Lubricación con cavitación: resultados de unicidad de soluciones por Sixto Álvarez

J. I. Díaz

Universidad Complutense de Madrid

Seminario de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
29 de junio de 2023

0. Introducción

Las palabras sirven para fijar lo que flota en el ambiente,…
Esta conferencia pretende expresar el gran aprecio, que flota en el ambiente y que todos tenemos hacia Sixto.

Objetivo principal: resaltar el gran impacto y mérito de sus resultados sobre el modelo matemático para la *lubricación con cavitación*:
[de su tesis doctoral (1986) a la tesis de su alumno Rachid Ouija (1998)].

Plan:

1. **Lubricación con cavitación: unicidad de soluciones.**

1.1. Lubricación (sin cavitación): de las ecuaciones de Navier-Stokes a la ecuación de Reynolds.

1.2. Lubricación con cavitación: formulación débil. Unicidad de soluciones.

1.3. Otros resultados sobre Lubricación (de Sixto y de nuestro entorno).

2. **Otros resultados y facetas profesionales de Sixto.**

1. Lubricación con Cavitación.

1.1. Lubricación (sin cavitación): de las ecuaciones de Navier-Stokes a la ecuación de Reynolds

Tribología

39 idiomas

Artículo Discusión Leer Editar Ver historial Herramientas

La **tribología** (del griego τρίβω *tríbō*, "frotar o rozar") es la ciencia que estudia las superficies que interactúan en movimiento relativo, y cualquier aspecto que esté relacionado con el diseño de los de una máquina como la fricción, el desgaste y la lubricación. El término es usado universalmente desde finales del siglo xx.

Para entender la tribología se requieren conocimientos de otras ciencias, como los son, la física, la química, las matemáticas, la ingeniería, la informática, la tecnología de materiales y muchas otras. Las tareas del especialista en tribología (tribólogo) son las de reducir la fricción y el desgaste mediante la lubricación de las superficies en contacto para así conservar y reducir energía, lograr movimientos más rápidos y precisos, incrementar la productividad, reducir el mantenimiento y ampliar el periodo de vida útil de la máquina.

Desgaste en los dientes de un engranaje debido a la fricción.

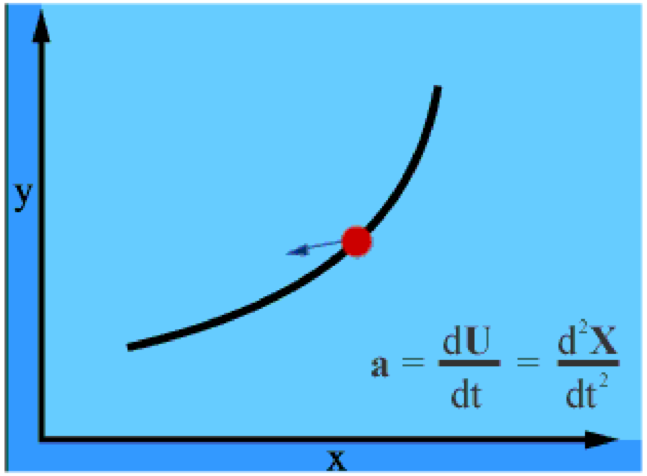
Historia [editar]

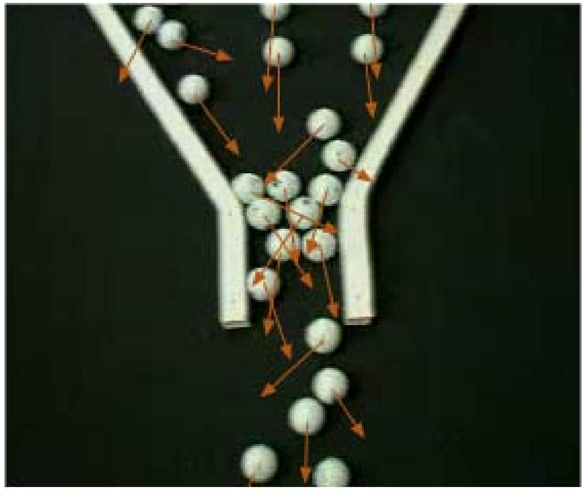
Algunos conceptos muy básicos de la Mecánica de Fluidos:

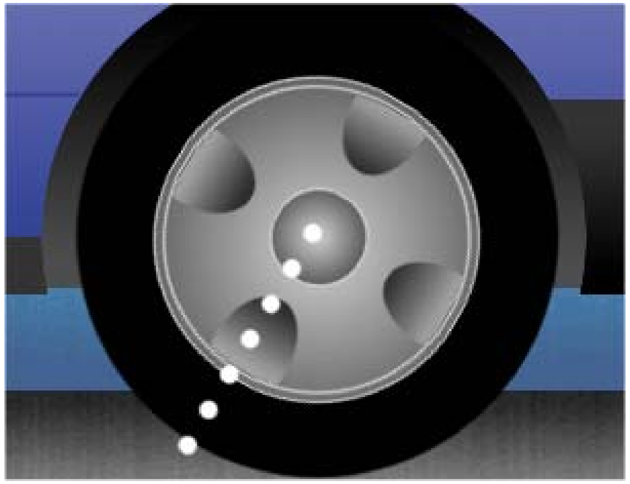
Curso de Doctorado del Instituto de España (en la UCM)
"Introducción a la Mecánica de Fluidos" ,
con A. Liñán, (1994-2004)

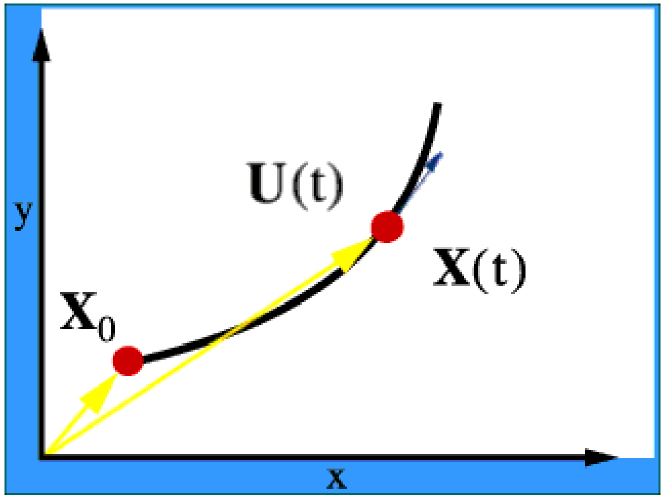
Amable Liñán Martínez (1934-).
"Nieto" de von Karman
(Tesis: California 1963, F.E. Marbel)

2ª Ley de Newton F=ma





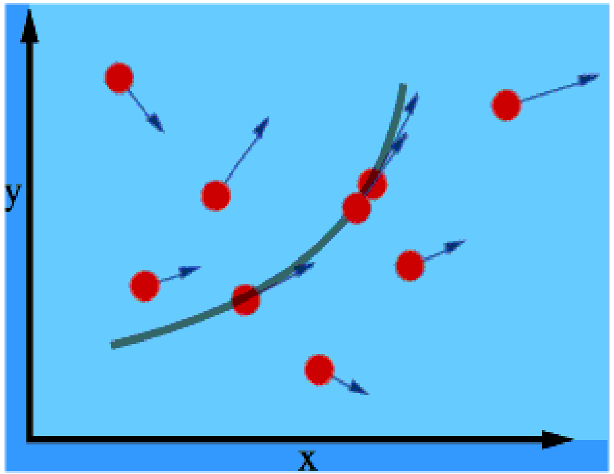


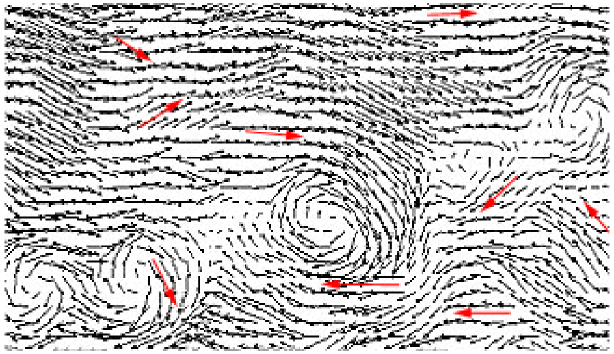


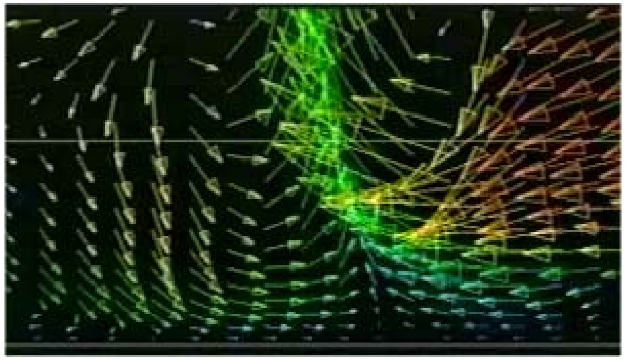
$$\mathbf{U}(t;\mathbf{X}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(t;\mathbf{X}_0)}{\partial t}$$

$$\mathbf{a}(t;\mathbf{X}_0) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}(t;\mathbf{X}_0)}{\partial t^2}$$

Descripción espacial
o Euleriana



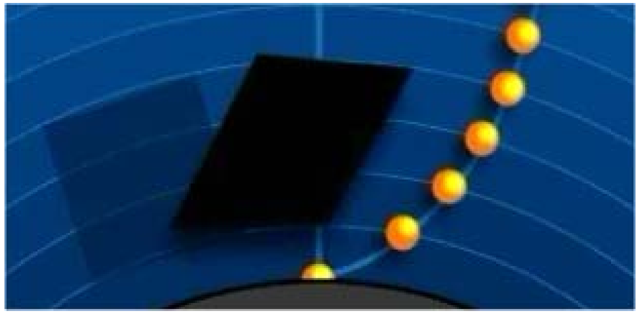




$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \bullet \nabla)\mathbf{u}$$

La aceleración como término “no lineal”

Los otros términos de ma=F



Masa / volumen = densidad

Fluidos:

•Incompresibles (densidad constante)

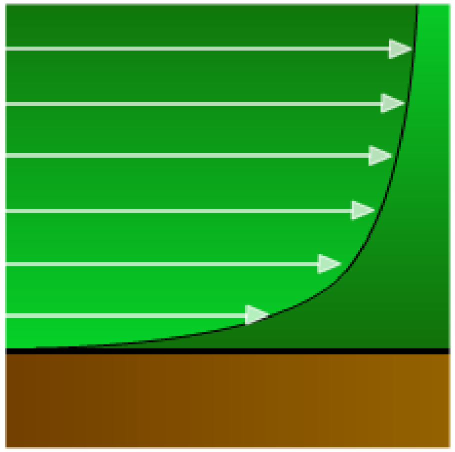
•Compresibles (densidad variable)

Fuerzas internas: presión y esfuerzos viscosos

El sistema de ecuaciones de Navier-Stokes

$$\boxed{\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = \mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}} \quad \text{en } \Omega\times(0,+\infty)$$

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{u} = 0}$$



Condiciones de contorno

$$\boxed{\mathbf{u}=0 \text{ en } \partial\Omega\times(0,+\infty)}$$

Los fluidos (viscosos) se adhieren a las paredes sólidas

Condición inicial

$$\boxed{\mathbf{u}(x,0)=\mathbf{u}_0(\mathrm{x}) \text{ en } \Omega.}$$

Problema abierto (singularidad y unicidad en 3d) el 29 de junio de 2023, …

Esfuerzos internos: modelos alternativos

Daniel Bernoulli (solo presión, propiedades de los flujos: principio de Bernoulli)

(1700-1782)

Leonhard Euler (1707-1783)

Principes generaux de l'etat d'equlibre des fluides (1755)

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right]=-\nabla p$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$$

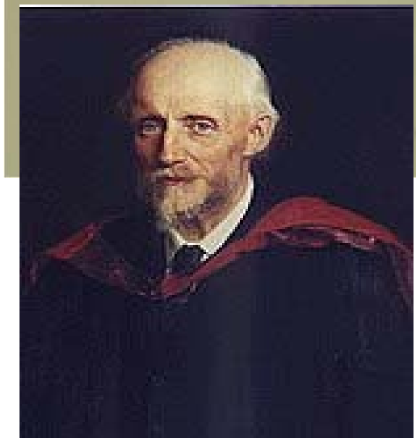
(*fluido incompresible aislado*)

"La teoría de los fluidos queda reducida a dos ecuaciones: solo falta el cultivo de su análisis matemático que no ha sido desarrollado aún".

IV. *On the Theory of Lubrication and its Application to Mr.* BEAUCHAMP TOWER'S *Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil.*

By Professor OSBORNE REYNOLDS, *LL.D., F.R.S.*

Received December 29, 1885,—Read February 11, 1886.



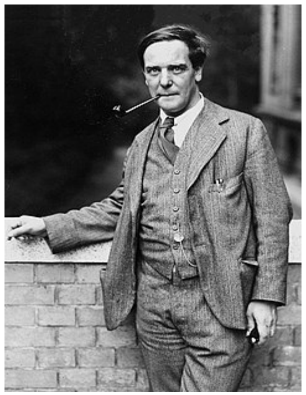
Osborne Reynolds
(1842 –1912)

Otras contribuciones históricas sobre Lubricación:

En Aquisgrán [editar]

En 1900, Sommerfeld fue nombrado profesor extraordinario de la cátedra de Mecánica Aplicada de la Königliche Technische Hochschule de Aquisgrán (más tarde Universidad RWTH de Aquisgrán), gracias a las gestiones de Klein. En Aquisgrán desarrolló la teoría de la hidrodinámica, que le interesaría durante mucho tiempo. Más tarde, en la Universidad de Múnich, los alumnos de Sommerfeld Ludwig Hopf y Werner Heisenberg escribirían sus tesis doctorales sobre este tema.[11][6][4][8] Por sus contribuciones al conocimiento de la lubricación de cojinetes de deslizamiento durante su estancia en Aquisgrán, fue nombrado uno de los 23 "Hombres de la Tribología" por Duncan Dowson.[12]

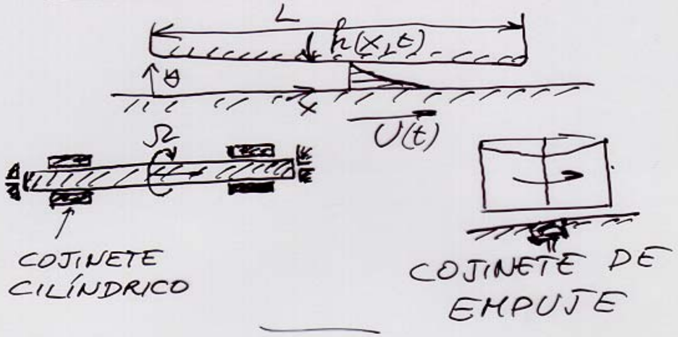
Arnold Sommerfeld
(1868-1951)



Piotr Kapitsa (1894 –1984)
Trabajos de 1948 (thin film of liquid flows)
Premio Nobel 1987

TEORIA DE LA LUBRICACIÓN FLUIDODINÁMICA (REYNOLDS)

LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA



ZAPATA BIDIMENSIONAL

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$U_c/L = V_c/h_0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right)$$

$$\rho U_c/t_0 \quad \rho U_c^2/L \quad \delta_x p/L \quad \mu U_c/h_0^2 \quad \mu U_c/L^2$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right)$$

$$\rho V_c/t_0 \quad \rho U_c V_c/L \quad \delta_y p/h_0 \quad \mu\frac{V_c}{h_0^2} \quad \mu\frac{V_c}{L^2}$$

$$y=0:\ u=U(t),\ v=0$$

$$y=h(x,t):\ u=0,\ v=\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\delta_y p}{\delta_x p}\sim\left(\frac{h_0}{L}\right)^2}$$

$$U(t) \to U_c,\ t_0 \quad : \quad h(x,t) \to h_0,\ L,\ t_0$$

$$h_0/L \ll 1,\quad h_0^2/\nu t_0 \ll 1;\quad \frac{h_0^2}{\nu}\frac{L}{U_c} \ll 1$$

HIPOTÉSIS DE LA TEORIA DE LA LUBRICACIÓN

$h_0/L \ll 1$ (CAPAS DELGADAS)

$h_0^2/\nu t_0 \ll 1$ (ACELERACION LOCAL DESPREC.)

$\frac{U h_0}{\nu}\frac{h_0}{L} \ll 1$ (ACELERACIÓN CONVECTIVA DESPRECIABLE)

ECUACIONES (DE STOKES) SIMPLIFICADAS

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial y} \to p=p(x,t)\ ?$$

$$y=0:\ u=U(t),\ v=0$$

$$y=h(x,t):\ u=0,\ v=\partial h/\partial t$$

$$u=\underbrace{U\left(1-\frac{y}{h}\right)}_{\text{Couette}}+\underbrace{\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-h)}_{\text{Poiseuille}}$$

$$v=-\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy \to \frac{\partial h}{\partial t}=-\int_0^h\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy=0} \qquad q_x=\int_0^h u\,dy$$

$$q_x=\frac{Uh}{2}-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

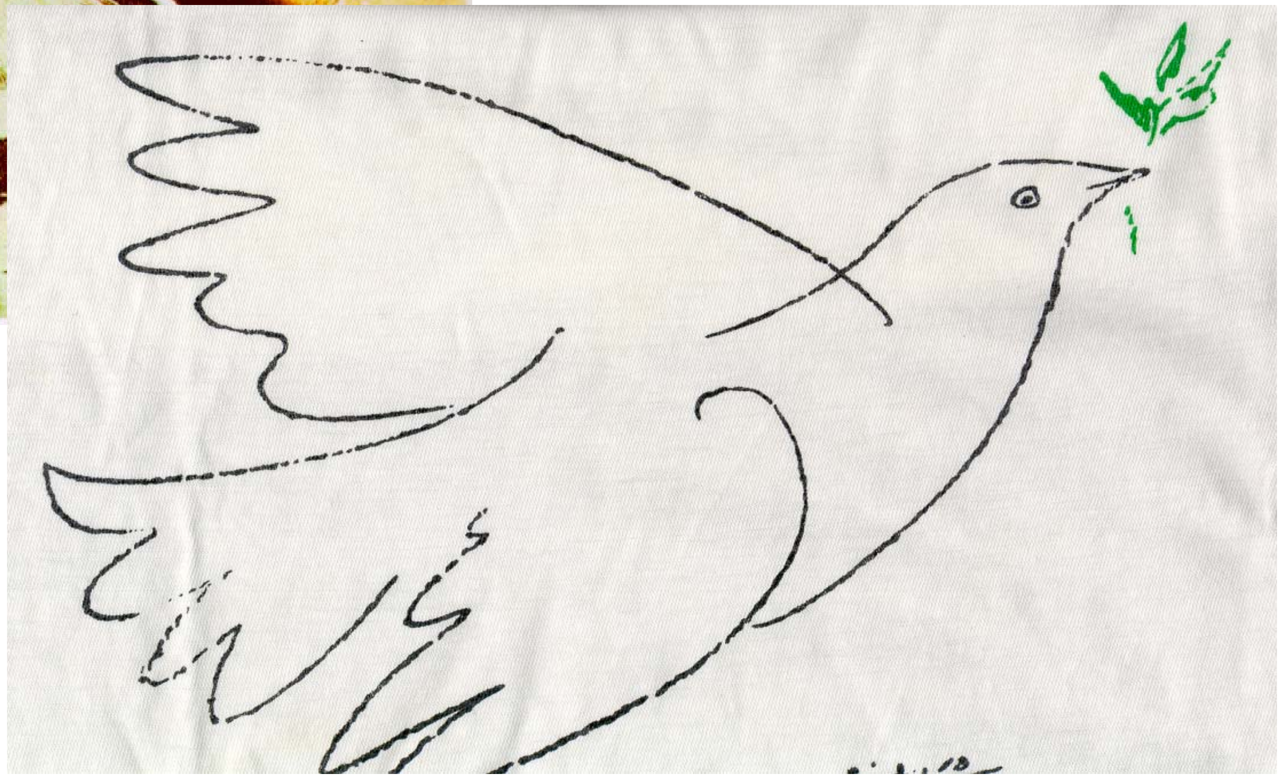
$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Uh}{2}-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0$$

(ECUACIÓN DE REYNOLDS DE LA LUBRICACIÓN)

Una deducción totalmente rigurosa:

S. A. Nazarov, Asymptotic solution of Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of a fluid, Sibirsk. Mat. Zh., 31, (1986), 131–144.

Modelización: puntos de coincidencia con el arte



1.2. Lubricación con cavitación: Formulación débil. Unicidad de soluciones

Tesis de Sixto:

PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE EN TEORIA DE LUBRIFICACION

Jesús Alvarez Contreras

Madrid, Octubre, 1986

Director: D. José Carrillo Menéndez
Prof. Titular de la Facultad de
Ciencias Matemáticas.
Universidad Complutense

COMMUN. IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 19(11&12), 1743–1761 (1994)

A FREE BOUNDARY PROBLEM IN THEORY OF LUBRICATION

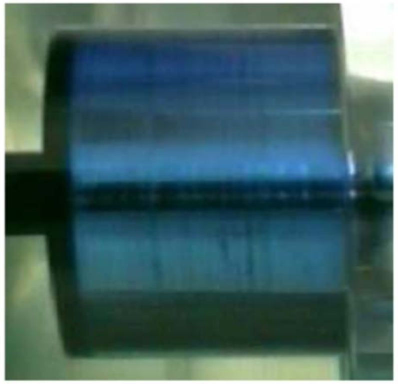
S.J. Alvarez

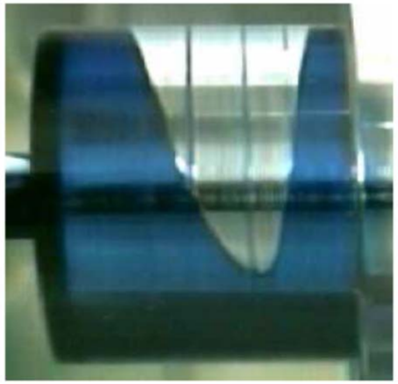
Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Químicas.
Universidad Complutense
Madrid-28040 (Spain)

J. Carrillo

Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense
Madrid-28040 (Spain)

El deterioro sufrido a causa del rozamiento entre dos superficies puede llegar a ser crítico ya que las piezas de una máquina pueden llegar a perder sus tolerancias y quedar inservibles.
Uno de los desgastes más frecuentes es por "cavitación": el aceite lubricante fluye a través de una zona donde la presión es inferior a su presión de vapor, el aceite hierve y forma burbujas de vapor, que son transportadas (por el propio aceite) hasta otra zona de mayor presión, donde ese vapor se transforma en líquido de forma súbita, generando fugas sobre las superficies metálicas que dan lugar a la aparición de picaduras y grietas.





La región de cavitación entre cojinetes (bearings) puede tener un borde (frontera libre) muy irregular

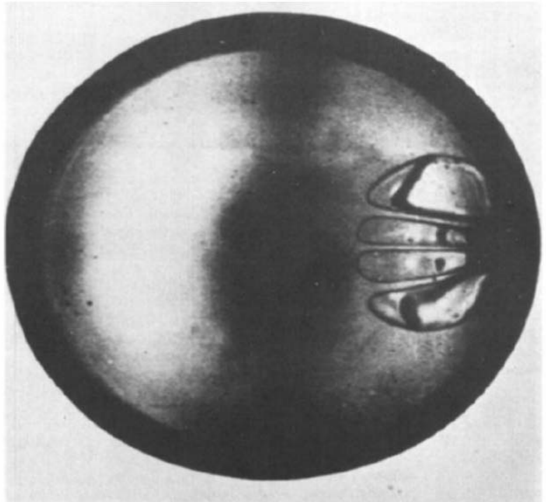


Figure 3 Cavitation with a spherical cap near a moving plane surface (motion left to right).

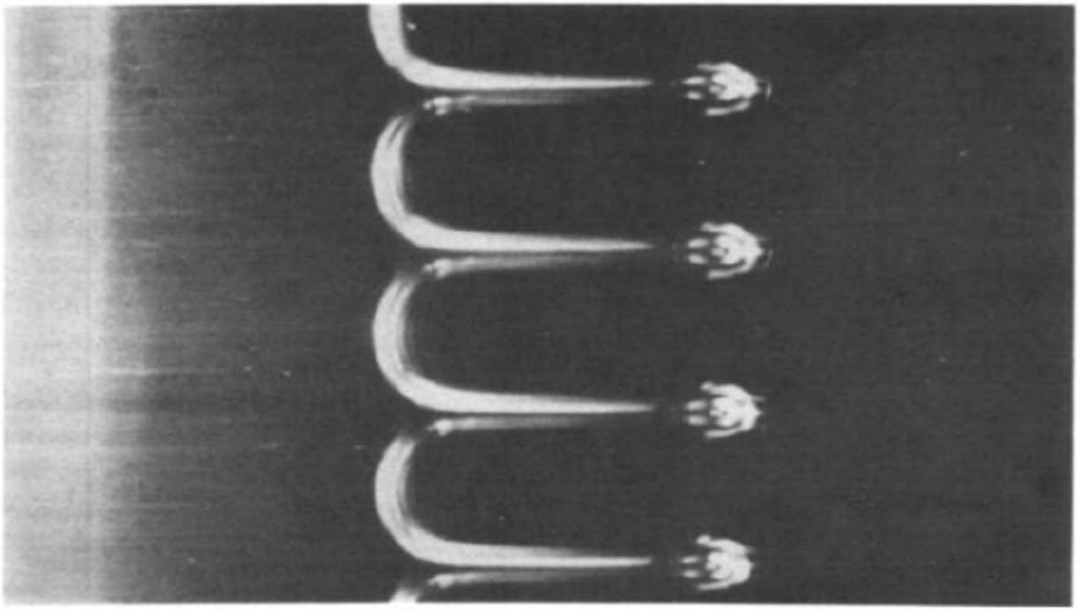


Figure 6 Cavitation between a rotating cylinder near a stationary plane (motion left to right).

Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. 11 : 35–66

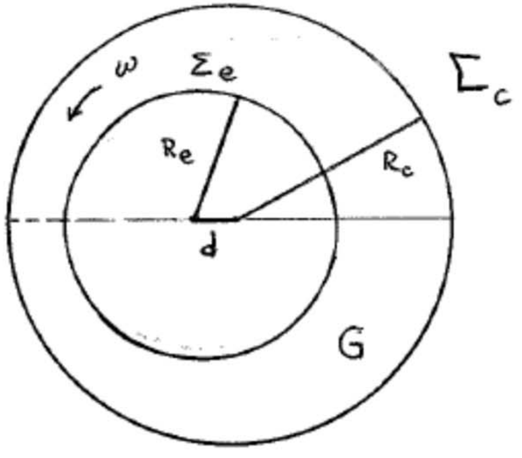
CAVITATION IN BEARINGS

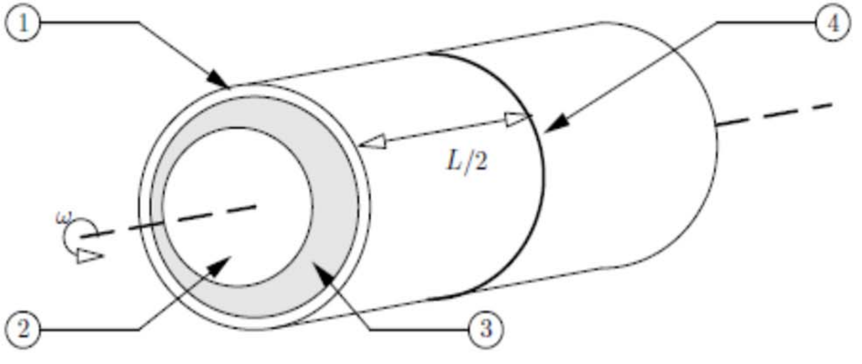
D. Dowson and C. M. Taylor
Institute of Tribology, Department of Mechanical Engineering,
The University of Leeds, Leeds LS2 9JT, England

Información sobre modelos matemáticos “recientes” indicado en la tesis:

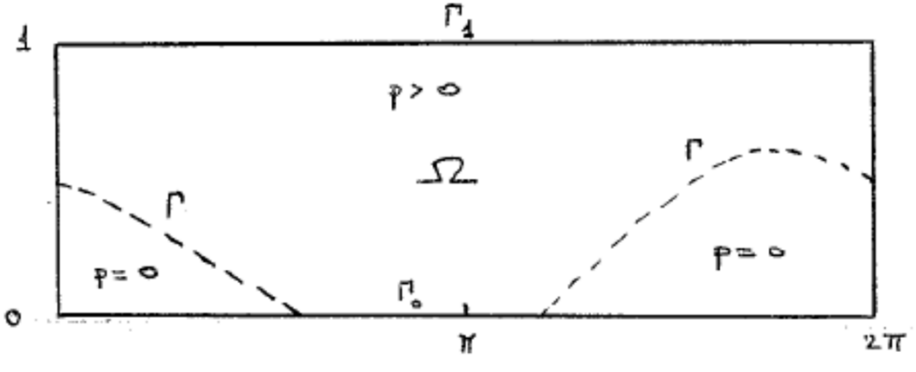
|17| Liñan, A. "Lubricación con cavitación". Conferencia en el Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Abril, 1986.

De la formulación física al modelo matemático (con cavitación)





Adimensionalización (tras coordenadas cilíndricas, periodicidad)



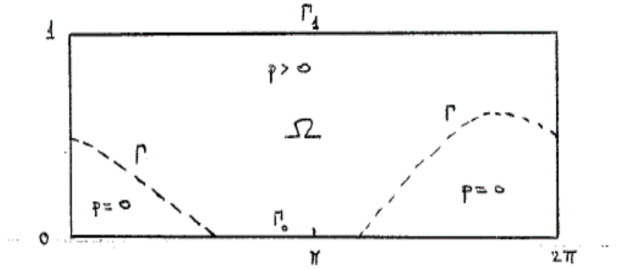
En lo sucesivo utilizaremos la variable bidimensional $(x,y) \in \Omega$, en lugar de (θ,z).

Problema estacionario (Problema (P))

Encontrar un par $(p,\gamma) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ tal que $p \geq 0$, $H(p) \leq \gamma \leq 1$ en casi todo punto de Ω, $p = a$ (constante) sobre Γ_1, $p = 0$ sobre Γ_0, $p(x,a)$ $2\pi x$-periódica y tal que

$$\int_\Omega h^3 \nabla p \nabla \xi = \int_\Omega h\gamma\, \xi_x \qquad \forall \xi \in H'(\Omega) \quad 2\pi x\text{-periódica}$$

$$\xi = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \quad \Gamma_1$$



funciones test arbitrarias

donde $\Omega = |0,2\pi| \times |0,1|$ representa la superficie laterla de un cilindro, p es la presión de aceite (nromalizada) en el dominio Ω y γ representa la fracción de volumen ocupada por el lubrificante; siendo H la función de Heaviside, γ es la unidad siempre que $p > 0$.

La función h es dependiente unicamente de la variable unidimensional x, siendo $h = 1 + \alpha \cos x$, con $0 < \alpha < 1$.

En las bases inferior y superior del rectángulo Γ_0 y Γ_1 tenemos presiones constantes iguales a cero y $p_a > 0$, respectivamente.

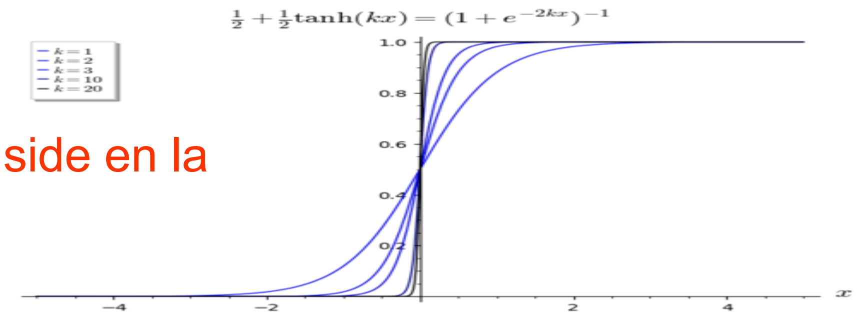
Modelo de Swift-Stieber

H. Swift. "The stability of lubricating films in journal bearings". In: 233.1932 (1932), pp. 267–288.

W Stieber, Das Schwimmlager Krayn, Berlin (1933)

Importante trabajo previo:
G. Bayada, M. Chambat, Existence and uniqueness for a lubrication problem with nonregular conditions on the free boundary, Boll. U.M.I. 6, (1984), 543–557 (frontera libre Lipschitciana).

Función de Heaviside en la convección



Tema delicado: “nuevas” condiciones implícitas sobre la frontera libre

Llamaremos Ω_o a la zona de cavitación ($\Omega_o \subset \Omega$) y Γ a la frontera libre $\Gamma = \partial\Omega_o \cap \partial(\Omega - \Omega_o)$.

Encontrar (p,γ) definidas sobre Ω, siendo $p(x,y)$ función $2\pi x$-periódica, $p \geq 0$ y $0 \leq \gamma \leq 1$, con las siguientes condiciones:

i) $p > 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \dfrac{\partial p}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(h^3 \dfrac{\partial p}{\partial y}\right) = h'(x)$,
$\gamma = 1$ sobre $\Omega - \Omega_o$

ii) $\dfrac{\partial}{\partial x}(h\gamma) = 0$, $p = 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$ sobre Ω_o

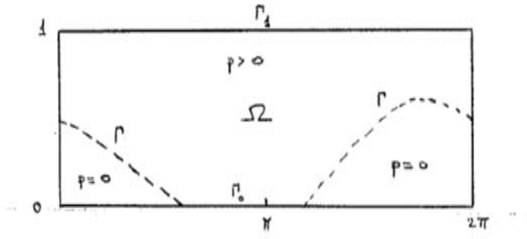
iii) $h^3 \dfrac{\partial p}{\partial \nu} = (1-\gamma) h \, \nu_x$ sobre Γ

siendo ν vector unitario normal a Γ, exterior a $\Omega - \Omega_o$

iv) $p = 0$ sobre Γ

v) $p = 0$ sobre Γ_o

$p = p_a$ sobre Γ_1



formulación “fuerte”

Modelo de Swift-Stieber

Sobre la frontera libre $\Gamma = \partial B$, que separa la zona lubricada de la zona de cavitación p debe satisfacer la siguiente condición:

En Γ $\quad \nu_\theta \dfrac{h^3}{12\mu} \dfrac{\partial p}{R_e \partial\theta} + \nu_z \dfrac{h^3}{12\mu} \dfrac{\partial p}{\partial z} = (\gamma - \tfrac{1}{2}) h \, \omega R_e \, \nu_\theta$

donde ν_θ y ν_z son las componentes del vector normal unitario exterior a B.

$$\boxed{-\operatorname{div}\left(h(x)^3 \nabla p\right) \in \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x) H(p)\right)}$$

con $H(p)$ el grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$

$$H(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \\ [0,1] & \text{si } p = 0 \\ 1 & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

3. La condición iii), conocida como condición de Floberg (ver |11| y |12|) tiene importantes consecuencias sobre la geometría de la frontera libre. Supuesta suficiente regularidad para Γ, podemos distinguir dos partes Γ_a y Γ_c según sea $\nu_x > 0$ ó $\nu_x < 0$ (Fig. 3)

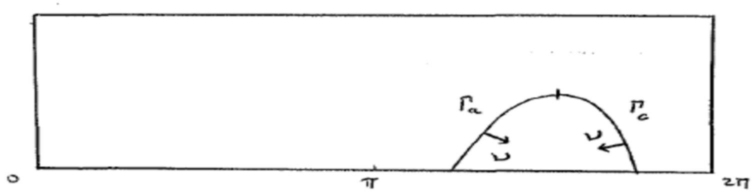


Fig. 3

Sobre Γ_a se tiene que $\nu_x > 0$ y $\dfrac{\partial p}{\partial \nu} \leq 0$, por lo cual, la condición iii) establece que $\dfrac{\partial p}{\partial \nu} = 0$ y $\gamma = 1$. En cambio sobre Γ_c se tiene que $\nu_x < 0$, de forma que γ y $\dfrac{\partial p}{\partial \nu}$ pueden presentar discontinuidades de salto satisfaciendo la condición iii).

Sergei Vasilyevich Rachmaninov (1873-1943)

Rhapsody on a Theme of Paganini, Op.43

Pablo Picasso (1881-1973)
Les Demoiselles d'Avignon. 1907

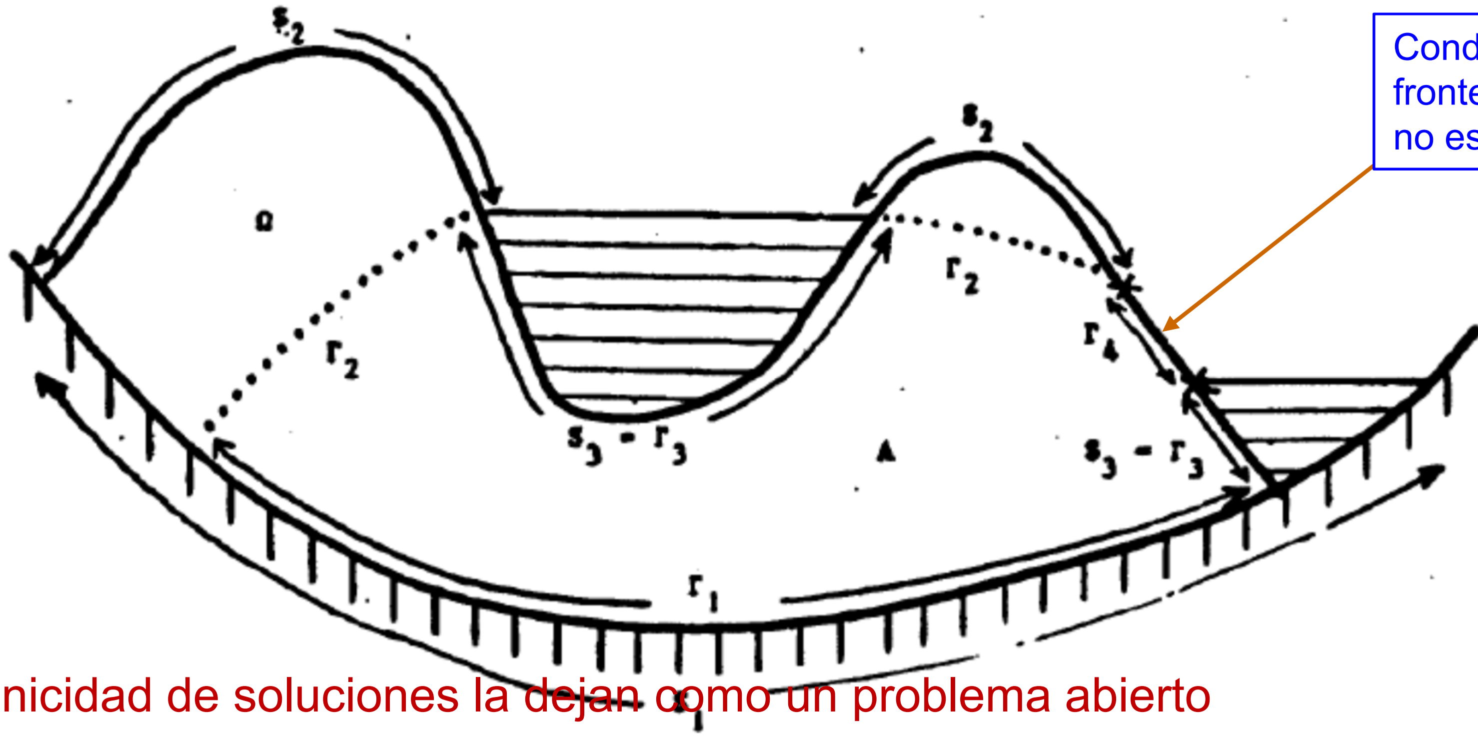
Domenicos Theotocopoulos
“El Greco” (1541-1614)
The Visitation 1610-14

Dominique Ingres
(1780-1867)
El baño turco1862

Condiciones de frontera libre no estándar en un problema con convección no lineal: filtración en un dique poroso

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (16 octobre 1978) Série A — 711

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue*. Note (*) de **Haïm Brezis, David Kinderlehrer** et **Guido Stampacchia** (1), présentée par M. Jacques-Louis Lions.



La unicidad de soluciones la dejan como un problema abierto

Carrillo Menéndez, J., & Chipot, M. (1981). Sur l 'unicité de la solution du problème de l 'écoulement à travers une digue. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique, 292(3), 191-194.

Importante refinamiento de ese tipo de técnicas para problemas con convección no lineal:

J. Carrillo , "Unicité des solutions pour une famille de problemes elliptiques avec convection non-linéaire". En Contributions to nonlinear partial differential equations, Volume II, (J.I. Díaz and P.L. Lions, eds). Longman, Essex,1987, 55-68
(II Coloquio Franco-Español sobre ecuaciones en derivadas parciales no lineales. París, Diciembre 1985: el I en Dic.1981).

J. Carrillo, *Unicité des solutions du type Kruskov pour des problèmes elliptiques avec des termes de transport non linéaires.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique , 303 (5) (1986), 189-192.

Existencia de soluciones por aproximación de la función de Heaviside y cambio de variable (anulación en todo el borde no periódico)

$$(P'_\varepsilon)\quad \left|\begin{array}{l} \text{Encontrar } u_\varepsilon \in M_0 \text{ tal que} \qquad M_0 = \{p \in H^1(\Omega) \mid p|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \equiv 0, \ \ p \ \ 2\pi x\text{-periódica}\} \\ \displaystyle\int_\Omega h^3\, \nabla u_\varepsilon \nabla \xi = \int_\Omega h\, H_\varepsilon(u_\varepsilon + p_a y)\,\xi_x \qquad \forall \xi \in M_0 \end{array}\right.$$

siendo

$$H_\varepsilon(\lambda) = \left|\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & \lambda \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si} & \lambda \leq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}\lambda & \text{si} & 0 \leq \lambda \leq \varepsilon \end{array}\right. \quad \text{la aproximada-Yosida de } H$$

Teorema I.1

Dado $v \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in M_0$ tal que

$$\int_\Omega h^3 \nabla u \nabla \xi = \int_\Omega h\, H_\varepsilon(v + p_a y)\ \xi_x \qquad \forall \xi \in M_0.$$

La parte más valiosa de la tesis: CAPITULO II: PROBLEMA ESTACIONARIO: UNICIDAD.

FRONTERA LIBRE

La “comparación de soluciones” implica la unicidad

Problema (P)

Encontrar $(p,\gamma) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, siendo p $2\pi x$-periódica, tal que:

(2.1) $$\int_\Omega h^3(x)\nabla p(x,y)\nabla\xi(x,y)\,dxdy = \int_\Omega h(x)\gamma(x,y)\xi_x(x,y)\,dxdy \quad \forall\xi \in M_o$$

(2.2) $p \geq 0$, $H(p) \leq \gamma \leq 1$ en casi todo punto de Ω.

(2.3) $$\begin{cases} p = 0 & \text{sobre } \Gamma_o \\ p = p_a & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases}$$

Consideremos dos pares (p_1,γ_1) y (p_2,γ_2) satisfaciendo las relaciones (2.1) y (2.2), y tales que $p_i|_{\Gamma_j} = \phi_i^j$ para $i = 1,2$ y $j = 0,1$, siendo $\phi_i^j \in C(\Gamma_j)$ y tales que $\phi_1^j \leq \phi_2^j$ para $j = 0,1$; en otras palabras $p_1|_{\Gamma_o \cup \Gamma_1} \leq p_2|_{\Gamma_o \cup \Gamma_1}$.

Proposición II.2.

Sean p_1 y p_2 satisfaciendo (2.1), (2.2) y tales que $p_1|_{\Gamma_o \cup \Gamma_1} \leq p_2|_{\Gamma_o \cup \Gamma_1}$. Para cada $\xi \in \mathcal{D}^+(0,1)$ se satisface que

(2.25) $$\int_\Omega h^3(x)(p_1(x,y)-p_2(x,y))^+ \xi''(y)dxdy \geq 0$$

Teorema II.3. (Principio de comparación)

Sean p_1 y p_2 satisfaciendo (2.1) y (2.2) y tales que $p_1|_{\Gamma_o \cup \Gamma_1} \leq p_2|_{\Gamma_o \cup \Gamma_1}$. Entonces $p_1 \leq p_2$ en Ω.

Demostración:

Separando las variables de integración en (2.25) tenemos

$$\int_o^1 \xi''(y) \{\int_o^{2\pi} h^3(x)(p_1-p_2)^+dx\} \geq 0 \qquad \forall\xi \in \mathcal{D}^+(0,1)$$

Llamando

$$T(y) = \int_o^{2\pi} h^3(x)(p_1-p_2)^+dx$$

la desigualdad puede escribirse como

$$<\frac{d^2T}{dy^2}, \xi>_{\mathcal{D}'(0,1) \times \mathcal{D}(0,1)} \geq 0 \qquad \forall\xi \in \mathcal{D}^+(0,1)$$

lo que significa que la distribución T satisface

$$\frac{d^2T}{dy^2} \geq 0$$

Utilizando el principio del máximo, y siendo $T(0) = T(1) = 0$ debido a la desigualdad, $p_1 \leq p_2$ sobre $\Gamma_o \cup \Gamma_1$, podemos concluir que

$$\int_o^{2\pi} h^3(x)(p_1-p_2)^+ dx \leq 0$$

y siendo el integrando no negativo, se obtiene que

$$(p_1-p_2)^+ \equiv 0, \quad \text{es decir} \quad p_1 \leq p_2 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Corolario II.4.

El problema (P) tiene solución única.

Por tanto, el gran mérito es obtener la Proposición II.2. Para ello se *duplican variables*.

Utilizamos la variable bidimensional $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, como variable de la que dependen p_1 y γ_1. Por su parte, p_2 y γ_2 serán dependientes de la variable $y = (y_1, y_2) \in \Omega$.

Principio filosófico: aumento de la dificultad para encontrar una solución particular
(Richard Feynman (1918-1988): Premio Nobel 1965)

Un ejemplo de naturaleza distinta
(L.C. Evans, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, Version 0.2
https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf

Visto también, el 28/06/2023 (ayer !!!) en J. Echegaray, “Teoría matemática de la luz”, *Revista de los Progresos de las Ciencias*, tomo 19, Madrid, 1871, páginas 7-10.

En ocasiones es más sencillo resolver toda una familia de problemas que uno concreto del que forma parte. Así, por ejemplo, el cálculo de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

no es posible por métodos elementales. Es parte de la familia

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

que verifica

$$\mathrm{I}'(\alpha) = -\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \overset{\text{(integración por partes)}}{=} -\frac{1}{1+\alpha^2} \Rightarrow \mathrm{I}(\alpha) = -\arctan \alpha + \mathrm{C}$$

Entonces

$$0 = \mathrm{I}(\infty) = \lim_{\alpha \to \infty} = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}(\alpha) = -\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, se obtiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Regreso al método de duplicación de variables

Utilizamos la variable bidimensional $x = (x_1,x_2) \in \Omega$, como variable de la que dependen p_1 y γ_1. Por su parte, p_2 y γ_2 serán dependientes de la variable $y = (y_1,y_2) \in \Omega$.

Sean $Q = \Omega x \Omega$, $D =]0,1[\times]0,1[$ y $G =]0,2\pi[\times]0,2\pi[$.

Consideremos $\xi(r)$, $\rho(r)$ y $\hat{\rho}(r)$, funciones reales de una variable real que satisfagan:

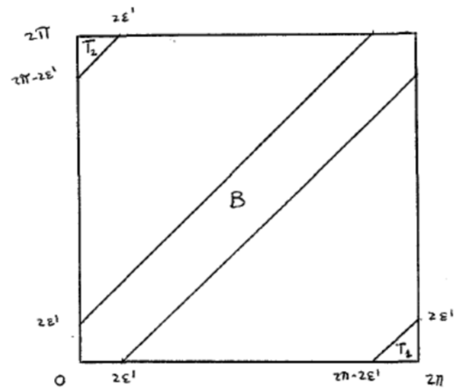
$$\xi(r) \in C_0^\infty(0,1), \qquad \xi \geq 0$$
$$\rho(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \rho \geq 0, \quad \text{sop } \rho = [-1,1]$$
$$\rho(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \hat{\rho} \geq 0, \quad \text{sop } \hat{\rho} = [-1,1] \text{ y } \hat{\rho} \text{ función par}$$

consideremos un parámetro ε tal que $\varepsilon < \text{dist } (\text{sop } \xi, \partial[0,1])$ y sean

$$\rho_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)$$
$$\hat{\rho}_{\varepsilon'}(r) = \frac{1}{\varepsilon'}\hat{\rho}\left(\frac{r}{\varepsilon'}\right) \quad \text{para valores del parámetro } \varepsilon' \text{ pequeños.}$$

Para $(x,y) \in \bar{Q}$ definimos

$$P(x,y) = \xi\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) \rho_\varepsilon\left(\frac{x_2-y_2}{2}\right) \hat{\rho}_{\varepsilon'}\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right)$$



Idea genial: nueva función test (historia de las EDPs no lineales en términos de las correspondientes funciones test: … otra conferencia)

$$\boxed{\eta(x,y) = \text{Min } \frac{(P_1(x) - p_2(y))^+, \ \delta\, P(x,y)}{\delta}}$$

Sobre el método de “duplicación de variables”:

Tesis: Cálculos en 18 páginas para probar la Proposición II.2

Artículo Álvarez-Carrillo: Cálculos en 11,5 páginas para probar la Theorem 2.1 (Proposición II.2 de la tesis).

Sobre los orígenes históricos de esa idea:

Contexto de ecuaciones hiperbólicas de primer orden !!!

- S. N. Kruzhkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR-Sb. 10 (1970), 217-243.
- M.G. Crandall, The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables. Israel Journal of Mathematics 12 (1972), 108-132.
- Ph. Bénilan, Equations d’evolution dans un espace de Banach quelconque et applications. Thèse d’etat. Paris X (1972).
- Ph. Bénilan, Ph., S.N. Kruzhkov, Conservation laws with continuous flux functions. NoDEA 3, 395–419 (1996).
- L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, 1998 (páginas 606-611) [omit on first reading !!!!].

Primera aplicación a ecuaciones de segundo orden !!!

- J. Carrillo, Actas de la reunión de Paris de 1985, …. (otra conferencia).

1.3. Otros resultados sobre Lubricación (de Sixto y de nuestro entorno).

- Álvarez, S. J. Qualitative properties of the free-boundary of the Reynolds equation in lubrication. Publicacions Matematiques Vol. 33 (1989), no. 2, 235-251.
- Álvarez, S. J.; Carrillo, J.; Diaz, J. I. Cavitation in lubrication: an evolution model. Actas del XI CEDYA / Congreso de Matemática Aplicada (Málaga, 1989), 131-135, 1990. [Mathematical Modelling in Lubrication, Vigo, 30-31 de Octubre, 1990], (… otra conferencia).

Tesis de Rachid (1998)

- Álvarez, S. J.; Oujja, R. A monotonicity result in a moving free boundary problem related to lubrication with cavitation. Advances in Mathematical Sciences and Applications. 11 (2001), no. 1, 161-185.
- Álvarez, S. J.; Oujja, R. An iterative method for solving a free boundary problem for an infinite journal bearing. Applied Mathematics and Computation. 122 (2001), no. 1, 15-26.
- Álvarez, S. J.; Oujja, R. A monotonicity result in a moving free boundary problem related to lubrication with cavitation. Adv. Math. Sci. Appl. 11 (2001), no. 1, 161-185.
- Álvarez, S. J.; Oujja, R. On the uniqueness of the solution of an evolution free boundary problem in theory of lubrication. Nonlinear Anal. 54 (2003), no. 5, 845-872.
- Álvarez, S. J.; Oujja, A new numerical approach of a lubrication free boundary problem. Appl. Math.Comput. 148 (2004), no. 2, 393-405.

- Álvarez, S. J.; Oujja, Alvarez, S. J.; Oujja, R. On the uniqueness of solution in a lubricated device with imposed load. MAMERN11:4th International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources. Saïdia (Morocco) (2011).
- Álvarez, S. J.; Oujja, An adaptive finite element method for solving a free boundary problem with periodic boundary conditions in lubrication theory. MAMERN13: 5th International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources. Granada (Spain) (2013).

Otros trabajos sobre lubricación en nuestro entorno:

- J.I. Díaz and J.I. Tello, A note on some inverse problems arising in lubrication theory, Differential Integral Equations, 17, (2004), 583–591 (problema propuesto por Liñán).
- J. I. Díaz, S. Martin. On the instantaneous formation of cavitation in hydrodynamic lubrication, C.R. Mécanique, 334 (2006), 645-650.

- Tesis y numerosos trabajos de J.I. Tello sobre Lubricación, …
- Análisis numérico (J.A. Infante, A. Bermúdez, J. Durany, C. Vázquez, …)

Un manuscrito no publicado

(re-encontrado el 18 de junio de 2023, Art-Madrid.pdf)

DYNAMICAL CONTROL OF CAVITATION PHENOMENA IN LUBRICATION PROBLEMS

S. Alvarez, J.I. Díaz, S. Martin[1]

Abstract. ...

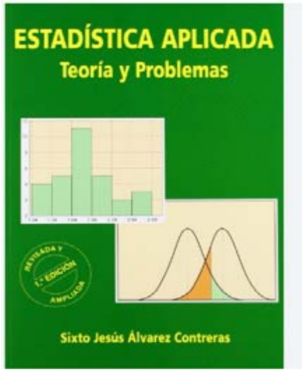
Résumé. ...

Contents

2. Otros resultados y facetas profesionales de Sixto.

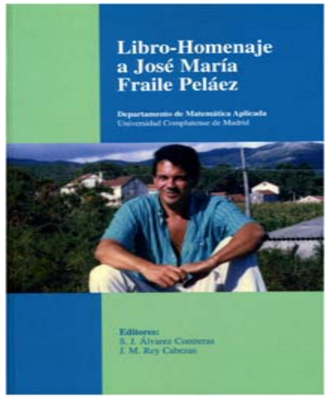
Álvarez, S. J.; Oujja, On the continuity of the Mumford-Shah energy. Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature Motion. Illes Balears (Spain) (1995).

Álvarez, S.J.
Estadística Aplicada. Teoría y Problemas.
Editorial CLAGSA. Madrid. (2000).



Álvarez, S.J.; Infante, J.A.; Ivorra, B.; Ramos A.M.; Rey, J. M.
Modelling and Simulation of High Pressure Processes in Food Engineering. Actas del *Congress on Numerical Methods in Engineering* (CMNE 2007)-Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXVIII CILAMCE).

Álvarez, S.J.; Rey, J. M. (Eds.):
Libro-Homenaje a José María Fraile Peláez.
Universidad Complutense de Madrid. 2008, 192 p.

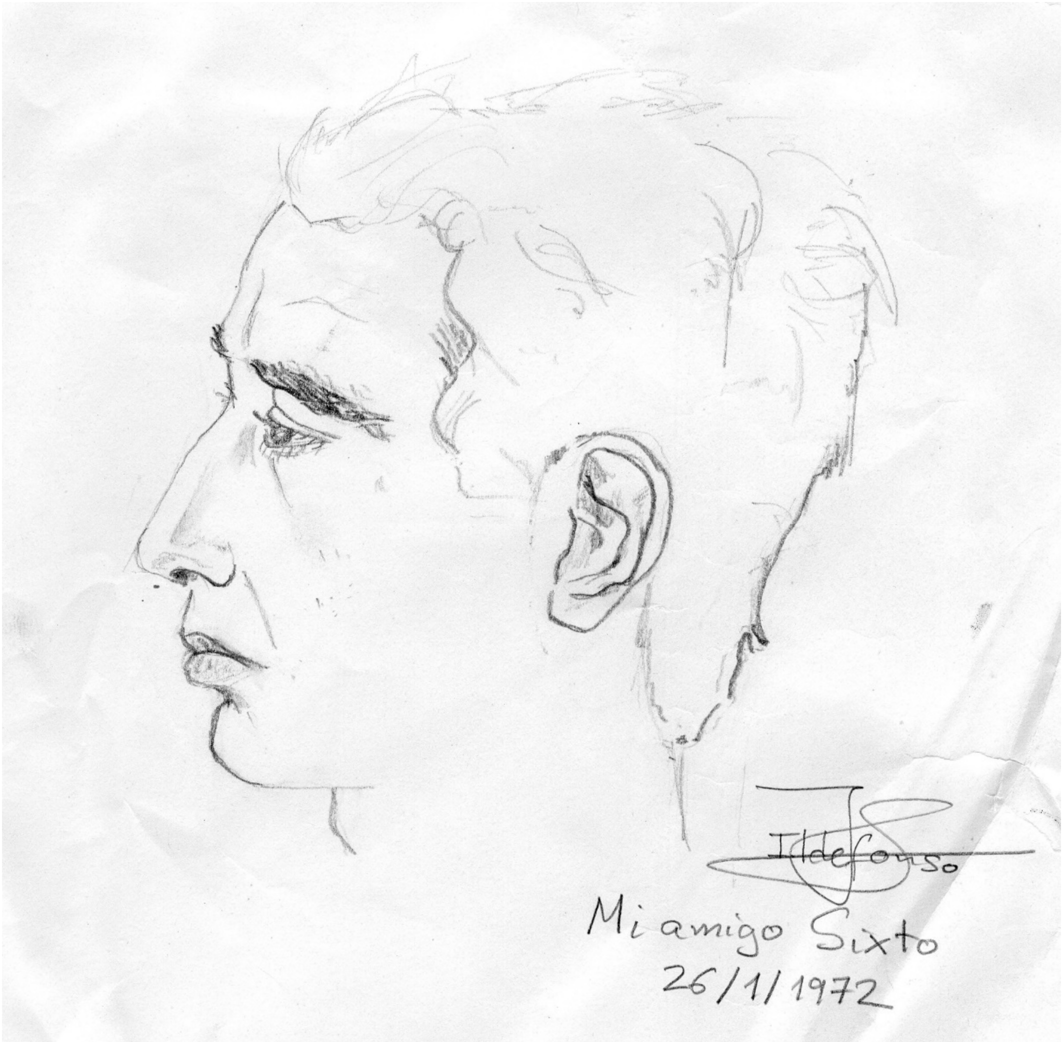


Álvarez, S.J. Consideraciones sobre primos gemelos.
Libro-Homenaje a José María Fraile Peláez.
Universidad Complutense de Madrid. 2008, pp. 159-173.

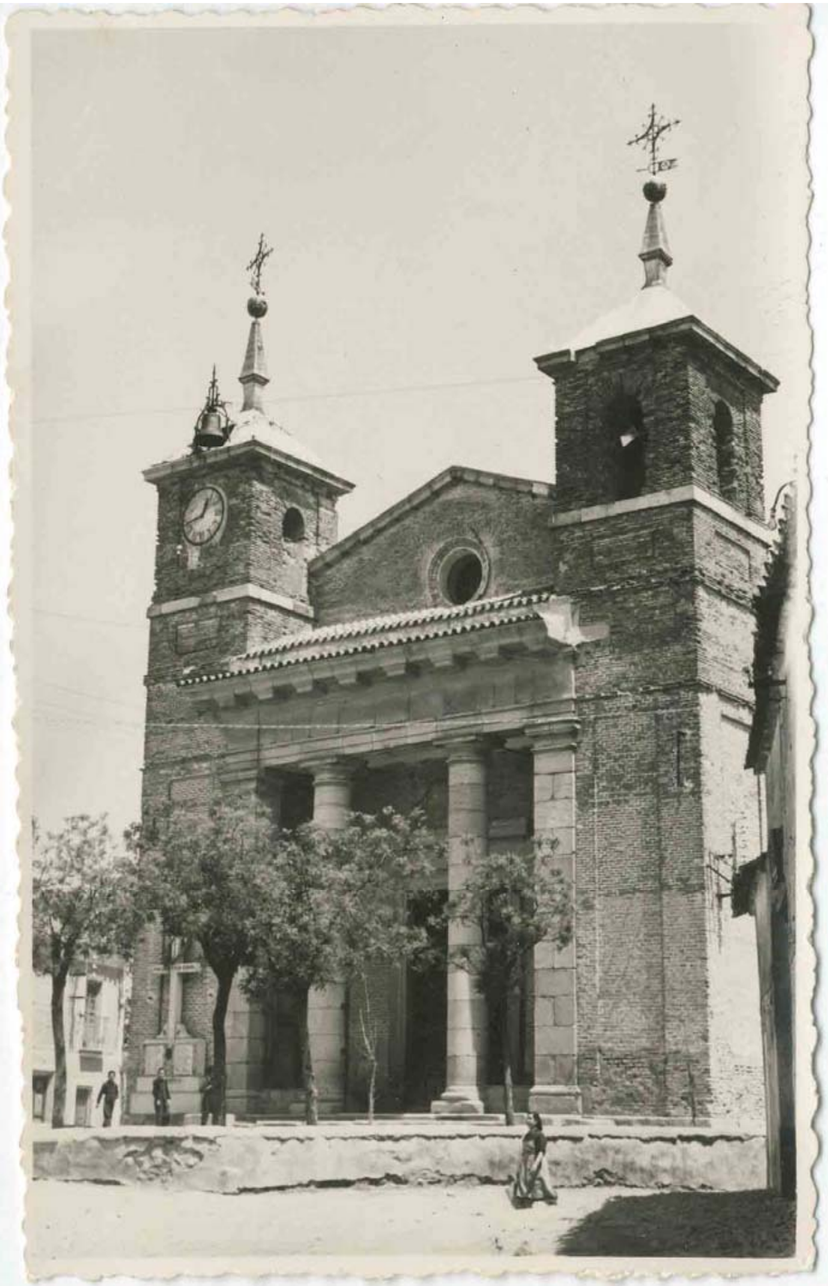
Director del Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad Complutense de Madrid. Diciembre1999- Septiembre 2004.

Coordinador de Matemáticas, de la UCM, de las Pruebas de Selectividad 2013-2020

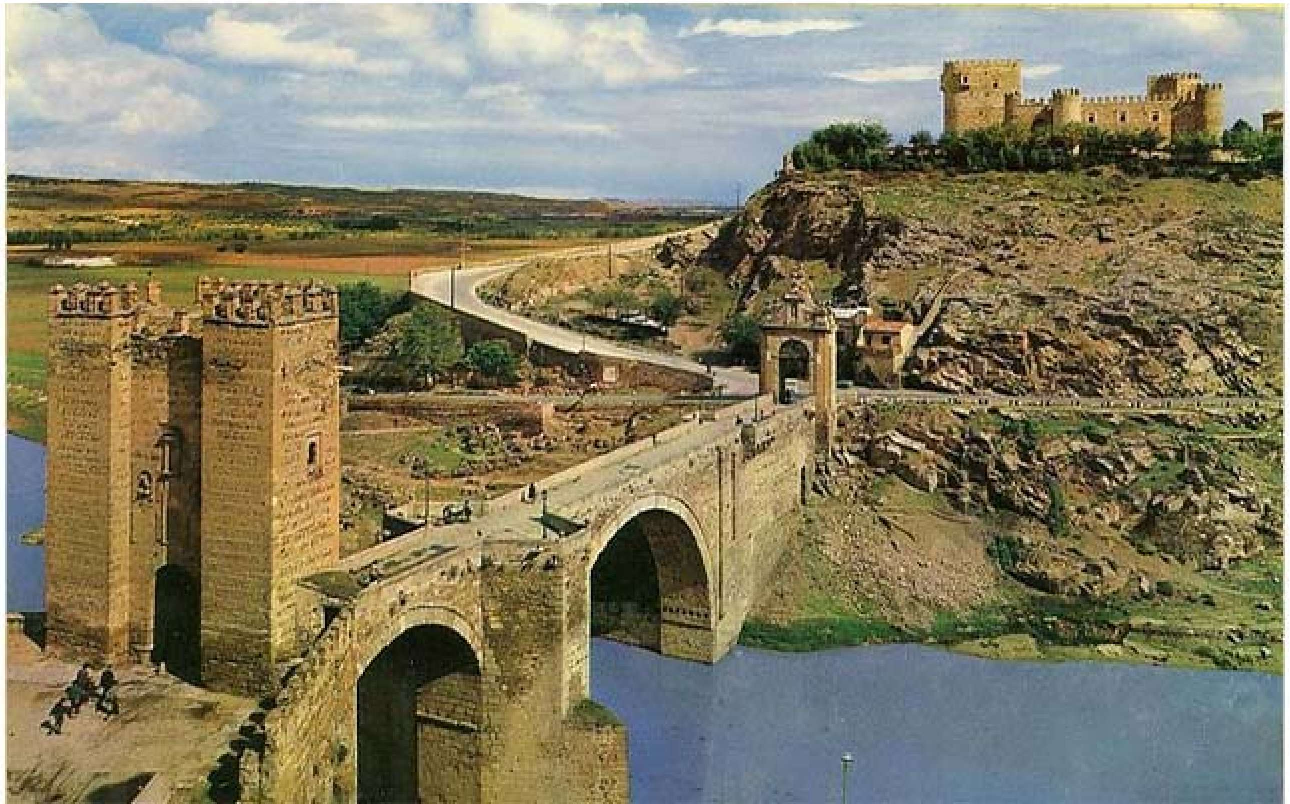
Muchas gracias por vuestra atención



2 de Septiembre de 1951
Turleque (Toledo)

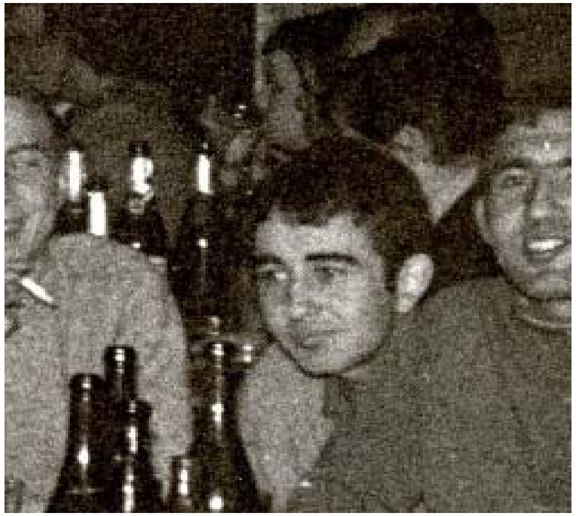


Colegio Menor
“San Servando”
(Toledo)
5º de Bachillerato
1965-1966



Compañeros del Colegio Mayor (Octubre 1968- Junio 1972)

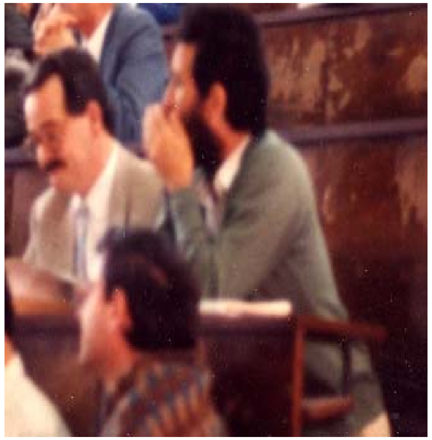
Compañeros de promoción Licenciatura de Matemáticas (UCM)
Octubre 1968-Junio 1973



Álvarez-Díaz (1972)
Apuntes de Variable Compleja
Manuscrito de D. Baltasar Rodríguez Salinas
(ciclostil en el Colegio Mayor)

Sixto en el Departamento de Ecuaciones Funcionales, 1984

Sixto en el Homenaje a A. Dou (17 de junio de 1988)



Sixto en la Real Academia de Ciencias (19 de Noviembre de 1979)

Sixto en Besançon (Francia), 1999

Sixto en el Congreso de los Diputados (21 de enero de 2000)

Sixto con Haïm Brezis
UAM, 12 de abril de
2002

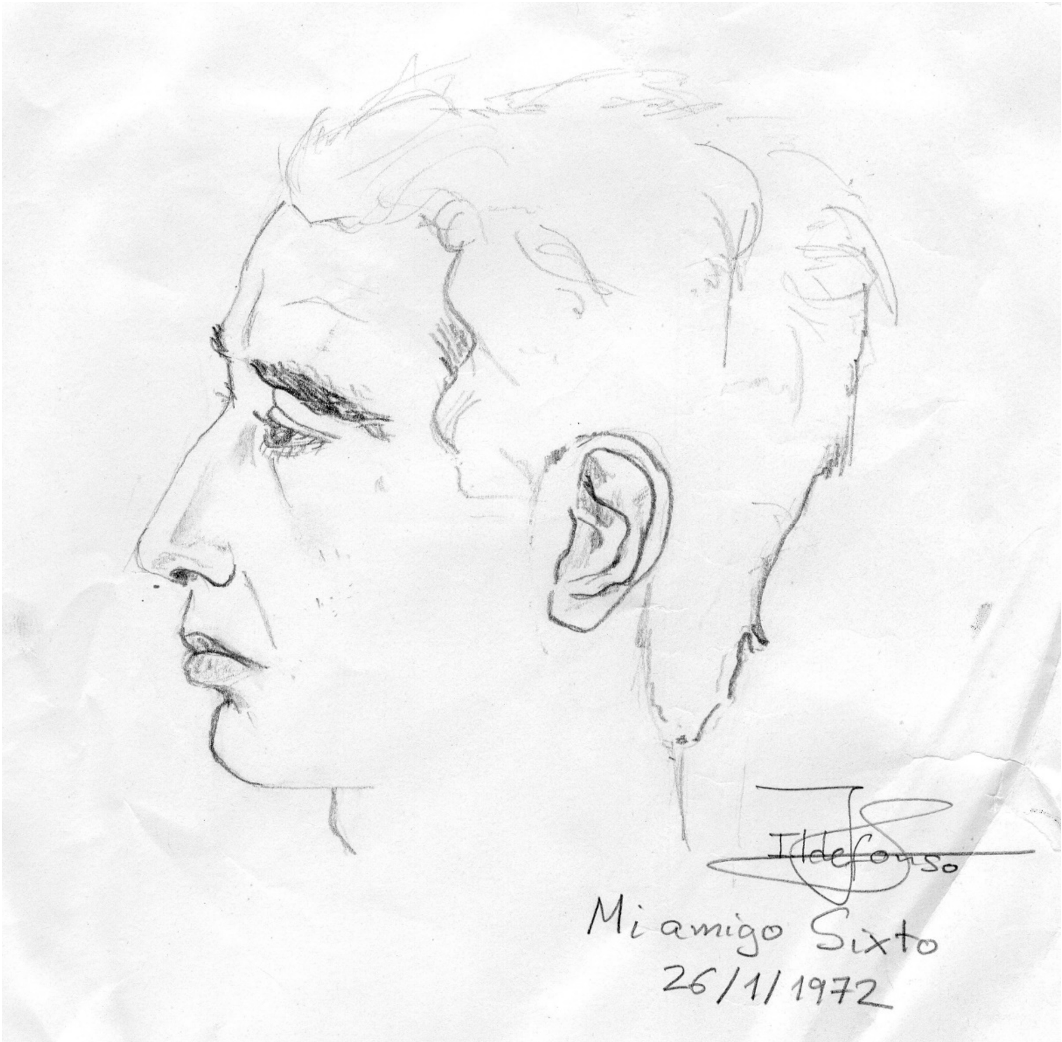
Sixto con Ph. Bénilan (2000)

Journées “Analyse non linéaire”, 60º anniversaire Philppe Benilan, 27-29, octubre, 2000, Les Moussières, Jura, Francia.

Sixto, gran viajero

Sixto antes de la pandemia

Mi amigo Sixto



Sixto caminante y sus pistachos

Sixto en familia (Claudia, Jorge y Carlos…+Leticia   en 2014)

Claudia y Lea

Sixto y Lea

¡¡¡ Buena jubilación, querido Sixto !!!