

Matemáticas y Clima¹

J.I. Díaz

Departamento de Matemática Aplicada,
Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid

1 Introducción: ¿Ciencias Exactas y “el rompecabezas climático”?

Existen numerosos testimonios sobre las diferentes actitudes del hombre ante el Clima y los fenómenos naturales a lo largo de la historia. La famosa Torre de los Vientos de Atenas (siglo I a C.) aludiendo a los ocho vientos de Aristóteles, la lucha de la flota troyana contra las deidades griegas de la tempestad relatada en La Eneida de Publio Virgilio Marón (70-19 a.C), procesiones apelando a la protección de los cielos reflejadas en numerosos cuadros y grabados y la descripción, en 1880, de un “Nuevo método para precipitar la lluvia” por el Dr. Ruggles son tan sólo muestras de actitudes ligadas a la condición humana y la atención prestadas al medio natural en el que habita. Los primeros registros sistemáticos (en ese caso oceanográficos) no parece tener lugar hasta 1697 por iniciativa del Capitán W. Dampier con motivo de su periplo por el Pacífico en su viaje a Australia. Por otra parte, la transmisión de datos era ya un tema de gran preocupación en la Francia de la última mitad del siglo XIX.

No es nada difícil encontrar la huella de “distinguidos matemáticos” interesados en el estudio del clima y otros fenómenos naturales. Así, por ejemplo, el primer mapa sobre la llamada Circulación General aludiendo a las distintas corrientes oceánicas se debe al astrónomo Edmund Halley quien la propuso en 1686. Pero además, la convocatoria del Premio de Matemáticas de la Academia Francesa de Ciencias de 1738 versaba sobre “la causa del flujo y reflujo del mar”, resultando premiadas las memorias de los candidatos Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler (1707-1783). Años más tarde, en 1824, Joseph Fourier (1768-1830) afirmaba: “El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el calor medio a lo largo de varios siglos”. Su visión premonitoria sobre la acción antropogénica ha necesitado casi dos siglos de espera hasta su confirmación. .

El objeto de esta conferencia es ilustrar cómo el estudio matemático de ese sistema complejo puede ser llevado a cabo mediante la aplicación de una metodología de carácter universal que ha sido catalogada² como una “trilogía

¹Extracto de la conferencia impartida el 4 de abril de 2000 en la Universidad de Valladolid dentro del ciclo “Matemática, Ciencia y Sociedad”.

²J.L. Lions: *El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores*. Serie del Instituto de España n^o8, Espasa-Calpe, Madrid, 1990.

universal”: modelización, análisis matemático y numérico del modelo y, finalmente, el estudio de su control³.

2 Modelos climáticos de balance de energía.

El “problema real” que constituye el objeto de aplicación de la trilogía universal es, en nuestro caso, el sistema climático que abarca componentes externos e internos de una gran diversidad y que tiene a la atmósfera, los océanos y los casquetes polares como principales subsistemas, cada uno de ellos objeto de disciplinas científicas en plena expansión.

El proceso de modelización posee numerosos puntos comunes con actitudes presentes en numerosas artes. La compleja realidad ha de ser sustituida por propuestas parciales y por tanto subjetivas .

La enorme variedad de escalas características, temporales y espaciales, es la principal causa de que no exista un único modelo de validez universal sino toda una cascada de modelos que en ocasiones puede ser desplegada de manera jerárquica.

Pero antes de entrar en detalles conviene apelar a la importante diferencia entre Climatología y Meteorología en atención a la muy distinta escala temporal que los caracteriza. En el segundo caso la predicción se pretende con gran exactitud por lo que el período en consideración se suele limitar a días y, a lo sumo, un par de semanas. La predicción suele requerir métodos computacionales que contrastan con los de naturaleza más cualitativa utilizados en Climatología para el análisis y diagnóstico, sobre modelos simplificados, a grandes escalas temporales que van desde la década a las decenas de siglos.

Sería ilusorio pretender ilustrar las casi infinitas problemáticas que se presentan en ambos contextos. Nuestro objetivo se ha de limitar, y lo haremos centrándonos en el campo de la Climatología.

No viene mal acudir a la definición que un experto de reconocido prestigio⁴ propone sobre la noción de clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años. En los estudios climáticos, la incógnita no es tanto la temperatura puntual e instantánea, $T(x, t)$, que viene determinada por los principios de la Termodinámica sino los promedios espaciales y temporales definidos a partir de tal temperatura

$$u(x, t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y, s) dy ds.$$

³Aunque en la conferencia se abordaron diferentes modelos atmosféricos y oceánicos, la presente exposición se limitará tan sólo a una clase de modelos climáticos: los denominados de balance de energía. Tampoco se recogerán aquí los comentarios realizados sobre la aplicación de la Teoría de Control a esos modelos (para detalles a ese respecto véase la exposición del autor en el libro *The Mathematics of Models for Climatology and Environment* (J.I. Díaz, ed.) NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997.

⁴S.H. Schneider: Introduction to climate models. En el libro *Climate system modelling*, (editor K. E. Trenberth) Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, págs. 3-26.

Una de las clases de modelos climáticos más elementales, pero de gran valor de diagnóstico, son los llamados de *balance de radiación de energía*. Aunque los antecedentes se puedan remontar a un trabajo de S. Arrhenius de 1896, se podría decir que tal tipo de modelos fueron propuestos independiente pero simultáneamente, en 1969, por M.I. Budyko y W.D. Sellers⁵.

Los modelos obedecen a un sencillo balance entre las distintas energías (la parte absorbida de la emitida por el Sol, R_a y la emitida por la Tierra como cuerpo caliente, R_e) y los términos que expresan la variación de energía calorífica⁶ en términos de la capacidad calorífica y de la derivada de la temperatura promediada y la redistribución espacial, D ;

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + D.$$

Una deducción más cuidada puede ser llevada a cabo partiendo de la ecuación de conservación de la energía interna y aplicando los operadores de promedio involucrados en la definición de $u(x, t)$ ⁷.

En todo caso, es obvio que se requiere más información para poder "cerrar" el modelo de manera que quede expresado únicamente en términos de la temperatura promediada $u(x, t)$. Esa información adicional puede ser entendida como adecuadas *leyes de estado* que describiremos a continuación. La fracción de radiación absorbida se expresa como $R_a(u) = Q\beta(u)$ donde $\beta(u)$ es el coalbedo planetario y Q es la constante solar cuyo valor actual es de $Q=342.5W/m^2$. La función coalbedo toma valores comprendidos entre 0 y 1, y representa la fracción de energía recibida que es absorbida por la superficie: en otras palabras, el cociente entre la energía absorbida y la energía incidente. En zonas cubiertas de hielo refleja más la luz solar que, por ejemplo, en los océanos y, por tanto, el coalbedo es mayor en estas últimas. Se observa que existen zonas muy próximas con coalbedos muy diferentes. En los modelos de balance de energía se considera una variación rápida del coalbedo en un entorno de una temperatura crítica que usualmente se toma como $u = -10^\circ C$ y que corresponde a la temperatura en la que el hielo pasa de ser transparente a blanco. En el modelo propuesto por Budyko, $\beta(u)$ es discontinua.

$$\beta(u) = \begin{cases} \beta_i & u < -10, \\ [\beta_i, \beta_w] & u = -10, \\ \beta_w & u > -10, \end{cases} \quad (1)$$

En el modelo propuesto por Sellers, se supone que $\beta(u)$ es una función más regular (Lipschitziana, al menos) como por ejemplo

⁵M.I. Budyko: The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth, *Tellus*, **21**, 1969, págs. 611-619. W.D. Sellers: A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system, *J. Appl. Meteorol.* **8**, 1969, págs. 392-400.

⁶No se analizan aquí otras componentes de la energía interna.

⁷Véase, por ejemplo Kiehl, J. T.: Atmospheric general circulation modeling, En *Climate System Modeling*, K.E. Trenberth ed., Cambridge University Press, 1992, págs. 319-370.

$$\beta(u) = \begin{cases} \beta_i & u < u_i, \\ \beta_i - \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right)(\beta_i - \beta_w) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w & u > u_w, \end{cases} \quad (2)$$

con u_i y u_w temperaturas fijadas y cercanas a -10^0C .

El otro ingrediente en el balance es la radiación que por enfriamiento emite la Tierra. Esta energía emitida, $R_e(u)$, es representada de dos modos distintos según los autores antes mencionados. En el modelo de Sellers $R_e(u)$ se expresa escribiendo u en grados Kelvin (por tanto $u > 0$) y utilizando la ley de Stefan-Boltzman

$$R_e(u) = \sigma(u)u^4 \quad (3)$$

donde σ es una función regular, positiva y acotada que representa la *emisividad*. En el modelo de Budyko se argumenta que dado que las variaciones observadas son pequeñas basta considerar una linealización de esa ley en torno a la temperatura media terrestre del momento (aproximadamente 15^0C) por lo que se toma una expresión lineal con coeficientes obtenidos mediante observación por satélite

$$R_e(u) = Bu + C \quad (4)$$

con B y C parámetros positivos (en la actualidad $A = 210W/m^2$, $C = 1.9W/m^2$ y que incluyen fenómenos empíricos tales como el efecto invernadero, cambios antropogénicos, etc. Son las llamadas *variables internas*).

Pero pasemos al primer escalón de modelos distribuidos de balance de energía. La necesidad de tomar modelos más sofisticados que el cero dimensional es obvia pues todos sabemos que en ciertas zonas del planeta la vida es más agradable que en otras debido a la diferencia de climas. Una primera precisión a lo anteriormente expuesto consiste pues en suponer ahora que

$$R_a = R_a(x, u) = QS(x)\beta(u)$$

con $S(x)$ la llamada *función de insolación anual* que es una función regular y con valores positivos (cuando se toman escalas temporales menores se ha de suponer $S = S(x, t)$ tomado valores nulos durante los periodos de “noche polar”. Ésa es la función que M. Milankovitch calculó minuciosamente, en 1920, para tiempos pasados por medio de la Mecánica Celeste y que le permitió ofrecer una justificación de las glaciaciones pasadas. Por otra parte, en lo concerniente a la energía de emisión, es natural suponer que

$$R_e = R_e(x, u)$$

con $R_e(x, u)$ dada como antes salvo que ahora $\sigma = \sigma(x, u)$, y $B = B(x)$, $C = C(x)$.

Un primer modelo en esta dirección se obtiene al considerar la temperatura superficial promediada en el tiempo anual o estacionalmente y en el espacio sobre paralelos de anchura infinitesimal. La razón de considerar tales promedios espaciales se debe a que las observaciones disponibles muestran que la convección

meridional es considerablemente pequeña frente a la longitudinal. La consideración de la dependencia espacial de la temperatura introduce en el balance un nuevo término, la redistribución de calor, que viene dada mediante un operador de difusión de segundo orden. Como es acostumbrado en Mecánica Celeste, se suele introducir una nueva variable $x \in (-1, 1)$ dada por $x = \text{sen} \lambda$ con λ la latitud. Incorporando al anterior balance un término de difusión, la evolución de la temperatura superficial $u(x, t)$ aparece gobernada por la siguiente ecuación parabólica semilineal,

$$c(x)u_t - (k(1-x^2)u_x)_x = R_a(x, u) - R_e(x, u), \quad x \in (-1, 1), t > 0, \quad (5)$$

donde $c(x)$ es la capacidad calorífica y k el coeficiente de difusión (que a veces se supone dependiente de la posición x , de u o de la variación de la temperatura u_x), tomando c y k valores positivos⁸.

Nótese que la ecuación (5) es *degenerada* pues el coeficiente del gradiente u_x se anula en los extremos (e. d. en los polos). De hecho, otro tipo de degeneración puede aparecer en ciertas variantes de estos modelos. Así, P.H. Stone⁹ propuso un coeficiente de difusión de la forma $k = k(x, u, \nabla u)$, en particular $k = b(x)|\nabla u|$, con el fin de incluir los efectos negativos producidos por las corrientes atmosféricas de gran escala. En este caso, la ecuación semilineal (así llamada pues el término no lineal no afecta a las derivadas de la incógnita) (5) pasa a ser una ecuación cuasilineal (en la que ahora el término no lineal involucra a las derivadas espaciales de la incógnita)

$$c(x)u_t - ((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|u_x|^{p-2}u_x)_x = R_a(x, u) - R_e(x, u). \quad (6)$$

con $p = 3$ (el caso genérico $1 < p < \infty$ tiene la virtud de incluir también en su seno a la ecuación semilineal cuando se toma $p = 2$).

Pasemos ahora caso bidimensional. Existen interesantes variantes y generalizaciones de los modelos unidimensionales (5) y (6). Por ejemplo, el estudio de la distribución de la temperatura superficial promediada como función del tiempo, de la latitud y también de la longitud da lugar a una ecuación no lineal en derivadas parciales de tipo parabólico

$$c(x)u_t - \text{div}(k\nabla u) = R_a - R_e \quad (7)$$

que ahora tiene lugar sobre una superficie que representa a la superficie terrestre. En una primera aproximación se puede identificar esta superficie con la de la esfera unidad (tomando como unidad el radio de la Tierra) y que se suele denotar como la superficie \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . En ese caso, usando coordenadas

⁸Véase, por ejemplo, North, G.R.: Introduction to simple climate model. En el libro *Mathematics, climate and environment*, (editores J.I. Diaz, J.L. Lions), Masson, Paris, 1993, págs. 139-159, y Ghil, M. y Childress, S., *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Nueva York, Springer, 1987.

⁹Stone, P.H.: A simplified radiative-dynamical model for the static stability of rotating atmospheres, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1972, págs. 405-418.

esféricas, $x = (\cos \varphi \sin \lambda, \cos \varphi \cos \lambda, \sin \lambda)$ se tiene la identificación con los puntos de un rectángulo del plano introducida en 1568 y comunmente denominada como proyección de G. Mercator (1512-1594).

Cuando, por ejemplo, $k = 1$, aparece el llamado *operador de Laplace-Beltrami* que admite una expresión directa en términos de las derivadas parciales de u con respecto a λ y a φ . De hecho, si se supone que $u(\lambda, \varphi, t) = u(\lambda, t)$, es decir u es independiente de φ entonces encontramos el operador en derivadas parciales de (5). En esta formulación se hace evidente que no se ha de añadir condición de contorno ninguna. Sin embargo, la anterior modelización mediante coordenadas esféricas no es totalmente satisfactoria por dos razones distintas. En primer lugar, la parametrización de la latitud provoca singularidades en los polos (la derivabilidad de la incógnita en esos puntos está defectuosamente contemplada). Pero además, es bien sabido que la superficie terrestre no es exactamente una esfera. Por estas razones, el marco matemático adecuado para formular más correctamente el modelo bidimensional es el de las *variedades diferenciables*. La idea es recubrir la superficie en estudio, que ahora denotaremos por \mathcal{M} , por un conjunto de abiertos U tales que posean una “buena” proyección (*un difeomorfismo*) sobre una parte del plano $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ y de tal manera que exista una buena transición de una “carta” (así es como se denomina al par (U, ϕ)) a otra $((V, \psi))$ si es que existe un solapamiento entre ellas. Las distancias y los ángulos, correctamente definidos por el producto euclideo de vectores de \mathbb{R}^2 , pueden ser extendidos a la variedad \mathcal{M} generándose así una métrica (se dice entonces que \mathcal{M} es una *variedad Riemanniana bidimensional*). En nuestro caso pediremos también que esa variedad sea “compacta y sin borde”. Finalmente, los operadores diferenciales, gradiente de una función escalar y divergencia de una función vectorial, pueden extenderse también al caso de funciones definidas sobre \mathcal{M} con lo que se puede dar perfecto sentido a la ecuación (7)¹⁰.

También han sido formulados numerosas variantes a los modelos citados anteriormente. Entre ellos figuran modelos de balance de energía con un término estocástico de *ruido blanco* para incorporar las repercusiones por la acción de los volcanes¹¹. Otro aspecto que también ha sido estudio en la literatura se refiere al carácter periódico en tiempo de la función de insolación $S = S(x,t)$. Este hecho conduce a los llamados *modelos estacionales* en los que la unidad de la escala temporal es la una estación y en los que se supone que S es anualmente periódica. Mencionemos también un tipo de modelos unidimensionales formulados mediante ecuaciones integro-diferenciales¹²

¹⁰Díaz, J.I. y Tello, L. , A nonlinear parabolic problem on a Riemannian manifold without boundary arising in Climatology, *Collect. Math.*, **50**, 1999, págs.19-51.

¹¹Véanse North, G.R., Introduction to simple climate model. En *Mathematics, climate and environment*, (J.I. Diaz, J.L. Lions eds.), Masson, Paris, 1993, págs. 139-159. y el tratamiento matemático en Díaz, G. y Díaz, J.I., On a nonlinear discontinuos stochastic parabolic equation arising in Climatology. Trabajo en elaboración.

¹²Véanse Budyko, M.I., The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth, *Tellus*, **21**, 1969, págs. 611-619 y Held, I.M. y Suarez, M.J., Simple Albedo Feedback models of the icecaps. *Tellus*, **36**, 1974

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + \gamma \left(\int_{-1}^1 u(x, t) dx - u(x, t) \right),$$

Modelos climatológicos de balance de energía más sofisticados son formulados como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para la temperatura atmosférica, la temperatura superficial y la humedad¹³.

Pese a las sofisticaciones mencionadas en la última observación es claro que si “completamos” un modelo simple, como es el de balance de energía, con muchos otros factores éste puede llegar a perder el valor de su simplicidad y convertirse en un modelo complejo a semejanza de los de Circulación General.

3 Análisis matemático de los modelos.

Comencemos considerando el modelo cero-dimensional en el que, tras renormalización de la escala temporal, podemos suponer siempre que $c = 1$, es decir, se trata del problema (de los denominados de Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = R_a(u) - R_e(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (8)$$

La existencia de una única *solución clásica local*, es decir, tal que $u \in C^0([0, \tau]) \cap C^1(0, \tau)$, para algún $\tau > 0$ y verifica la ecuación en todo punto, se sitúa dentro del marco de los trabajos pioneros de Auguste Cauchy (1789-1857), Giuseppe Peano (1858-1932) y Auguste Picard (1884-1962), cuando se supone que $R_a(u)$ y $R_e(u)$ son funciones “regulares” (de hecho basta que sean Lipschitz continuas) como es el caso de las hipótesis estructurales propuestas por Sellers. Además, cómo también se supone que R_a es una función acotada y R_e creciente, esa solución local se puede extender, de manera única, a una *solución clásica global* definida en todo el intervalo $[0, \infty)$.

El estudio del problema bajo las hipótesis propuestas por Budyko, con R_a discontinua, es notablemente diferente. Los problemas de Cauchy para funciones discontinuas han sido ampliamente estudiados en la literatura, desde las contribuciones de Constantin Caratheodory (1873-1950). En ese caso, no cabe esperar que exista una solución local clásica $u(t)$. Sin embargo, es posible mostrar la existencia de, al menos, una *solución local fuerte*, es decir tal que $u \in C([0, \tau])$, $\frac{du}{dt}$ existe (y es, al menos, una función localmente integrable) y la ecuación se verifica en todos los puntos de $[0, \tau)$ *salvo, a lo sumo, un subconjunto de medida nula*.

El paso de solución local débil a *solución global fuerte* tampoco presenta una especial dificultad en virtud de las hipótesis supuestas sobre R_a y R_e .

Como se ha indicado, la demostración de la unicidad de soluciones es standard en el caso Lipschitz (modelo de tipo Sellers) pero, sin embargo, pasa a ser

¹³Véase Hetzer, G., Jarausch, H. y Mackens, W., A Multiparameter Sensitivity Analysis of a 2D Diffusive Climate Model. *Impact and Computing in Science and Engineering*, 1, 1989, págs. 327-393, y su bibliografía.

una cuestión mucho más delicada cuando $R_a(u)$ es discontinua en u (modelo de tipo Budyko). De hecho, la consideración de ese tipo de cuestiones conduce a reformular el problema (8) como un *problema de tipo multívoco*. En efecto, el valor de la función $R_a(u)$ en el punto de discontinuidad $u = -10$ (recuérdese que $R_a(u) = Q\beta(u)$ con β dada por (1)) no puede ser definido con precisión por lo que es conveniente suponer que a ese punto se le asigna todo el intervalo, es decir, $\beta(-10) = [\beta_i, \beta_w]$. Ahora se suele identificar β con su *grafo* (como subconjunto de \mathbb{R}^2) y, dado que $R_a(u)$ se supone no decreciente en u , ese grafo pertenece a la clase de los llamados *grafos maximales monótonos* (la condición de maximal le viene por la imposibilidad de incluir ese grafo en otro monótono mayor¹⁴). En este contexto, el problema (8) debería ser escrito más propiamente como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} \in R_a(u) - R_e(u) & \text{en } (0, \infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (9)$$

y entenderlo en el sentido de que existe un par de funciones u y b , con

$$b(t) \in \beta(u(t)) \text{ para casi todo } t \in (0, \infty), \quad (10)$$

tales que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Qb(t) - R_e(u(t)) & \text{para casi todo } t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (11)$$

Una vez hechas estas precisiones, en lo sucesivo, no haremos ninguna distinción en los símbolos utilizados para describir las ecuaciones asociadas a una función $R_a(u)$ (o β) que unas veces pueda ser supuesta regular y en otras un grafo maximal monótono, entendiéndose que en el último caso se han de introducir matizaciones del estilo de las anteriormente expuestas.

Pero volvamos a la cuestión de la unicidad de soluciones para el caso de $R_a(u)$ (o β) multívoco. Para ilustrar globalmente la situación que se presenta ante esa disyuntiva es útil comenzar estudiando el conjunto de soluciones estacionarias u_∞ de (8), es decir, $u_\infty \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$0 = R_a(u) - R_e(u). \quad (12)$$

El conjunto de soluciones de (12) depende obviamente de la elección de R_a y R_e así como de los diferentes valores de los parámetros. Es especialmente relevante analizar las distintas soluciones que se presentan cuando se varia la constante solar Q . Si, por simplicidad, suponemos $R_e(u)$ lineal, el efecto similar a variar Q es el de variar las rectas generadas por $R_e(u)$ con lo que se llega a diferentes casos que son esquematizados en la Figura 2 para el caso de una $R_a(u)$ de tipo Sellers (véase (2))

Se obtiene un *diagrama de bifurcación* como el de la Figura 2 que permite ver el número de soluciones para un valor dado de Q

¹⁴Véase Brezis, H., *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, 1973, North-Holland, Amsterdam.

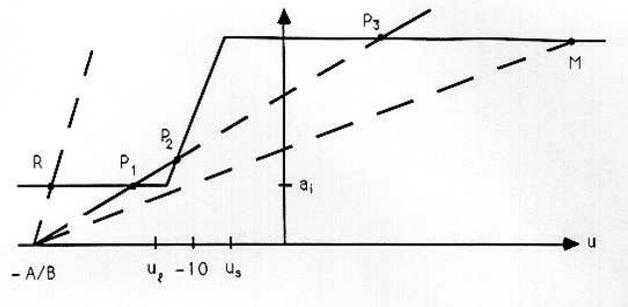


Figure 1: Intersecciones entre las dos gráficas obtenidas para diferentes valores de Q

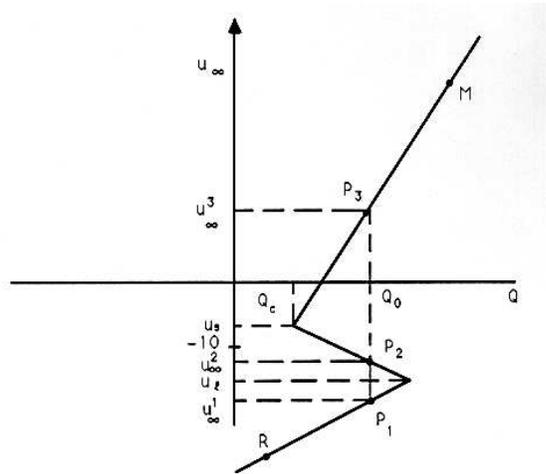


Figure 2: Diagrama de bifurcación en función de la constante solar Q para el modelo de tipo Sellers

Volviendo al caso del problema de Cauchy para $R_a(u)$ (o β) multívoco, es sencillo ver que sí, por ejemplo, tomamos Q tal que $u_\infty^1 = -10$ sea una de las tres soluciones de equilibrio $u_\infty^2 < u_\infty^1 < u_\infty^3$, entonces el problema de Cauchy (8) (o, más propiamente, (9)) con dato inicial $u_0 = -10$ tiene infinitas soluciones. En efecto, $u_1(t) = -10$ es una solución, en ese caso tomaríamos $b = \frac{-10B+C}{Q} \in \beta(-10)$. Dos soluciones distintas vienen dadas por

$$\begin{cases} c \frac{du_2}{dt}(t) = Q\beta_i - Bu_2(t) - C, \\ u_2(t_0) = -10, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} c \frac{du_3}{dt}(t) = Q\beta_w - Bu_3(t) - C, \\ u_3(t_0) = -10. \end{cases}$$

Además, como la ecuación de (8) es *autónoma* (las funciones $R_a(u)$ y $R_e(u)$ no dependen explícitamente de t) es claro que las funciones

$$u_\sigma = \begin{cases} -10 & t \in [t_0, t_0 + \sigma], \\ u_2(t - \sigma) & t \in [t_0 + \sigma, \infty), \end{cases}$$

y

$$\hat{u}_\sigma = \begin{cases} -10 & t \in [t_0, t_0 + \sigma], \\ u_3(t - \sigma) & t \in [t_0 + \sigma, \infty), \end{cases}$$

son también soluciones de (8), independientemente del valor de $\sigma > 0$. Finalmente, estudiando el signo de $R_a - R_e$ es fácil obtener una descripción dinámica del comportamiento cualitativo de las soluciones

El estudio del comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$ puede ser llevado a cabo fácilmente bajo hipótesis mucho más generales. Si comenzamos por abordar el caso en el que R_a y R_e son funciones regulares monótonas (con R_e acotada) encontraríamos primero que el diagrama de bifurcación sigue siendo, en sentido amplio, una curva en forma de “ese” con al menos dos *puntos de retorno*. Analizando el *problema linealizado* podríamos comprobar que las ramas crecientes de la curva de bifurcación están formadas por *estados* (puntos en nuestro caso) *estables* (ante “pequeñas” variaciones del dato inicial) y las decrecientes por *estados inestables*. Si tomásemos para Q el valor estimado en nuestros días, veríamos que la solución u_∞^3 representa la temperatura globalmente promediada del planeta (cerca de $15^\circ C$). La solución u_∞^2 es una solución extraña inestable y la u_∞^1 corresponde a un posible estado de glaciación (nótese que es inferior a $-10^\circ C$) que es también estable.

De hecho, el estudio de la estabilidad puede ser fácilmente extendido al caso de perturbaciones iniciales arbitrarias (no necesariamente “pequeñas”). En efecto, es fácil ver que la *función potencial*

$$F(u) = - \int_{u^*}^u (R_a(v) - R_e(v)) dv, \quad (13)$$

(con u^* arbitrariamente fijado) es una función de Lyapunov pues

$$\frac{dF}{dt}(u(t)) = - \left(\frac{du}{dt}(t) \right)^2.$$

Así, los mínimos relativos de F corresponden a soluciones estables y los máximos relativos a soluciones inestables. Del diagrama de bifurcación es fácil deducir que si Q decrece desde su valor en nuestros días (por ejemplo debido a una polución atmosférica generalizada, por la acción simultánea de numerosos volcanes, por la caída de un enorme asteroide sobre la Tierra,...) la temperatura estacionaria asociada $u_3^\infty(Q)$ tendría que comenzar a disminuir (o, lo que es lo mismo, el punto $(Q, u_3^\infty(Q))$ bajaría por la izquierda del diagrama). Si Q atravesase un cierto valor crítico (Q_c , el correspondiente al punto de retorno de la curva) la temperatura tendría que decrecer dramáticamente hasta buscar otra temperatura promediada estable $u_1^\infty(Q_1)$ que correspondería a una glaciación. El camino inverso también sería abrupto, pues partiendo de $u_1^\infty(Q_1)$ si ahora Q aumentase (debido al cese de las causas que llevaron a su disminución) tendríamos que ascender por otro camino, no coincidente con el anterior, hasta alcanzar una temperatura estable $u_3^\infty(Q_1)$. Es el fenómeno conocido como *histéresis* que ocurre con gran frecuencia en la naturaleza y en muchos otros sistemas¹⁵.

El interés de los modelos de balance de energía está motivado precisamente por este tipo de resultados que muestran la sensibilidad de la solución con respecto a parámetros de gran importancia como es la constante solar Q . Pero, ¿se mantendrán ese tipo de resultados para modelos de balance de energía no homogéneos más realistas en los se que incorpore la difusión espacial de temperaturas?

Escalando en complejidad, consideremos ahora el modelo de balance de energía bidimensional asociado a una representación de la superficie terrestre como una variedad Riemanniana bidimensional compacta y sin borde (como, por ejemplo, $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$). Recordemos que una formulación posible es la de encontrar $u = u(x, t)$ con $(x, t) \in \mathcal{M} \times [0, \infty)$ tal que

$$\begin{cases} c(x)u_t - \operatorname{div}(k\nabla u) = R_a(x, u) - R_e(x, u) & \text{en } \mathcal{M} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M}. \end{cases} \quad (14)$$

Observemos que si suponemos $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$ y si las funciones $c(x)$, $R_a(x, u)$ y $R_e(x, u)$ sólo dependen de la latitud entonces cada solución $u_1(x, t)$ del problema unidimensional (5) genera una solución $u_2(x, y, t)$ del modelo (14) mediante rotación alrededor del eje terrestre, *i.e.* $u_2(x, y, t) = u_1(\operatorname{sen}\varphi, t)$ donde $(x, y) \in \mathbb{S}^2$ y φ es la latitud.

Como en el caso del modelo cero-dimensional, los resultados de existencia y unicidad de soluciones de (5) son de diferente naturaleza según que se suponga la función R_a discontinua (o multivaluada) o no. La existencia de, al menos

¹⁵Véanse, por ejemplo, Krasnoselskii, M.A. y Pokrovskii, A.V., *Systems with hysteresis*, Springer, 1989 y sus referencias. Procesos de ese tipo son también típicos de la *Teoría de Catástrofes* (Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, 1975).

una, solución, supuesto el dato inicial regular, puede probarse sin dificultad mediante diferentes métodos. La cuestión de la unicidad de soluciones cuando R_a es discontinua es mucho más delicada (en contraste con el caso en el que R_a es Lipschitz continua). En primer lugar, es posible mostrar mediante contraejemplos que la unicidad se vulnera cuando, por ejemplo, el dato inicial toma su máximo o mínimo al nivel $u_0 = -10$. Sin embargo, si el dato inicial u_0 atraviesa el nivel $u_0 = -10$ de manera “no degenerada” ($\nabla u_0(x_0) \neq \mathbf{0}$ en los puntos $x_0 \in \mathcal{M}$ donde $u_0(x_0) = -10$) entonces se mantiene la unicidad de soluciones¹⁶.

Antes de analizar la cuestión de la estabilidad y bifurcación de los estados estacionarios, merece la pena entretenerse en mencionar un aspecto notable que, a diferencia del caso del modelo cero-dimensional, cobra ahora sentido. Nos referimos a la simulación de las *fronteras libres* separando las zonas de la Tierra cubiertas por hielo y nieve. Recordando los argumentos aludidos para la parametrización del distinto albedo terrestre, tales curvas vendrían definidas como las curvas para las que se produce una transición brusca en el co-albedo, es decir, sobre las que se ha de tener que $u = -10$. El modelo mejor adaptado para tal simulación es el de tipo Budyko en el que se supone que el co-albedo se representa por una función discontinua.

Si, por simplicidad, retornamos al caso unidimensional (véase (5)) las fronteras libres ahora pasan a ser puntos (desconocidos *a priori*) separando la zona cubierta de hielo y nieve $\{x \in [-1, 1] : u(x, t) < -10\}$ del resto. Supongamos que esos puntos se limitan a dos $S_+(t)$ y $S_-(t)$ que corresponden a las latitudes que “representan” los promedios de las fronteras de los dos casquetes polares. Se tiene pues que $u(S_\pm(t), t) = -10$. El intervalo temporal de definición de las interfases $S_+(t)$, $S_-(t)$ no es siempre $[0, \infty)$ sino que depende fuertemente de los datos Q , $S(x)$, de la especificación de $R_a(x, u)$ y del dato inicial $u_0(x)$. Puede probarse¹⁷ que $S_+(t)$ y $S_-(t)$ son funciones C^∞ (al menos mientras no colapsen) que evolucionan según la ecuación diferencial

$$S'_+(t) = \frac{k[u_{tx}(S_+(t)_-, t) - u_{tx}(S_+(t)_+, t)]}{QS(S_+(t))(\beta_f - \beta_i)}$$

y la análoga para $S'_-(t)$, donde se ha utilizado la notación genérica de $f(t)_+ = \lim_{h \downarrow 0} f(t+h)$. El caso bidimensional es más delicado

En ocasiones, la representación del borde de los casquetes polares por medio de una curva sobre la superficie \mathcal{M} no es enteramente satisfactoria pues imágenes emitidas desde los satélites muestran extensiones, que pueden llegar a tener un espesor de 40 km, en donde es difícil, sino imposible, decidir si se trata de agua o hielo. Una formulación matemática de ese tipo de situaciones equivaldría a suponer que el conjunto $M(t) = \{x \in \mathcal{M} : u(x, t) = -10\}$ tuviese medida positiva. A veces se denomina a tal conjunto cómo *zona pastosa* (*mushy región* , en inglés) por su similitud con regiones similares provenientes de la modelización

¹⁶Véase Díaz, J.I. y Tello, L. , A nonlinear parabolic problem on a Riemannian manifold without boundary arising in Climatology, *Collect. Math.*, **50**, 1999, págs.19-51.

¹⁷Xu, X., Existence and Regularity Theorems for a Free Boundary Problem Governing a Simple Climate Model. *Aplicable Anal.*, **42**, 1991, págs. 33-59.

de problemas de Stefan de cambio de fase. Es posible mostrar que si u es solución del problema (14) entonces tal conjunto se reduce a un conjunto de curvas que no puede tener medida positiva. Por el contrario, en el caso del modelo cuasilíneo (6), propuesto por Stone, en el que $k = |\nabla u|^{p-2}$, se tiene que el conjunto $M(t)$ puede tener medida positiva si $p > 2^{18}$.

Los estados de equilibrio $u_\infty(x)$ del problema (14) son ahora bastante más complejos que las constantes que aparecían en el modelo cero-dimensional. Ahora vienen dados como soluciones del problema estacionario

$$-\operatorname{div}(k\nabla u_\infty) = R_a(x, u_\infty) - R_e(x, u_\infty), \text{ en } \mathcal{M}. \quad (15)$$

Como $R_e(\cdot, u_\infty)$ es creciente en u , la ecuación (15) tiene carácter de *problema no lineal del tipo de autovalor* y así, la multiplicidad de soluciones depende fuertemente de los diferentes valores del parámetro solar Q . Usando técnicas clásicas de análisis no lineal (tales como el *método de continuación* y el *Teorema de la función implícita*¹⁹ se prueba que, bajo adecuadas condiciones, al igual que en el diagrama de bifurcación del modelo cero-dimensional, hay una curva de bifurcación que comienza en un estado u_∞^0 cuando $Q = 0$ y tiende al infinito si $Q \rightarrow +\infty$, teniendo además un número par de puntos de retorno correspondientes a $Q = Q_c^1$ y $Q = Q_c^2$. De esta manera, si $Q < Q_c^1$ o $Q > Q_c^2$ hay unicidad de soluciones y si $Q \in (Q_c^1, Q_c^2)$ existen al menos tres soluciones.

El estudio de la estabilidad de los estados estacionarios puede llevarse a cabo por medio de distintos métodos. Un primer resultado en esa dirección es el que muestra que el llamado *conjunto ω -límite*,

$$\omega(u) = \{u_\infty : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ para los que } u(t_n, \cdot) \rightarrow u_\infty\},$$

está formado únicamente por soluciones de (15)²⁰. La estabilidad ante “pequeñas variaciones” del dato inicial se puede analizar por medio del *principio de estabilidad linealizada* cuando se supone que las funciones R_a (o, lo que es lo mismo, β) y R_e son derivables respecto de u . El problema linealizado en torno a un estado estacionario u_∞ es también de tipo de autovalores

$$-\operatorname{div}(k\nabla v) - [QS\beta'(u_\infty) - \frac{\partial}{\partial u}R_e(x, u_\infty)]v = \lambda v, \text{ en } \mathcal{M}. \quad (16)$$

Es bien conocido que los autovalores de este problema constituyen una sucesión no decreciente $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que tiende a infinito y, además, se tiene que $\lambda_0(Q, u) < \lambda_1(Q, u)$. Según el principio de estabilidad linealizada, dado $Q > 0$, una solución

¹⁸Díaz, J. I., On a free boundary problem arising in Climatology. En *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, (Ed. N. Kenmochi), Vol. II, Gakkotosho Co., Tokyo, 2000, págs. 92-109.

¹⁹Véase, por ejemplo, Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Applications*. Volúmenes I-V. Springer-Verlag, Berlín, 1988.

²⁰Díaz, J.I., Hernández, J. y Tello, L., On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in Climatology, *J. Math. An. Appl.*, **216**, 1997, págs. 593-613.

u_∞ de (15) es asintóticamente estable (respectivamente, inestable), en $C([-1, 1])$, si el punto de equilibrio del problema parabólico verifica $\lambda_0(Q, u_\infty) < 0$ (respectivamente, $\lambda_0(Q, u_\infty) > 0$)²¹.

La estabilidad no lineal (*i.e.*, ante perturbaciones no necesariamente “pequeñas”) para el problema (14) puede estudiarse también, y sin necesidad de suponer la derivabilidad de R_a y R_e , con ayuda del funcional

$$J(u) = \int_{\mathcal{M}} \{k |\nabla u(x)|^2 + F(x, u(x))\} dx,$$

donde

$$F(x, u) = - \int_0^u \{R_a(x, v) - R_e(x, v)\} dv.$$

Se tiene que

$$\frac{d}{dt} J(u(\cdot, t)) = - \int_{-1}^1 c(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx \leq 0.$$

por lo que J es un funcional de Lyapunov y las soluciones estables se corresponden con los mínimos de J y las no linealmente inestables con otros puntos críticos como máximos o puntos de silla. La búsqueda de estados estacionarios no se debe limitar, pues, al estudio de los puntos extremales (mínimos y máximos) locales del funcional J . En esta dirección es de señalar la importancia del resultado conocido como el *Lema del paso de montaña*²² que bajo circunstancias muy generales asegura que entre dos mínimos ha de existir necesariamente un punto de silla²³.

La persistencia o no, para $t \in (0, \infty)$, de las fronteras libres ($S_+(t)$ y $S_-(t)$ en el problema uni-direccional) asociadas a estados de evolución $u(x, t)$ es de gran importancia en el estudio del conjunto de los estados de equilibrio $u_\infty(x)$ del problema (15): si por ejemplo $S_-(T_0) = S_+(T_0)$ para algún T_0 y ese punto interior de $(-1, 1)$ entonces se puede mostrar que el estado estacionario $u_\infty(x)$ representa el caso de una superficie terrestre cubierta de hielo y nieve pero si el punto $S_-(T_0) = S_+(T_0)$ es $x = 1$ o $x = -1$ entonces $u_\infty(x)$ representa la ausencia de superficies heladas.

El estudio numérico de los modelos de balance de energía ha sido llevado a cabo por numerosos autores para elecciones concretas de R_a y R_e ²⁴. Un método frecuentemente utilizado es el de Galerkin. En el caso unidimensional,

²¹Para más detalles sobre la aplicación al problema (15) véase el artículo de G. Hetzer en el libro *The Mathematics of Models for Climatology and Environment* (editor J. I. Díaz) NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997.

²²Véase, por ejemplo, Nirenberg, L., Variational and topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. math. Soc.*, **4**, 1981, págs. 267-302.

²³Para una aplicación de este lema a modelos climáticos véase Ghil y Childress loc.cit.

²⁴Son de citar los trabajos de Held y Suarez, North y Hetzer, Jarausch y Mackens antes citados. Véase también Bermejo, R., Numerical solution to a two-dimensional diffusive climate model. En el libro *Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio-ambientales: Aspectos Matemáticos y Numéricos*. A. Valle and C.Parés eds., Universidad de Málaga, (1994), 15-30, y Bermejo, R., Díaz, J.I. y Tello, L.: Trabajo en elaboración.

se comienza tomando $S(x) = \frac{1}{4}(5 - 3x^2)$ como función de insolación. Los polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}$ resultan ser las funciones propias del operador de difusión considerado asociadas a los autovalores $\lambda_n = n(n + 1)$, es decir,

$$-\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right) = n(n+1)P_n(x).$$

Entonces, se busca la solución (por ejemplo del problema estacionario) en la forma

$$u(x) = \sum_0^{\infty} u_n P_n(x).$$

Numerosas cuestiones matemáticas para esta clase sencilla de modelos esperan aún respuesta pero el reto más ilusionador es de analizar si los resultados anteriormente expuestos son válidos para modelos más complejos. Este tipo de objetivos reúnen valores intelectuales, ecológicos y quizás sean útiles a generaciones venideras.