7.2 Principio de incertidumbre de Heisenberg

En 1927 Werner Heisenberg (1901-1976) publicó el famoso principio que lleva su nombre y que de momento lo enunciamos tan solo "coloquialmente":

Principio de Heisenberg [versión formal].

Si $\Psi(x,t)$ es la "función de onda" asociada a una fuerza de potencial $V(x)$ entonces

$$(\text{incertidumbre en la posición}) \cdot (\text{incertidumbre en el momento}) \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2,$$

siendo

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6{,}558 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

la constante normalizada de Planck.

Observaciones.

1. El término de la derecha, $\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ es "casi cero" pero es estrictamente positivo. Veremos que las dos incertidumbres son términos no negativos. Por tanto, gracias a este Principio sabemos que ninguno de las dos incertidumbres puede anularse.

2. Por "función de onda" $\Psi(x,t)$ estamos entendiendo una solución arbitraria de la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi \qquad (1)$$

estudiada en la Sección anterior. Curiosamente, los resultados que vamos a exponer en esta sección utilizan "muy poco" el estudio de la EDP (1). Recordemos, en todo caso, que $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}$ y que suponiendo

$$\Psi_0(\cdot) = \Psi(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R} : \mathbb{C})$$

Sabemos que

$$\Psi(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R}:\mathbb{C}) \quad \forall t>0 ,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Psi^*(x,t)}_{\substack{\text{complejo}\\ \text{conjugado}}} \Psi(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,0)|^2 dx .$$

En lo que sigue, para mayor simplicidad en la notación, supondremos que

$$N := \int_{\mathbb{R}} |\Psi_0(x)|^2 dx = 1$$

con lo que, según Max Born, la función

$$P(x,t) := \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)$$

representa una densidad de probabilidad, y dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ la probabilidad de encontrar la partícula (de masa m), en el instante t, en I viene dada por

$$0 \leq \int_I P(x,t)\, dx \leq 1 .$$

Comencemos a dar rigor al anterior enunciado.

<u>Definición 1.</u> El "valor medio" (o "valor esperado") de la posición de la partícula en un instante t viene dado por

$$\bar{x}(t) := \int_{\mathbb{R}} x\,|\Psi(x,t)|^2\,dx \quad \Big(:= \langle x \rangle(t) \Big) = \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x,t)\, x\, \Psi(x,t)\,dx$$

<u>Observaciones.</u>

3. Supondremos al dato inicial $\Psi_0(x)$ toda la regularidad necesaria para que todos los términos que vayan apareciendo estén bien justificados. Por ejemplo, se puede demostrar (véase C. Morawetz (1968), T. Tao (1991))

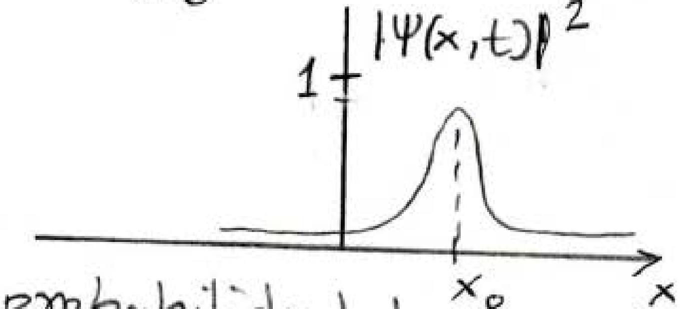
$$\left| \int_{\mathbb{R}} x\,|\Psi_0(x)|^2\,dx \right| < +\infty \Rightarrow \left| \bar{x}(t) \right| < +\infty, \quad \forall t > 0.$$

4. La anterior definición del "valor esperado" $\langle x \rangle(t)$ es la "mejor de las esperanzas. En efecto, supongamos para simplificar que en el instante t la partícula sólo pudiese encontrarse en un nº finito de posiciones $x_1, x_2, \ldots, x_N$ y que la probabilidad de encontrarla en la posición x_i es $p_i \in [0,1]$ (es decir con $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$). Entonces la posición "más razonable" donde cabe esperar que esté la partícula es

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\, p_i(t). \qquad (2)$$

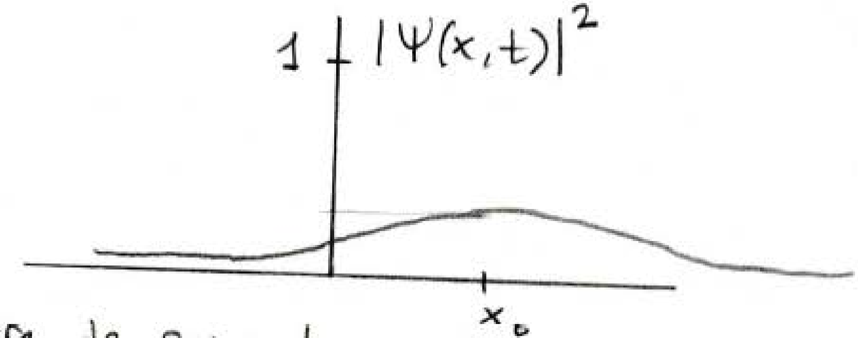
La definición dada de "valor esperado" no es más que la extensión natural de la expresión (2) al caso de infinitas posiciones posibles.

5. Si la función $|\Psi(\cdot,t)|^2$ estuviese "muy concentrada" alrededor de una posición x_0



entonces la probabilidad de encontrar la partícula en x_0 sería muy alta.

Por el contrario, si $|\Psi(\cdot,t)|^2$ fuese una función "bastante plana"



la esperanza de que la partícula estuviese en x_0 sería muy escasa.

Definición 2. La "incertidumbre en la posición", en el instante t se define por la expresión

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x}(t))^2 \, |\Psi(x,t)|^2 dx \qquad \Big(\equiv \underbrace{(\Delta x)^2(t)}_{\text{Varianza}} \text{ en algunas notaciones} \Big)$$

Observación 6. El valor promediado $\bar{x}(t)$ es la posición que hace menor la incertidumbre, en el instante t, entendida como función de $\bar{x}$, e.d.

$$\Theta(\bar{x},t) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 |\Psi(x,t)|^2 dx \quad , \text{ dado } \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

En efecto, en un mínimo Θ ha de tener derivada nula, e.d.

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}}(\bar{x},t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x}) \, |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \, |\Psi(x,t)|^2 dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, |\Psi(x,t)|^2 dx}_{\text{¡definición dada!}}$$

• Dar rigor al término "incertidumbre en el momento" es mucho más delicado y require una idea completamente nueva.

Si llamamos $p(t)$ ($= m v(t)$ en la Mecànica Clásica) el momento lineal podríamos comenzar por proponer una expresión similar al valor promediado de la posición (pero ahora para el momento) como

$$\langle p \rangle (t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\, p\, \psi(x,t)\, dx . \qquad (3)$$

• Recordemos que en Mecànica Clásica, como la fuerza es conservativa, de la conservación de la "energía total" se deduce

$$p = \sqrt{2m(E - V(x))} . \qquad (4)$$

- Ahora, en Mecánica Cuántica, la noción de partícula es sustituida por la de "función de onda" $\Psi(x,t)$. Si tomamos el caso sencillo de una onda progresiva armónica $\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ entonces

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik e^{i(kx-\omega t)} = ik\,\Psi . \qquad (5)$$

La "idea genial" de Heisenberg fue utilizar el "Principio de de Broglie" $p = \frac{h}{\lambda}$ (con λ la longitud de onda generada por el movimiento de la partícula) y, como vimos (tema de la fórmula de D'Alembert) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y así

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h} p = \frac{p}{\hbar} ,$$

Con lo que (4) se puede leer como,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = i\frac{p}{\hbar}\Psi \qquad \text{e.d.} \quad p\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi \qquad (6)$$

[p actua como un operador diferencial $p \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$].

- El anterior argumento está realizado para funciones de onda progresivas y armónicas pero vimos que el "principio de superposición" permite descomponer un "paquete de ondas" en suma (posiblemente infinita) de tales ondas progresivas armónicas. Por tanto tomamos (5) como una definición general:

<u>Definición 3</u>. El "valor promediado" del momento lineal en el instante t viene dado por:

$$\langle p\rangle(t) := \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\,dx\,. \qquad (7)$$

La "incertidumbre en el momento lineal", en el instante t, se define por

$$(\Delta p)^2(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\left[p(t) - \langle p\rangle(t)\right]^2 \psi(x,t)\,dx. \qquad (8)$$

Observación 7. No es difícil probar que mediante un cambio de variables (véase Folland - Sitaram (1997)) se puede mostrar que, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$\langle x\rangle(t)=0 \quad \text{y} \quad \langle p\rangle(t)=0.$$

En lo que sigue, entenderemos que las incertidumbres vienen dadas por

$$\boxed{(\Delta x)^2(t):=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,|\Psi(x,t)|^2\,dx} \tag{9}$$

y

$$(\Delta p)^2(t):=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\,p^2\,\Psi(x,t)\,dx=-\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\,dx,$$

(puesto que por (6), $p^2\Psi=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right)$).

Además, integrando por partes, como

$$\Psi(x,t),\ \Psi^*(x,t)\longrightarrow 0 \quad \text{si } |x|\longrightarrow+\infty$$

(pues $\Psi(\cdot,t),\Psi^*(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R})$) se tiene que

$$\boxed{(\Delta p)^2(t):=+\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}(x,t)\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t)\,dx}. \tag{10}$$

- El anterior argumento está realizado para funciones de onda progresivas y armónicas pero vimos que el "principio de superposición" permite descomponer un "paquete de ondas" en suma (posiblemente infinita) de tales ondas progresivas armónicas. Por tanto tomamos (5) como una definición general:

<u>Definición 3</u>. El "valor promediado" del momento lineal en el instante t viene dado por:

$$\langle p \rangle (t) := \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\, dx \,. \tag{7}$$

La "incertidumbre en el momento lineal", en el instante t, se define por

$$(\Delta p)^2(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \left[p(t) - \langle p \rangle (t) \right]^2 \psi(x,t)\, dx. \tag{8}$$

Ya estamos en condiciones de enunciar con rigor el Principio de incertidumbre

Teorema 1 (Principio de incertidumbre de Heisenberg, 1927)
Supuesto $\Psi_0(\cdot)$ suficientemente regular (de manera que $(\Delta x)^2(t)$ y $(\Delta p)^2(t)$ sean finitos $\forall t \geq 0$) se tiene que

$$(\Delta x)^2(t)\,(\Delta p)^2(t) \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \qquad \forall t \geq 0. \tag{11}$$

- Existen varias demostraciones posibles de este teorema. Aquí seguiremos una basada en las propiedades de la Transformada de Fourier [se sabe que Norbert Wiener (1894-1964) dió una conferencia sobre la Transformada de Fourier, en Gottingen, en 1925 y que Heisenberg asistió a tal conferencia]. Se debe a H. Kennard (1927).
Una demostración alternativa, utilizando una función auxiliar, $I(\alpha)$, fue dada por el Premio Nobel de 1945, Wolfgang Pauli (1900 - 1958) [véanse los apuntes de A. F. Rañada del Campus Virtual].

- Recordemos que en la Sección 6.4 definimos la Transformada de Fourier (no unitaria)

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}:\mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}:\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}:\mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}:\mathbb{C})$$

$$f(x) \longrightarrow \mathcal{F}(f)(\omega) \equiv F(\omega) \left(= \hat{f}(\omega)\right)$$

mediante

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx \qquad (12)$$

y que la transformación inversa está definida por

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega \, , \qquad (13)$$

con lo que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-i\omega z} dz \right) e^{i\omega x} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x). \qquad (14)$$

- Recordemos que hay varias definiciones equivalentes de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ cambiando las constantes externas a la integración y elevando las exponenciales a adecuados exponentes [véase el problema resuelto en el Campus Virtual].

- De las muchas propiedades que cumple la transformada $\mathcal{F}$ aquí vamos a emplear especialmente la siguiente:

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\omega) = i\omega F(\omega) \quad \left(= i\omega\, \mathcal{F}(f)(\omega)\right), \qquad (15)$$

Necesitaremos también un resultado central en la teoría de la Transformada de Fourier obtenido en 1910.

Teorema 2 (de Michel Plancharel [1885-1967]).

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}:\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}:\mathbb{C})$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega , \qquad (17)$$

e.d.

$$\| f \|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| \mathcal{F}(f) \|_{L^2} .$$

[En el caso de la transf. de Fourier unitaria $\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}$]

- Para la demostración enviamos al libro de W. Rudin (1987).

Corolario 1. La incertidumbre en el momento lineal, en el instante t, se puede escribir equivalentemente como

$$(\Delta p)^2(t) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathcal{F}(\psi(\cdot,t))(\omega)|^2 d\omega . \qquad (18)$$

Demostración. Se tiene que

$$(\Delta p)^2(t) = \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right)^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right) dx = \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right|^2 dx .$$

Por el Teorema de Plancharel y la propiedad (15)

$$(\Delta p)^2(t) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathcal{F}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\cdot,t)\right)(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{\hbar^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathcal{F}(\psi(\cdot,\cdot))(\omega)|^2 d\omega .$$

Demostración del Principio de Incertidumbre. Comencemos recordando que en $\mathbb{C}$ se puede definir el producto escalar

$$<a, b> = \mathrm{Re}(a b^*) = a_r b_r + a_i b_i \,, \quad \text{si} \quad \begin{aligned} a &= a_r + i a_i \\ b &= b_r + i b_i \end{aligned}$$

$(b^* = b_r - i b_i)$.

Por tanto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} <f(x), g(x)> dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R} : \mathbb{C})$. Por tanto, si una funcion $f \in L^1(\mathbb{R} : \mathbb{C})$ es tal que $x f(x) \in L^2(\mathbb{R} : \mathbb{C})$ y $f'(x) \in L^2(\mathbb{R} : \mathbb{C})$, de la anterior desigualdad se deduce que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left(x f(x) (f'(x))^* \right) dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Fijado $t \geqslant 0$, podemos tomar $f(\cdot) = \Psi(\cdot, t)$ y denotar $f'(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)$. Se tiene que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = (\Delta x)(t).$$

Además, por la propiedad i) y el Teorema de Plancharel aplicado a $f'(x)$ (véase (18))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f')(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega \mathcal{F}(f)(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2 (t).$$

Por tanto, para esa elección de $f(x)$, la expresión (19) equivale a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(x f(x) (f'(x))^*\right) dx \right| \leq (\Delta x)(t) \frac{1}{\hbar} (\Delta p)(t). \quad (20)$$

La demostración del Teorema acaba si mostramos que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}(x f(x) (f'(x))^* dx \right| = \frac{1}{2} . \qquad (21)$$

Ahora bien

$$x f(x) (f'(x))^* = x \left(f_r(x) + i f_i(x) \right) \left(f_r'(x) - i f_i'(x) \right) ,$$

con lo que

$$\mathrm{Re}\,(x f(x) (f'(x))^* = x \,(f_r f_r' + f_i f_i') = \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \underbrace{\left(f_r(x)^2 + f_i(x)^2 \right)}_{\substack{\shortparallel \\ f(x)(f(x))^*}} .$$

Por tanto, integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,(x f(x) (f'(x))^* dx = \underbrace{\frac{1}{2} x f(x) f^*(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (f(x))^* dx}_{\substack{\shortparallel \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx \\ \shortparallel \\ 1}}$$

pues $|x f_r(x)^2| , |x f_i(x)^2| \to 0$ si $|x| \to +\infty$ dado que $x \psi(x,t)^2 \in L^1(\mathbb{R} : \mathbb{C})$

$$= -\frac{1}{2} ,$$

como se quería demostrar y la conclusión final es obtenida. $\blacksquare$

Observaciones.

8. No entraremos aquí en la interpretación filosófica de este importante principio.

9. En 1933, G. H. Hardy mostró un resultado similar pero en el àmbito puramente matemàtico: $\forall x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \quad (22)$$

con

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} \, dx$$ la "transformada unitaria de Fourier"

10. No es difícil mostrar que la igualdad en el Principio de Heisenberg se realiza si y solo si $f(x)$ es una función gausiana. En efecto, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se convierte en igualdad si y sólo si el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{a}=(a_r, a_i)$ y $\vec{b}=(b_r, b_i)$ es nulo. Eso equivale a que los vectores son paralelos y esto se puede formular como que $\exists\ \gamma(t) \in (0, +\infty)$ tal que

$$f'(x) = -\gamma(t)\, x\, f(x) \qquad (23)$$

en $\mathbb{C}$

La relación (23) es una ecuación diferencial ordinaria <u>lineal</u> y por el "truco de Euler" admite como solución

$$f(x) = c\, e^{-\frac{\gamma(t)}{2}|x|^2}, \quad c \in \mathbb{C},$$

(pues $f'(x) = c\, e^{-\frac{\gamma(t)}{2}x^2}\left(-2\frac{\gamma(t)}{2}x\right) = -\gamma(t)\, x\, f(x)$).

Luego si $\Psi(x,t) = c\, e^{-\frac{\gamma(t)}{2}|x|^2}$ el producto de las incertidumbres es mínimo. Numerosas variantes, involucrando funciones gausianas, son posibles.

11. La conclusión del Principio de Incertidumbre sin hacer la simplificación de que $\overline{x}=0$ y $\overline{p}=0$ pasaría a ser que $\forall\, \overline{x}, \overline{p} \in \mathbb{R}$, si denotamos por

$$(\Delta x : \overline{x})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x}) \left| \Psi(x,t) \right|^2 dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{incertidumbre en la} \\ \text{posición } \overline{x}\end{array}\right),$$

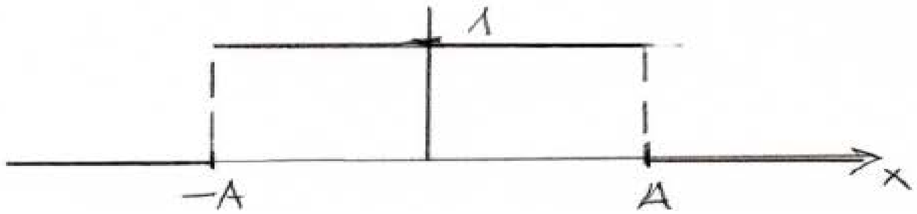
$$(\Delta p : \overline{p})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (p-\overline{p}) \left| \Psi(x,t) \right|^2 dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{incertidumbre en la} \\ \text{velocidad } \overline{p}/m\end{array}\right),$$

entonces

$$(\Delta x : \overline{x})^2 \cdot (\Delta p : \overline{p})^2 \geqslant \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \quad \forall t > 0. \blacksquare$$

12. Una ilustración "visual" del Principio de Incertidumbre (elaboración mía) puede darse si suponemos, por un momento, que la función de onda $\Psi(x,t)$ viene dada por

$$\Psi(x,t) = \chi_{[-A,A]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-A,A] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - [-A,A]. \end{cases}$$



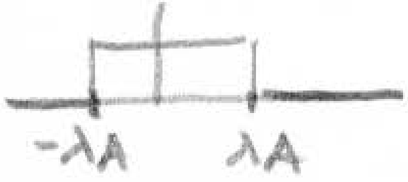
En ese caso, dado un subconjunto $G \subset \mathbb{R}$, la probabilidad de que "la partícula elemental" esté en G viene dada por

$$P(x,t) = \int_G |\Psi(x,t)|^2 \, dx = \text{med}\left(G \cap [-A, A]\right).$$

de manera que si $G \cap [-A, A] = \emptyset$ entonces tenemos la "certeza" de que la partícula <u>no está en G</u>.

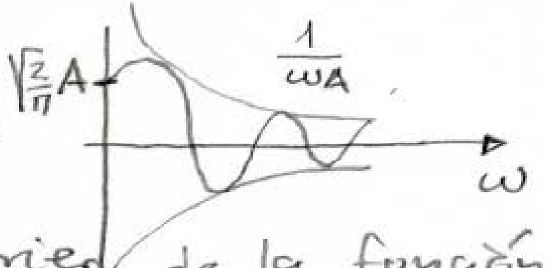
Está claro que a medida que el intervalo $[-A, A]$ le hacemos más pequeño aumentamos mucho la precisión. Por tanto, si llamamos $f(x) = \chi_{[-A,A]}(x)$, nos iteresa considerar la familia de funciones (dependiendo de un parámetro $\lambda > 0$) de la forma

$$f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\lambda A, \lambda A] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - [-\lambda A, \lambda A] \end{cases}.$$



Recordemos que la transformada de Fourier de la función $f(x)$ es

$$\hat{f}(\omega)=\hat{f}(|\omega|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,A\,\frac{\operatorname{Sen}(\omega A)}{\omega A}.$$



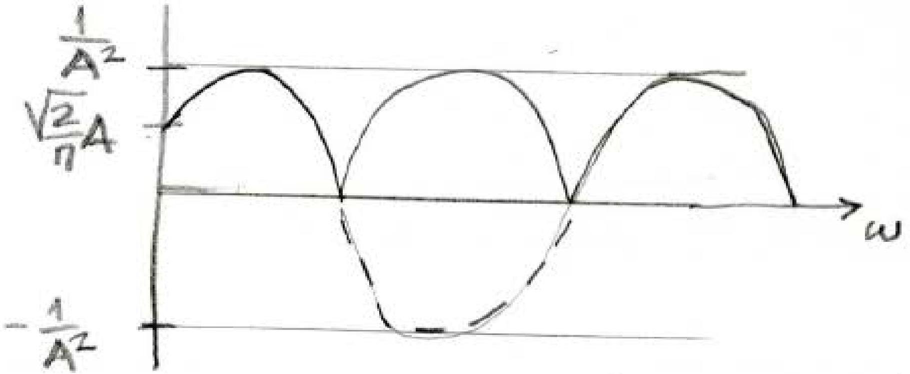
Es fácil hallar la transformada de Fourier de la función $f_\lambda(x)$

$$\hat{f}_\lambda(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\frac{x}{\lambda}}\chi_{[-A,A]}\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx \underset{\frac{x}{\lambda}=y}{=\!=} \lambda\,\hat{f}(\omega) \quad \forall\omega\in\mathbb{R}$$

Recordemos que la incertidumbre en el momento lineal, es (por el Corolario 1)

$$(\Delta p)^2(t)=\frac{\hbar^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

En nuestro caso, la función $\omega^2|\hat{f}(\omega)|^2$ tiene una representación del estilo de



$$\omega^2\left(\frac{1}{\omega A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}$$ (independiente de ω !!)

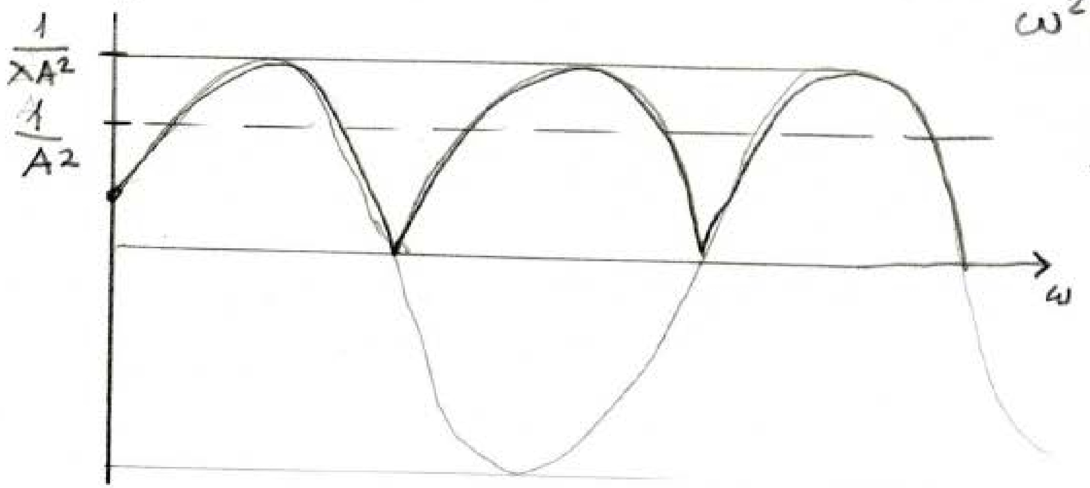
de lo que deducimos que su integral infinita no es convergente y así

$$(\Delta p)^2(t) = +\infty .$$

Para esa función $\Psi(x,t)$ el valor del producto de incertidumbres está muy lejos del valor mínimo $\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ que asegura el Principio de Incertidumbre.

De hecho, lo mismo sucede por mucho que hagamos más pequeño el conjunto de observación $[-\lambda A, \lambda A]$ (haciendo que $\lambda \searrow 0$): ahora $\omega^2|\hat{f}_\lambda(\omega)|^2 = \lambda\,\omega^2|\hat{f}(\omega)|^2$ y aunque la amplitud parece más pequeña, si $\lambda < 1$, la integral sigue

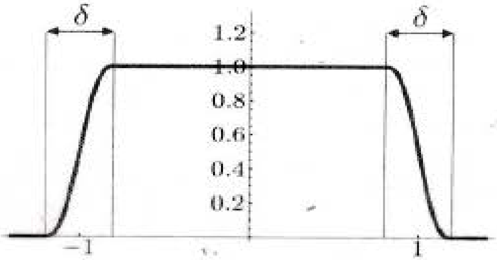
Siendo divergente y de hecho

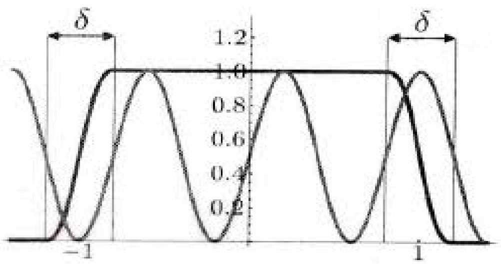


$\omega^2\left(\frac{1}{\omega\lambda A}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2 A^2}$ amplitud de la envolvente.

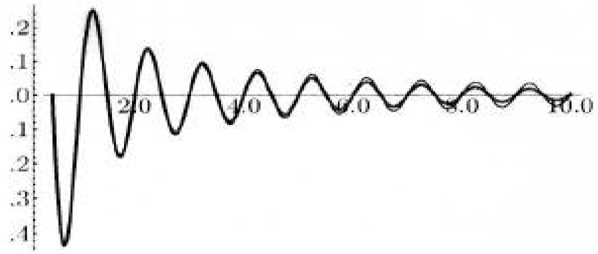
. Se podría pensar que el argumento anterior no és correcto pues esa elección de $\Psi(x,t)$ $(=\chi_{[-A,A]}(x))$ no es de clase C^2 y por tanto no puede verificar la ecuación de Schrödinger (en la que aparece $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$). Pero no es así.

Si regularizamos, $f=\Psi$, mediante una aproximación $f_r \in C^\infty$ que evite la discontinuidad (tomemos $A=1$ y modifiquemos f en los intervalos $\left[-1-\frac{\delta}{2}, -1+\frac{\delta}{2}\right]$ y $\left[1-\frac{\delta}{2}, 1+\frac{\delta}{2}\right]$, $\boxed{\delta=0{,}1.}$

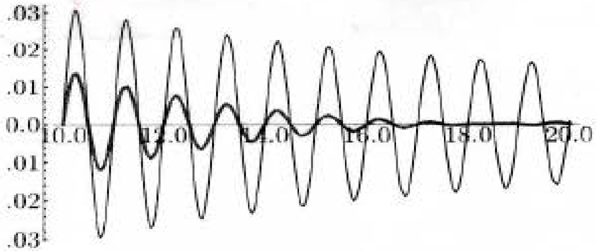




Por métodos numéricos se puede ver que $\hat{f}$ y $\hat{f}_r$ son indistinguibles para $\omega \in [0,10]$ (nótese que $10 = \frac{1}{\delta}$) pero son muy dispares si $\omega \in (10, +\infty)$ ($\hat{f}_r(\omega) > \hat{f}(\omega)$). Por tanto la incertidumbre en el momento lineal para f_r se hace aún mayor que la que corresponde a $\hat{f}$ (pues $\omega^2 \left|\hat{f}_r(\omega)\right|^2$ es mucho mayor que $\omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2$ si $\omega > 10$), con lo que, de nuevo esa incertidumbre es infinita.

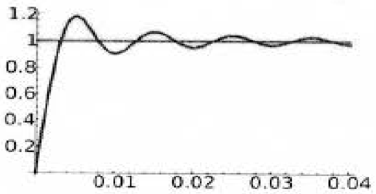


$\hat{f}$ y $\hat{f}_r$ en $[0.5, 10]$

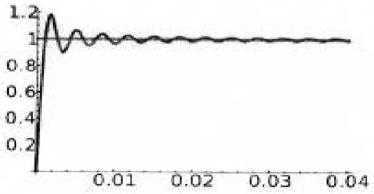


$\hat{f}$ y $\hat{f}_r$ en $[10, 20]$

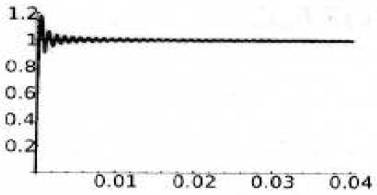
Este argumento de que al regularizar una función discontinua su transformada de Fourier es "peor" que la de la función discontinua fué puesto en evidencia por J. W. Gibbs (1839-1903) en 1870 aproximando la función discontinua por su serie de Fourier (fenómeno de Gibbs)



frecuencias < 100



frecuencias < 300



frecuencias < 1000

13. Si hubiese más tiempo, ahora seguirían algunos temas como los siguientes:

- El efecto tunel: potencial finito de paredes verticales
- Teorema de P. Ehrenfest (1880-1933) $\frac{d}{dt}(\langle p\rangle(t)) = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle(t)$ $\boxed{1927}$
- El potencial de paredes infinitas: condiciones de contorno de tipo Dirichlet.
- El àtomo de hidrógeno.

El libro de texto en 2° de Físicas de la UCM es:

C. Sànchez del Río (editor): Física Atómica. 7ª edición, Ed. Pirámide. Madrid, 2020.

- *No hemos tenido éxito en contestar todos nuestros problemas.*
- *Las respuestas que hemos hallado sólo nos han servido para suscitar muchas otras nuevas cuestiones.*
- *En alguna manera nos sentimos tan confundidos como antes,…*
- ***pero creemos que nuestra confusión ahora es a un nivel más alto y sobre cosas más importantes.***

[atribuido a Enrico Fermi (1901-1954), Premio Nobel 1938].

Fin