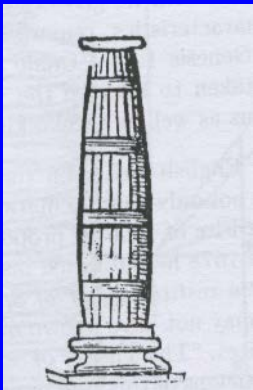
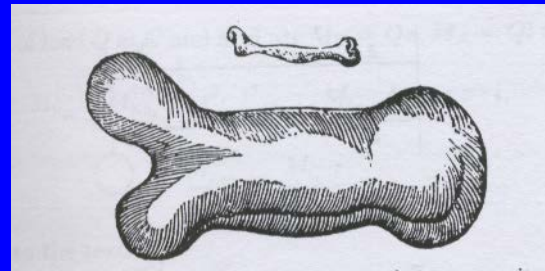


5. La más alta columna

Estudios pioneros

Leonardo da Vinci (1452-1519)

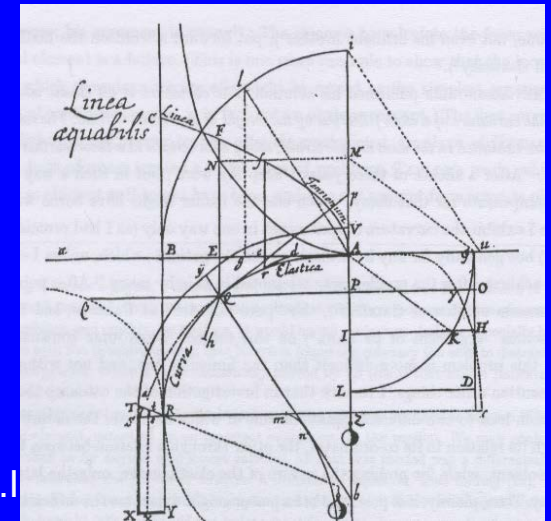
Galileo Galilei (1562-1642),
1638,



Ignace-Gaston Pardies

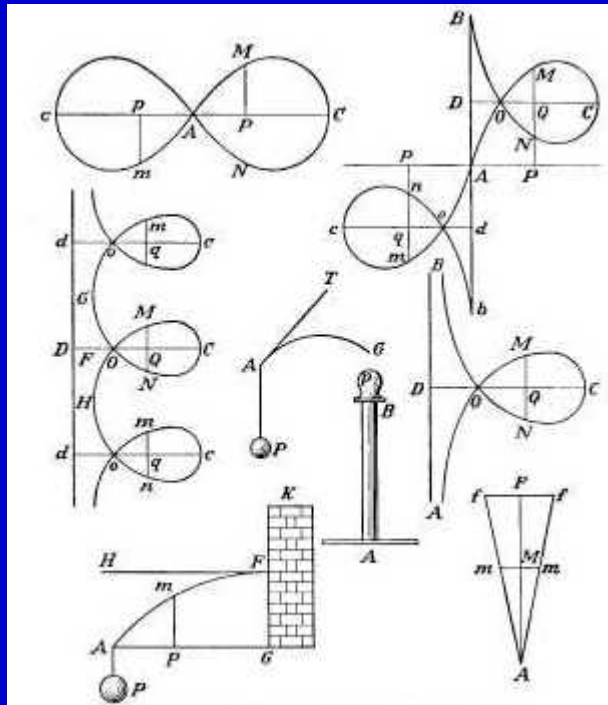
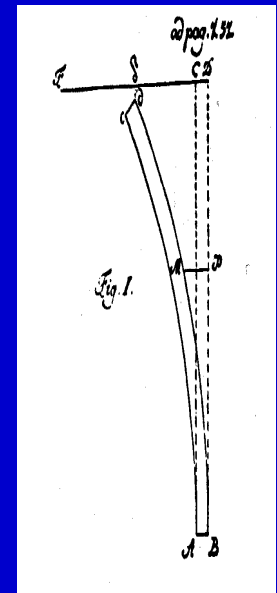
1673

Jacques Bernoulli (1654-1705),
1690



Jean Bernoulli (1667-1748):

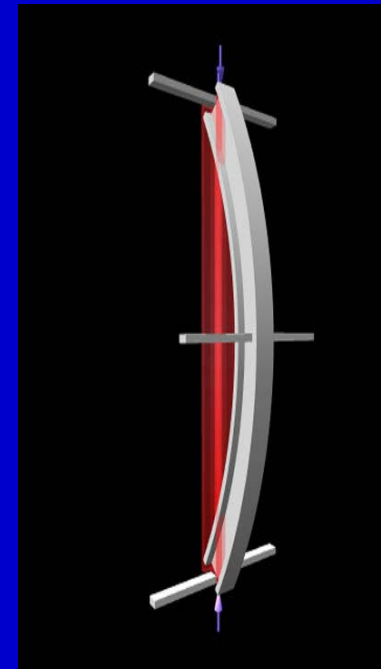
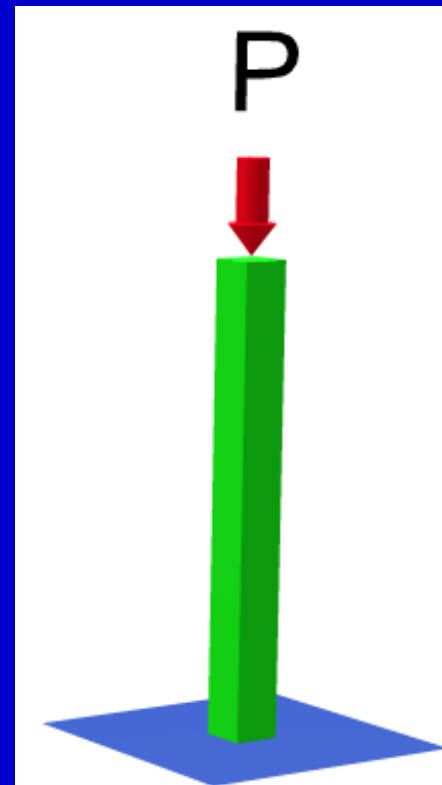
On the curvature of extensible strings
(1691, ..., 1742)

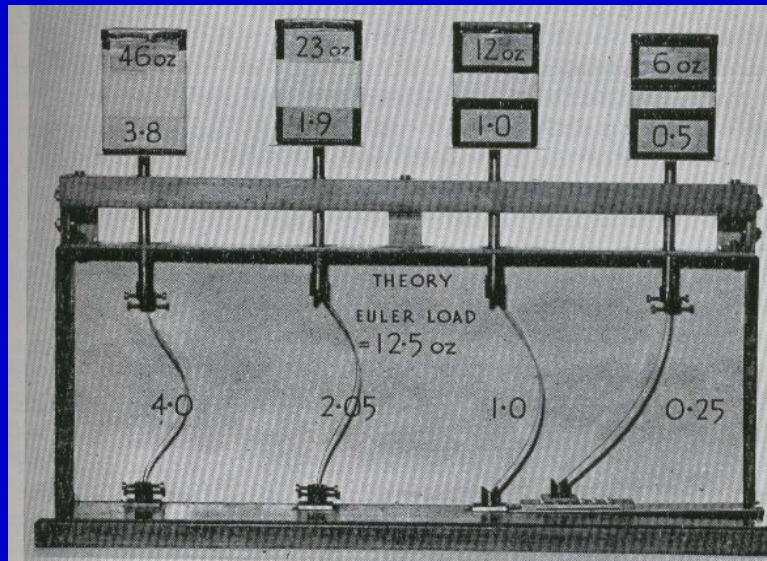


Euler, 1727

Modulo de extension

(modulo de Young)





Diferentes perfiles

Modelización: Sección no despreciable (y no homogénea)

Teoría de la Elasticidad tridimensional

Navier, St. Venant,...

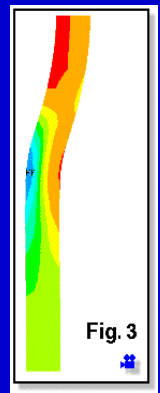
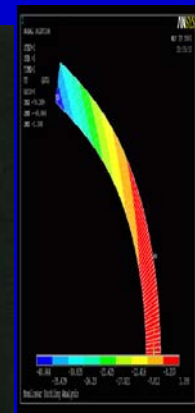
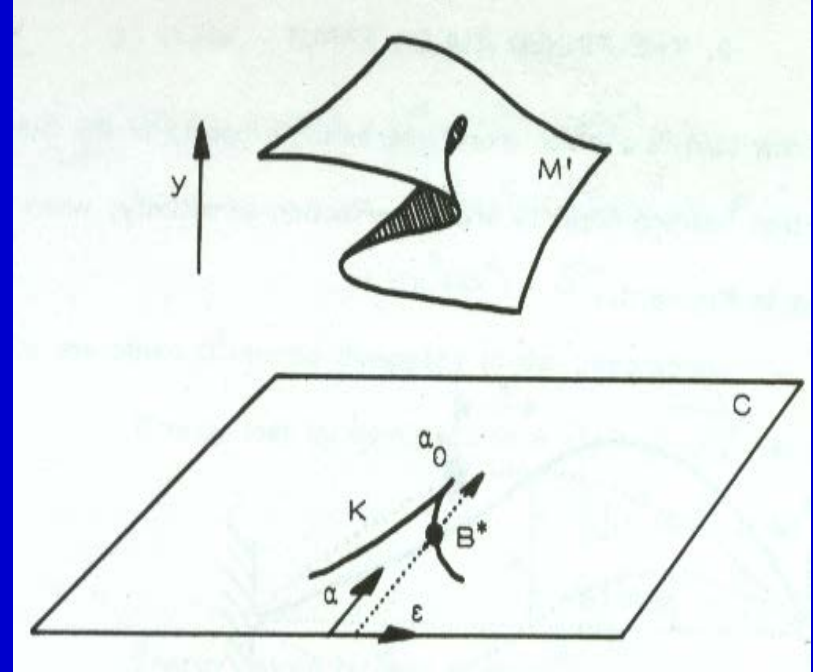
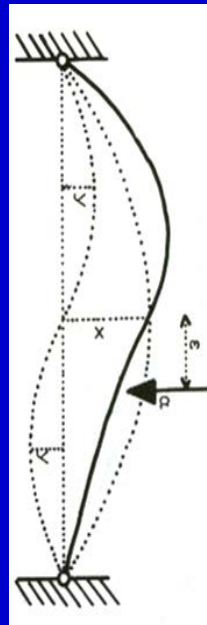


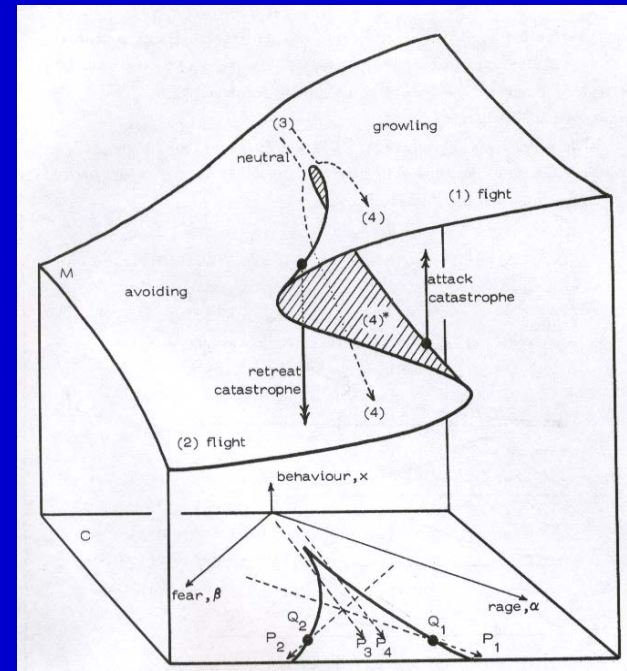
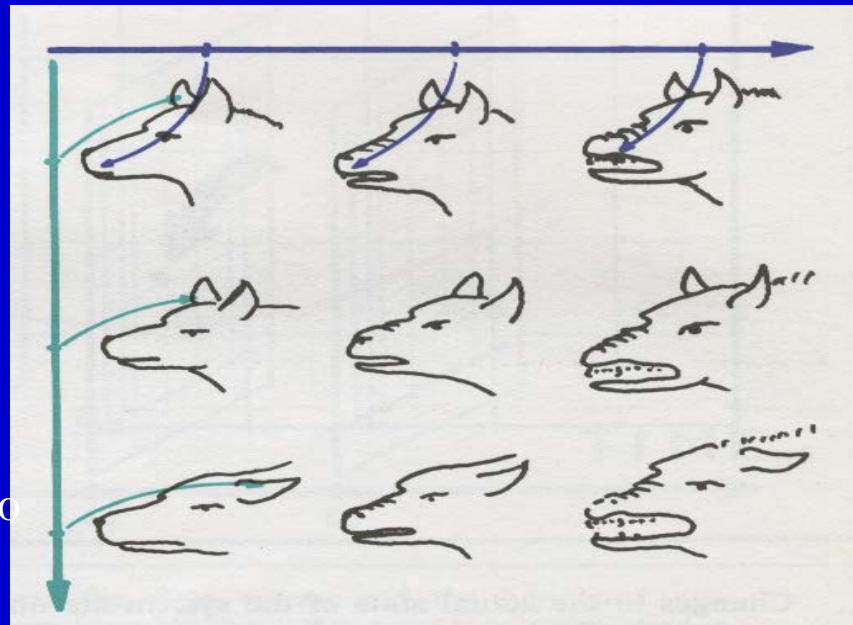
Fig. 3

Catastrophe Theory, E. C. Zeeman:
Selected papers 1972-1977



Psicología: mecanismo de agresion

rabia



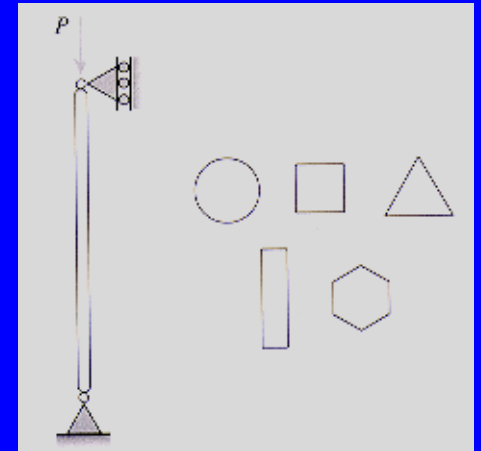
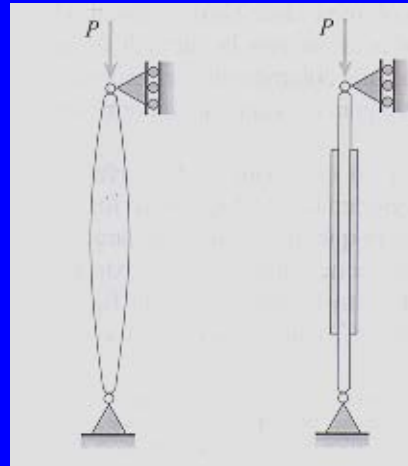
miedo

Optimización y Control

La mejor columna “elastica”: M. Vitruvio (I b. C.) *De Architectura*
25b. C., L.B. Alberti (1404-1472) 1450,

Euler 1744,
J. Lagrange (1736-1813) 1773,...

La más alta columna



L. Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Scientiarum Naturalium
Helveticae edenda curvaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Lipsiae et
Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri, 1911—.

$$H_c = \left(\frac{9EI}{4\rho A} j_{-1/3}^2 \right)^{1/3}$$

$$H_c = \left(\frac{9EI}{16\pi\rho} j_{-1/3}^2 \right)^{1/4}$$



B. Keller and F. I. Niordson, “The Tallest Column”, Journal of Mathematics and Mechanics, 1986

S. J. Cox and M. L. Overton, “On the optimal design of columns against buckling,” SIAM J. Math. Anal. 1992

ON THE EULER BEST COLUMN: A SINGULAR NON LOCAL QUASILINEAR EQUATION WITH A BOUNDARY BLOWING UP FLUX CONDITION

J.I. DÍAZ AND M. SAUVAGEOT

$$\begin{cases} \left[\frac{A(u)}{u_x^3} \right]_x + (B(u) + \Lambda)u = 0 & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = 0, u'(1) = +\infty, \end{cases}$$

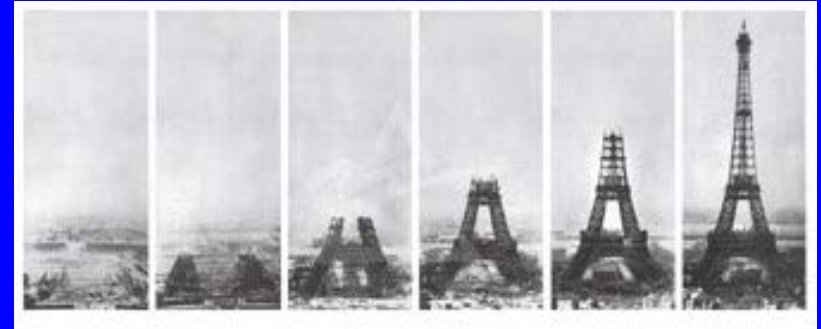
$$A(u)(x) = \left(\mu + \int_0^x u(t)^2 dt \right)^2$$

$$B(u)(x) = \int_x^1 \frac{1}{u_x(t)^2} \left(\mu + \int_0^x u(t)^2 dt \right) dt.$$



Fig. 2 Cross-sectional area of strongest clamped-free column as a function of distance along column. Left end is clamped and right end is free.

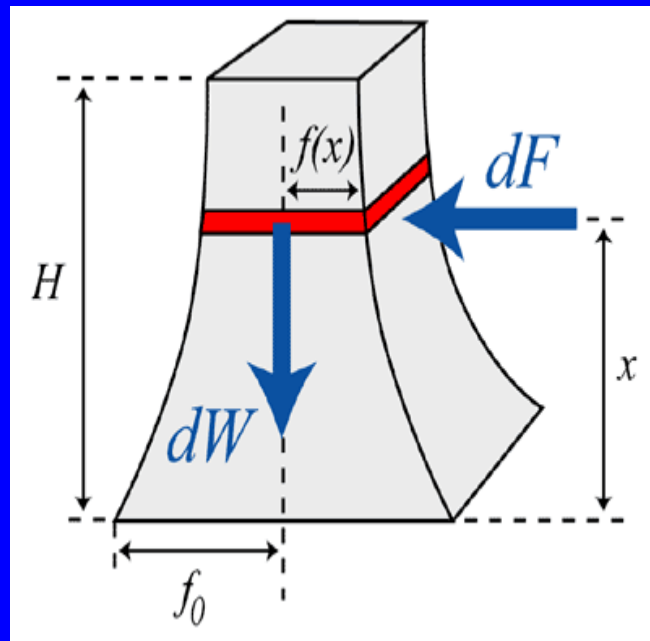
6. Diseño de la Torre Eiffel



“Considero que la curvatura de las cuatro aristas, consecuencia de los cálculos matemáticos, dará una gran impresión de resitencia y belleza”

G. Eiffel /Le Tepms, 14 de febrero de 1887)

J. Gallant, Am. J. Phys. 2002



$$dW = 4\rho g f^2(x) dx$$

Elemento de volumen

$$dF = 2 P f(x) dx,$$

Elemento de fuerza del viento

Balance de momentos

$$\frac{1}{2} \int_x^H f^2(x) dx - \text{constant} \times (H-x) = \int_x^H x w(x) f(x) dx,$$

$$w(x) = \frac{P(x)}{4\rho(x)g f_0}$$



$$\frac{1}{2}f^2(x) - \text{constant} = xw(x)f(x).$$

$$\frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f_0^2 = xw(x)f(x).$$

$$f(x) = xw(x) - \sqrt{x^2w^2(x) + f_0^2},$$

$w(x)$ constante

$w(x)$ con presión variando con la altura

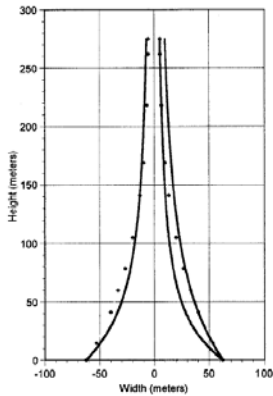


Fig. 2. The Eiffel function for three constant wind pressures ($w_0 = 0.700$ and $w_0 = 1.33$ on the right-hand side and $w_0 = 1.00$ on the left-hand side). The actual shape of the Tower are the data points.

$$w(x) = 0.690 - 1.53 \times 10^{-3}x + 3.96 \times 10^{-5}x^2 - 9.22 \times 10^{-8}x^3$$

$$\times 10^{-8}x^3$$

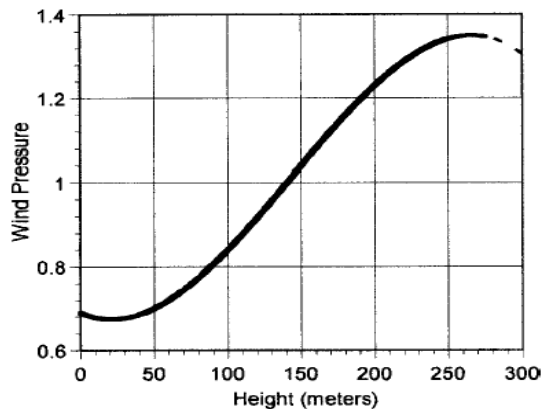


Fig. 3. The dimensionless maximum wind pressure $w(x)$ of Eq. (5) as a function of height.

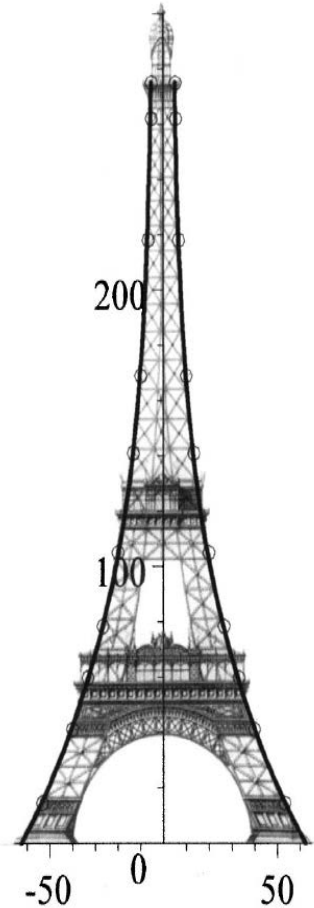
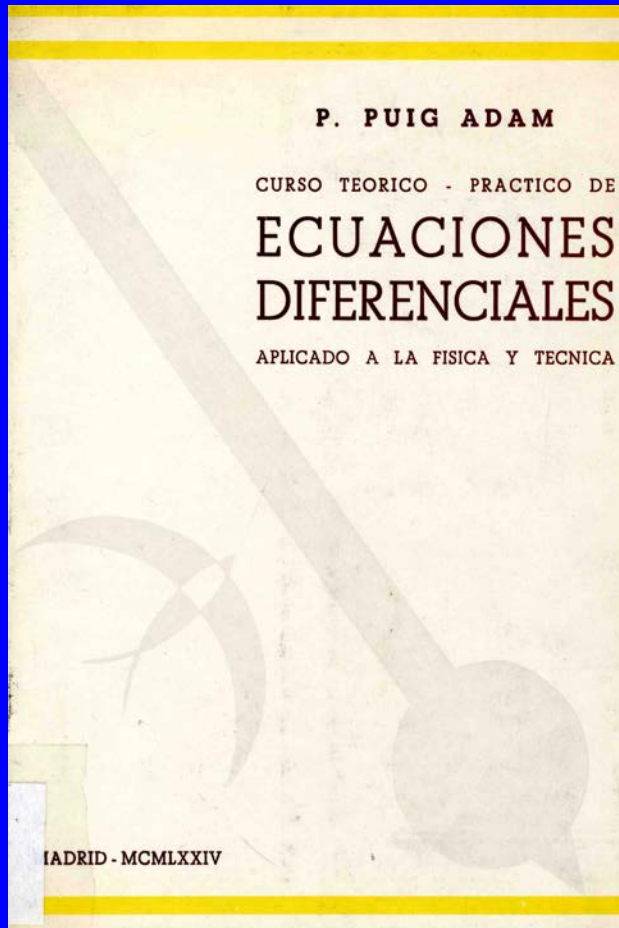


Fig. 4. The Eiffel function $f(x)$ with the cubic wind pressure, plotted with the data and an image of the Tower.

P. Weidman and I. Pinelis: Model equations for the Eiffel Tower profile, CR Mecanique AS 332 (2004)



14 LECCION 2.ª—§ 4

El haz integral está, pues, formado por *espirales logarítmicas*. Las dos formas distintas en que se ha presentado la constante nos indica que de una espiral se puede pasar a otra en dos formas equivalentes

- 1.ª Agregando una constante C al argumento. Dos espirales son congruentes, pudiendo obtenerse una de otra por un simple giro.
- 2.ª Multiplicando el radio vector por una constante K . Dos espirales son homotéticas respecto del origen (*). Obsérvese además que cada espiral es homotética de sí misma en infinitas homotecias de razón $e^{2nm\pi}$ siendo n entero, pues al aumentar el argumento en 2π el módulo queda multiplicado por $e^{2m\pi}$.

4. **Perfil de igual resistencia.**—Supongamos una columna sosteniendo un peso P . Este peso produce una presión en la base superior de P/S_0 , siendo S_0 la superficie de dicha base. A la distancia x de ésta la sección, de área $S(x)$, soporta el peso P más el de la porción de columna que tiene encima $\delta \int_0^x S(x) dx$ (δ peso específico), sufriendo una presión $= \left(P + \delta \int_0^x S(x) dx \right) / S(x)$

Si nos dan la forma de la columna podremos averiguar $S(x)$ (constante en el caso de columna cilíndrica) y, por tanto, la variación de la presión a lo largo de la columna. Si, recíprocamente, queremos que esta presión obedezca a una ley prefijada, por ejemplo que sea *uniforme* $= k$, se habrá de tener

$$kS(x) = P + \delta \int_0^x S(x) dx$$

y derivando $\Delta S'(x) = \delta S(x) \quad \frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\delta}{k}$

de donde $S = Ce^{\frac{\delta}{k}x}$

y como para $x=0$, $S_0=C$ resulta $S = S_0 e^{\frac{\delta}{k}x}$

que da la variación de la sección para que la columna tenga igual resistencia a la compresión en toda su longitud. Si la columna es de revolución, de la variación de S deducimos la del radio, pues se tendrá

$$\pi R^2 = \pi R_0^2 e^{\frac{\delta}{k}x} \quad \text{de donde} \quad R = R_0 e^{\frac{\delta}{2k}x}$$

Más general, si queremos que la presión varíe a lo largo de la columna según una ley prefijada $f(x)$ (con $f(0)=P/S_0$) se tendrá

$$f(x)S(x) = P + \delta \int_0^x S(x) dx$$

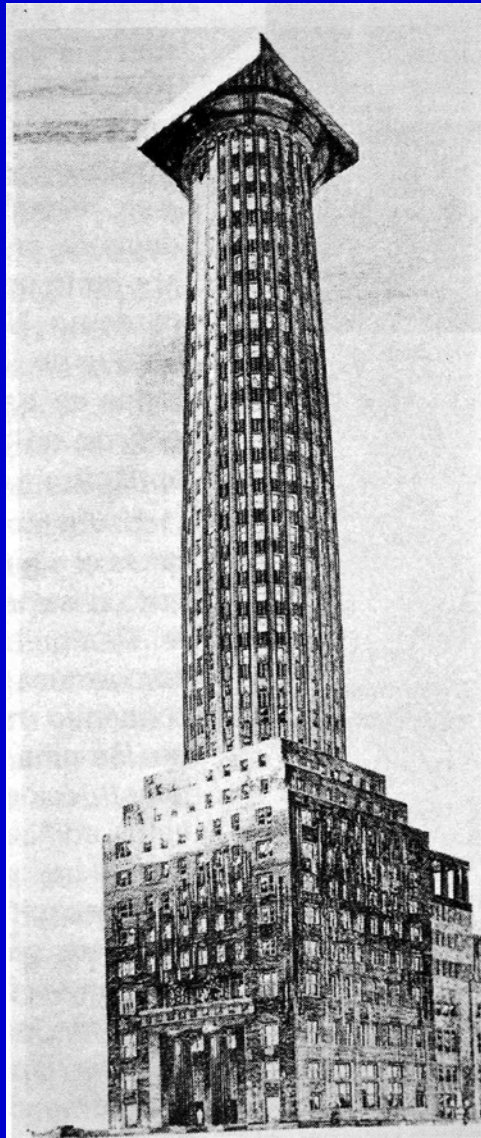
Derivando, $fS' + fS = \delta S$, de donde

$$\frac{S'}{S} = \frac{\delta}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

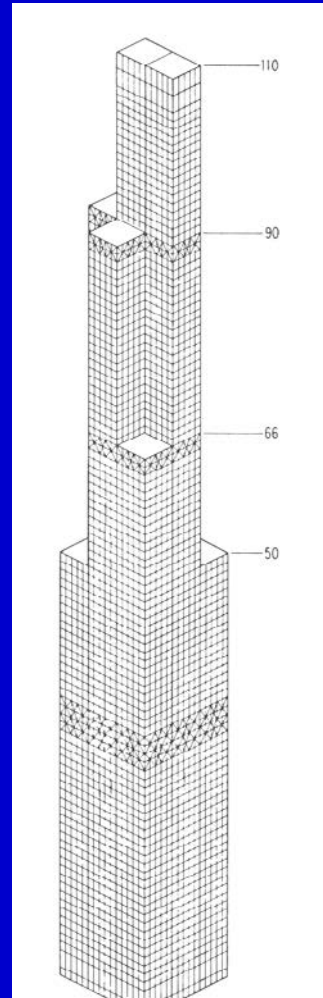
(*) No debe causar extrañeza al principiante el hecho de que dos curvas se puedan relacionar a un tiempo por dos transformaciones distintas, pues todo depende de la elección de puntos homólogos.



7. Columnas reforzadas y heterogéneas: rascacielos

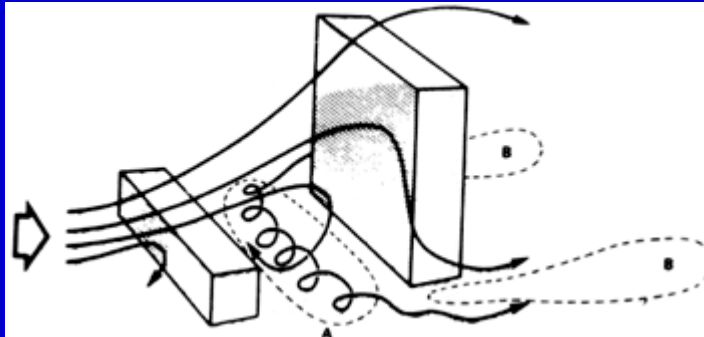
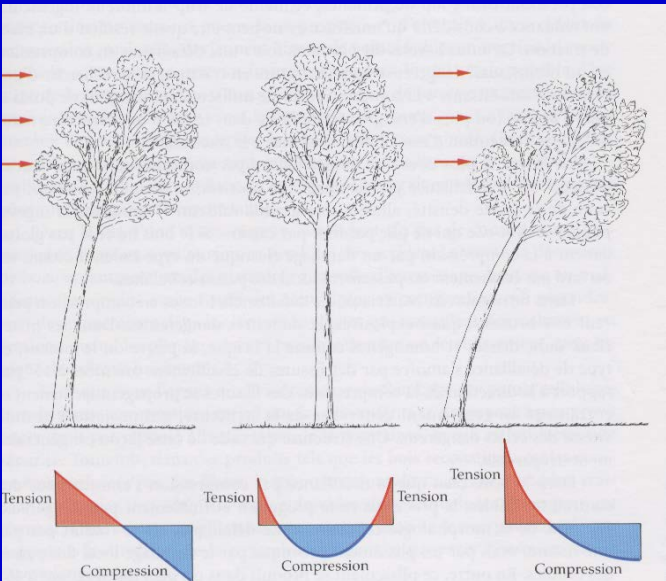
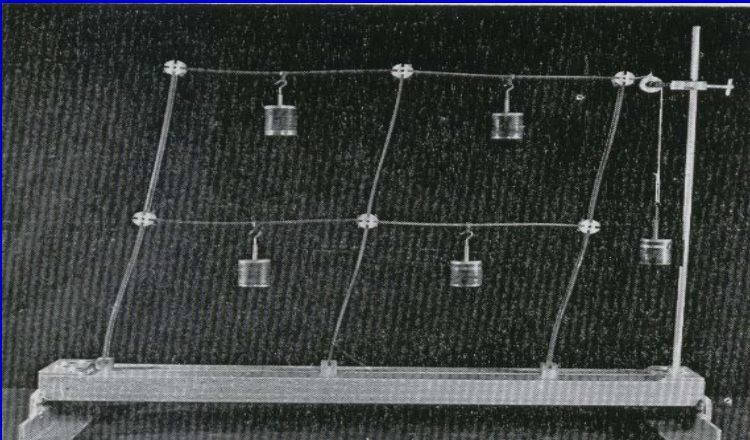
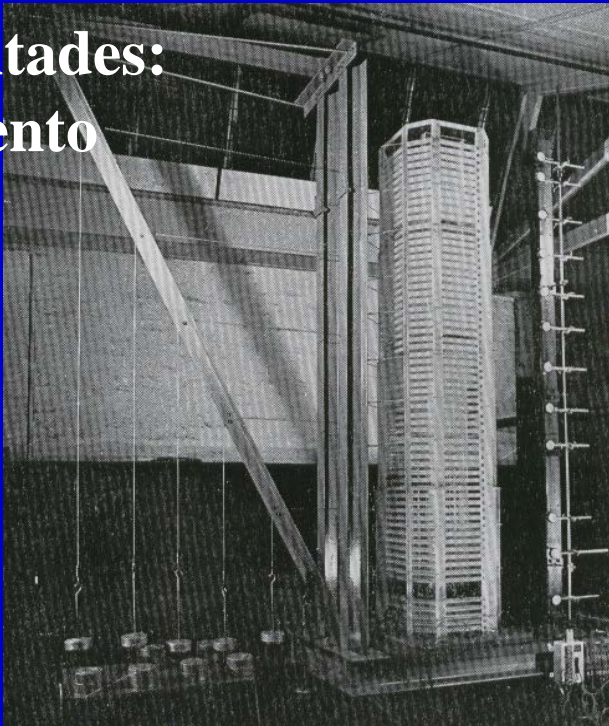


Lost, Chicago, 1920

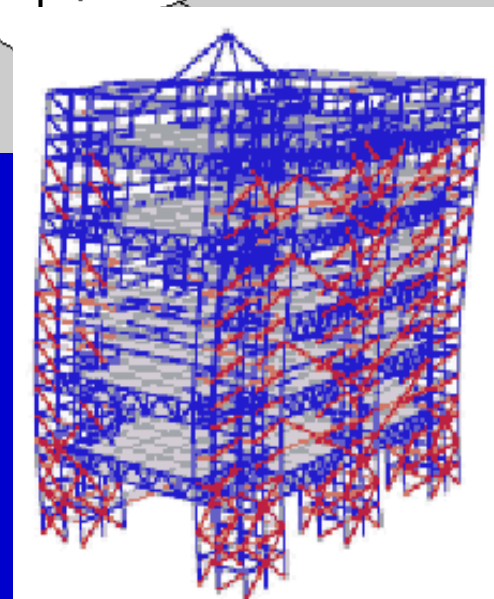
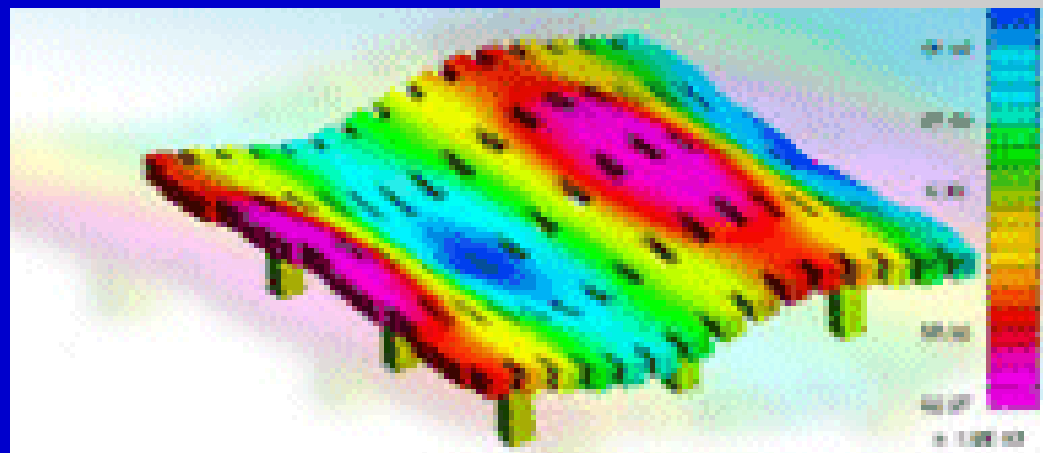
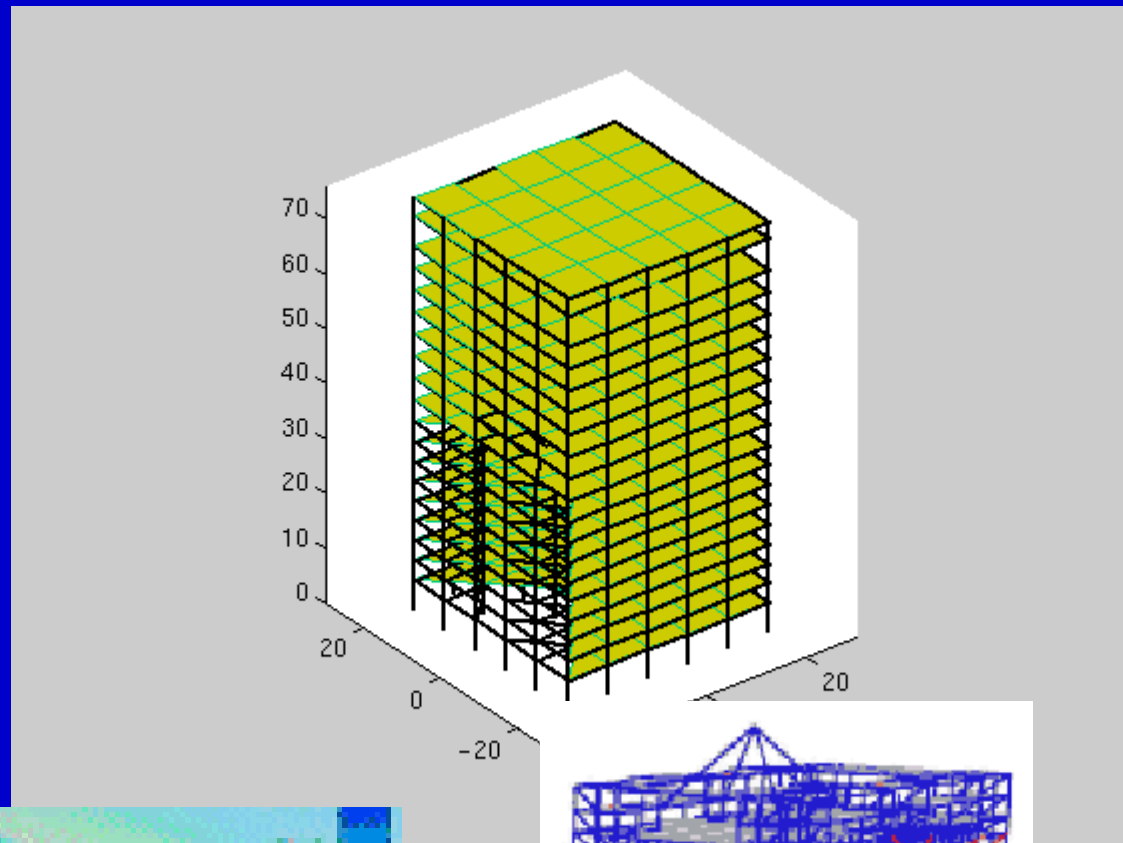
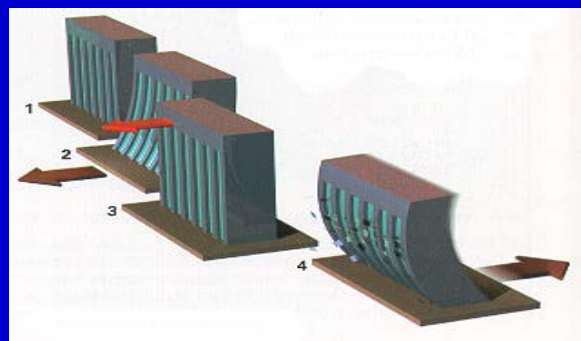


La Torre Sears de Chicago, 1974

Nuevas dificultades: estudios de viento

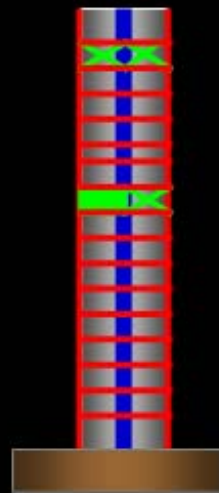
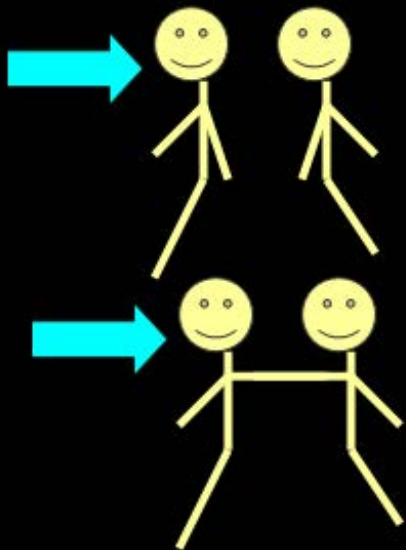
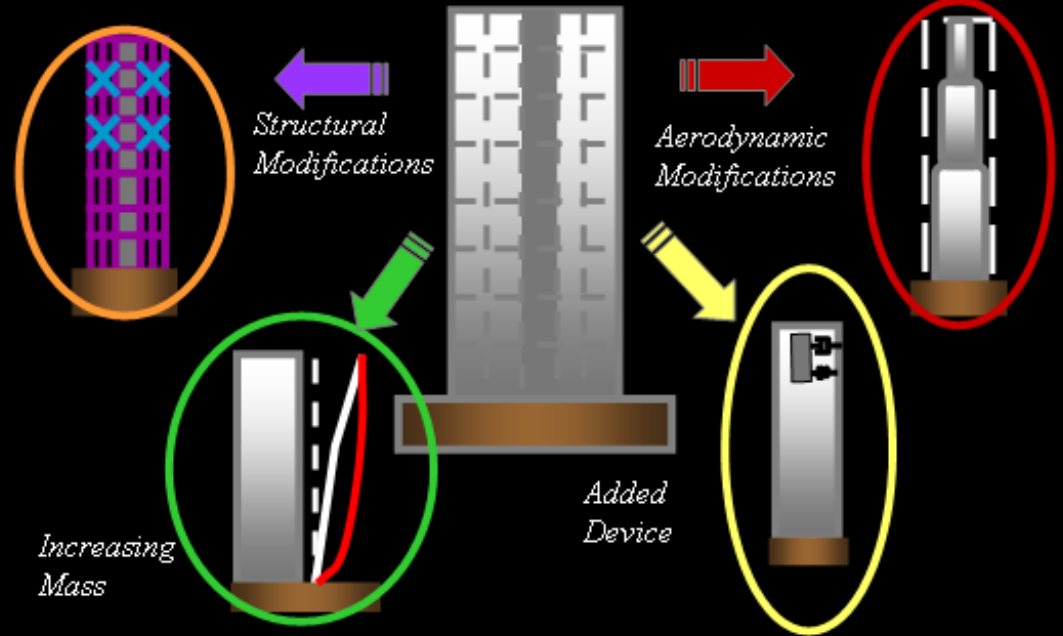


Dinámica: riesgos sísmicos

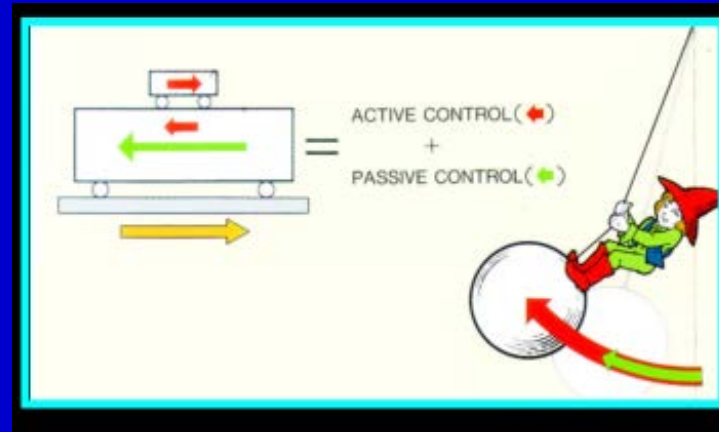


Optimización en el diseño

There are many solutions but they can be thought of in a few general ways.



Control de movimientos sísmicos



Landmark Tower.



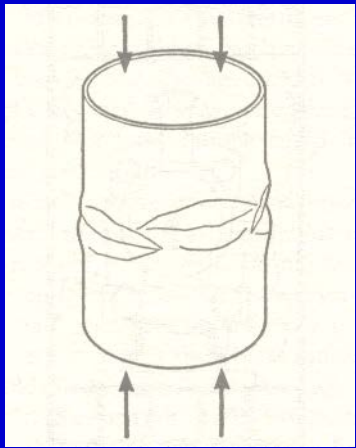
Shinjuku Park Tower.

Regreso al estudio de la columna: consideraciones sobre la distribución de masa

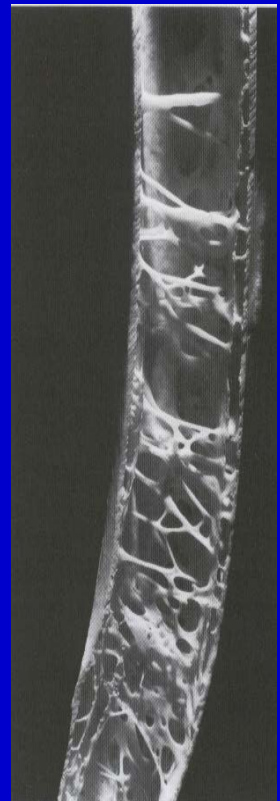
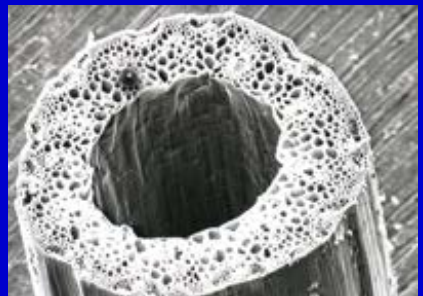
Solid Shaft
 $J = \frac{\pi R^4}{2}$

Hollow Shaft
 $J = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4)$

s1_f03.gif



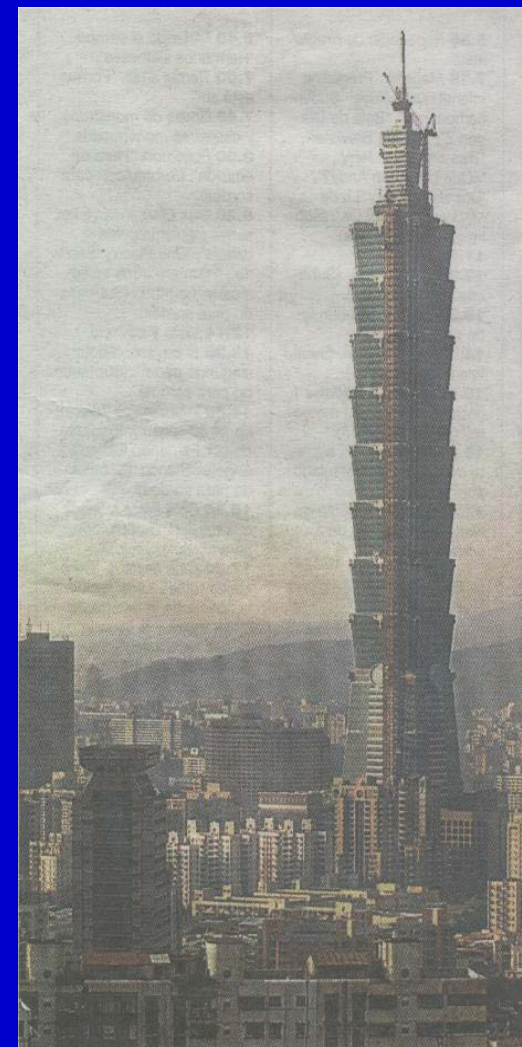
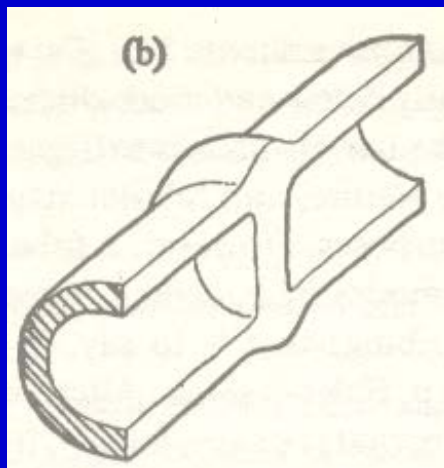
Fractura de Brazier



**Una primera solución
de reforzamiento**



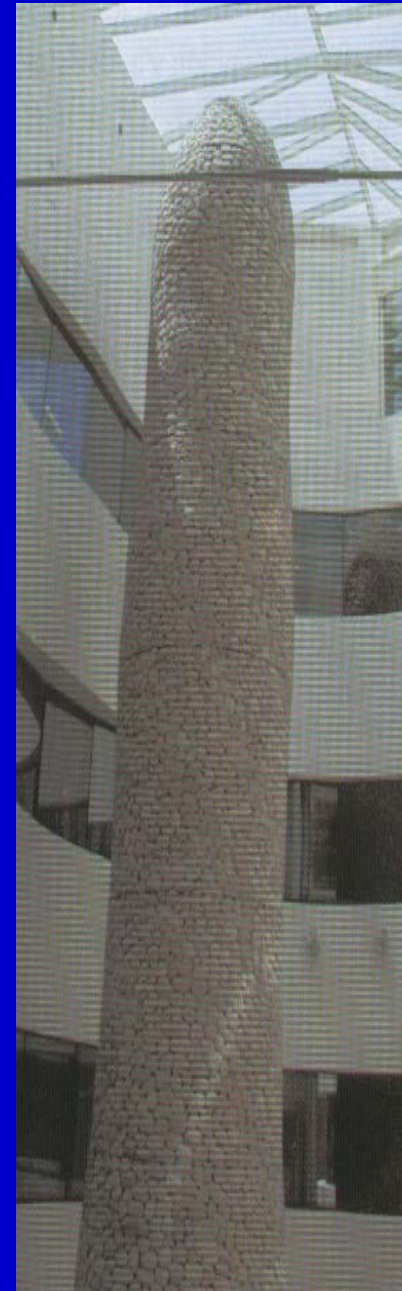
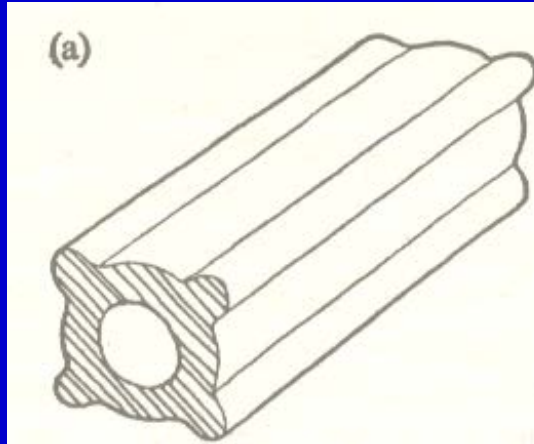
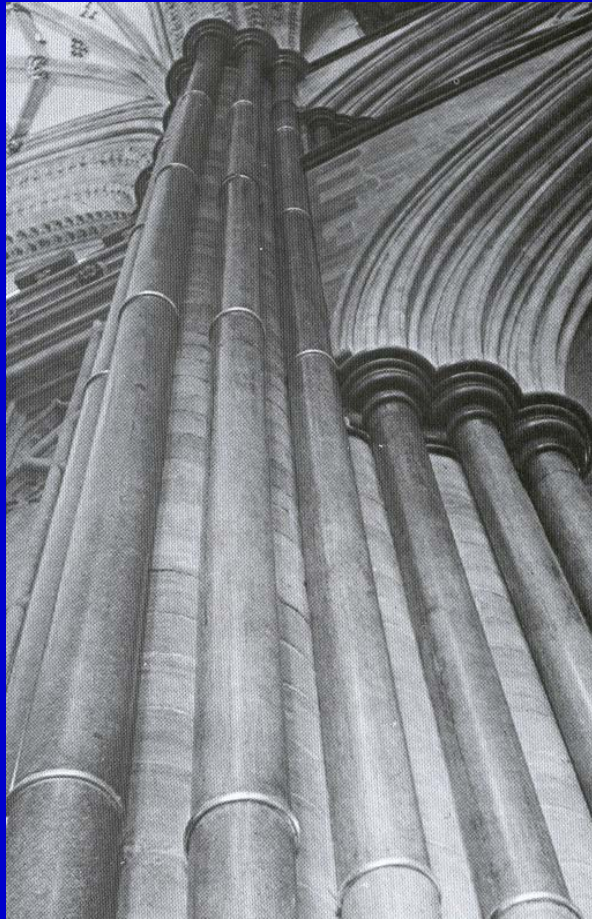
Torre Jinmao de Shanghai

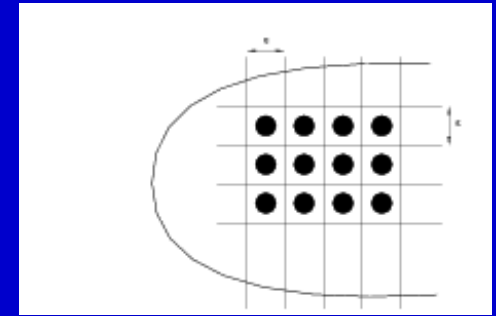
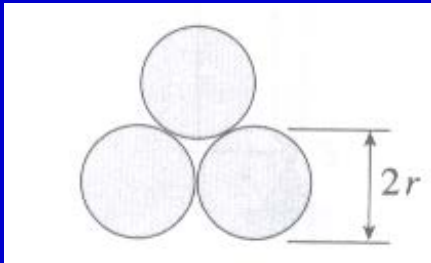


**Taipei 101 C.Y. Lee & Partners
(amortiguamiento en planta 88),**

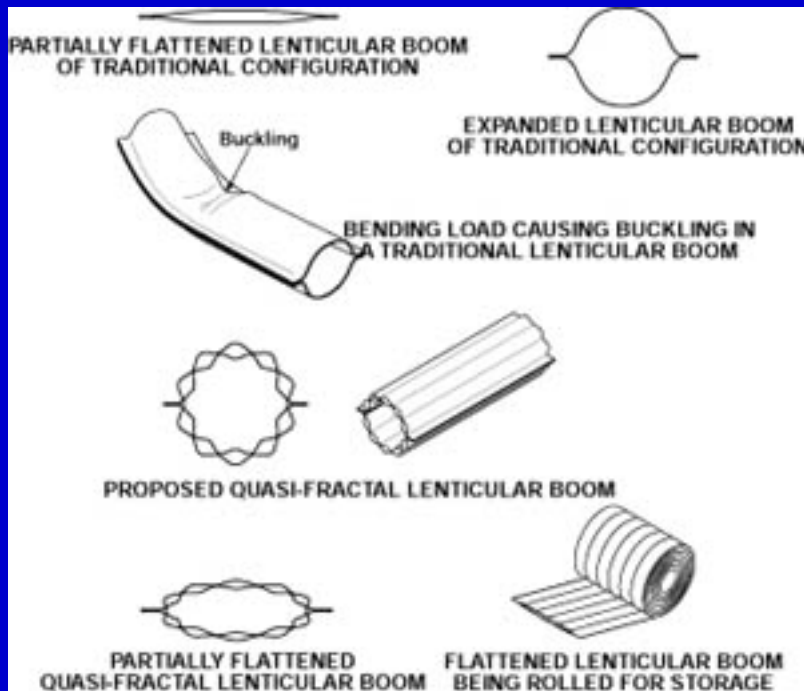
Una segunda solución de reforzamiento

Medios compuestos





Teoría de la Homogeneization

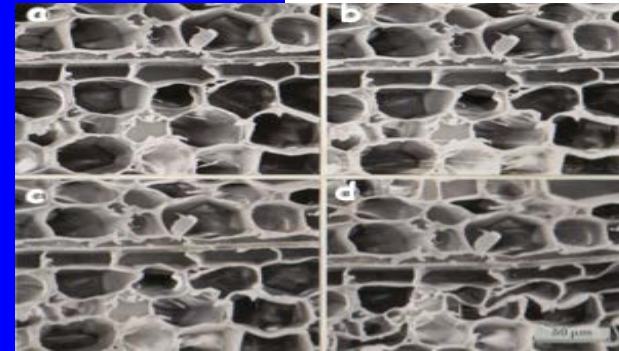
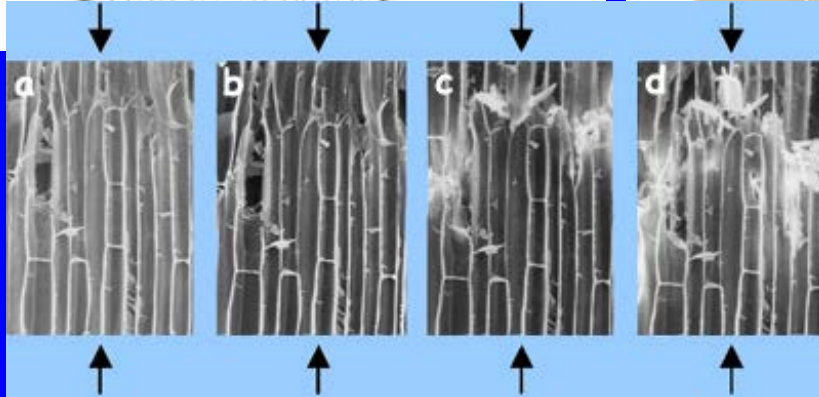
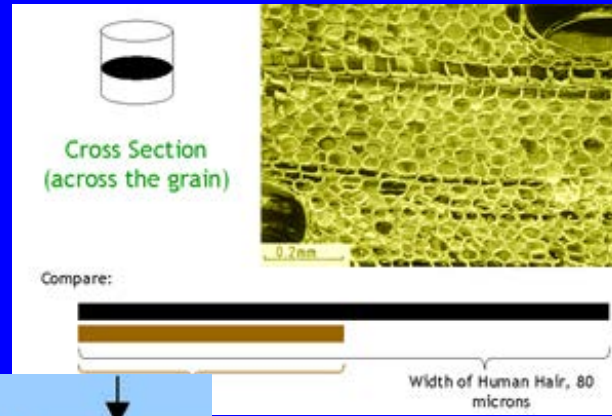
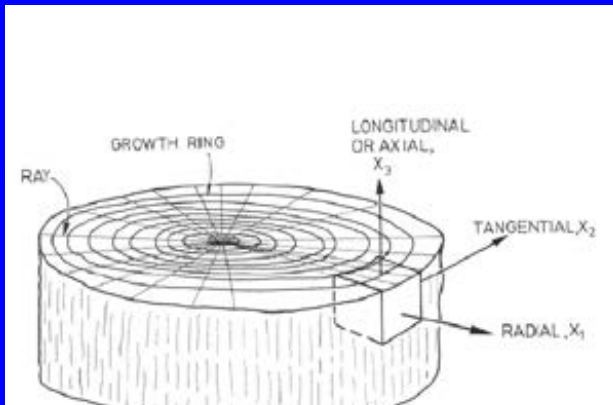
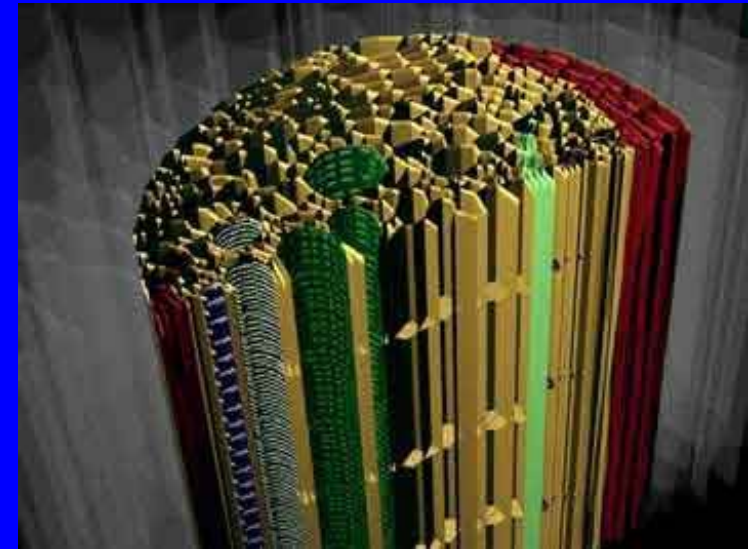


Sección Quasifractal (NASA)

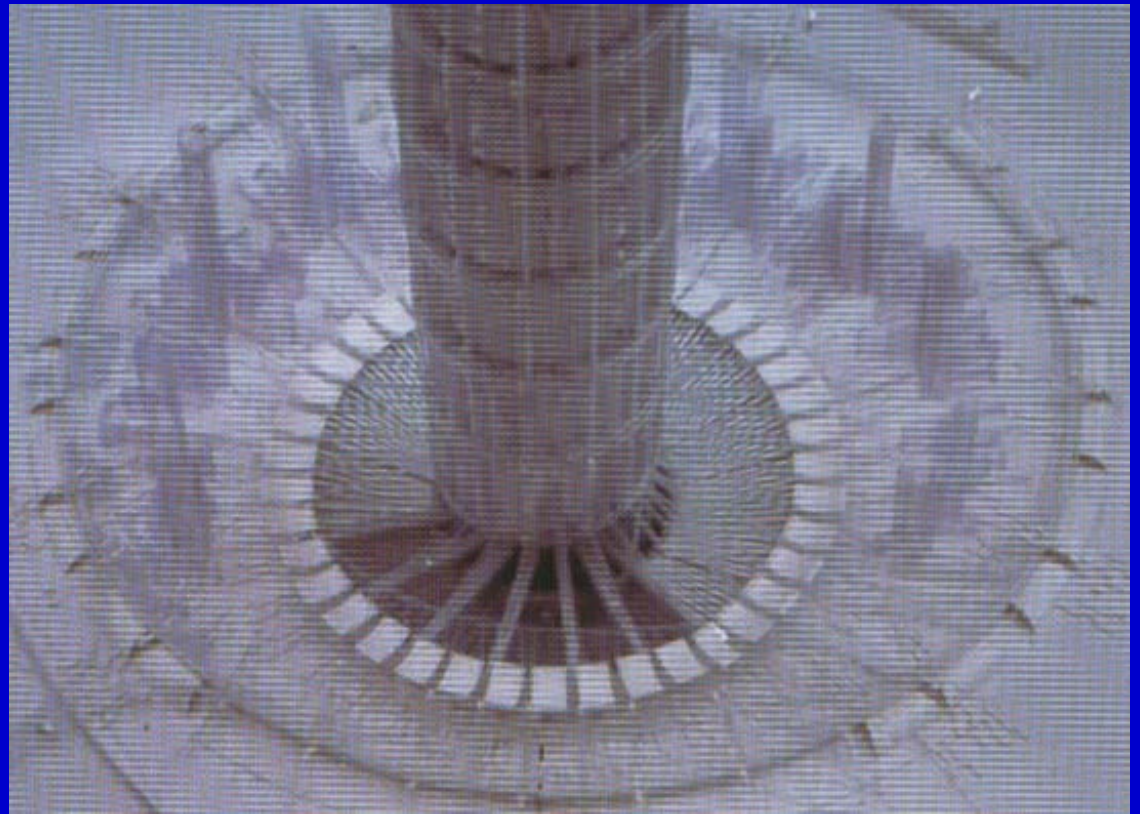
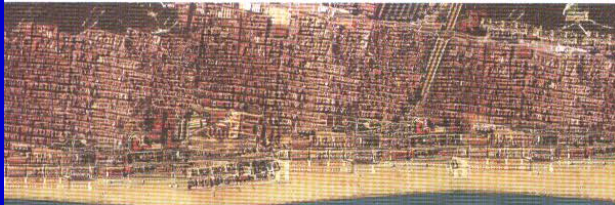


Sobre el proyecto Shangai bionic tower Cervera & Pioz

Inspiraciones naturales

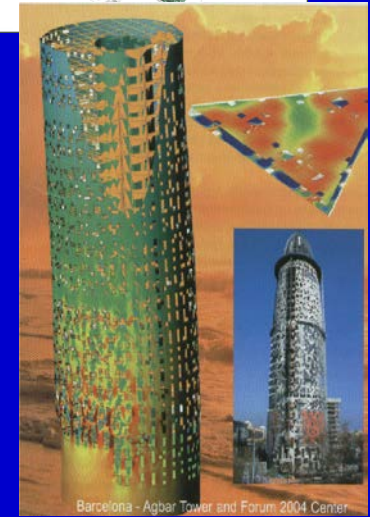
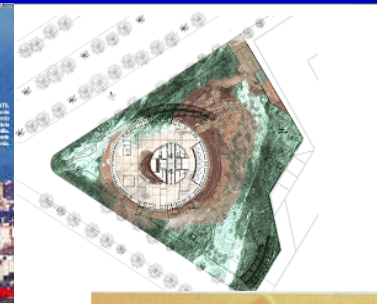


Metas ecológicas y sociales



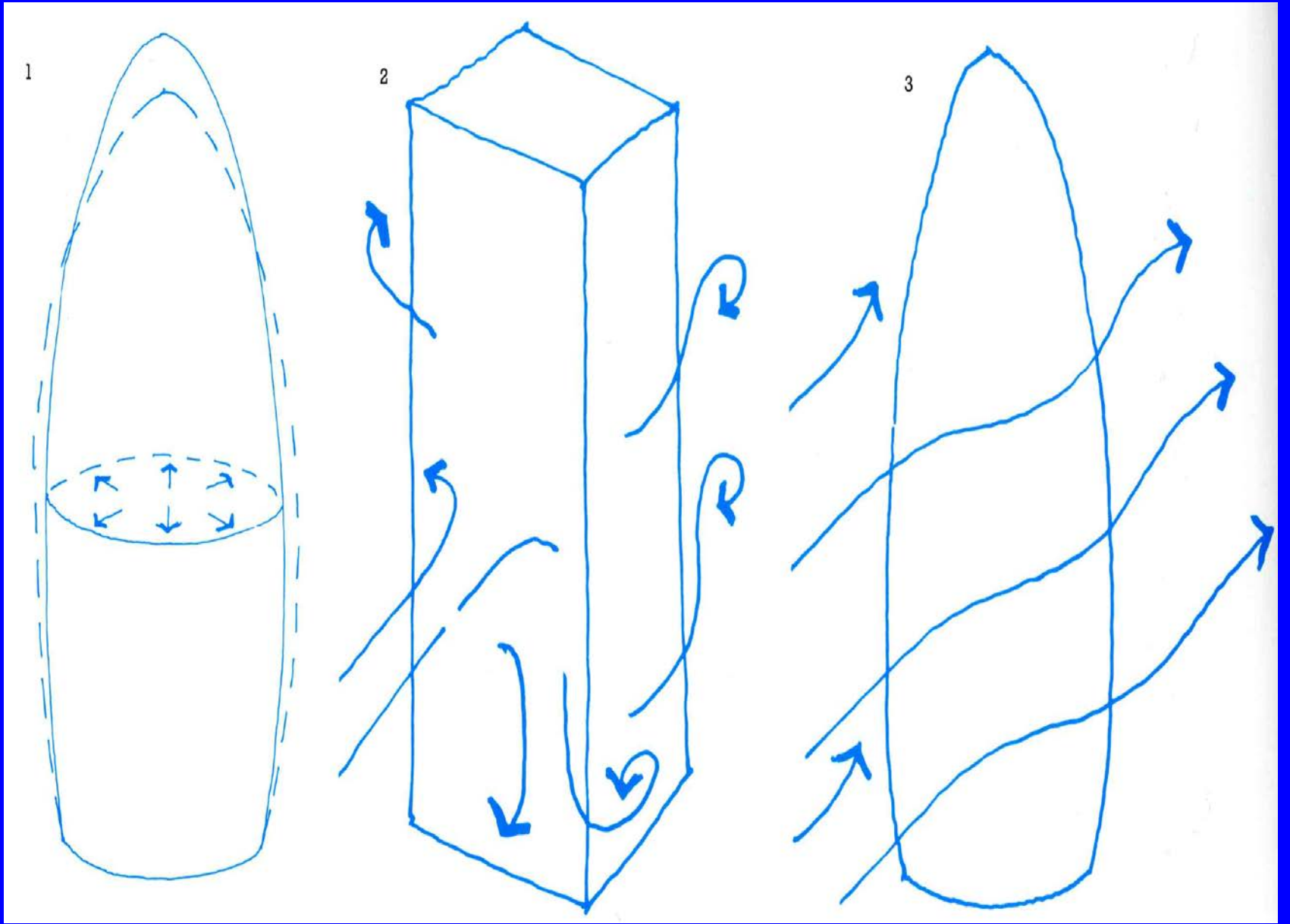
Torre Agbar, Barcelona 2004

Jean Nouvel

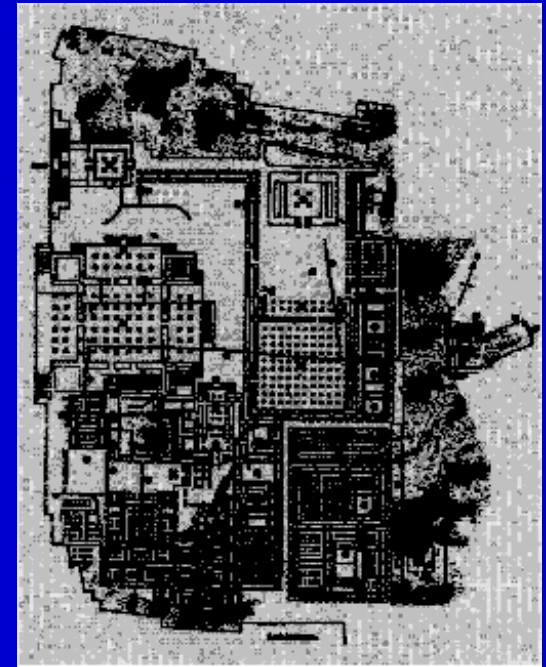


**Swiss Re Tower,
Norman Foster**

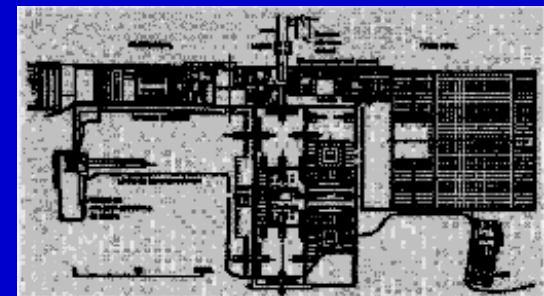




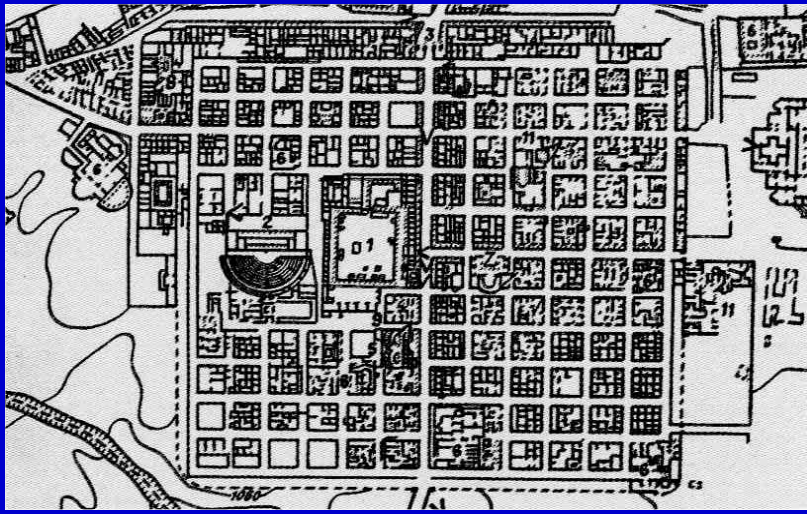
8. Complejidad en matemáticas y arquitectura



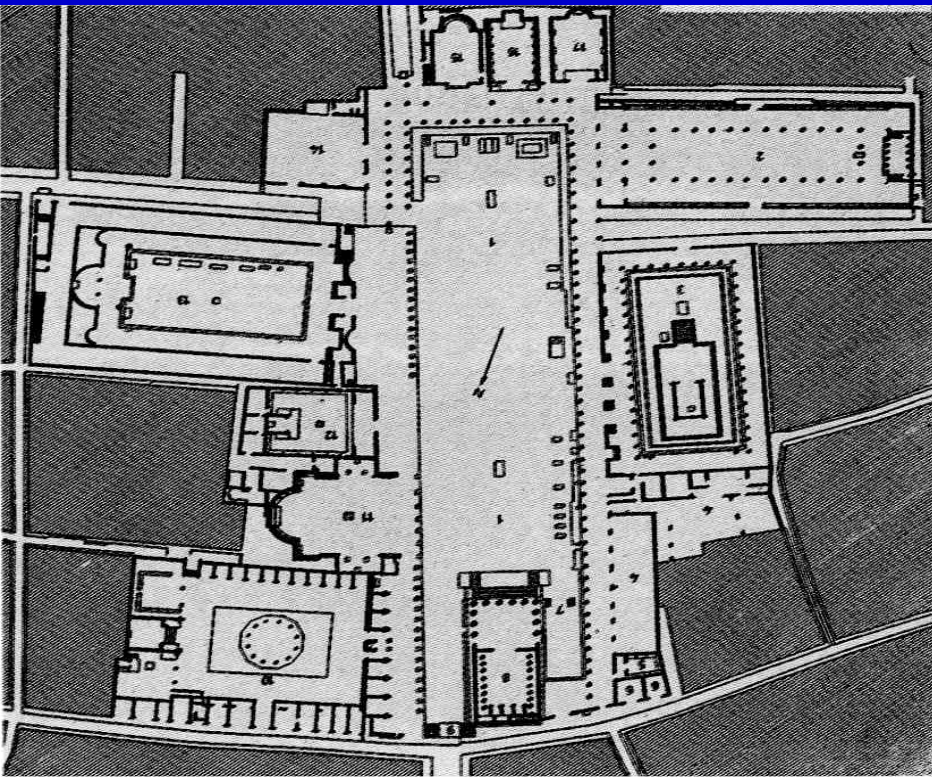
Ciudad equeménida de Persépolis, Mesopotamia.



Barrio del palacio real de Tell-el-Amarna, Egipto, II milenio a.C.



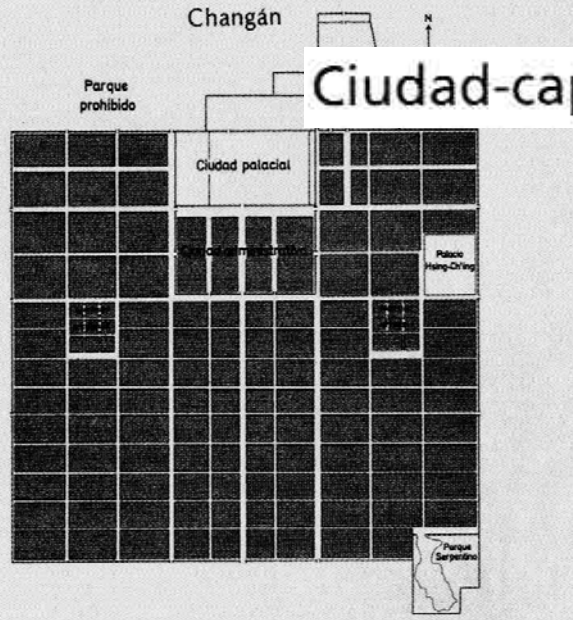
Ciudad romana de Timgad, en el norte de África.



Foro de la ciudad de Pompeya.

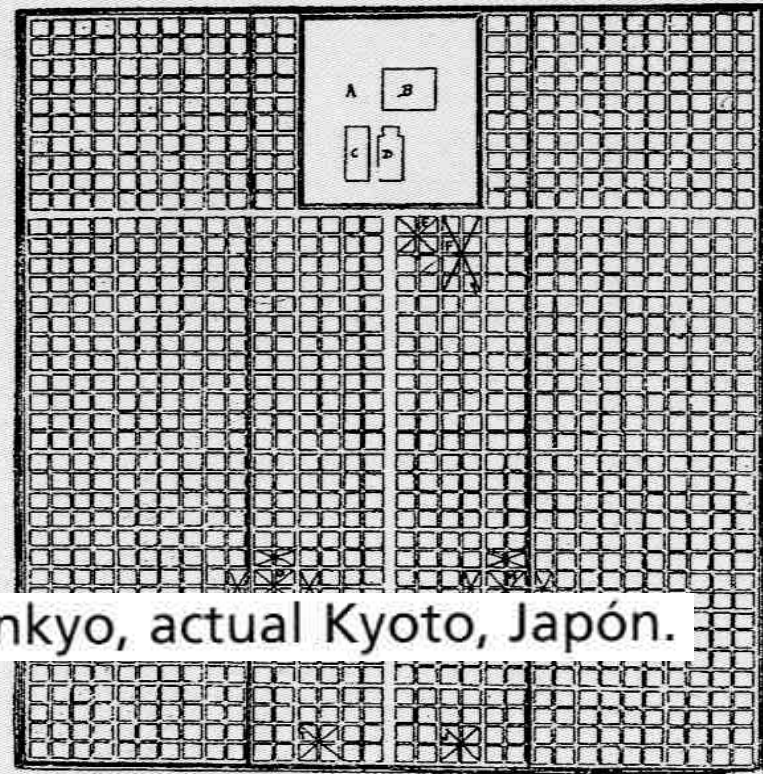
Changán

Ciudad-capital de Changan, China. Esquema fundacional del siglo VI d. C.



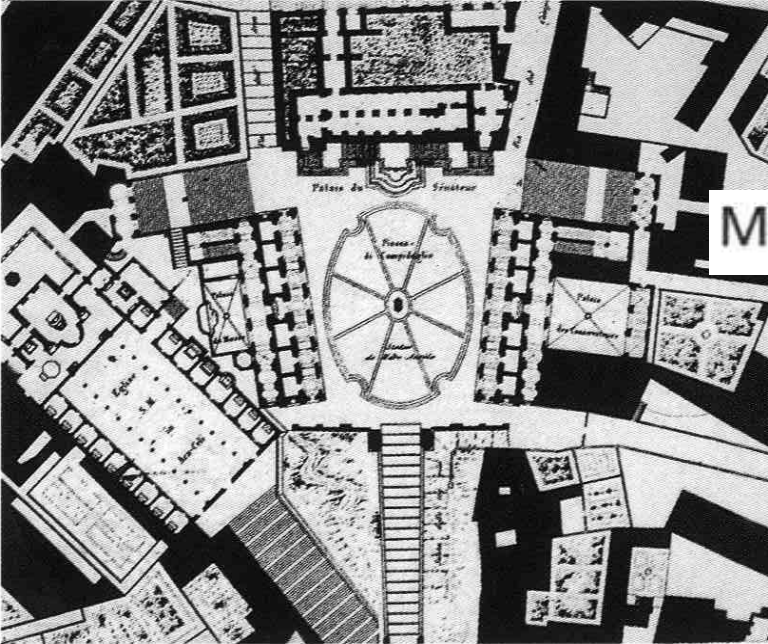
del siglo VI d. C.

Esquema fundacional de Heiankyo, actual Kyoto, Japón.

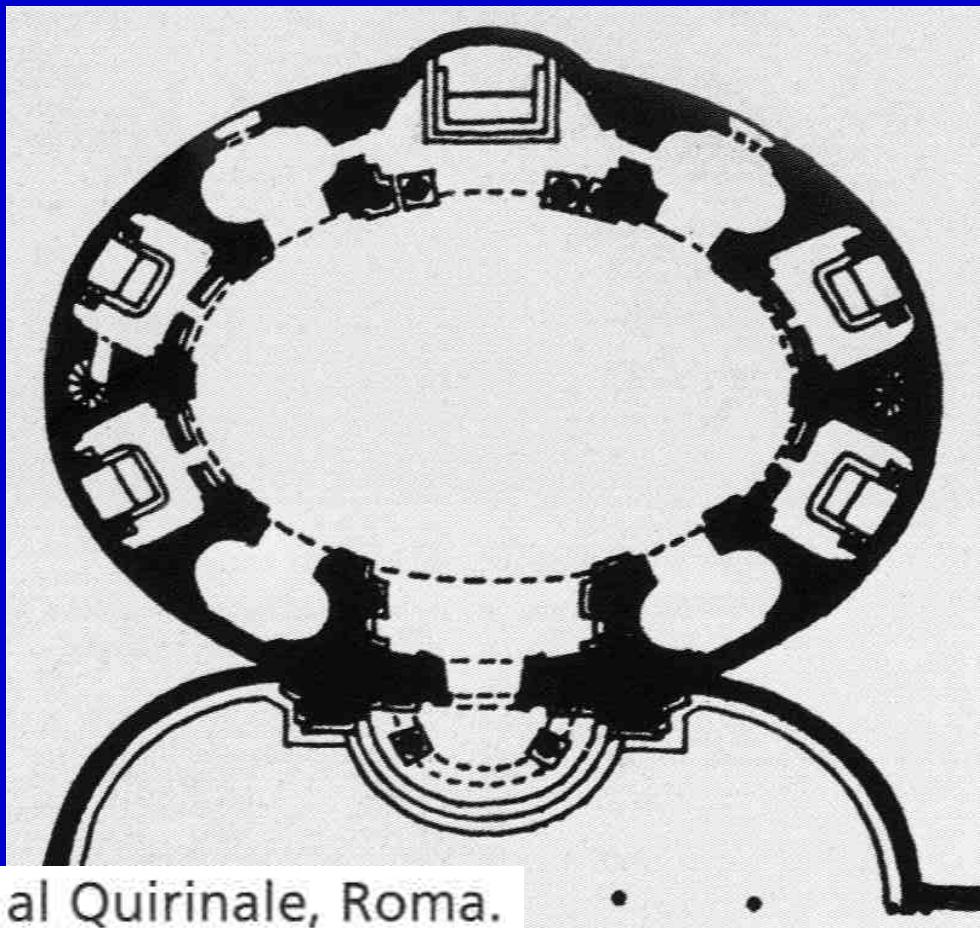


- Ichijo 120
- Ogimachi 40
- Tsuchi-Mikado 100
- Takatsukasa 40
- Konoe 100
- Kadenokoji 40
- Naka-no-Mikado 100
- Kasuga 40
- Ol-no-Mikado 100
- Reizei 40
- Nijo 170
- Oshikoji 40
- Sanjo Bomon 40
- Anekoji 40
- Sanjo 80
- Rokkaku 40
- Shijo-Bomon 40
- Nishikikoji 40
- Shijo 80
- Ayakoji 40
- Gojo Bomon 40
- Takatsui 40
- Gojo 80
- Higuchi 40
- Rokujo Bomon 40
- Yamamomo 40
- Rokujo 80
- Sameushi 40
- Shichijo Bomon 40
- Kitakoji 40
- Shichijo 80
- Shiokoji 40
- Hachijo Bomon 40
- Umekoji 40
- Hachijo 80
- Harikoji 40
- Kujo Bomon 40
- Shinmokoji 40
- Kujo 120

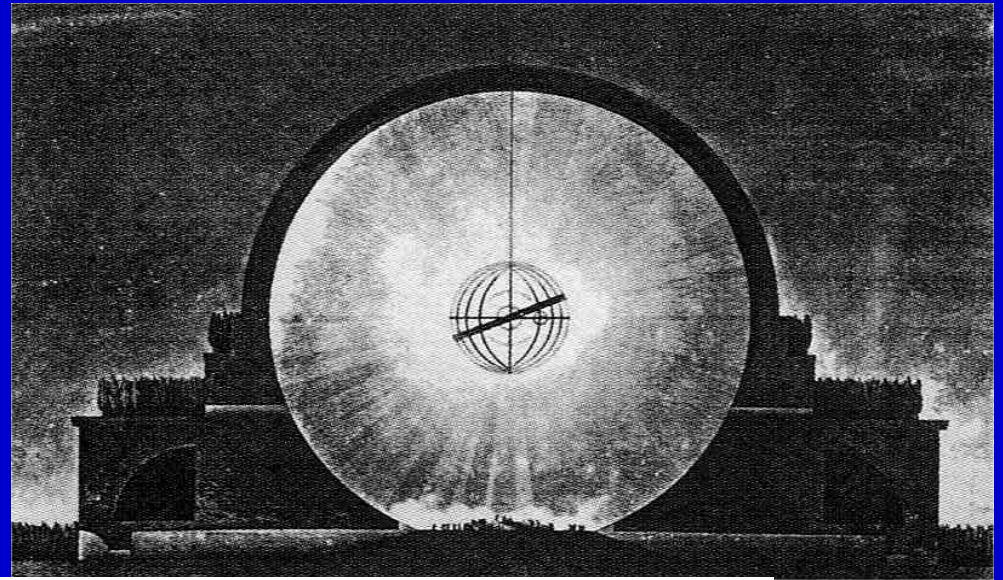
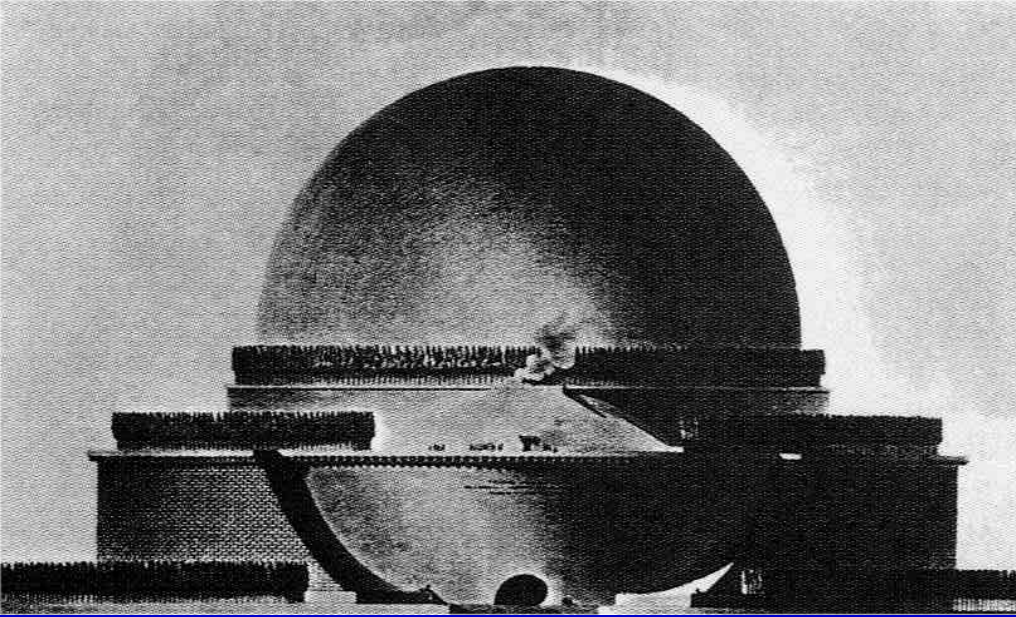
- Heigashi Kyogoku 120
- Tominokeji 40
- Madenokoji 40
- Takakura 40
- Higashi-no-Doin 80
- Karasu Maru 80
- Muromachi 40
- Machijiri 40
- Nishi-no-Doin 80
- Aburakoji 40
- Nishi Horikawa 80
- Inokuma 40
- Omura Highway 120
- Nishi Kushige 40
- Mibu 100
- Nishi Bojo 40
- Shudaku Highway 280
- Bojo 40
- Mibu 100
- Kushige 40
- Omura Highway 120
- Inokuma 40
- Horikawa 80
- Aburakoji 40
- Nishi-no-Doin 80
- Machijiri 40
- Muromachi 40
- Karasu Maru 40
- Higashi-no-Doin 80
- Tokokura 40
- Madenokoji 40
- Tominokeji 40
- Nishi Kyogoku 120



Miguel Ángel: plaza del Campidoglio, Roma.



G. L. Bernini: planta de S. Andrea al Quirinale, Roma.



E. L. Boullée: alzado y sección del proyecto de cenotafio

para Newton.