Tratamiento matemático de los aspectos económicos de
iniciativas empresariales que alteran el medio ambiente*

Jesús Ildefonso Díaz y Chakib Faghloumi

PRIMER SEMINARIO DE ECONOMÍA MATEMÁTICA

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

8–9 de Junio 2004

Sección 1

*Caso de destrucción total del medio ambiente.
El problema determinista estacionario*

1.1. Modelización.

1.1. Modelización.

Sea el modelo presentado por Scheinkman, J.A. (1992)

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1 \mathcal{X}(t)dt + \hat{\sigma}_1 \mathcal{X}(t)(d\mathcal{W}(t) + \hat{\varrho}d\mathcal{Z}(t)), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2 \mathcal{Y}(t)dt + \hat{\sigma}_2 \mathcal{Y}(t)(\hat{\varrho}d\mathcal{W}(t) + d\mathcal{Z}(t)), \end{cases}$$

tal que

$$\mathcal{X}(0) = x \in (0, +\infty), \quad \mathcal{Y}(0) = y \in (0, +\infty).$$

1.1. Modelización.

Sea el modelo presentado por Scheinkman, J.A. (1992)

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1 \mathcal{X}(t)dt + \hat{\sigma}_1 \mathcal{X}(t)(d\mathcal{W}(t) + \hat{\varrho}d\mathcal{Z}(t)), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2 \mathcal{Y}(t)dt + \hat{\sigma}_2 \mathcal{Y}(t)(\hat{\varrho}d\mathcal{W}(t) + d\mathcal{Z}(t)), \end{cases}$$

tal que

$$\mathcal{X}(0) = x \in (0, +\infty), \quad \mathcal{Y}(0) = y \in (0, +\infty).$$

Mediante la transformación

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\hat{\varrho}^2}} (\mathcal{W}(t) + \hat{\varrho}\mathcal{Z}(t)) \\ \mathcal{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\hat{\varrho}^2}} (\hat{\varrho}\mathcal{W}(t) + \mathcal{Z}(t)) \end{cases}$$

1.1. Modelización.

Sea el modelo presentado por Scheinkman, J.A. (1992)

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1 \mathcal{X}(t)dt + \hat{\sigma}_1 \mathcal{X}(t)(d\mathcal{W}(t) + \hat{\varrho}d\mathcal{Z}(t)), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2 \mathcal{Y}(t)dt + \hat{\sigma}_2 \mathcal{Y}(t)(\hat{\varrho}d\mathcal{W}(t) + d\mathcal{Z}(t)), \end{cases}$$

tal que

$$\mathcal{X}(0) = x \in (0, +\infty), \quad \mathcal{Y}(0) = y \in (0, +\infty).$$

obteniéndose

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1 \mathcal{X}(t)dt + \sqrt{2}\sigma_1 \mathcal{X}(t)d\mathcal{B}_1(t), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2 \mathcal{Y}(t)dt + \sqrt{2}\sigma_2 \mathcal{Y}(t)d\mathcal{B}_2(t), \end{cases}$$

1.1. Modelización.

Sea el modelo presentado por Scheinkman, J.A. (1992)

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1\mathcal{X}(t)dt + \hat{\sigma}_1\mathcal{X}(t)(d\mathcal{W}(t) + \hat{\rho}d\mathcal{Z}(t)), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2\mathcal{Y}(t)dt + \hat{\sigma}_2\mathcal{Y}(t)(\hat{\rho}d\mathcal{W}(t) + d\mathcal{Z}(t)), \end{cases}$$

tal que

$$\mathcal{X}(0) = x \in (0, +\infty), \quad \mathcal{Y}(0) = y \in (0, +\infty).$$

obteniéndose

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1\mathcal{X}(t)dt + \sqrt{2}\sigma_1\mathcal{X}(t)d\mathcal{B}_1(t), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2\mathcal{Y}(t)dt + \sqrt{2}\sigma_2\mathcal{Y}(t)d\mathcal{B}_2(t), \end{cases}$$

donde

$$\sigma_i = \frac{\hat{\sigma}_i\sqrt{1+3\rho^2}}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2.$$

1.1. Modelización.

Sea el modelo presentado por Scheinkman, J.A. (1992)

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1 \mathcal{X}(t)dt + \hat{\sigma}_1 \mathcal{X}(t)(d\mathcal{W}(t) + \hat{\varrho}d\mathcal{Z}(t)), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2 \mathcal{Y}(t)dt + \hat{\sigma}_2 \mathcal{Y}(t)(\hat{\varrho}d\mathcal{W}(t) + d\mathcal{Z}(t)), \end{cases}$$

tal que

$$\mathcal{X}(0) = x \in (0, +\infty), \quad \mathcal{Y}(0) = y \in (0, +\infty).$$

obteniéndose

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1 \mathcal{X}(t)dt + \sqrt{2}\sigma_1 \mathcal{X}(t)d\mathcal{B}_1(t), \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2 \mathcal{Y}(t)dt + \sqrt{2}\sigma_2 \mathcal{Y}(t)d\mathcal{B}_2(t), \end{cases}$$

Observemos que el nuevo coeficiente de determinación ϱ es mejor que anterior $\hat{\varrho}$.

1.1. Modelización.

La función utilidad

1.1. Modelización.

La **función utilidad** (tiene en cuenta la irreversibilidad de los cambios efectuados por la industria en el Medio Ambiente)

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-\alpha s}}_{\text{descuento}} \left(\mathbb{1}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{1}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right]$$

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El **objetivo** es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El **objetivo** es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el **Principio de la Programación Dinámica**

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El **objetivo** es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el **Principio de la Programación Dinámica** v satisface

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El objetivo es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el Principio de la Programación Dinámica

$$\max \{ -\mathcal{L}v + \alpha v - f(x), u - h \} = 0$$

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El objetivo es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el Principio de la Programación Dinámica

donde

$$\max \{ -\mathcal{L}v + \alpha v - f(x), u - h \} = 0$$

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El objetivo es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el Principio de la Programación Dinámica

donde $\max \{ -\mathcal{L}v + \alpha v - f(x), u - h \} = 0$

$$\mathcal{L}v \doteq \sigma_1^2 x^2 v_{xx} + \sigma_2^2 y^2 v_{yy} + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho xy v_{xy} + \mu_1 x v_x + \mu_2 y v_y,$$

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El objetivo es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el Principio de la Programación Dinámica

donde $\max \{ -\mathcal{L}v + \alpha v - f(x), u - h \} = 0$

$$h(y) = \frac{y}{(\lambda - 1)(\sigma^2 \lambda + \mu_2)}$$

1.1. Modelización.

La función utilidad

$$J(x, y; T) \doteq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(\mathbb{I}_{]0, T[}(s) f(\mathcal{X}(s)) + \mathbb{I}_{]T, \infty[}(s) \mathcal{Y}(s) \right) ds \right],$$

El objetivo es estudiar la función

$$v(x, y) = \max_T \{ J(x, y, T) \}$$

Por el Principio de la Programación Dinámica

donde $\max \{ -\mathcal{L}v + \alpha v - f(x), u - h \} = 0$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right) - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right)^2 + \frac{4\alpha}{\sigma_2^2}} \right).$$

1.1. Modelización.

Reformulación (**problema semilineal multívoco**)

$$-\mathcal{L}v + \alpha v + \gamma(v - h) \ni f(x) \quad \text{en} \quad \Omega \doteq (0, +\infty) \times (0, +\infty),$$

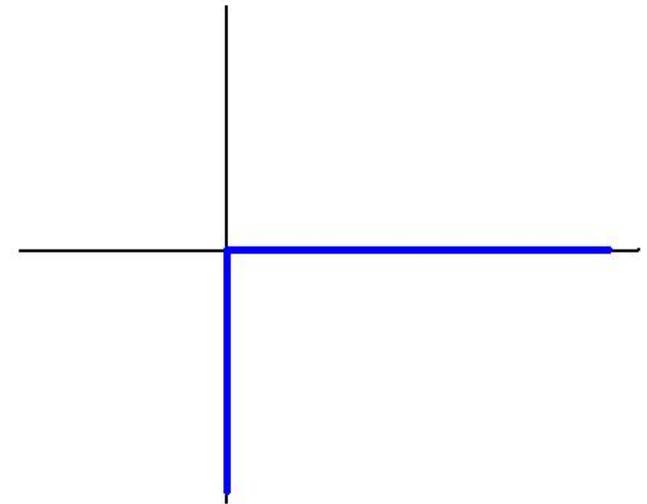
1.1. Modelización.

Reformulación (**problema semilineal multívoco**)

$$-\mathcal{L}v + \alpha v + \gamma(v - h) \ni f(x) \quad \text{en} \quad \Omega \doteq (0, +\infty) \times (0, +\infty),$$

donde

$$\gamma(u) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } u > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{si } u = 0, \\ \emptyset & \text{si } u < 0. \end{cases}$$



(grafo maximal monótono, Brézis, H. (1972)).

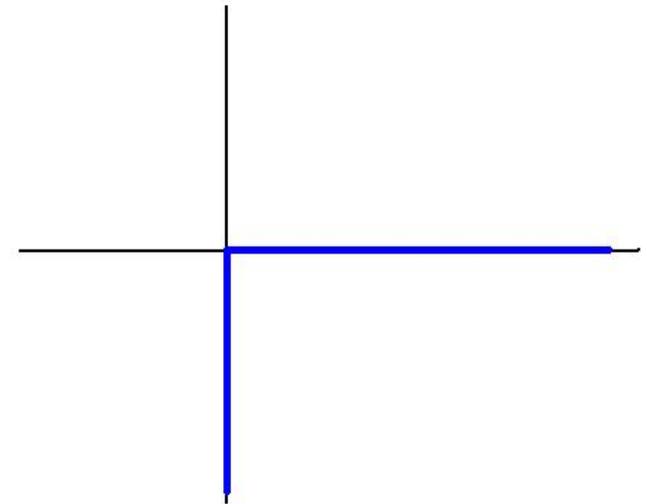
1.1. Modelización.

Reformulación (**problema semilineal multívoco**)

$$-\mathcal{L}v + \alpha v + \gamma(v - h) \ni f(x) \quad \text{en} \quad \Omega \doteq (0, +\infty) \times (0, +\infty),$$

donde

$$\gamma(u) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } u > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{si } u = 0, \\ \emptyset & \text{si } u < 0. \end{cases}$$



(grafo maximal monótono, Brézis, H. (1972)).

Introduciendo $u = v - h$ llegamos a

$$(\mathcal{P}) \quad -\mathcal{L}u + \alpha u + \gamma(u) \ni G(x, y)$$

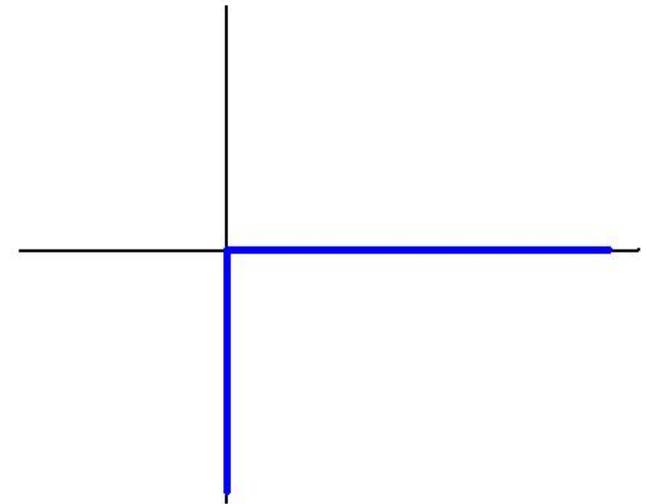
1.1. Modelización.

Reformulación (**problema semilineal multívoco**)

$$-\mathcal{L}v + \alpha v + \gamma(v - h) \ni f(x) \quad \text{en} \quad \Omega \doteq (0, +\infty) \times (0, +\infty),$$

donde

$$\gamma(u) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } u > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{si } u = 0, \\ \emptyset & \text{si } u < 0. \end{cases}$$



(grafo maximal monótono, Brézis, H. (1972)).

Introduciendo $u = v - h$ llegamos a

$$(\mathcal{P}) \quad -\mathcal{L}u + \alpha u + \gamma(u) \ni G(x, y)$$

donde $G(x, y) = f(x) + \mathcal{L}h - \alpha h$.

1.1. Modelización.

- **Generalización** a una función G dependiente de x e y

1.1. Modelización.

- **Generalización** a una función G dependiente de x e y
- **Dificultades**

1.1. Modelización.

- **Generalización** a una función G dependiente de x e y
- **Dificultades**
 - \mathcal{L} es **degenerado** (coeficientes nulos en $x = 0$ ó $y = 0$),

1.1. Modelización.

- **Generalización** a una función G dependiente de x e y
- **Dificultades**
 - \mathcal{L} es **degenerado** (coeficientes nulos en $x = 0$ ó $y = 0$),
 - El dominio Ω es **no acotado**,

1.1. Modelización.

- **Generalización** a una función G dependiente de x e y
- **Dificultades**
 - \mathcal{L} es **degenerado** (coeficientes nulos en $x = 0$ ó $y = 0$),
 - El dominio Ω es **no acotado**,
 - **Ausencia de condiciones de contorno.**

1.2. Existencia de soluciones.

1.2. Existencia de soluciones.

Dos ideas claves:

1.2. Existencia de soluciones.

Dos ideas claves:

- Transformación a un **dominio acotado**.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \quad \Omega &\rightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \\ (x, y) &\mapsto (\theta, \beta) = \mathcal{F}(x, y) = (\arctan x, \arctan y).\end{aligned}$$

1.2. Existencia de soluciones.

Dos ideas claves:

- Transformación a un **dominio acotado**.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \quad \Omega &\rightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \\ (x, y) &\mapsto (\theta, \beta) = \mathcal{F}(x, y) = (\arctan x, \arctan y).\end{aligned}$$

- **Condiciones de contorno de flujo nulo.**

1.2. Existencia de soluciones.

Definimos $w(x, y) = (1 + x^2)^{-m_1} (1 + y^2)^{-m_2}$ (función peso)

1.2. Existencia de soluciones.

Definimos $w(x, y) = (1 + x^2)^{-m_1} (1 + y^2)^{-m_2}$ (**función peso**)

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ v : w^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|u\|_{L_w^2(\Omega)} = \left\| w^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

1.2. Existencia de soluciones.

Definimos $w(x, y) = (1 + x^2)^{-m_1} (1 + y^2)^{-m_2}$ (**función peso**)

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ v : w^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|u\|_{L_w^2(\Omega)} = \left\| w^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$H_w^1(\Omega, \mathbf{A}) = \left\{ v : v \in L_w^2(\Omega), \quad xv_x \in L_w^2(\Omega), \quad yv_y \in L_w^2(\Omega) \right\},$$

$$\|u\|_{H_w^1(\Omega, \mathbf{A})}^2 = \|u\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|xu_x\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|yv_y\|_{L_w^2(\Omega)}^2.$$

1.2. Existencia de soluciones.

Definimos $w(x, y) = (1 + x^2)^{-m_1} (1 + y^2)^{-m_2}$ (**función peso**)

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ v : w^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|u\|_{L_w^2(\Omega)} = \left\| w^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$H_w^1(\Omega, \mathbf{A}) = \left\{ v : v \in L_w^2(\Omega), \quad xv_x \in L_w^2(\Omega), \quad yv_y \in L_w^2(\Omega) \right\},$$

$$\|u\|_{H_w^1(\Omega, \mathbf{A})}^2 = \|u\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|xu_x\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|yu_y\|_{L_w^2(\Omega)}^2.$$

Consideramos el conjunto convexo

$$\mathcal{K} = \left\{ v \in H_w^1(\Omega, \mathbf{A}), v \geq 0 \text{ en } \Omega \right\},$$

1.2. Existencia de soluciones.

Definimos $w(x, y) = (1 + x^2)^{-m_1} (1 + y^2)^{-m_2}$ (**función peso**)

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ v : w^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|u\|_{L_w^2(\Omega)} = \left\| w^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$H_w^1(\Omega, \mathbf{A}) = \left\{ v : v \in L_w^2(\Omega), \quad xv_x \in L_w^2(\Omega), \quad yv_y \in L_w^2(\Omega) \right\},$$

$$\|u\|_{H_w^1(\Omega, \mathbf{A})}^2 = \|u\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|xu_x\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|yv_y\|_{L_w^2(\Omega)}^2.$$

Consideramos el conjunto convexo

$$\mathcal{K} = \left\{ v \in H_w^1(\Omega, \mathbf{A}), v \geq 0 \text{ en } \Omega \right\},$$

Teorema 1 Supongamos $G \in L_w^2(\Omega)$ y α suficientemente grande. Entonces, existe una única solución débil. ■

1.2. Existencia de soluciones.

Definimos $w(x, y) = (1 + x^2)^{-m_1} (1 + y^2)^{-m_2}$ (**función peso**)

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ v : w^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|u\|_{L_w^2(\Omega)} = \left\| w^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$H_w^1(\Omega, \mathbf{A}) = \left\{ v : v \in L_w^2(\Omega), \quad xv_x \in L_w^2(\Omega), \quad yv_y \in L_w^2(\Omega) \right\},$$

$$\|u\|_{H_w^1(\Omega, \mathbf{A})}^2 = \|u\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|xu_x\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \|yv_y\|_{L_w^2(\Omega)}^2.$$

Consideramos el conjunto convexo

$$\mathcal{K} = \left\{ v \in H_w^1(\Omega, \mathbf{A}), v \geq 0 \text{ en } \Omega \right\},$$

Teorema 1 Supongamos $G \in L_w^2(\Omega)$ y α suficientemente grande. Entonces, existe una única solución débil. ■

(Aplicación del Teorema de Stampacchia para inecuaciones variacionales abstractas.)

1.2. Existencia de soluciones.

Proposición 1 Sea u la solución débil del problema. Entonces $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. ■

1.2. Existencia de soluciones.

Proposición 1 Sea u la solución débil del problema. Entonces $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. ■

(“Solución débil y local” en el sentido de Brezis y comparación)

1.2. Existencia de soluciones.

Proposición 1 Sea u la solución débil del problema. Entonces $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. ■

(“Solución débil y local” en el sentido de Brezis y comparación)

Proposición 2 Sea u la solución débil del problema y supongamos, adicionalmente, que

$$w_0 G^+ \in L^\infty(\Omega)$$

$$w_0(x, y) = (1 + x^2)^{-\frac{m_1+1}{8}} (1 + y^2)^{-\frac{m_2+1}{8}}.$$

Entonces

$$0 \leq w_0 u \leq \frac{1}{\alpha - \alpha_0} |G^+ w_0|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{en } \Omega. \quad \blacksquare$$

1.2. Existencia de soluciones.

Proposición 1 Sea u la solución débil del problema. Entonces $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. ■

(“Solución débil y local” en el sentido de Brezis y comparación)

Proposición 2 Sea u la solución débil del problema y supongamos, adicionalmente, que

$$w_0 G^+ \in L^\infty(\Omega)$$

$$w_0(x, y) = (1 + x^2)^{-\frac{m_1+1}{8}} (1 + y^2)^{-\frac{m_2+1}{8}}.$$

Entonces

$$0 \leq w_0 u \leq \frac{1}{\alpha - \alpha_0} |G^+ w_0|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{en } \Omega. \quad \blacksquare$$

(Por comparación con una función auxiliar)

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Notaciones

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Notaciones

- $S^+(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > 0\}$ (conjunto de positividad),

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Notaciones

- $S^+(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > 0\}$ (conjunto de positividad),
- $N(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = 0\}$ (conjunto de coincidencia),

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Notaciones

- $S^+(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > 0\}$ (conjunto de positividad),
- $N(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = 0\}$ (conjunto de coincidencia),
- $T_{a,b}(x, y) = (xe^a, ye^b),$

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Notaciones

- $S^+(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > 0\}$ (conjunto de positividad),
- $N(u) = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = 0\}$ (conjunto de coincidencia),
- $T_{a,b}(x, y) = (xe^a, ye^b)$,
- $\tilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left[\left(\log \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right)^2 + \left(\log \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Teorema 2 Sea u solución del problema. Si

$$S^+(-G - \epsilon) \doteq \overline{\{(x, y) \in \Omega : G(x, y) \leq -\epsilon(x, y)\}}$$

no es vacío,

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Teorema 2 Sea u solución del problema. Si

$$S^+(-G - \epsilon) \doteq \overline{\{(x, y) \in \Omega : G(x, y) \leq -\epsilon(x, y)\}}$$

no es vacío, entonces

$$N(u) \supset \left\{ (x, y) \in T_{R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) \cap T_{-R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) : \tilde{d}((x, y), \partial\Omega) \geq R_0 \right\}$$

1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Teorema 2 Sea u solución del problema. Si

$$S^+(-G - \epsilon) \doteq \overline{\{(x, y) \in \Omega : G(x, y) \leq -\epsilon(x, y)\}}$$

no es vacío, entonces

$$N(u) \supset \left\{ (x, y) \in T_{R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) \cap T_{-R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) : \tilde{d}((x, y), \partial\Omega) \geq R_0 \right\}$$

donde

$$R_0 = \frac{4}{m_1 + m_2 + 2}. \quad \blacksquare$$

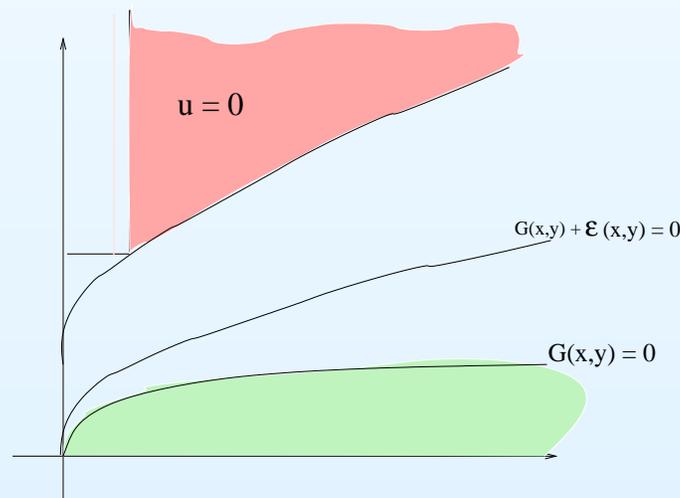
1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Teorema 2 Sea u solución del problema. Si

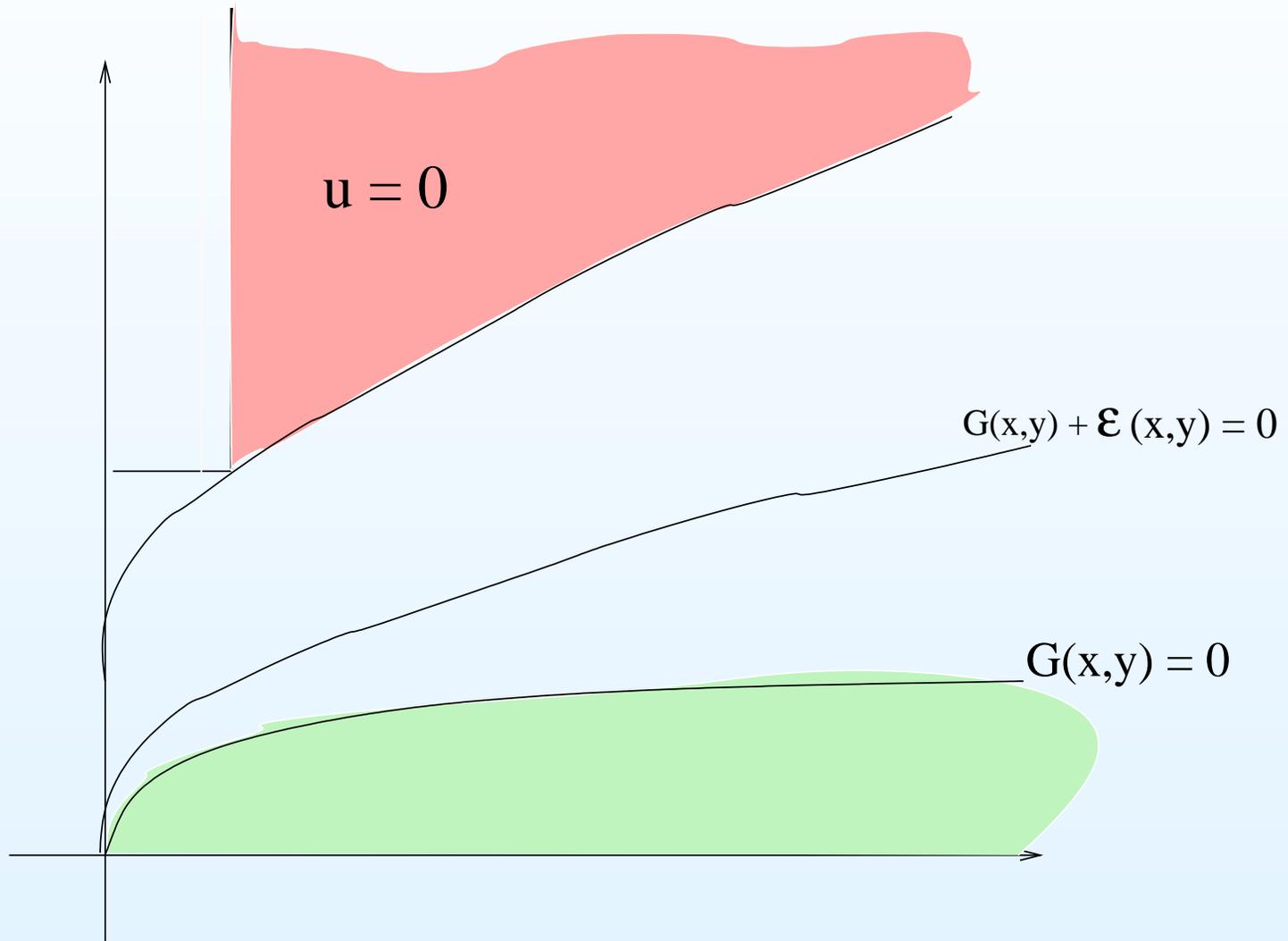
$$S^+(-G - \epsilon) \doteq \overline{\{(x, y) \in \Omega : G(x, y) \leq -\epsilon(x, y)\}}$$

no es vacío, entonces

$$N(u) \supset \left\{ (x, y) \in T_{R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) \cap T_{-R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) : \tilde{d}((x, y), \partial\Omega) \geq R_0 \right\}$$



1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.



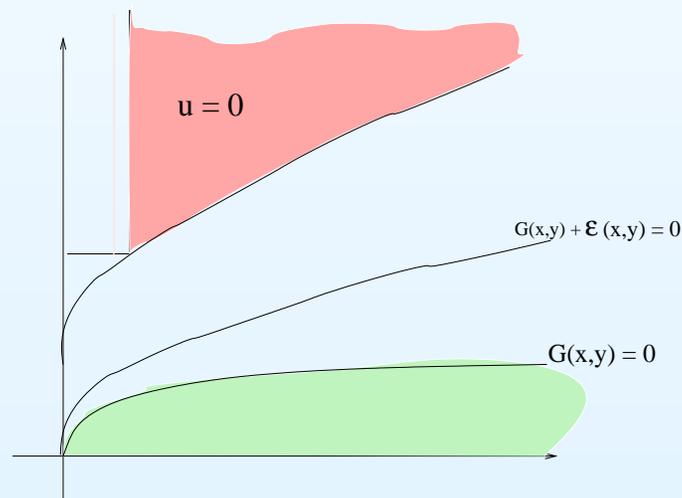
1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Teorema 2 Sea u solución del problema. Si

$$S^+(-G - \epsilon) \doteq \overline{\{(x, y) \in \Omega : G(x, y) \leq -\epsilon(x, y)\}}$$

no es vacío, entonces

$$N(u) \supset \left\{ (x, y) \in T_{R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) \cap T_{-R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) : \tilde{d}((x, y), \partial\Omega) \geq R_0 \right\}$$



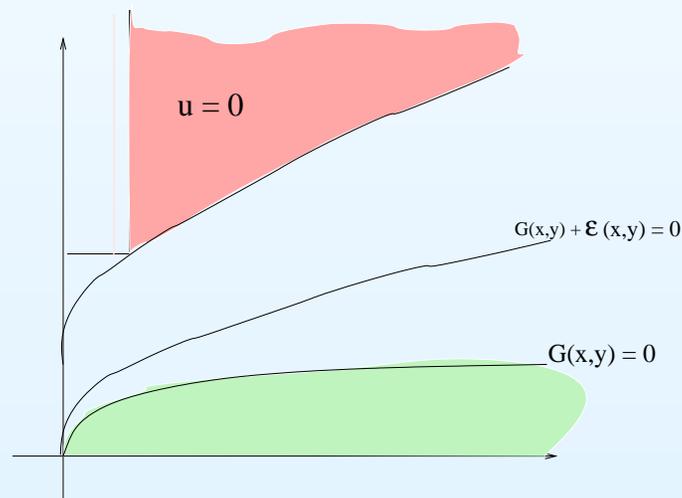
1.3. Estimaciones sobre la localización de la frontera libre.

Teorema 2 Sea u solución del problema. Si

$$S^+(-G - \epsilon) \doteq \overline{\{(x, y) \in \Omega : G(x, y) \leq -\epsilon(x, y)\}}$$

no es vacío, entonces

$$N(u) \supset \left\{ (x, y) \in T_{R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) \cap T_{-R_0, R_0}(S^+(-G - \epsilon)) : \tilde{d}((x, y), \partial\Omega) \geq R_0 \right\}$$



(Técnica de supersolución local introducida por J. I. Díaz (1985)).

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

En este apartado hemos utilizado elementos de Geometría Diferencial para construir una supersolución más global del problema.

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

Supondremos

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

Supondremos

H_1 : Existe $\delta > 0$ tal que $d(\Gamma_\epsilon, \partial\Omega) > \delta$,

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

Supondremos

H₁: Existe $\delta > 0$ tal que $d(\Gamma_\epsilon, \partial\Omega) > \delta$,

H₂: Existe una carta local $(\varphi_{(x_1^0, x_2^0)}, \mathcal{U}_{(x_1^0, x_2^0)})$, e.d. un abierto acotado $\mathcal{U}_{(x_1^0, x_2^0)}$ de \mathbb{R}^2 que contiene a $(0, 0)$ y una función de clase \mathcal{C}^3

$$\varphi_{(x_1^0, x_2^0)} : \mathcal{U}_{(x_1^0, x_2^0)} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $\varphi_{(x_1^0, x_2^0)}(0, 0) = (x_1^0, x_2^0)$, φ transforma $\mathcal{U} \cap \{y_2 = 0\}$ en $\Gamma_\epsilon \cap \varphi(\mathcal{U})$ y $\mathcal{U} \cap \{y_2 > 0\}$ en $S^+(-G - \epsilon) \cap \varphi(\mathcal{U})$.

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

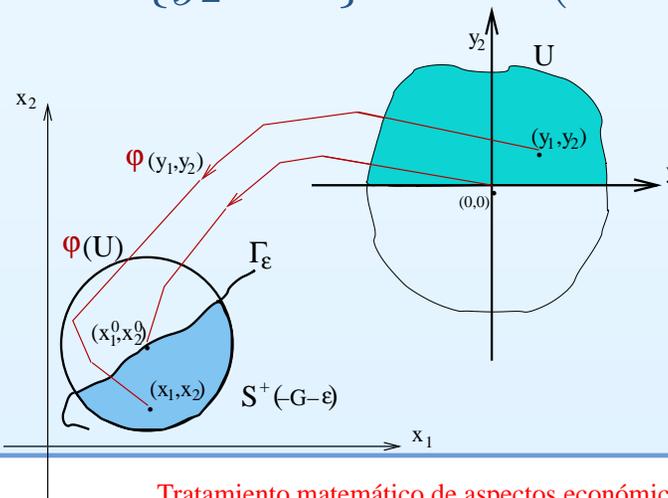
Supondremos

H_1 : Existe $\delta > 0$ tal que $d(\Gamma_\epsilon, \partial\Omega) > \delta$,

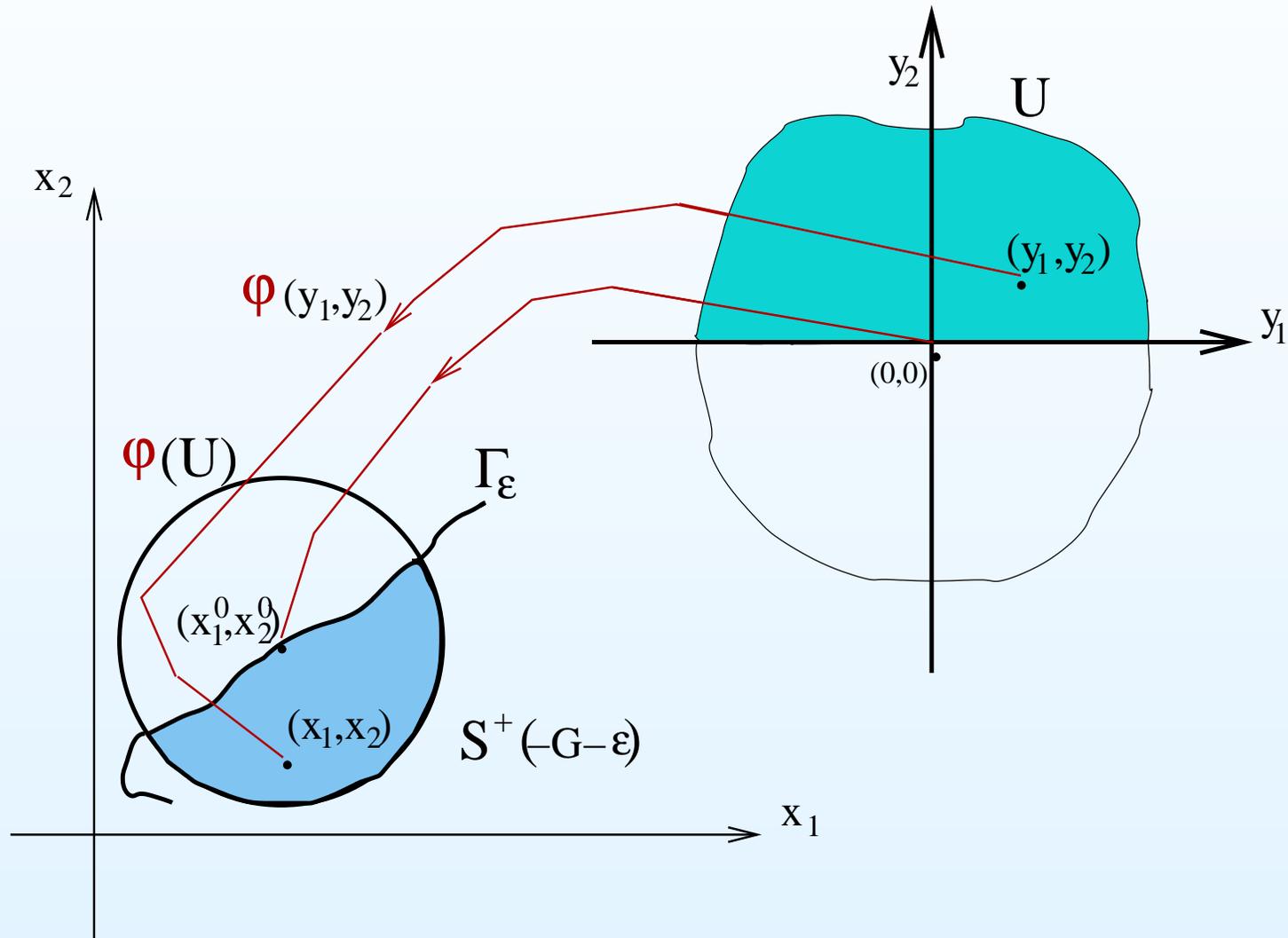
H_2 : Existe una carta local $(\varphi_{(x_1^0, x_2^0)}, \mathcal{U}_{(x_1^0, x_2^0)})$, e.d. un abierto acotado $\mathcal{U}_{(x_1^0, x_2^0)}$ de \mathbb{R}^2 que contiene a $(0, 0)$ y una función de clase C^3

$$\varphi_{(x_1^0, x_2^0)} : \mathcal{U}_{(x_1^0, x_2^0)} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $\varphi_{(x_1^0, x_2^0)}(0, 0) = (x_1^0, x_2^0)$, φ transforma $\mathcal{U} \cap \{y_2 = 0\}$ en $\Gamma_\epsilon \cap \varphi(\mathcal{U})$ y $\mathcal{U} \cap \{y_2 > 0\}$ en $S^+(-G - \epsilon) \cap \varphi(\mathcal{U})$.



1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.



1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

Teorema 3

$$\bar{u}(x_1, x_2) = \bar{u}(\varphi(y_1, y_2)) = \begin{cases} C (\hat{R} - y_2)^2 & \text{si } y_2 \in [0, \hat{R}], \\ 0 & \text{si } y_2 \geq \hat{R}, \end{cases}$$

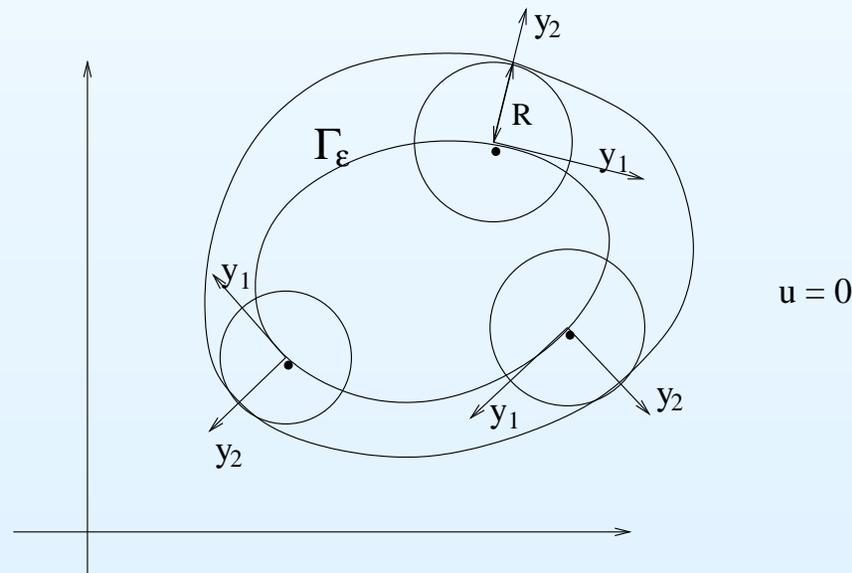
es una supersolución del problema (\mathcal{P}) en un entorno tabular de Γ_ε . ■

1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.

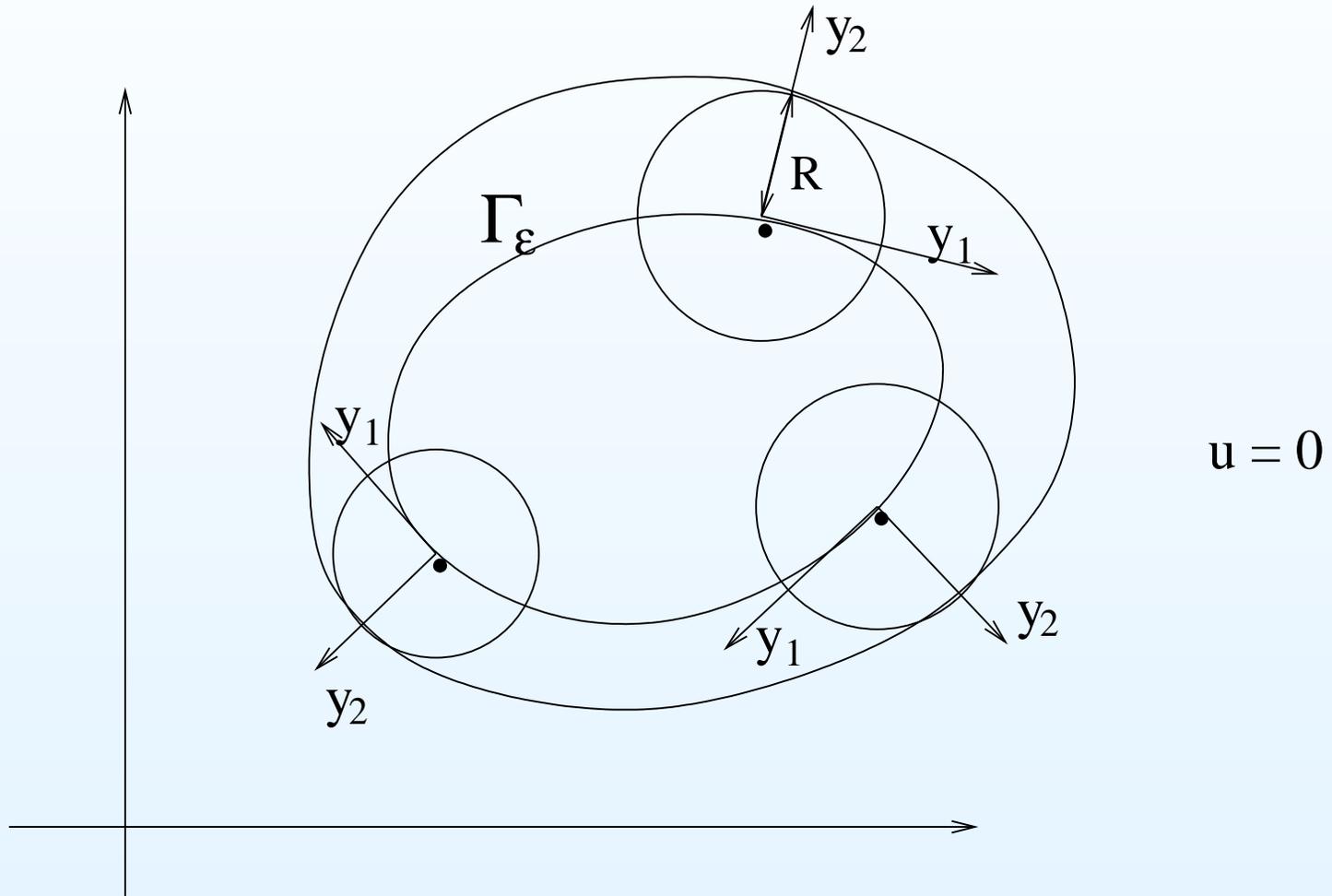
Teorema 3

$$\bar{u}(x_1, x_2) = \bar{u}(\varphi(y_1, y_2)) = \begin{cases} C (\hat{R} - y_2)^2 & \text{si } y_2 \in [0, \hat{R}], \\ 0 & \text{si } y_2 \geq \hat{R}, \end{cases}$$

es una supersolución del problema (\mathcal{P}) en un entorno tabular de Γ_ε . ■



1.4. Una supersolución global cerca de la frontera libre.



Sección 2

*Caso de destrucción parcial del medio ambiente.
Un problema (ficticio) determinista de evolución*

Motivación:

Motivación: destrucción lenta de los beneficios del Medio Ambiente.

Motivación: destrucción lenta de los beneficios del Medio Ambiente.

Problema tratado por Scheinkman y Zariphopoulou (2001).

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1(\mathcal{X}(t))dt + \sqrt{2}\sigma_1(\mathcal{X}(t))dB_1(t) \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2(\mathcal{Y}(t))dt + \sqrt{2}\sigma_2(\mathcal{Y}(t))dB_2(t) \end{cases}$$

Motivación: destrucción lenta de los beneficios del Medio Ambiente.

Problema tratado por Scheinkman y Zariphopoulou (2001).

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1(\mathcal{X}(t))dt + \sqrt{2}\sigma_1(\mathcal{X}(t))dB_1(t) \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2(\mathcal{Y}(t))dt + \sqrt{2}\sigma_2(\mathcal{Y}(t))dB_2(t) \end{cases}$$

donde B_1 y B_2 son movimientos Brownianos cuya correlación $\rho \in (-1, 1)$.

Motivación: destrucción lenta de los beneficios del Medio Ambiente.

Problema tratado por Scheinkman y Zariphopoulou (2001).

$$\begin{cases} d\mathcal{X}(t) = \mu_1(\mathcal{X}(t))dt + \sqrt{2}\sigma_1(\mathcal{X}(t))dB_1(t) \\ d\mathcal{Y}(t) = \mu_2(\mathcal{Y}(t))dt + \sqrt{2}\sigma_2(\mathcal{Y}(t))dB_2(t) \end{cases}$$

donde B_1 y B_2 son movimientos Brownianos cuya correlación $\rho \in (-1, 1)$. Supongamos que, para $i = 1, 2$, las funciones μ_i y σ_i son Lipschitz continuas, tales que

$$|\mu_i(z_1) - \mu_i(z_2)| + |\sigma_i(z_1) - \sigma_i(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|.$$

$$\text{y } \mu_i(0) = \sigma_i(0) = 0.$$

Sea $\theta(t)$ fracción de la transformación del Medio Ambiente por el proyecto industrial. ($\theta(t) \in [0, 1]$).

Sea $\theta(t)$ **fracción de la transformación** del Medio Ambiente por el **proyecto industrial**. ($\theta(t) \in [0, 1]$).

Definimos la **utilidad acumulada** como

$$J(x, y, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} U((1 - \theta(s)) \mathcal{X}(s), \theta(s) \mathcal{Y}(s)) ds \right]$$

Sea $\theta(t)$ **fracción de la transformación** del Medio Ambiente por el **proyecto industrial**. ($\theta(t) \in [0, 1]$).

Definimos la **utilidad acumulada** como

$$J(x, y, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} U((1 - \theta(s)) \mathcal{X}(s), \theta(s) \mathcal{Y}(s)) ds \right]$$

El **flujo de utilidad** está dado por $U((1 - \theta(t)) \mathcal{X}(t), \theta(t) \mathcal{Y}(t))$

Sea $\theta(t)$ **fracción de la transformación** del Medio Ambiente por el **proyecto industrial**. ($\theta(t) \in [0, 1]$).

Definimos la **utilidad acumulada** como

$$J(x, y, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} U((1 - \theta(s)) \mathcal{X}(s), \theta(s) \mathcal{Y}(s)) ds \right]$$

El **flujo de utilidad** está dado por $U((1 - \theta(t)) \mathcal{X}(t), \theta(t) \mathcal{Y}(t))$ donde U es continua cóncava creciente y $U(0, 0) = 0$.

Sea $\theta(t)$ **fracción de la transformación** del Medio Ambiente por el **proyecto industrial**. ($\theta(t) \in [0, 1]$).

Definimos la **utilidad acumulada** como

$$J(x, y, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} U((1 - \theta(s)) \mathcal{X}(s), \theta(s) \mathcal{Y}(s)) ds \right]$$

El **flujo de utilidad** está dado por $U((1 - \theta(t)) \mathcal{X}(t), \theta(t) \mathcal{Y}(t))$ donde U es continua cóncava creciente y $U(0, 0) = 0$.

En la Sección 1

$$\theta = \mathbb{I}_{[T, \infty)},$$

y

$$U((1 - \theta(t)) x, \theta(t) y) = (1 - \theta) f(x) + \theta y.$$

Sea $\theta(t)$ **fracción de la transformación** del Medio Ambiente por el **proyecto industrial**. ($\theta(t) \in [0, 1]$).

Definimos la **utilidad acumulada** como

$$J(x, y, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} U((1 - \theta(s)) \mathcal{X}(s), \theta(s) \mathcal{Y}(s)) ds \right]$$

El **flujo de utilidad** está dado por $U((1 - \theta(t)) \mathcal{X}(t), \theta(t) \mathcal{Y}(t))$ donde U es continua cóncava creciente y $U(0, 0) = 0$.

Se dan los datos iniciales

$$\begin{cases} \mathcal{X}(0) = x \in \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{Y}(0) = y \in \mathbb{R}^+, \\ \theta(0) = \theta \in [0, 1]. \end{cases}$$

Objetivo principal:

Objetivo principal: estudiar

$$v(x, y, \theta) = \sup_{\mathcal{A}_\theta} J(x, y, \theta).$$

Objetivo principal: estudiar

$$v(x, y, \theta) = \sup_{\mathcal{A}_\theta} J(x, y, \theta).$$

Por el Principio de la Programación Dinámica, la función optimal v satisface el problema de obstáculo

$$\text{mín}\{-\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y), v_\theta\} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

Objetivo principal: estudiar

$$v(x, y, \theta) = \sup_{\mathcal{A}_\theta} J(x, y, \theta).$$

Por el Principio de la Programación Dinámica, la función optimal v satisface el problema de obstáculo

$$\text{mín}\{-\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y), v_\theta\} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

\mathcal{L} operador diferencial asociado a la multidifusión $(X(t), Y(t))$.

Objetivo principal: estudiar

$$v(x, y, \theta) = \sup_{\mathcal{A}_\theta} J(x, y, \theta).$$

Por el Principio de la Programación Dinámica, la función optimal v satisface el problema de obstáculo

$$\min\{-\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y), v_\theta\} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

Señalemos que en Scheinkman y Zariphopoulou (2001) se caracteriza el tipo de soluciones (de viscosidad) pero no se dan resultados sobre su existencia.

Objetivo principal: estudiar

$$v(x, y, \theta) = \sup_{\mathcal{A}_\theta} J(x, y, \theta).$$

Por el Principio de la Programación Dinámica, la función optimal v satisface el problema de obstáculo

$$\min\{-\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y), v_\theta\} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

Nuestra principal aportación consiste en interpretar el parámetro θ como un (falso) tiempo.

Formulación como un **problema de evolución retrogrado** en θ :

Formulación como un **problema de evolución retrogrado** en θ :
 hallar $v : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \min \{-v_\theta, -\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y)\} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A} \nabla v \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ v(x, y, 1) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} U(0, \mathcal{Y}(s)) ds \right] & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Formulación como un **problema de evolución retrogrado** en θ :
 hallar $v : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \min \{-v_\theta, -\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y)\} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A} \nabla v \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ v(x, y, 1) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} U(0, \mathcal{Y}(s)) ds \right] & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde ν es el vector normal exterior unitario

Formulación como un **problema de evolución retrogrado** en θ :
 hallar $v : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \min \{-v_\theta, -\mathcal{L}v + \alpha v - U((1 - \theta)x, \theta y)\} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A} \nabla v \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ v(x, y, 1) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} U(0, \mathcal{Y}(s)) ds \right] & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde ν es el vector normal exterior unitario y \mathbf{A} es la matriz definida por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(x) & \sigma_1(x)\sigma_2(y)\varrho \\ \sigma_1(x)\sigma_2(y)\varrho & \sigma_2^2(y) \end{pmatrix}.$$

Nuestro tratamiento comienza por introducir los cambios

$$t = 1 - \theta \quad \text{y} \quad u(x, y, t) = v(x, y, 1 - t) - F(x, y, t),$$

Nuestro tratamiento comienza por introducir los cambios

$$t = 1 - \theta \quad \text{y} \quad u(x, y, t) = v(x, y, 1 - t) - F(x, y, t),$$

con $F(x, y, t)$ dada por

$$\begin{cases} -\mathcal{L}F + \alpha F = U(tx, (1-t)y) & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A}\nabla F \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1). \end{cases}$$

Nuestro tratamiento comienza por introducir los cambios

$$t = 1 - \theta \quad \text{y} \quad u(x, y, t) = v(x, y, 1 - t) - F(x, y, t),$$

con $F(x, y, t)$ dada por

$$\begin{cases} -\mathcal{L}F + \alpha F = U(tx, (1 - t)y) & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A}\nabla F \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1). \end{cases}$$

La formulación con las nuevas notaciones es

$$\begin{cases} \text{mín} \{u_t + F_t, -\mathcal{L}u + \alpha u\} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A}\nabla u \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ u(x, y, 0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Formulación como un **problema parabólico semilineal multivaluado**.

Formulación como un **problema parabólico semilineal multivaluado**.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \ni g(x, y, t) & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A}\nabla u \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ u(x, y, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Formulación como un **problema parabólico semilineal multivaluado**.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \ni g(x, y, t) & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A}\nabla u \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ u(x, y, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde

$$g(x, y, t) = -\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t)$$

Formulación como un **problema parabólico semilineal multivaluado**.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \ni g(x, y, t) & \text{en } \Omega \times (0, 1), \\ \mathbf{A} \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, 1), \\ u(x, y, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde

$$g(x, y, t) = -\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t)$$

y γ es grafo maximal monótono

$$\gamma(u) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } u < 0, \\ (-\infty, 0] & \text{si } u = 0, \\ 0 & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

2.1. Existencia de solución del problema.

2.1. Existencia de solución del problema.

Definimos el **operador multivaluado**

$$\mathcal{C} : D(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(L^\infty(\Omega)),$$

2.1. Existencia de solución del problema.

Definimos el **operador multivaluado**

$$\mathcal{C} : D(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(L^\infty(\Omega)),$$

con

$$\mathcal{C}u = \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \quad \text{si } u \in D(\mathcal{C}),$$

2.1. Existencia de solución del problema.

Definimos el **operador multivaluado**

$$\mathcal{C} : D(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(L^\infty(\Omega)),$$

con

$$\mathcal{C}u = \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \quad \text{si } u \in D(\mathcal{C}),$$

para

$$D(\mathcal{C}) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\mathbf{A}, \Omega) : \right. \\ \left. -\mathcal{L}u + \alpha u \in L^\infty(\Omega), \quad \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \in L^\infty(\Omega) \right\}.$$

2.1. Existencia de solución del problema.

Definimos el **operador multivaluado**

$$\mathcal{C} : D(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(L^\infty(\Omega)),$$

con

$$\mathcal{C}u = \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \quad \text{si } u \in D(\mathcal{C}),$$

para

$$D(\mathcal{C}) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\mathbf{A}, \Omega) : \right. \\ \left. -\mathcal{L}u + \alpha u \in L^\infty(\Omega), \quad \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \in L^\infty(\Omega) \right\}.$$

Lema 1 El operador \mathcal{C} es m-T-acretivo en $L^\infty(\Omega)$. ■

2.1. Existencia de solución del problema.

Definimos el **operador multivaluado**

$$\mathcal{C} : D(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(L^\infty(\Omega)),$$

con

$$\mathcal{C}u = \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \quad \text{si } u \in D(\mathcal{C}),$$

para

$$D(\mathcal{C}) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\mathbf{A}, \Omega) : \right. \\ \left. -\mathcal{L}u + \alpha u \in L^\infty(\Omega), \quad \gamma(-\mathcal{L}u + \alpha u) \in L^\infty(\Omega) \right\}.$$

Lema 1 El operador \mathcal{C} es m-T-acretivo en $L^\infty(\Omega)$. ■

(para la T-acretividad empleamos técnicas (J.I Díaz(1985) y para la m-acretividad empleamos resultados del Capítulo 1).

2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

En esta sección estudiamos el dominio espacio-temporal de anulación del operador

$$-\mathcal{L}u + \alpha u$$

que corresponde a cuando el **control óptimo del problema** **consiste en preservar el medio Ambiente.**

2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

Teorema 4 Sea U tal que la función $F(x, y, t)$ verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists t_0 \in [0, 1] \text{ tal que } \rho(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, 1] \\ \text{siendo} \\ \rho(t) \doteq \min_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) \right) = - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} (g(x, y, t)) . \end{array} \right.$$

2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

Teorema 4 Sea U tal que la función $F(x, y, t)$ verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists t_0 \in [0, 1] \text{ tal que } \rho(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, 1] \\ \text{siendo} \\ \rho(t) \doteq \min_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) \right) = - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} (g(x, y, t)). \end{array} \right.$$

y $\exists t_1 \in [t_0, 1]$ tal que

$$\int_0^{t_0} \|g(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq \int_{t_0}^{t_1} - \max[g(x, y, \tau)] d\tau.$$

2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

Teorema 4 Sea U tal que la función $F(x, y, t)$ verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists t_0 \in [0, 1] \text{ tal que } \rho(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, 1] \\ \text{siendo} \\ \rho(t) \doteq \min_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) \right) = - \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} (g(x, y, t)). \end{array} \right.$$

y $\exists t_1 \in [t_0, 1]$ tal que

$$\int_0^{t_0} \|g(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq \int_{t_0}^{t_1} -\max[g(x, y, \tau)] d\tau.$$

Entonces

$$-\mathcal{L}u + \alpha u = 0 \quad \forall t \in [t_1, 1] \text{ y } \forall (x, y) \in \Omega,$$



$$v(x, y, \theta) = F(x, y, 1 - \theta) \quad \forall \theta \in [0, 1 - t_1] \text{ y } \forall (x, y) \in \Omega. \quad \blacksquare$$

2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

La idea de la demostración es utilizar que el operador \mathcal{C} es multivaluado en el origen y que $g(t) \in \mathcal{C}(0)$ para demostrar que existe $t_0 \in (0, T)$ tal es que $u(t_1) = 0$ y por consiguiente

$$\hat{u}(t, \cdot) = \begin{cases} u(t, \cdot) & \text{si } t \in (0, t_1), \\ 0 & \text{si } t \in (t_1, 1), \end{cases}$$

sería también solución del problema.

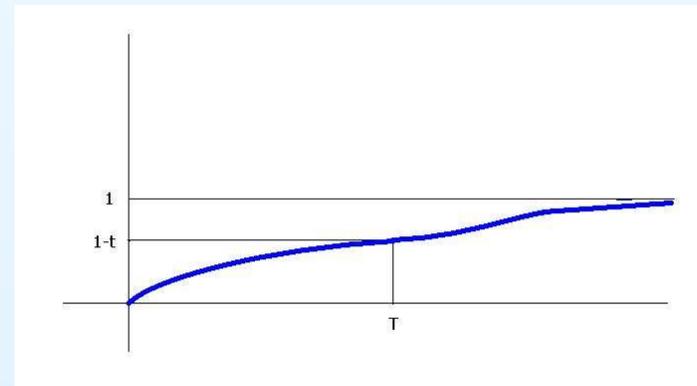
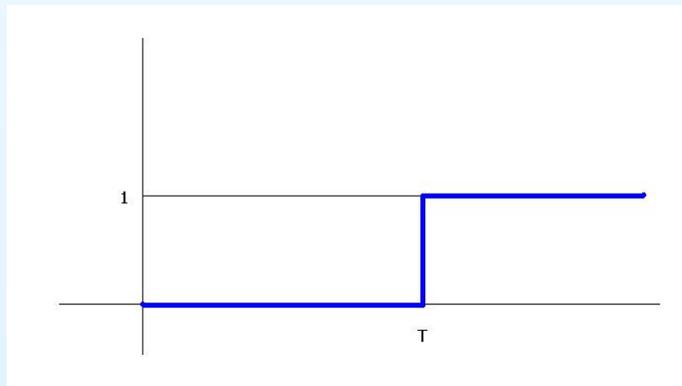
2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

La idea de la demostración es utilizar que el operador \mathcal{C} es multivaluado en el origen y que $g(t) \in \mathcal{C}(0)$ para demostrar que existe $t_0 \in (0, T)$ tal es que $u(t_1) = 0$ y por consiguiente

$$\hat{u}(t, \cdot) = \begin{cases} u(t, \cdot) & \text{si } t \in (0, t_1), \\ 0 & \text{si } t \in (t_1, 1), \end{cases}$$

sería también solución del problema.

Observación 1



2.2. El dominio de preservación del Medio Ambiente.

La idea de la demostración es utilizar que el operador \mathcal{C} es multivaluado en el origen y que $g(t) \in \mathcal{C}(0)$ para demostrar que existe $t_0 \in (0, T)$ tal es que $u(t_1) = 0$ y por consiguiente

$$\widehat{u}(t, \cdot) = \begin{cases} u(t, \cdot) & \text{si } t \in (0, t_1), \\ 0 & \text{si } t \in (t_1, 1), \end{cases}$$

sería también solución del problema.

Observación 2 En el caso de $\sigma_i(z) = \sigma_i z$, y $\mu_i(z) = \mu_i z$, todas las hipótesis anteriores se verifican si por ejemplo

$$U(x, y, \theta) = \log((1 - \theta)x) - \log(\theta y) + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \mu_1 + \mu_2.$$