# MEMORIAS
DE LA
# REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
MADRID

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XIV

MEMORIAS
DE LA
# REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
MADRID

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XIV

# "PROPIEDADES CUALITATIVAS DE CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES: UNA CLASIFICACION PARA LOS MODELOS DE DIFUSION DEL CALOR"

POR

J. ILDEFONSO DIAZ DIAZ

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELEFONO 221 25 29
1980

ISBN: 84 - 600 - 1966 - 7
Depósito Legal, M. 25026 - 1980

REALIGRAF, S. A. - Burgos, 12 - Tel. 442 99 84 - MADRID-29

QUALITATIVE PROPERTIES OF SOME NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS: A CLASSIFICATION FOR THE MODELS OF HEAT DIFFUSION.


ABSTRACT.

In this work we consider a broad class of nonlinear parabolic problems which includes mathematical models associated to some physical problems of a very different nature: heat diffusion, flows in a porous media, diffusion of a particle in a plasma, etc.

Essentially, several qualitative properties of their solutions are shown, such a finite propagation, finite time of extinction, linear behavior in finite time and uniform boundedness. In the exposition of the first two of them, previous results of the author are collected in abreviated form, giving also new contributions. The linear behavior in finite time is shown here for the first time and, suitably modified, it is applied to some other equations giving partial answers in that way to some questions posed by H. Brezis at the Congress held in Madison, Wisconsin, 1977. The uniform boundedness reflects a type of estimates in $L^{\infty}$ obtained independently of which is the initial datum.

The essential difference existing between the three first properties leads in a natural way to introduce a classification of the models for the diffusion of heat. Concretely, we introduce here the concept of slow diffusion (in which one has finite propagation), fast (if there exists a finite time of extinction) and of linear type (if none of those properties are satisfied). The property of linear behavior in finite time explains the nature of a great number of the diffusion of this last type. Such a classification makes clear an other one previously formulated by J.G. Berryman, and C.J. Holland.

The methods used are of a very different nature: techniques from the theory of semigroups of operators on Banach spaces, weak formulation of second order partial differential equations on Sobolev Spaces, comparison results and maximum principles for such equations, etc.

RESUMEN.

En este trabajo se considera una amplia clase de problemas parabólicos no lineales que incluye a los modelos matemáticos asociados a problemas físicos de muy diversa naturaleza: difusión del calor, movimiento de un gas, difusión de un partícula en un plasma, etc.

En esencia, se muestran diversas propiedades cualitativas de las soluciones tales como las de propagación finita, tiempo finito de extinción, comportamiento lineal en tiempo finito y acotación uniforme. La exposición de las dos primeras recoge, de manera abreviada, resultados prévios del autor, ofreciéndose nuevas aportaciones. El comportamiento lineal en tiempo finito es aquí mostrado por primera vez y, adecuadamente modificado, es aplicado a otras ecuaciones, dando respuesta así a las cuestiones propuestas por H. Brezis en el Congreso celebrado en Madison en 1977. La acotación uniforme refleja cierto tipo de estimaciones en $L^{\infty}$ obtenidas independientemente de cuál sea el dato inicial.

La radical diferencia existente entre las tres primeras propiedades conduce de una manera natural a introducir una clasificación para los modelos de difusión del calor. En conreto se introduce aquí la noción de difusión lenta, (aquella en la que se tiene propagación finita), rápida (si existe tiempo finito de extinción) y de tipo lineal (si ninguna de éstas propiedades se satisfacen). La propiedad de comportamiento lineal en tiempo finito ilustra entonces la naturaleza de un gran número de las difusiones de este último tipo. Tal clasificación precisa la formulada anteriormente por Berryman y Holland.

Los métodos empleados son de muy diferente naturaleza: técnicas de la teoría de semigrupos de operadores sobre espacios de Banach, formulación débil de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden sobre espacios de Sobolev, resultados de comparación y principios del máximo, etc.

## §1. Introducción.

Comencemos ilustrando la clase de problemas de los que nos ocuparemos a lo largo de este trabajo. En esencia, éstos se formularán como problemas mixtos regidos por ecuaciones en derivadas parciales de "tipo" parabólico.

Un ejemplo representativo de tales ecuaciones es el modelo matemático asociado a la difusión del calor. En concreto, sea $\Omega$ la región de $\mathbb{R}^N$ ocupada por un cuerpo de densidad $\rho$, calor específico $c$ y de conductividad térmica $K$. Es bien conocido entonces que la ecuación que describe la temperatura del medio como función de las coordenadas y del tiempo es

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(t,x) - \mathrm{div}(K \,\mathrm{grad}\, T(t,x)) = f(t,x) \tag{1.1}$$

siendo $f$ la energía por unidad de volumen y de tiempo debida a las fuentes exteriores.

La ecuación (1.1) admite diversas precisiones atendiendo a la naturaleza física del problema. Así, por ejemplo, si el cuerpo en consideración es un fluído, los coeficientes $\rho$, $c$ y $K$ cambian muy poco sobre un rango moderado de temperaturas, pudiendo ser considerados como constantes positivas. La ecuación (1.1) es entonces lineal y tras un cambio de unidades se convierte en la conocida ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,x) - \Delta T(t,x) = f(t,x) \tag{1.2}$$

Este no es el caso de la radiación de calor en el que el coeficiente $K$ depende en gran manera de la temperatura. (Véase por ejemplo Zeldovich-Raizer [1] , Capítulo II). De nuevo tras un cambio conveniente de unidades la ecuación (1.1) se formula como

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,x) - \mathrm{div}(K(T(t,x))\cdot \mathrm{grad}\, T(t,x)) = f(t,x). \tag{1.3}$$

siendo $K(T) \geq 0$. Diversos casos correspondientes a $K(T) = T^m$ son: "conducción de calor en la región de ionización múltiple de un gas" para $4,5 \leq m \leq 5,5$ y "electrón-conducción de calor en un plasma" para $m = 5/2$. (Véase Zedovich--Raizer [1] para más detalles).

Es interesante señalar que la ecuación (1.3) también describe procesos enteramente diferentes como por ejemplo el "movimiento de un gas politrópico en un medio poroso". En dicho caso $T$ representa la densidad del gas y $K$ la presión, teniéndose la relación $K(T) = T^m$ para algún $m \geq 1$ que es conocido como el exponente politrópico. Por otra parte, Berryman [1] ha mostrado que la ecuación (1.3) rige, también, la "difusión de una partícula a través de un campo magnético en un plasma toroidal multípolo". Allí $T$ representa la densidad de la partícula y $K$ es de la forma $K(T) = T^m$, $m \geq -1$, correspondiendo $m = -1/2$ a la escala introducida por Okuda y Dawson.

La ecuación (1.3) puede formularse también como

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,x) - \Delta\beta(T(t,x)) = f(t,x) \tag{1.4}$$

donde $\beta(s) = \int_0^s K(r)dr$ y entonces la positividad de $K$ se traduce en la monotonía no decreciente de $\beta$. El interés de la formulación (1.4) reside en que tal ecuación aparece también en el Problema de Stefan mediante la "transformación de entropía", siendo en este caso

$$\beta(r) = \begin{cases} a_1 r & \text{si} \quad r \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < r < a_2 \\ a_3\cdot(r-a_2) & \text{si} \quad r \geq a_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

para $a_1$, $a_2$ y $a_3$ constantes positivas. (Véase por ejemplo Brezis [1] ). Otras elecciones no potenciales de $\beta$ se deben a Peletier [2] .

La clase de problemas que consideraremos puede ser ahora formulada con más precisión como

$$P(\beta,f) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta\beta(u(t,x)) = f(t,x) & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \beta(u(t,x)) = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

siendo: $\Omega$ un abierto regular de $\mathbb{R}^N$, $f$ y $u_0$ funciones conocidas y $\beta$ función real no decreciente tal que $\beta(0) = 0$ ó más generalmente un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(0)$. (Véase Brezis [2] ). En general, para unificar la exposición, sólo se considerarán otras condiciones de contorno u otras expresiones no lineales de (1.2) en forma de observaciones.

Un primer objetivo de este trabajo consiste en mostrar que para ciertas no linealidades $\beta$ el problema $P(\beta,0)$ es tal que su solución posee un comportamiento para tiempos grandes muy semejante a la de la ecuación lineal del calor (ecuación (1.2)). De hecho mostraremos que a partir de un cierto instante tales funciones coinciden (propiedad de comportamiento lineal en tiempo finito). Esto se obtendrá cuando $\beta$ es de la forma $\beta(r) = cr$ para $c > 0$ y $r$ en algún entorno del origen. Tal resultado será adecuadamente aplicado mediante técnicas de dualidad a problemas que aparecen en la teoría de control térmico, obteniendo así repuestos a las cuestiones planteadas por Brezis en [4] .

Otra consecuencia, trascendental a nuestro juicio, radica en la interpretación cualitativa de la anterior propiedad en términos del problema de conducción del calor. En efecto, en recientes trabajos se han obtenido propiedades cualitativas muy diferentes atendiendo a la naturaleza del término no lineal $\beta$: propiedad de propagación finita de las señales, correspondiente al caso en que

$$\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\beta^{-1}(s)} < +\infty \tag{1.6}$$

(véase I. Díaz [1] ) y propiedad de tiempo finito de extinción sí y sólo si

$$\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \tag{1.7}$$

(véase G. Díaz-I. Díaz [1] y también I. Díaz [3] ). Por otra parte, es fácil ver que una amplia clase de problemas en los que no se tienen ni (1.6) ni (1.7) es la correspondiente a cuando se tiene

$$\exists c_1 \;,\; \exists c_2 \;\; y \;\; \exists \delta \;\; \text{positivos tales que} \;\; c_1 r \leq \beta(r) \leq c_2 r \quad \forall \; |r| < \delta. \tag{1.8}$$

Podemos introducir ahora una clasificación para los diversos modelos de difusión del calor que refleje de una manera significativa su direrente comportamiento. En concreto, diremos que la difusión es lenta cuando satisfaga (1.6), rápida si se tiene (1.7) y de tipo lineal si $\beta$ no verifica ninguna de las anteriores hipótesis. De esta manera la propiedad de comportamiento lineal en tiempo finito esclarece la naturaleza de un gran números de las difusiones no lineales de tipo lineal.

A modo de ilustración observemos que si $\beta(r) = |r|^{p-2} \cdot r$ con $1 < p < \infty$, entonces la difusión es lenta si $p > 2$, rápida si $1 < p < 2$ y de tipo lineal (de hecho lineal) si $p = 2$.

Nuestra clasificación precisa la formulada por Berryman-Holland [1] en términos de "fast" o "slow" atendiendo únicamente a si la solución se extingue en un tiempo finito o infinito. Como ha sido mostrado en G. Díaz I. Díaz [1] esto primero sólo ocurre si se tiene (1.7), pero es claro que entre las funciones $\beta$ que no satisfacen (1.7) la condición (1.6) introduce una nueva, y de hecho muy significativa, diferenciación.

Es de resaltar que la obtención de la propiedad de comportamiento lineal es de índole muy diferente a la de las propiedades de propagación finita y de extinción. Estas dos últimas han sido largamente estudiadas en la literatura (primero para casos particulares de gran regularidad en $\beta$, $f$ y $u_0$ y más tarde en términos muy generales) utilizando de una manera directa las técnicas del principio del máximo y criterios de comparación de soluciones. Por el contrario, no son conocidos resultados precedentes sobre la primera propiedad y además su obtención se realiza por medio de ciertas estimaciones $L^\infty$ para $P(\beta,0)$.

Estimaciones de esta naturaleza eran sólo conocidas para $P(\beta,0)$ y otros problemas perturbados. Como una tercera aportación original, obtenemos aquí, para ciertos $\beta$, una acotación uniforme en $L^\infty$ de la solución del problema "dual" a $P(\beta,0)$ independientemente de cuál sea el dato inicial Este resultado es también formulado en términos de $P(\beta,0)$ mediante técnicas de dualidad. Es de señalar que esta propiedad responde de nuevo a la no linealidad de la ecuación y que ha sido estudiada por numerosos autores; Benilan [2] , Veron [1], Simon [1] ....

Terminaremos esta introducción indicando el plan a seguir en el resto del trabajo. En §2 se recogen los preliminares para una comprensión cómoda de las secciones sucesivas. En §3 se exponen de una manera abreviada los resultados referentes a las propiedades de propagación finita y de tiempo de extinción finito ofreciéndose algunas aportaciones nuevas. La propiedad de comportamiento lineal en tiempo finito es considerada en §4, así como su formulación dual dando respuesta a las cuestiones planteadas por Brezis. Finalmen en §5 se considera la propiedad de acotación uniforme de las soluciones.

§2. Existencia, unicidad, regularidad y otras propiedades básicas.

El problema $P(\beta,f)$ es uno de los problemas no lineales en ecuaciones en derivadas parciales que ha sido más intensamente estudiado a partir de la segunda mitad de este siglo. Dependiendo de la regularidad supuesta sobre $\beta$, numerosos matemáticos han desarrollado métodos cada vez más generales. A modo de índice de esta evolución señalaremos los trabajos de Oleinik [1], Lions [1] y Brezis [1], cada uno de ellos representativo de etapas y métodos diferentes, donde el lector interesado puede encontrar extensa bibliografía sobre el tema.

En el momento actual parecen ser las técnicas de semigrupos de operadores las que ofrecen respuestas más generales sobre cuestiones tales como las de existencia y unicidad para las ecuaciones de evolución.

Tal método comienza por asignar al problema en ecuaciones en derivadas parciales (por ejemplo $P(\beta,f)$) un problema de Cauchy abstracto planteado sobre algún espacio de Banach $X$. Este espacio es habitualmente elegido entre los espacios de funciones o distribuciones definidas sobre $\Omega$. De esta forma la incógnita $u(t,x)$ puede interpretarse como una función de $t$ a valores en $X$ y entonces el término $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ puede sustituirse por el de $\frac{du}{dt}(t)$. Por otra parte, al operador diferencial se le asocia un operador $A$ de $X$ en $X$, definido sobre algún subconjunto $D(A)$ de $X$. Habitualmente, los elementos de $D(A)$ verifican (en algún sentido) condiciones de contorno del tipo de las pedidas en el problema original. Se llega entonces a la formulacion.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (0,+\infty),\ u(t) \in X \\ &u(0) = u_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

siendo $f: [0,\infty) \to X$ y $u_0 \in X$, datos conocidos a partir del problema original.

Los operadores $A$ así construídos pueden ser no lineales, con dominio distinto de $X$, discontinuos (pero cerrados) y, en fin, $X$ puede no ser un espacio de Hilbert e incluso no reflexivo.

El problema (2.1) puede ser abordado favorablemente para una amplia clase de operadores, teniéndose así una única solución (que a veces sólo satisface la ecuación en un sentido generalizado). Entre este tipo de operadores están los denominados m-acretivos:

Definición.

Un operador $A: D(A) \subset X \to X$ es denominado acretivo si

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|\hat{x} - \lambda(Ax - A\hat{x})\| \tag{2.2}$$

para todo $x$, $\hat{x} \in D(A)$ y $\lambda > 0$. Si además

$$R(I + \lambda A) = X, \qquad \forall \lambda > 0 \tag{2.3}$$

entonces se dice que $A$ es m-acretivo. (En el caso de $X$ espacio de Hilbert se denominan monótono y maximal monótono respectivamente).

Es de señalar que la moderna teoría de Inecuaciones Variacionales (véase, por ejemplo, Duvaut-Lions [1] ) ofrece numerosos problemas que pueden ser formulados como (2.1) pero con la notoriedad de que los operadores $A$ son entonces multívocos. Esto, junto a otras motivaciones, conduce a la consideración de operadores $A$ actuando de $D(A) \subset X$ en $\mathcal{P}(X)$ (partes de $X$). Algunas modificaciones se hacen entonces necesarias (por ejemplo el símbolo $=$ de la ecuación de (2.1) debe sustituirse por el de $\ni$ y también las expresiones (2.2) y (2.3) deben ser alteradas de manera obvia). A modo de ejemplo, señalemos que en $\mathbb{R}$ los operadores (o grafos de $\mathbb{R}^2$) maximales monótonos vienen caracterizados mediante una función real no decreciente a la que se le añade el segmento vertical originado por los puntos en que es discontinua. (Brezis, [2] , pág. 43).

Entre los resultados abstractos de esta teoría sólo indicaremos aquí el que, para $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1_{loc}(0,+\infty;X)$ y $A$, por ejemplo m-acretivo, asegura la existencia y unicidad de una función $u \in C([0,\infty):X)$ verificando (2.1) en el sentido

$$|u(t)-x| \leq |u_0-x| + \int_0^t \tau(f(s)-y,\ u(s)-x)ds, \quad \forall x \in D(A) \quad y \quad \forall y \in Ax,$$

siendo $\tau$ el producto semi-interior

$$\tau(x,y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

(véase, por ejemplo, Sato [1] para el cálculo de $\tau$ sobre $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$).

Las anteriores soluciones, denominadas integrales, son diferenciables (en $t$ ) bajo hipótesis suplementarias sobre $X$, $A$ ó $u_0$ y entonces son denominadas fuertes. (Véase Crandall [1] ó Evans [2] para más detalles).

Con el fin de ilustrar la aplicación de estos resultados abstractos al problema $P(\beta,f)$, introduzcamos algunas notaciones. Supuesto $\Omega$ abierto regular acotado de $\mathbb{R}^N$, sea $\Lambda = -\Delta$ el isomorfismo canónico del espacio de Hilbert $H^1_0(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ sobre su dual $H^{-1}(\Omega)$. Por abuso de notación identificaremos $\Lambda^{-1}$ con $(-\Delta)^{-1}$. También se utilizará el hecho de que si $u \in L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, entonces $(-\Delta)^{-1}u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, como se deriva de las estimaciones $L^p$.

En lo que sigue $\beta$ representará una función continua no decreciente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $0 = \beta(0)$, sin embargo los resultados que se obtendrán son válidos para el caso de $\beta$ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que $R(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$ y $0 \in \beta(0)$. De hecho estas condiciones pueden ser a veces omitidas (véase la sección §3).

Con estos antecedentes $P(\beta,f)$ puede ser tratado sobre los espacios $H^{-1}(\Omega)$ y $L^1(\Omega)$. En concreto, los operadores $A$ y $B$ dados por

$$D(A) = \{u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega): \ \beta(u) \in H_0^1(\Omega)\}$$

$$A(u) = -\Delta\beta(u) \quad \text{si} \quad u \in D(A)$$

y

$$D(B) = \{u \in L^1(\Omega): \ \beta(u) \in W_0^{1,1}(\Omega) \ \text{ y } \ \Delta\beta(u) \in L^1(\Omega)\}$$

$$B(u) = -\Delta\beta(u) \quad \text{si} \quad u \in D(B).$$

son m-acretivos y con dominio denso en $H^{-1}(\Omega)$ y $L^1(\Omega)$ respectivamente. (Véase Brezis [1] y Benilan [1]). Numerosas variantes son conocidas: caso de $P(\beta,f)$ con condiciones de Dirichlet no homogéneas, en $H^{-1}(\Omega)$ (Damlamian [1]); caso de $P(\beta,f)$ con condiciones de tipo Neumann no lineales, en $L^1(\Omega)$. (Benilan [1]); caso de $\beta$ dependientes también de $x$, en $L^1(\Omega)$ (Benilan [2]), etc.

Un hecho que utilizaremos con frecuencia es la "dualidad" existente entre el problema $P(\beta,f)$ y el dado por

$$P^*(\beta,F) = \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \beta(-\Delta v(t,x)) = F(t,x) & t > 0, \ x \in \Omega \\ v(t,x) = 0 & t > 0, \ x \in \partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Antes de justificar esta dualidad, señalemos que $P^*(\beta,F)$ puede ser tratado sobre $H_0^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$. En concreto los operadores $C$ y $E$ dados por

$$D(C) = \{v \in H_0^1(\Omega): \ -\Delta v \in L^1(\Omega) \ \text{ y } \ \beta(-\Delta v) \in H_0^1(\Omega)\}$$

$$Cv = \beta(-\Delta v) \quad \text{si} \quad v \in D(C)$$

y

$$D(E) = \{v \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega): \beta(-\Delta v) \in L^\infty(\Omega)\}$$

$$Ev = \beta(-\Delta v) \quad \text{si} \quad v \in D(E)$$

son m-acretivos en $H_0^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ respectivamente, siendo $\overline{D(C)} = H_0^1(\Omega)$. (Véase Damlamian [1] y Benilan-Ha [1] respectivamente).

La dualidad entre $P(\beta,f)$ y $P^*(\beta,F)$, que es fácil de obtener formalmente, puede justificarse en el sentido de que dado $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$, si $u \in C([0,\infty): H^{-1}(\Omega))$ es la solución de $P(\beta,f)$, entonces la función $v(t) = (-\Delta)^{-1}u(t)$, $v \in C([0,\infty): H_0^1(\Omega))$ es la única solución de $P^*(\beta,(-\Delta^{-1})f)$ correspondiente a $v_0 = (-\Delta)^{-1}u_0$. (Véase G. Díaz - I. Díaz [1] para más detalles). Konishi [1] ha puesto de manifiesto otra "dualidad" entre $P(\beta,0)$ y $P^*(\beta,0)$ al ser gobernados por B y E respectivamente.

Terminaremos esta sección exponiendo algunas propiedades básicas que satisfacen las soluciones de $P(\beta,f)$ y $P^*(\beta,F)$.

La primera de ellas hace alusión a que el operador solución conserva el orden. En esencia se trata de una versión no lineal del principio del máximo para ecuaciones lineales parabólicas de segundo orden.

<u>Teorema</u>. 2.1 (de comparación).

a) (Benilan [1], Damlamian [1], Díaz [1]). <u>Sean</u> $u_{0,i} \in L^1(\Omega)$ <u>y</u> $f_i \in L^1_{loc}(0,\infty: L^1(\Omega))$ <u>con</u> $i = 1,2$, <u>tales que</u>

$$u_{0,1} \leq u_{0,2} \quad \text{y} \quad f_1(t,\cdot) \leq f_2(t,\cdot) \quad \underline{\text{c.p.t.p. de}} \ \Omega,$$

<u>entonces si</u> $u_i$ <u>es la solución del</u> $P(\beta,f_i)$ <u>correspondiente a</u> $u_{0,i}$ <u>se tiene</u>

$$u_1(t,x) \leq u_2(t,x), \quad \underline{\text{para todo}} \quad t \in [0,+\infty), \quad \underline{\text{c.p.t.}} \quad x \in \Omega.$$

b) (G. Díaz-I.Díaz [1]). <u>Si</u> $u_{0,i} \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ <u>con</u> $(-\Delta)^{-1}u_{0,i} \in \overline{D(E)}^{L^\infty}$ <u>y</u> $u_i$ <u>es la solución del</u> $P(\beta,0)$ <u>correspondiente, entonces</u>

$$(-\Delta)^{-1}u_{0,i} \leq (-\Delta)^{-1}u_{0,2} \Rightarrow (-\Delta)^{-1}u_1(t,x) \leq (-\Delta)^{-1}u_2(t,x) \quad \forall t \in [0,+\infty) \quad \underline{\text{c.p.t.}}\ x \in \Omega.$$

c) (G.Díaz-I. Díaz [1] ). Sean $v_{0,i} \in \overline{D(E)}^{L\infty}$ y $F_i \in L^1_{loc}(0,\infty: L^\infty(\Omega))$ , $i = 1,2$, tales que

$$v_{0,1} \leq v_{0,2} \quad \text{y} \quad F_1(t,\cdot) \leq F_2(t,\cdot)$$

entonces si $v_i$ es la solución de $P^*(\beta,F_i)$ correspondiente a $v_{0,i}$, se tiene que

$$v_1(t,x) \leq v_2(t,x), \quad \text{para todo} \quad t \in 0,+\infty), \ \text{c.p.t.} \quad x \in \Omega_\#$$

El teorema 2.1 admite numerosas variantes que el lector, puede encontrar en los trabajos antes reseñados. Es importante resaltar que la anterior propiedad de comparación jugará un papel fundamental en la obtención de los resultados de las secciones §3 y §5. De hecho allí será necesaria la comparación de las soluciones de $P(\beta,f)$ con supersoluciones verificando, unas veces, condiciones de contorno no homogéneos, otras condiciones de contorno de tipo diferente, etc.

De una naturaleza diferente son las propiedades de tipo "efecto regularizante". Es bien conocido que el problema lineal del calor genera un semigrupo lineal analítico. En consecuencia si designamos por $F$ a su generador infinitesimal, se tiene que a datos $u_0 \in \overline{D(F)}$, la solución del problema de evolución correspondiente $u$ es tal que $u(t) \in D(F)$ $\forall t > 0$, conculyéndose entonces que $u$ es indefinidamente diferenciable en $t$ y que $u(t) \in \bigcap_{n \geq 0} D(F^n)$. (Véase, por ejemplo, Yosida [1] págs. 254 y 424).

Para algunos problemas no lineales se tiene un comportamiento semejante gracias a un resultado abstracto debido a Brezis [2] , referente al caso de espacios de Hilbert y operadores m-acretivos que son la subdiferencial de funcionales convexos, s.c.i. La particularización de ésto se recoge en el siguiente

Teorema 2.3.

i) (Brezis [1]). Sea $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $f \in L^1_{loc}(0,+\infty:H^{-1}(\Omega))$.

Entonces la solución $u \in C([0,\infty): H^{-1}(\Omega))$ de $P(\beta,f)$ es diferenciable en $H^{-1}(\Omega)$ y $u(t) \in D(A)$ c.p.t. $t > 0$. Si además $f = 0$ entonces

$$\|\beta(u(t))\|_{H_0^1} \leq \frac{c}{t} \quad \text{para alguna} \quad c > 0 \tag{2.4}$$

ii) (Damlamian [1] ). Sean $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $F \in L^1_{loc}(0,+\infty:H_0^1(\Omega))$. Entonces la solución $v \in C([0,\infty): H_0^1(\Omega))$ de $P^*(\beta,F)$ es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y $v(t) \in D(c)$ c.p.t. $t > 0$.#

Cuando $P(\beta,0)$ es tratado sobre $L^1(\Omega)$, la no reflexivilidad del espacio hace necesarias hipótesis adicionales sobre $\beta$ para que se tengan propiedades semejantes a los anteriores.

Teorema 2.4 (Benilan [2] , Evans [2] ).

Sea $\beta$ estrictamente creciente con $0 = \beta(0)$ y $\beta^{-1}$ Lipschitciana. Entonces dado $u_0 \in L^1(\Omega)$, la solución $u \in C([0,\infty): L^1(\Omega))$ de $P(\beta,0)$ es diferenciable en $L^2(\Omega)$ (y por tanto en $L^1(\Omega)$) y $u(t) \in D(B)$ c.p.t. $t > 0$.#

Para el caso del problema $P^*(\beta,0)$, Benilan y Ha [1] (y también Konishi [1] ) han mostrado la diferenciabilidad de la solución $v$ ($v \in W^{1,\infty}((0,\infty) \times \Omega)$) cuando $v_0 \in D(E)$.

Finalmente, otra propiedad de tipo "efecto regularizante" se refiere a una mayor regularidad espacial de la solución que la del dato incial, pero sin hacer alusión a la regularidad en $t$:

Teorema 2.5.

Sea $\beta$ tal que $\exists \mu > \frac{N-2}{N}$, $K > 0$ y $K^* > 0$ tales que

$$\beta'(r) \geq K \cdot r|r|^{\mu-1} \quad \text{para todo} \quad |r| \geq K^* \tag{2.5}$$

entonces:

a) Dado $u_0 \in L^1(\Omega)$, la solución de $P(\beta,0)$ es tal que $u(t) \in L^\infty(\Omega)$ c.p.t. $t > 0$. Además existe $M$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{cases} \|(|u(t,\cdot)|-K^*-\varepsilon)^+\|_{L^\infty} \leq \dfrac{c}{t^\delta} \operatorname{Max}(1,(\dfrac{K^*+\varepsilon}{\varepsilon})^{(1-\mu)\delta}) \|(|u_0|-K^*)^+\|_{L^1}^\sigma \qquad (2.6) \\ \underline{\text{con}} \\ \delta = \dfrac{N}{2+N(\mu-1)} \quad \text{y} \quad \sigma = \dfrac{2}{2+N(\mu-1)} \end{cases}$$

b) Si se supone además $\mu > 1$, existe una constante $M = M(\Omega,\beta)$ tal que

$$\|(|u(\cdot,t)|-K^*)^+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{1}{\mu-1}}, \quad \forall t > 0 \qquad (2.7)$$

para todo $u_0 \in L^1(\Omega)$. #

La estimación (2.7) refleja una acotación uniforme de la solutión de $P(\beta,0)$ independientemente de $u_0$. Esta propiedad será obtenida para $P^*(\beta,0)$, bajo una hipótesis más general que (2.5) con $K^* = 0$ en la Sección §5.

## §3. Difusiones lentas y difusiones rápidas.

### 3.1. Propiedad de propagación finita.

Es bien conocido que una característica de los problemas lineales hiperbólicos es la propagación a velocidad finita de las señales y también que ésto no sucede para el modelo lineal del calor. (Véase p.e. Dou--Mendizabal [1] y Yosida [1] pág. 425). Sin embargo, como expondremos a continuación, cuando se toma como modelo el problema $P(\beta,f)$ existe una clase de $\beta$ para las que esta propiedad es satisfecha. Antes que nada precisemos la formulación de tal propiedad:

Definición. Dado $\Omega$ abierto no acotado de $\mathbb{R}^N$, se dirá que el problema $P(\beta,f)$ satisface la propiedad de propagación finita si supuestos $f(t,\cdot)$ y $u_0$ con soporte compacto la solución $u$ es tal que el soporte de $u(t,\cdot)$ es compacto $\forall t \geq 0$.

Obsérvese que a diferencia del caso lineal hiperbólico, no se pide que exista una velocidad de propagación constante.

Para la exposición de los resultados referentes a esta propiedad, son posibles dos puntos de partida. El primero, de caracter "físico", hace alusión a la naturaleza del coeficiente $K$ de conductividad térmica para la ecuación (1.3). En efecto, cuando $K$ se supone "pequeño" con relación a la temperatura "parece natural" que tal propiedad se satisfaga y de aquí la denominación de difusión lenta empleada en la caracterización de este caso. Un ejemplo trivial ilustrando esta situación es el siguiente:

Ejemplo 3.1

Sean $K \equiv 0$ y $\Omega \equiv \mathbb{R}^N$. Entonces la ecuación (1.3) se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,x) = 0 \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

y por tanto, si además se pide que

$$T(0,x) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}^N,$$

con $u_0$ función con soporte compacto, entonces la función

$$T(t,x) = u_0(x), \quad \forall t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

es solución del problema y con soporte compacto $\forall t$ #

Desde el punto de vista "matemático", una primera condición a imponer a $\beta$ (de momento supuesta derivable) es que $\beta'(0) = 0$. En efecto, en otro caso, e.d. si $\beta'(0) > 0$, la ecuación (1.4) es no degenerada y por tanto aplicando el principio fuerte del mínimo de Nirenberg es fácil mostrar que no puede haber propagación finita. Un resultado debido a Kalashnikov [1] muestra que la condición $\beta'(0) = 0$ no es aún suficiente. Enunciemos por fin una respuesta referente al caso general de $\beta$ grafo maximal monotono.

Teorema 3.1 (I. Díaz [1]).

Dado $\Omega$ no acotado de $\mathbb{R}^N$, sean $f \in L^\infty_{loc}(0,\infty: L^\infty(\Omega))$ y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tales que

$$\exists R_0 > 0 \text{ tal que } [\text{sop } u_0 \cup \text{sop } f(t,\cdot)] \subset \{x \in \bar{\Omega}: |x| \leq R_0\} \quad \text{c.p.t. } t > 0.$$

Entonces si $\beta$ satisface la condición

$$\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\beta^{-1}(s)} < +\infty, \qquad (3.1) = (1.6)$$

existe una única solución, $u \in C([0,\infty): H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty((0,\infty) \times \Omega))$, de $P(\beta,f)$. Además $\forall T_0$, existe $K$ constante positiva dependiendo de $T_0 \cdot \|f\|_\infty$, $\|u_0\|_\infty$ y $\beta$ tal que

$$\text{sop } u(t,\cdot) \subset \{x \in \bar{\Omega}: |x| \leq R_0 + 2K\sqrt{t}\}, \quad \forall t \in [0,T_0] \,.\# \qquad (3.2)$$

La idea de la demostración es construir una supersolución $\bar{u}$ y una subsolución $\underline{u}$ verificando la estimación (3.2). En dicho caso una mo dificación del Teorema 2.1., i) puede ser aplicada teniéndose la estimación "a priori"

$$\underline{u}(t,\cdot) \leq u(t,\cdot) \leq \bar{u}(t,\cdot) \qquad \forall t \geq 0$$

y de aquí la conclusión. A modo de ilustración, señalemos que una tal supersolución es de la forma

$$\bar{u}(t,x) = \begin{cases} h'(c_1(c_1 t - |x| + c_2)) & \text{si} \quad c_1(c_1 t-|x|) + c_2 > 0 \\ 0 & \text{si} \quad c_1(c_1 t-|x|) + c_2 \leq 0 \end{cases}$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes positivas adecuadas y $h$ satisface

$$\int_0^{h(r)} \frac{ds}{\beta^{-1}(s)} = r \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Dado que la estimación (3.2) es establecida "a priori", es posible extender al caso de $\Omega$ no acotado resultados del caso acotado que no eran préviamente conocidos. Este es el caso de la existencia y unicidad

El Teorema 3.1 había sido mostrado también por Oleinik-Kalashnikov-C.You Lin [1] para el caso de $\Omega = \mathbb{R}^+$, $f = 0$, $u_0 \geq 0$ y $\beta$ monótona convexa de clase $C^3$. En estas condiciones la condición (3.1) es también <u>necesaria</u> para que $P(\beta,0)$ tenga la propagación finita como ha sido mostrado por Kalashnikov [1] y Peletier [1] . Sin embargo cuando se supone el caso general, ésto es $\beta$ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$, la posible multivocidad de $\beta$ puede introducir serias dificultades para mostrar la necesidad de (3.1), siendo aún un problema abierto(1).

---

(1) Para el caso de $\beta$ multívoco en el origen no es posible la propagación finita, como se deduce a partir de un resultado de Benilan - Díaz [1]

El caso de condiciones de Nemman ha sido considerado en Díaz [1] . Un estudio detallado de la evolución del soporte de la solución puede encontrarse en Knerr [1] y Kershner [1] .

Utilizando argumentos de dualidad es posible formular el Teorema 3.1 en términos de $P^*(\beta,F)$. Para este problema la propagación finita ha sido también mostrada sin utilizar la dualidad por G. Díaz - I. Díaz [2]

Señalemos finalmente que la propiedad de propagación finita ha sido obtenida recientemente para otras extensiones no lineales de la ecuación (1.2). Así por ejemplo en Díaz-Herrero [2] se muestra que si $p > 2$ el problema asociado a la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x,t) \qquad (3.3)$$

posee propagación finita. Otras ecuaciones son consideradas por Díaz-Herrero [2], Herrero-Vázquez [1], Gilding [1] , Davis [1] etc...

Propiedades de una naturaleza similar a la de propagación finita son las de localización y de contracción instantanea del soporte desarrolladas en los últimos años por múltiples autores: Brezis-Friedman [1] , Bensoussan-Lions [1] , Evans-Knerr [1] , Kalashnikov [2] , Kersner [1] , Herrero [1] , Alvarez-Díaz [1], Herrero-Vazquez [1], etc.

3.2. Propiedad de extinción en tiempo finito.

Son muchos los autores que se han ocupado del comportamiento asintótico de la solución del problema $P(\beta,f)$ bajo diversas hipótesis sobre $\beta$. En particular un resultado de Brezis ( [1] , Corollary 32) muestra que si

$$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0,+\infty: H^{-1}(\Omega)) \text{ y } \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

entonces $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

En este apartado estamos interesados en caracterizar las difusiones rápidas en donde la anulación de la solución se alcance en un tiempo finito. Precisemos los anteriores términos:

Definición.

Se dirá que $P(\beta,f)$ satisface la propiedad de extinción en tiempo finito si $\exists T_0 > 0$ tal que $u(t) = 0$ para todo $t \geq T_0$.

Es bien conocido que ésto no sucede para la ecuación (1.2), como se deduce, por ejemplo, a partir de la propiedad de "forward and backward unique continuation" de Yosida ( [1], pág. 425). Sin embargo, razonando otra vez desde un punto de vista "físico", cuando el coeficiente $K$ de (1.1) es "muy grande" la difusión es rápida. Ilustremos ésto con un ejemplo sencillo:

Ejemplo 3.2.

Sea $\Omega$ acotado de $\mathbb{R}^N$ y $\psi(x)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta\psi(x) + \psi(x) = 0 & \text{en } \Omega \\ \psi(x) = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sea $a(t)$ tal que $\exists T_0 > 0$ verificando que

$$\int_0^{T_0} a(s)ds = +\infty .$$

Entonces es fácil ver que el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - a(t)\,\Delta u(t,x) = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = \psi(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

admite como solución la función

$$u(x,t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) \cdot \psi(x) & \underline{\text{si}} \quad 0 \le t < T_0 \\ 0 & \underline{\text{si}} \quad t \ge T_0 \# \end{cases}$$

Para llevar a cabo el estudio de esta propiedad para $P(\beta,f)$, es necesario distinguir dos situaciones diferentes, según que el grafo $\beta$ se suponga unívoco o multívoco en el origen. En el primer caso, aparece una condición de compatibilidad para que la propiedad aparezca y es

$$\exists\, t_0 \ge 0 \text{ tal que } f(t,\cdot) = 0 \text{ c.p.t. } t \ge t_0. \tag{3.4}$$

Mediante un fácil razonamiento basta entonces suponer $f \equiv 0$. En estas condiciones se tiene la siguiente caracterización:

Teorema 3.2 (G. Díaz - I. Díaz [1]).

Sean $\Omega$ acotado y $u_0 \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ tal que $(-\Delta)^{-1}u_0 \in L^\infty(\Omega)$ (por ejemplo $u_0 \in L^p(\Omega)$, $p > \max\{2N/N+2, N/2\}$). Sea $u$ la solución de $P(\beta,0)$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que se tenga extinción en tiempo finito es que

$$\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty . \# \qquad (3.5) = (1.7)$$

La demostración comienza estableciendo la propiedad para el problema $P^*(\beta,0)$. De nuevo ésto se obtiene mediante la construcción de super y subsoluciones adecuadas y aplicando ahora el Teorema 2.1 c). La supersolución construida para la suficiencia es $\bar{v}(t,x) = \phi(t) \cdot \chi(x)$ con

$$\chi(x) = r^2 - |x|^2, \quad r \text{ tal que } \bar{\Omega} \subset B(0,r), \; \chi(x) \geq m \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\phi(t) = \begin{cases} q^{-1}((T_0-t)\, 2N) \cdot 1/2N & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T_0, \\ 0 & \text{si} \quad t > T_0, \end{cases}$$

siendo

$$q(z) = r^2 \int_0^z \frac{ds}{\beta(s)}$$

y $T_0$ elegido tal que

$$T_0 \geq (1/2\,N) \cdot q(\frac{2N}{m} \|v_0\|_\infty).$$

Finalmente por argumentos de dualidad y utilizando el efecto regularizante dado por el Teorema (2.3, i) se obtiene el resultado para $P(\beta,0)$.

El Teorema 3.2 había sido obtenido también por Sabinina [1] para $N = 1$, $\beta \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta' > 0$, $\beta'' < 0$ y $u_0 \in W^{1,\infty}$. En esta situación el comportamiento de $u$ cerca del tiempo de extinción ha sido minuciosamente estudiado por Berryman and Holland [1] . Es de señalar que estos últimos autores establecen la propiedad obteniendo cotas superiores e inferiores sobre el amortiguamiento de $\int_\Omega u^q(x,t)dx$ para cierto valor de $q$. El caso de $N > 1$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $\beta$ como antes había sido considerado por Evans [1] y [3]

Es importante señalar que si $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, el Teorema 3.2 no es válido. En concreto, Benilan y Crandall [1] han mostrado la extinción en tiempo finito, para soluciones en $L^1(\mathbb{R}^N)$, del caso relativo a

$$\beta(r) = |r|^m \cdot \text{sign } r$$

cuando $0 < m < \frac{N-2}{N}$. Un resultado de Benilan y Aronson muestra la no extinción para $\frac{N-2}{N} < m \leq 1$. De hecho para $\Omega = \mathbb{R}$ (ó $\Omega = \mathbb{R}^2$) y $\beta$ cuaquiera, es imposible que la solución en $L^1(\mathbb{R})$ (ó $L^1(\mathbb{R}^2)$) se extinga en tiempo finito. (J.L. Vázquez [1]).

En la demostración de la necesidad para $P^*(\beta,0)$, se obtiene incluso un resultado más fuerte que asegura que si $v_0(x) > 0$ c.p.t. p de $\Omega'$ $\Omega$, entonces la solución $v$ es tal que $v(t,x) > 0$ c.p.t. $x \in \Omega'$ y $\forall t > 0$. (Comparese ésto con la propiedad mencionada de Yosida [1], establecida para $\beta(r) = r$).

Recientemente G. Díaz [1] ha extendido los resultados sobre $P^*(\beta,0)$ para el caso de $\beta$ dependiendo de $x$ y operadores lineales de segundo orden más generales que el operador $\Delta$.

Cuando se supone que $\beta$ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ multívoco en el origen la condición de compatibilidad a exigir a $P(\beta,f)$ para que se tenga extinción en tiempo finito es

$$t_0 \geq 0 \text{ tal que } -\Delta\beta(0) \quad f(t,x) \text{ c.p.t. } t \geq t_0, \text{ c.p.t. } x \in \Omega$$

o equivalentemente

$$\exists t_0 \geq 0 \text{ tal que } (-\Delta)^{-1} f(t,x) \in \beta(0) \text{ c.p.t. } t \geq t_0, \text{ c.p.t. } x \in \Omega$$

Tal condición es "casi" suficiente, teniéndose: (2)

<u>Proposición</u> 3.1. (G. Díaz - I. Díaz [1]).

<u>Sea</u> $\Omega$ <u>acotado y</u> $\beta$ <u>g. m. m. de</u> $\mathbb{R}^2$ <u>tal que</u> $\beta(0) = [\bar{\beta}, \beta^+]$ <u>con</u> $\beta^- < \beta^+$. <u>Sean</u> $u_0 \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, <u>con</u> $(-\Delta)^{-1} u_0 \in L^\infty(\Omega)$ <u>y</u> $f \in L^1_{loc}(0,\infty: L^\infty(\Omega))$. <u>Supongamos que</u> $\exists t_0 \geq 0$ <u>y</u> $\exists \varepsilon > 0$ <u>tales que</u>

$$\beta^- + \varepsilon \leq (-\Delta)^{-1} f(t,x) \leq \beta^+ - \varepsilon, \quad \text{c.p.t. } t \geq t_0 \text{ y c.p.t. } x \in \Omega \quad (3.6)$$

<u>Entonces la solución</u> $u$ <u>de</u> $P(\beta,f)$ <u>se extingue en tiempo finito.</u> #

Como en ocasiones anteriores la demostración se basa en el establecimiento de tal propiedad para el problema dual $P^*(\beta,(-\Delta)^{-1}f)$ correspondiente a $v_0 = (-\Delta)^{-1}u_0$. Esto fue mostrado en I. Díaz [3] (corolario 1)

---

(2) Observese que si $\beta$ es multivoco en el origen, entonces satisface (3.4), por lo que el Teorema 3.2 puede ser aplicado a $P(\beta,f)$ con $f$ verificando (3.3).

a partir de un resultado abstracto, referente al caso de problemas de Cauchy (como (2.1)) regidos por operadores acretivos sobre espacios de Banach que son <u>multívocos en el origen</u>. Así, (3.6) no es más que la particularización de la hipótesis general

$$\left.\begin{array}{l}\exists t_0 \geq 0 \text{ y } \exists \rho: [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^+, \text{ integrable, tal que } \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \rho(t)dt = +\infty \\ \text{y ademas } B_X(f(t), \rho(t)) \subset A(0) \text{ casi para todo } t \geq t_0.\end{array}\right\} \quad (3.7)$$

La hipótesis (3.7) había sido utilizada por Brezis [3] para el caso de $X$ espacios de Hilbert, por lo que el resultado era de difícil aplicación salvo para $X = \mathbb{R}^N$ (caso de ecuaciones diferenciales ordinarias) El teorema abstracto obtenido en I. Díaz [3] (antes presentado en I. Díaz [2]) es también aplicado a diversos problemas sobre $X = L^{\infty}(\Omega)$, haciendo así clara la independencia entre el tiempo finito de extinción y la propagación finita, que aparecen simultáneamente en ciertas Inecuaciones Variacionales consideradas por múltiples autores: Brezis-Friedman [1], Bensoussan-Lions [1] [1] y Evans-Knerr [1]. Otros resultados abstractos para operadores acretivos sobre $L^1(\Omega)$ pueden encontrarse en Díaz [4].

La extinción finita para la ecuación (3.3) se debe a Bamberger [1] y aparece cuando $\frac{2N}{N+2} < p < 2$ y $\Omega$ es acotado. En otro caso véase Herrero-Vázquez [1]. Para otras ecuaciones véase Kalashnikov [2], Veron [1] y Barbu [1].

Para concluir esta sección, señalemos que las hipótesis (3.1) y (3.5) muestran que no es posible que $P(\beta,f)$ satisfaga a la vez las propiedades de propagación finita y extinción en tiempo finito. Sin embargo cuando se perturba adecuadamente la ecuación de $P(\beta,f)$, aparece la contracción instantanea del soporte, lo que asegura la simultaneidad de estas propiedades (Véase, además de los trabajos antes mencionados, Knerr [2], Kersner [1] y Alvarez-Díaz [1]. Para la ecuación (3.3) véase Herrero [1] y Herrero-Vázquez [1]).

## §4. Propiedad de comportamiento lineal en tiempo finito.

Como ya se indicó en la Introducción, es fácil ver que si $\beta$ satisface (1.8) entonces $P(\beta,f)$ corresponde a una difusión de tipo lineal. De esta forma, el estudio de la naturaleza de las soluciones de $P(\beta,0)$, cuando $\beta$ es tal que

$$\exists\, C \text{ y } \exists\, C^* \text{ positivos, tales que } \beta(r) = Cr \text{ para } |r| \leq C^*, \tag{4.1}$$

se presenta como una etapa obligada para el buen entendimiento de las difusiones de tipo lineal. Obsérvese que introduciendo en $P(\beta,0)$ el cambio $\tilde{t} = t/C$, la condición (4.1) se reduce a

$$\exists\, C^* > 0 \text{ tal que } \quad \beta(r) = r \quad \text{para} \quad |r| \leq C^*, \tag{4.2}$$

hipótesis que supondremos a lo largo de esta sección.

Problemas $P(\beta,0)$ con $\beta$ verificando (4.2) aparecen ligados a cuestiones de control térmico (véase Duvaut-Lions [1] Capítulo 2) y constituyen la principal motivación de su consideración. Para presentar tales problemas sea $\Omega$ abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y $\psi \in L^2(\Omega)$ tal que $\psi(x) \geq 0$ c.p.t. $x \in \Omega$. Se plantean entonces:

Problema 4.1

Dado $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, hallar una función $v(t,x)$ satisfaciendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \min\{\Delta v(t,x), \psi(x)\} & t > 0, \ x \in \Omega \\ v(t,x) = 0 & t > 0, \ x \in \partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & , \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Problema 4.2

Dado $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, hallar una función $v(t,x)$ satisfaciendo

$$\left\{\begin{array}{lll} |v_t| \leq \psi & \text{en} & (0,\infty)\times\Omega \\ v_t - \Delta v = 0 & \text{en} & [|v_t| < \psi] \\ v_t - \Delta v \leq 0 & \text{en} & [v_t = \psi] \\ v_t - \Delta v \geq 0 & \text{en} & [v_t = -\psi] \\ & & \\ v(t,x) = 0 & & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & & , \quad x \in \Omega . \end{array}\right. \qquad (4.4)$$

El siguiente lema formula estos problemas de una manera cercana a $P^*(\beta,0)$:

Lema 4.1

Los problema (4.1) y (4.2) pueden ser formulados en términos de

$$P^{**} = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \beta(x, -\Delta v(t,x)) = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ & \\ v(t,x) = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ & \\ v(0,x) = v_0(x) & x \in \Omega, \end{array}\right.$$

para $\beta: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones dadas, c.p.t. $x \in \Omega$ y para todo $r \in \mathbb{R}$ por

$$\beta_1(x,r) = \left\{\begin{array}{lll} -\psi(x) & \text{si} & r \leq -\psi(x) \\ r & \text{si} & r \geq -\psi(x) \end{array}\right.$$

(caso de (4.1)) y

$$\beta_2(x,r) = \left\{\begin{array}{lll} -\psi(x) & \text{si} & r \leq -\psi(x) \\ r & \text{si} & -\psi(x) \leq r \leq \psi(x) \\ \psi(x) & \text{si} & \psi(x) \leq r \end{array}\right.$$

(caso de (4.2)).

<u>Demostración</u>. Basta observar que

$$\beta_1(x,r) = -\min\{-r,\psi(x)\} \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega$$

Por otra parte, (4.4) puede formularse de manera equivalente mediante la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \min\{|\Delta v(t,x)|,\ \psi(x)\} \cdot \operatorname{sign}(-\Delta v(t,x)).$$

El lema se concluye observando que

$$\beta_2(x,r) = \min\{|r|,\ \psi(x)\} \cdot \operatorname{sign} r \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega_\#$$

El problema $P^{**}$ (cuando $\psi(x) \equiv K$ c.p.t. $x \in \Omega$) coincide con un problema $P^*(\beta,0)$ con $\beta$ satisfaciendo (4.2) y entonces su problema dual $P(\beta,0)$ corresponde a una difusión de tipo lineal.

Observemos que la propiedad de comportamiento lineal en tiempo finito, para $\beta$ satisfaciendo (4.2), se tendrá de manera obvia si se muestra que la solución $u$ es tal que

$$\exists\, T_0 \geq 0 \text{ tal que } \|u(t)\|_{L^\infty} \leq C^* \text{ para todo } t \geq T_0 \qquad (4.5)$$

pues entonces la expresión $\beta(u(t,x))$ coincide con $u(t,x)$, $\forall t \geq T_0$, c.p.t. $x \in \Omega$.

La condición (4.5) se satisface de manera trivial si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y además $\|u_0\|_{L^\infty} \leq C^*$, pues las técnicas del principio del máximo muestran que $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$, para todo $t \geq 0$.

Otra manera de obtener (4.5) es por medio del estudio del comportamiento asintótico de la solución $u$. Desgraciadamente $P(\beta,0)$ no puede ser modelado sobre $X = L^\infty(\Omega)$, sin embargo si $N = 1$ es posible adaptar los resultados de estabilidad de la solución en $X = H^{-1}(\Omega)$:

<u>Proposición</u> 4.1.

<u>Sea</u> $\Omega$ <u>un abierto acotado de</u> $\mathbb{R}$ <u>y</u> $\beta$ <u>un g.m.m. de</u> $\mathbb{R}^2$ <u>como</u>

en §2 y satisfaciendo (4.2). Entonces si $u \in C([0,\infty): H^{-1}(\Omega))$ es la solución de $P(\beta,0)$, se tiene que $\exists T_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot) = 0, \quad \text{c.p.t.} \quad t \in (T_0,+\infty)$$

Demostración. Por el Corolario 32 de Brezis [4] se sabe que $\|\beta(u(t))\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ cuando $t \to +\infty$, teniéndose de hecho la estimación (2.4). Por otra parte, gracias a que $N = 1$, los teoremas de inmersión de Sobolev muestran que $H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ con inclusión continua, por lo que $\|\beta(u(t))\|_{L^\infty} \leq \frac{C_2}{t}$ para alguna constante $C_2 > 0$. De esta forma se obtiene (4.5) y además como $u(T_0) \in L^\infty(\Omega)$ el Teorema 2.4, puede ser aplicado al intervalo $[T_0,+\infty)$, dado que $u(t+T_0)$ es solución de $H^{-1}(\Omega)$ y $L^1(\Omega)$ a la vez y que entonces $\beta$ es la identidad. De hecho $u(t+T_0)$ coincide con el semigrupo analítico generado por $-\Delta$ sobre $L^2(\Omega)$ #

El siguiente resultado considera el caso general $N \geq 1$:

Teorema 4.1

Sea $\Omega$ abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ y $\beta$ verificando (4.2) así como (2.5). Sea $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $u \in C([0,\infty): H^{-1}(\Omega))$ solución de $P(\beta,0)$. Entonces $\exists T_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) - \Delta u(t,\cdot) = 0 \quad \text{c.p.t.} \quad t \in (T_0,\infty).$$

Demostración. Por el Teorema 2.3, i) es sabido que $u(t) \in L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ para todo $t > 0$. Sea ahora $t_0 > 0$ fijo y denotemos por $u^*(t)$ a la solución integral en $L^1(\Omega)$ de $P(\beta,0)$ correspondiente al dato inicial $u(t_0)$. Gracias a (2.5) el Teorema 2.5 a) puede ser aplicado, por lo que $u^*(t) \in L^\infty(\Omega)$ $(\subset H^{-1}(\Omega))$ $\forall t > 0$ y además

$$\|u^*(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{M}{t^\alpha}$$

para algunas constantes $M$ y $\alpha > 0$. Los resultados de unicidad muestran que

$u^*(t) = u(t+t_1)$ $\forall t \geq 0$, por lo que basta tomar

$$T_0 = \max \{(\frac{M}{C^*})^{1/\alpha} - t_0, 0\}.$$

para que se tenga (4.5). Es claro entonces que $u(t+T_0)$ coincide con el semi grupo analítico generado por $-\Delta$ en $L^2(\Omega)_{\#}$

Nota 4.1

El Teorema 4.1 admite diversas variantes al ser formulado sobre $L^1(\Omega)$ en vez de $H^{-1}(\Omega)$. Así por ejemplo el grafo $\beta$ satisfaciendo (4.2) y (2.5) no es necesario suponerle sobreyectivo (a diferencia de la sección §2) pues la m-acretividad en $L^1(\Omega)$ del operador $B$ es aun satisfecha (véase Benilan [2]). Otra variante aparece al considerar la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta\beta(x,u(t,x)) \ni 0 \quad \text{en} \quad (0,+\infty) \times \Omega \tag{4.6}$$

donde ahora $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es tal que

$$\left.\begin{array}{lll} \text{c.p.t. } x \in \Omega, & r \to \beta(x,r) & \text{es un g.m.m. de } \mathbb{R}^2,\ 0\in\beta(x,0) \\ \forall r \in \mathbb{R} & x \to \beta(x,r) & \text{es medible} \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

y además $R(\beta(x,\cdot)) = \mathbb{R}$ c.p.t. $x \in \Omega$. (4.8)

Bajo tales circunstancias existe una única solución $u$ en $L^1(\Omega)$ del problema asociado a (4.6). Si además se verifican condiciones semejantes a (2.5) y (4.2) o más concretamente

$$\left.\begin{array}{l} j: \mathbb{R} \to [0,\infty[ \text{ convexa con } \lim\limits_{|r|\to\infty} j(r) = \infty,\ r_0 \geq 0 \text{ y } \alpha \geq 1 \text{ tales que} \\ \text{c.p.t. } x \in \Omega,\ \forall r \in \mathbb{R},\ \forall s \in \beta(x,r),\ |r| \geq r_0 \Rightarrow |s| = j(r)^{\alpha} \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

$$C^* > 0 \text{ tal que } \beta(x,r) = r \text{ para } |r| \leq C^* \text{ y c.p. } x\in\Omega$$

entonces el Teorema 2 de Benilan [2] puede ser aplicado, teniéndose la estimación (2.6) y entonces (4.5). (Obsérvese que desgraciadamente $\beta_1(x,r)$ no satisface la hipótesis (4.9)).

Por las técnicas de dualidad de §2 los resultados anteriores pueden ser formulados para $P^*(\beta,0)$ teniéndose:

Teorema 4.2.

Sea $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $\beta$ satisfaciendo (4.2) y $D(\beta)=R(\beta)=\mathbb{R}$. Entonces si $v \in C([0,\infty): H_0^1(\Omega))$ es la solución de $P^*(\beta,0)$, se tiene:

a) Si $N = 1$, existe $T_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\cdot) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,\cdot) = 0, \quad \text{c.p.t.} \quad t \in (T_0,\infty),$$

b) Si $N \geq 1$ y $\beta$ satisface además (2.5), existe $T_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\cdot) - \Delta v(t,\cdot) = 0, \quad \text{c.p.t.} \quad t \in (T_0,\infty).$$

Demostración. Si $u$ es la solución de $P(\beta,0)$ correspondiente a $u_0 = -\Delta v_0$, se sabe que $u(t) = -\Delta v(t)$ $\forall t \geq 0$. La Proposición 4.1 y el Teorema 4.1 aseguran que $\beta(u(t)) = u(t)$ y por tanto $\beta(-\Delta v(t)) = -\Delta v(t)$ para $t \geq T_0$. De nuevo $v(t+T_0)$ coinciden con el semigrupo analítico generado por $-\Delta$.#

Finalizaremos esta sección considerando los problemas 4.1 y 4.2 para el caso en que $\psi(x) \equiv \delta$ c.p.t. $x \in \Omega$. El estudio de tales problemas para $\psi \in L^2(\Omega)$, $\psi \geq 0$ es considerablemente más complejo y será el objeto de un trabajo posterior.

Es claro que cuando $\psi(x) \equiv \delta$ los grafos $\beta_1$ y $\beta_2$, anteriormente introducidos, no son sobreyectivos por lo que el Teorema 4.2 no puede ser directamente aplicado. Sin embargo se tiene:

Teorema 4.3

Sea $\psi(x) \equiv \delta$ c.p.t. $x \in \Omega$, $v_0 \in \overline{D(C)}^{H_0^1}$ tal que $\Delta v_0 \in L^1(\Omega)$ (y además $-\Delta v_0 \leq \delta$ c.p.t. $x \in \Omega$ para el Probl. 4.2). Entonces existe una única solución $v \in C([0,\infty): H_0^1(\Omega))$ del Problema 4.1 (resp. 4.2) y además existe $T_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\cdot) - \Delta v(t,\cdot) = 0 \quad \text{c.p.t.} \quad t \in (T_0,\infty).$$

Demostración.

La existencia y unicidad se obtienen gracias al Teorema 7 de Brezis [4]. En concreto allí se muestra que el operador $F$ dado "formalmente" sobre $H_0^1(\Omega)$ por $F(v) = -\mathrm{Min}\{\psi, \Delta u\}$ es la subdiferencial de un cierto funcional convexo, s.c.i. sobre $H_0^1(\Omega)$ y de $D(F) = H_0^1(\Omega)$. Sin embargo es de señalar que en general la expresión $\mathrm{Min}\{\psi, \Delta u\}$ se entiende en sentido débil. Sin embargo no es difícil mostrar que en nuestro caso $(\psi \equiv \delta)$ si $v_0 \in D(C)$ y $\Delta v_0 \in L^\infty(\Omega)$ entonces $F(v) = C(v)$ y por tanto la solución $v$ es tal que $\Delta v \in L^1(\Omega)$ y $\mathrm{Min}\ \{\psi, \Delta v\} \in H_0^1(\Omega)$. Tras estas matizaciones pasemos a mostrar la segunda afirmación del Teorema. Comencemos suponiendo $v_0 \in D(C)$ y $\Delta v_0 \in L^\infty(\Omega)$. Definamos entonces $u_0 = -\Delta v_0$. Gracias a los teoremas del máximo se sabe que si $u$ representa una posible solución de (4.6) correspondiente a $\beta_1$ se tiene la estimación "a priori"

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} \text{ c.p.t. } \quad t > 0,$$

Esto permite asegurar que $u$ es también solución del problema $P(\tilde{\beta}_1, 0)$ con

$$\tilde{\beta}_1(r) = \begin{cases} \beta_1(r) & \text{si } \ r \geq \mu \quad , \quad \mu = \min\{-\delta\ ,\ -\|\Delta v_0\|_{L^\infty}\}, \\ r-\mu+\beta(r) & \text{si } \ r \leq \mu \end{cases}$$

Dado que para $P(\tilde{\beta}_1, 0)$ existe una única solución en $L^1(\Omega)$, se tiene asegurada así la existencia y unicidad de $u$ solución, en $L^1(\Omega)$, de $P(\tilde{\beta}_1, 0)$. Por otra parte, es claro que $\tilde{\beta}_1(r)$ satisface ahora la hipótesis (2.5) y por tanto el teorema 4.1 puede ser aplicado con $T_0 = T_0(\delta_1\ \|\Delta u_0\|_L\ )$. Dado que $u(t) \in L^\infty(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, la función $\tilde{v}(t) = (-\Delta)^{-1}u(t) \in H_0^1(\Omega)$ satisface P** para $\beta = \beta_1$ y por la unicidad se tendrá que $v = \tilde{v}$. En el caso general es fácil mostrar que existe $v_{0,n} \in D(C)$ con $\Delta v_{0,n} \in L^\infty(\Omega)$ y tales que

$$\|\Delta v_{0,n}\|_{L^1} \leq \|\Delta v_0\|_{L^1}$$

con $v_{0,n} \to v_0$ en $H_0^1(\Omega)$ y $\Delta v_{0,n} \to \Delta v_0$ en $L^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Gracias a la continuidad del semigrupo generado por $F$ se tendrá que $v_n(t) \to v(t)$ en

$H_0^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Ahora bien es claro que como $T_0$ $(\delta,\cdot)$, depende crecientemente del segundo argumento se tendrá que

$$\frac{\partial v_n(t)}{\partial t} - \Delta v_n(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > T_0 = T_0(\delta, \|\Delta v_0\|_{L^\infty}) \quad \text{y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente gracias a la "formula exponencial" (véase p.e. Brezis [2]. Corollaire 4.4) y a la continuidad del semigrupo generado por $F$, se tiene para $t \geq T_0$ que

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{m\to\infty} (I + \frac{t}{m} F)^{-m} v(T_0) = \lim_{m\to\infty} (I + \frac{t}{m} F)^{-m} [\lim_{n\to\infty} v_n(T_0)] = \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} (I + \frac{t}{m} F)^{-m} v_n(T_0)) = \lim_{n\to\infty} [\lim_{m\to\infty} (I + \frac{t}{m} (-\Delta))^{-m} v_n(T_0)] = \\ &= \lim_{m\to\infty} (I + \frac{t}{m} (-\Delta))^{-m} v(T_0) \end{aligned}$$

y de aquí la conclusión. Para el problema 4.2 basta observar que si $u_0 \leq \delta$ entonces $u(t) \leq \delta$ $\forall t > 0$ y por tanto $u$ coincide con la solución de $P(\beta_1,0)$.

El Teorema 4.3 responde a varias cuestiones propuestas por Brezis en [4]. En dicho trabajo, mediante la aplicación de ciertos resultados abstractos, se muestra que cuando $t \to +\infty$ la solución del Problema 4.1 converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a una función $v_\infty \in H_0^1(\Omega)$ satisfaciendo

$$\operatorname{Min} \{\Delta v_\infty(x), \psi(x)\} = 0 \quad \text{c.p.t.} \quad x \in \Omega. \tag{4.11}$$

Es claro que toda función $v_\infty \in H_0^1(\Omega)$ satisfaciendo (4.11) es un "punto de equilibrio" y también en general existen muchas de tales funciones.

Brezis afirma: "<u>we don't know how to identify</u> $\lim_{t\to+\infty} v(x,t)$ (<u>in terms of</u> $v_0$) <u>among all the equilibria</u>. <u>Also we don't know whether</u> $v(x,t)$ <u>converges strongly in</u> $H_0^1(\Omega)$".

En el caso tratado aquí $(\psi(x)\equiv\delta)$ es claro que el único punto de equilibrio es $v_\infty \equiv 0$ y entonces el Teorema 4.3 afirma la coincidencia de $v$ con la solución de la ecuación lineal del calor por la que es claro que $\lim_{t\to\infty} v(t)=0$ con convergencia fuerte en $H_0^1(\Omega)$. (Esto puede ser obtenido, por ejemplo, a partir del Corolario 3.1 de Brezis ([1]). De hecho el Teorema 4.3 permite incluso estimar la rapidez de la anterior convergencia por medio de métodos cuantitativos. Véase por ejemplo Dou Mendizabal [1] capítulo 1).

## 5. Propiedad de acotación uniforme.

Como ya se indicó en §2, tal propiedad establece una estimación sobre la evolución de la norma $L^\infty$ de la solución válida para cualquier dato inicial. Es de señalar la estrecha conexión entre esta propiedad y el problema de la existencia y unicidad para el problema retrógrado. (Véase Lions [1]).

Para el problema $P(\beta,0)$ diversos autores se han ocupado de esta propiedad: Evans [1], Veron [1], etc. (Véase también el Lema 2 de Berryman-Holland [1] como resultado negativo). También para la ecuación (3.3) es conocido una propiedad similar. (Véase Veron [1] y Simon [1] donde se puede encontrar extensa bibliografía relativa a otras ecuaciones).

A conocimiento del autor, para el problema $P^*(\beta,0)$ no existen resultados previos a excepción de la estimación de Evans [1]

$$\|v\|_{C^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(Q)} \leq C(Q)$$

para $0 < \alpha < 1$ y para todo $Q \subset\subset \Omega \times (0,\infty)$, relativa al caso de $\beta$ y $\beta^{-1}$ lipschitcianas. Su resultado es basado en las estimaciones de Moser-Nash y de Schauder.

El siguiente resultado utiliza la comparación de soluciones (Teorema 2.1, iii) y de aquí que $P^*(\beta,0)$ se modele ahora sobre $L^\infty(\Omega)$:

Teorema 5.1

Sea $\Omega$ acotado de $\mathbb{R}^N$ y $\beta$ g.m.m. de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in \beta(0)$ y $D(\beta) = \mathbb{R}$. Supongamos además que

$$\exists R \geq 0 \text{ tal que } \max\left\{\int_{-\infty}^{-R} \frac{ds}{\beta(s)}\,,\ \int_{R}^{+\infty} \frac{ds}{\beta(s)}\right\} < +\infty \qquad (5.1)$$

Entonces existen $h_1$ y $h_2$ funciones reales continuas, $h_1 \geq 0$ y $h_2 \leq 0$, (verificando $\lim_{t\to+\infty} h_1(t) = \lim_{t\to+\infty} h_2(t) = 0$, si $\beta^{-1}(0)=0$) tales que para todo $v \in \overline{D(E)}^{L^\infty}$ la solución $v$ de $P^*(\beta,0)$ satisface

$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq \operatorname{Max}\{h_1(t), -h_2(t)\}. \quad \text{para todo} \quad t > 0. \tag{5.2}$$

Demostración. La existencia y unicidad es debida a Ha [1]. (Obsérvese que no se ha pedido que $R(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$ como en §2). Sea $g \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ verificando

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, \lambda > 0 \quad \text{tal que} \quad -\lambda\Delta g - g = 0 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega}, \\ \exists\, \Theta\,, \quad \text{tal que} \quad 0 < \Theta \leq g(x) \leq 1,\ x \in \bar{\Omega} \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

(Tal función puede elergirse, por ejemplo, entre los valores propios de $\Delta$ sobre un dominio $\tilde{\Omega}$ con $\tilde{\Omega} \supset\supset \Omega$).

Por otra parte, gracias a (5.1), podemos suponer que $\beta^{-1}(0) = [b^-, b^+]$ con $-\infty < b^- \leq 0 \leq b^+ < +\infty$. Sea entonces $T^+ \in (0,+\infty]$ dado por

$$T^+ = \int_{\frac{\lambda b^+}{\Theta}}^{+\infty} \frac{ds}{\beta(\frac{s\Theta}{\lambda})}\,.$$

Gracias a (5.1), la aplicación $q$ dada por $q: r \to \int_r^{+\infty} \frac{ds}{\beta(\frac{s\Theta}{\lambda})}$ es un homeomorfismo decreciente, $q: [\frac{\lambda}{\Theta} b^+, +\infty) \to (0,T^+]$. Definamos entonces

$$h_1(t) = \begin{cases} q^{-1}(t) & \text{si} \quad t \in (0,T^+] \\ \frac{\lambda b^+}{\Theta} & \text{si} \quad t > T^+ \end{cases}$$

Es claro que se tendrá

$$\begin{cases} h_1'(t) + \beta(\frac{\Theta}{\lambda} h_1(t)) \ni 0 \quad \text{c.p.t.} \quad t \in (0,+\infty) \\ h_1(0) = \operatorname{Sup} D(\beta) = +\infty. \end{cases}$$

Finalmente, definamos la función $\bar{v}(t,x) = h_1(t) \cdot g(x)$. Se tiene que

$$\text{i)} \quad \bar{v}_t(t,x) + \beta(-\Delta\bar{v}(t,x)) = h_1'(t) \cdot g(x) + \beta(h_1(t) \cdot (-\Delta g(x))) =$$

$$= h_1'(t) \cdot g(x) + \beta(h_1(t) \cdot \frac{g(x)}{\lambda}) \geq h_1'(t) + \beta(\frac{\Theta}{\lambda} h_1(t)) = 0,$$

$$t > 0, \quad x \in \Omega.$$

(Cálculos relativos a $\beta$ unívoco, el caso general se deja a la paciencia del lector).

ii) $\bar{v}(t,x) = h_1(t) \cdot g(x) \geq 0 \qquad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,$

iii) $\forall v_0 \in \overline{D(E)}^{L^\infty}$ existe $t_0$ (todo lo pequeño que se quiera) de forma que

$$\bar{v}(t_0,x) \geq \|v_0\|_{L^\infty} \quad \text{c.p.t.} \quad x \in \Omega$$

siendo $v$ la solución del $P^*(\beta,0)$ correspondiente a $v_0$.

Dado que por el princio del máximo $\|v(t_0)\|_{L^\infty} \leq \|v_0\|_{L^\infty}$, entonces $\bar{v}$ es una supersolución sobre $[t_0,+\infty)$ y por el Teorema 2.1, c) se obtiene finalmente que $v(t,x) \leq \bar{v}(t,x)$ para $t > 0$ y c.p.t. $x \in \Omega$. De manera análoga $\forall v_0 \in \overline{D(E)}^{L^\infty}$ la función $\underline{v}(t,x) = h_2(t) \cdot g(x)$ es una subsolución, cuando $g$ es como antes y

$$h_2(t) = \begin{cases} \tilde{q}^{-1}(t) & \text{si } t \in (0,T^-) \\ \frac{\lambda}{\Theta}\, b^- & \text{si } t > T^- \end{cases}$$

con

$$\tilde{q}(r) = \int_{-\infty}^{r} \frac{ds}{\beta(\frac{\Theta}{\lambda} s)}$$

y $T^- = \tilde{q}(\frac{\lambda}{\Theta} b^-)$. De aquí que para todo $v_0 \in \overline{D(E)}^{L^\infty}$ se tenga

$$\underline{v}(t,x) \leq v(t,x) \leq \bar{v}(t,x) \qquad \forall t > 0 \ \text{ y c.p.t. } x \in \Omega,$$

de lo que se deduce la estimación (5.2)$_\#$

<u>Nota</u> 5.1.

Las funciones $h_1$ y $h_2$ pueden ser fácilmente explicitadas en los casos concretos. Así por ejemplo si $\beta(r) = |r|^{\mu-1} \cdot r$ con $\mu > 1$ se obtiene

$$h_1(t) = \frac{c_1}{t^{\frac{1}{\mu-1}}} \quad \text{y} \quad h_2(t) = \frac{-c_2}{t^{\frac{1}{\mu-1}}}$$

(Compárese ésto con la estimación de Veron [1] y Evans [1] para $P(\beta,0)$ en el Teorema 2.5, b)$_{\#}$

Nota 5.2

La hipótesis (5.1) había sido antes utilizada por Veron [1] para mostrar esta propiedad (junto con un efecto regularizante) para una clase abstracta de problemas perturbados y muy diferentes de $P^*(\beta,0)_{\#}$

Nota 5.3.

Utilizando, una vez más, los argumentos de dualidad, podemos enunciar el siguiente resultado para $P(\beta,0)$:

Corolario 5.1

Sea $\Omega$ acotado y $\beta$ g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(0)$, $R(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$ y satisfaciendo (5.1). Entonces existe $h_1$ y $h_2$ funciones reales continuas, $h_1 \geq 0$, $h_2 \leq 0$, (verificando $\lim_{t\to\infty} h_1(t) = \lim_{t\to\infty} h_2(t) = 0$ si $\beta^{-1}(0)=0$) tales que $\forall u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ tal que $(-\Delta)^{-1}u_0 \in \overline{D(E)}^{L^\infty}$, la solución $u$ de $P(\beta,0)$ correspondiente verifica que

$$\|(-\Delta)^{-1}u(t)\|_{L^\infty} \leq \operatorname{Max}\{h_1(t), -h_2(t)\} \quad \text{para todo } t > 0_{\#} \tag{5.4}$$

Una estimación del tipo de (5.4) puede obtenerse a partir de la estimación (2.7) cuando $\beta$ satisface (2.5). (Obsérvese que la condición (5.1) incluye en particular a la dada por (2.5))$_{\#}$

Nota 5.4.

Dada la positividad de $\bar{v}$ y la negatividad de $\underline{v}$ es fácil mostrar que tales funciones siguen siendo super y subsoluciones para el problema perturbado

$$P^*_\alpha = \begin{cases} v_t(t,x) + \beta(-\Delta v(t,x)) + \alpha(v(t,x)) \ni 0 & t > 0, \quad x \in \Omega \\ v(t,x) = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

siendo $\beta$ y $\alpha$ grafos maximales maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$, $\beta$ satisfaciendo (5.1). (No es difícil modificar los resultados de Benilan-Ha [1] y Ha [1] para obtener la existencia y unicidad para $P^*_\alpha$ en $L^\infty(\Omega)$. Véase también Konishi [2] para $\alpha$ unívoco)$_\#$

Nota 5.5.

La demostración del Teorema 5.1 no ha utilizado sobre el operados $\beta(-\Delta u)$ más que la comparación, la homogeneidad del operador $-\Delta$ y la existencia de un valor propio por $-\Delta$ no anulándose en $\bar{\Omega}$ (y por supuesto (5.1)). Estas peculiaridades son satisfechas por otros operadores diferentes de $-\Delta$ como por ejemplo el operador de la ecuación (3.3). (Véase Benilan-Ha [1] para la existencia en $L^\infty(\Omega)$ y Bamberger [1] para la propiedad del valor propio). Tras obvias modificaciones del Teorema 5.1 se obtiene:

Corolario 5.2. Sea $\Omega$ acotado. Sean $\beta$ g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(0)$, $R(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$ y $p$ con $1 < p < +\infty$, tales que

$$\exists\, R \geq 0 \text{ tal que } \max\left\{\int_{-\infty}^{-R} \frac{ds}{\beta(|r|^{p-2}\cdot r)}, \int_R^{+\infty} \frac{ds}{\beta(r^{p-1})}\right\} < \infty \quad (5.5)$$

Entonces existen $h_1$ y $h_2$ como en el Teorema 5.1 tales que para todo $u_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ con $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right|^{p-2} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) \in L^\infty(\Omega)$, la solución $u \in C([0,\infty: L^\infty(\Omega))$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta\left(-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = 0 & \text{en} \quad (0,\infty)\times\Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

<u>satisface</u>

$$\| u(t) \|_\infty \leq \text{Max } \{h_1(t), -h_2(t)\} \ \underline{\text{para todo}} \quad t > 0.$$

La nota 5.4 también puede ser observada en este caso teniéndose la estimación anterior para la solución de la ecuación perturbada

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} ( |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i})) + \alpha(u) \ni 0$$

$$\text{en} \quad (0,\infty) \times \Omega,$$

para todo $\alpha$ g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ y supuestos $p$ y $\beta$ satisfaciendo (5.5). En el caso particular de $\beta(r) = r$ la condición (5.5) obliga a que $p$ sea $p > 2$ obteniéndose así un resultado préviamente obtenido por Veron [1] (Theorem II.1.9). Cuando $\beta(r) = r$ y $\alpha \equiv 0$, Simon [1] ha mostrado que es imposible obtener una acotación uniforme si se supone $1 < p \leq 2$.

§6. Bibliografia.

Alvarez, J. y Diaz, I.

[1] "Comportamiento de las soluciones de un modelo no lineal del calor con absorcion, sobre dominios no acotados". (En estado de redaccion).

Bamberger, A.

[1] (1977) "Etude d'une equation doublement non lineaire". J. Functional Analysis, 24, 148 - 155.

Barbu, V.

[1] (1976) "Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces", (Leyden: Noordhoff International Publishing).

Berryman, J.G.

[1] (1977) "Evolution of a stable profile for a class of nonlinea diffusion equations with fixed boundaries". J. of Mathematical Phys. 18, 11, 2108-2115.

Berryman, J.G. y Holland, C.J.

[1] "Stability of the separable solution for fast diffusion", Aparecerá en Arch. Rational Mech Anal.

Benilan, Ph.

[1] (1972) "Equations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications". Tesis, Universidad de Orsay.

[2] (1977) "Operateurs accretifs et semi-groups dans les espaces $L^p$, $1 \leq p \leq +\infty$". Publications de L'Univ. de Besancon.

Benilan, Ph. y Crandall, M.G.

[1] "The continuous dependence on $\phi$ of solution of $u_t - \Delta\phi(u) = 0$" T.S.R. Mathematics Research Center. Univ. of Wisconsin-Madison. (aparecerá).

Benilan, Ph. y Díaz, J.I.

[1] Trabajo en preparación.

Benilan, Ph. y Ha, K.

[1] (1977) "Equation d'evolution du type $\frac{du}{dt} + \beta(\partial\Phi(u)) \ni 0$ dans $L^\infty(\Omega)$" C.R. Acad. Sc. Paris 281 947-950.

Bensoussan, A. y Lions, J.L.

[1] (1976) "On the support of the solution of some inequalities of evolution". J. Math. Soc. Japan 28, 1-17.

Brezis, H.

[1] (1971) "Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial diff. equations". en Contributions to Non-linear Functional Analysis. Ed. Zarantonello (Acad. Press).

[2] (1973) "Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert". (Lecture Notes, North-Holland).

[3] (1974) "Monotone operators, non linear semigroups and applications". Proc. Int. Congres Math. Vancouver.

[4] (1978) "Asymptotic behavior of some evolution systems", en Nonlinear Evolution Equations, Ed.: M.G. Crandall (Academic Press).

Brezis, H. y Friedman, A.

[1] (1976) "Estimates of the support of solutions of parabolic variational inequalities". Illinois J. Math. 20, 82-97.

Crandall, M.G.

[1] (1976) "An introduction to evolution governed by accretive operators". en Dynamical Systems. Vol. I. (Academic Press). p. 131-165.

Damlamian, A.

[1] (1976) "Problemes aux limites non-lineaires du type du probleme de Stefan et inequations variationnelles d'evolution". Extracto de Tesis. Paris.

[2] (1977) "Some results on the multi-phase Stefan problem". Comm. in Partial Diff. Equations. 10, 1017-1044.

Davis, P.L.

[1] (1976) "On the hyperbolicity of the equations of the linear theory of heat conduction for materials with memory", Siam J. Appl. Math. 30, 1, 75-80.

Diaz Diaz, G.

[1] "Extincion finita para ecuaciones parabolicas con no linealidades sobre operadores elipticos". (Aparecerá en las actas de la VIª Jornadas de Matematicos Hispano-Lusas. Santander. Junio 1979).

Diaz Diaz, G. y Diaz Diaz, J.I.

[1] "Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations" vol. 4, nº 11. Nov. 1979, Comm. in Part. Diff. Equations".

[2] (1979) "Proprietes de propagation finie et d'annulation de la solution pour certaines equations paraboliques non lineaires", Public. del Dept. de Ec. Funcionales, Univ. Complutense de Madrid. Serie: Pre-publicaciones, nº 13.

Diaz Diaz, J.I.

[1] "Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems", Aparecerá en Journal of Nonlinear Analysis.

[2] (1979) "Anulacion de soluciones para ciertos problemas parabolicos no lineales", Rev. Real Acad. Ci. Exactas, Fis. y Nat. Madrid LXXII, 613-616.

[3] "Anulacion de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Aplicaciones a ciertos problemas parabolicos no lineales". Aparecerá en Rev. Real Acad. Ci. Exactas, Fis. Nat. Madrid.

[4] "Resultados y metodos sobre la propiedad de extincion en tiempo finito para ecuaciones de evolucion". Aparecerá en las Actas del II Congreso de Ec. Diferenciales y Aplicaciones. Barcelona, mayo 1979).

Diaz Diaz, J.I. y Herrero Garcia, M.A.

[1] (1978) "Proprietes de support compact pour certaines equations elliptiques et paraboliques non lineaires". C.R. Acad. Sc. Paris. 286, 815-817.

[2] "Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems". (Aparecerá).

Dou, A. y Mendizabal, A.

[1] (1973) "Ecuaciones en derivadas parciales y su resolucion numerica" (Public. de E.T.S. de Ingenieros de CC. CC. y PP de Madrid. Distribuido por Edit. Aguilar).

Duvaut, G. y Lions, J.L.

[1] (1972) "Les Inequations en Mecanique et en Physique". (Paris. Dunod).

Evans, L.C.

[1] (1978) "Application of Nonlinear Semigroup Theory to Certain Partial Differential Equations" en Nonlinear Evolution Equations, Ed. M.G. Crandall (Academic Press).

[2] (1977) "Differentiability of a nonlinear semigroup in $L^1$". J. Math. Anal. and Appl. 60, 703-715.

[3] (1979) "Comunicacion personal.

Evans, L.C. y Knerr, B.F.

[1] "Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain Nonlinear Parabolic Equations and Variational Inequalities". Aparecerá.

Gilding, B.H.

[1] (1977) "A nonlinear degenerate parabolic equations". Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, 4, 393-432.

Ha, K.

[1] (1976) "Sur des semigroupes non lineaires dans les espaces $L^{\infty}(\Omega)$" Tesis del 3$^{er}$ Ciclo. Univ. Paris VI.

Herrero, M.A.

[1] "On the behavior of the solutions of some nonlinear parabolic problems". Aparecerá en Rev. Real Acad. Ci. Exactas. Fis. y Nat. Madrid.

Herrero, M.A. y Vazquez, J.L.

[1] "On a class of non-linear parabolic equations". Notices on the Am. Mathematics Society 26, 4, A-380, Junio 1979.

Kalashnikov, A.S.

[1] (1972) "On equations of the nonstationary-filtration type in which the perturbation is propagated at infinite velocity". Vest. Mosk. Univ. Math. 6, 45-49.

[2] (1974) "The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absortion". Zh. Vychis. Math. i Mat. Fiz, 14, 819-905.

Kershner, R.

[1] (1978) "On some properties of generalized solutions of quasilinear Parabolic Degenerate Equations", Acta Math. Academiae Scientia rum Hungaricae. 32, 301-330. (en ruso).

Knerr, B.F.

[1] (1977) "The porous medium equation in one dimension", Trans. of the Amer. Math. Soc. 234, 381-415.

[2] "The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absortion in one dimension". Aparecerá.

Konishi, Y.

[1] (1973) "On the nonlinear semigroups associated with $u_t = \Delta\beta(u)$ and $\phi(u_t) = \Delta u$". J. Math. Soc. Japan 25, 622-628.

[2] (1972) "On the uniform convergence of a finite difference scheme for a Nonlinear Heat Equation". Proc. Japan Acad. 48, 62-66.

Lions, J.L.

[1] (1969) "Quelques methodes de resolution des problemes aux limites nonlineaires". (Dunod, Paris).

Oleinik, O.A.

[1] (1965) "On some degenerate quasilinear parabolic equations". (en Seminari 1962-1963. Anal. Alg. Germ. et Topol. Vol. I. Inst. Naz. Alta Mat. Ediz. Cremonese. Roma). 335-371.

Oleinik, O.A., Kalashnikov, C. y Yui Lin C.

[1] (1958) "The Cauchy problems and boundary-value problems for equations of the nonstationary filtration types", Izv. Akad. Nauk 22, 667-704. (en ruso).

Peletier, L.A.

[1] (1974) "A necessary and sufficient condition for the existence of an interface in flows through porous media". Arch. Rational Mech. Anal. 56, 183-190.

[2] (1979) Comunicación personal.

Sabinina, E.S.

[1] (1962) "A class of nonlinear degenerating parabolic equations". Soviet Math. Dokl. 3, 495-498.

Sato, K.

[1] (1968) "On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach lattices". J. Math. Soc. Japan 20, 431-436.

Simon, J.

[1] (1975) "Quelques propietes de solutions d'equations et d'inequations d'evolution paraboliques non lineaires". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4, 585-609.

Vazquez, J.L.

[1] (1979) "Comunicacion personal sobre un resultado no publicado.

Veron, L.

[1] (1977) "Coercivite et proprietes regularisantes des semi-groupes dans les espaces de Banach". Publ. Math. Fac. Sci. Besancon nº 3.

Yosida, K.

[1] (1974) "Functional Analysis". (4ª Edicion. Springer-Verlag. Berlin).

Zeldovich, Y.B. y Raizer, Y.P.

[1] (1969) "Physics of shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena". V.II. (Academic Press. New York).