

## Haïm Brezis: un maestro excepcional entre la matemática pura y la matemática aplicada

El pasado 7 de julio nos dejó uno de los más eminentes matemáticos del siglo XX, Haïm Brezis, que unió una capacidad extraordinaria para el análisis matemático con el estudio de las ecuaciones diferenciales que rigen los procesos que modelizan la ciencia moderna. La obra que nos deja Haïm Brezis (nacido en Riom-ès-Montagnes, un pueblo de Auvernia, Francia, el 1 de junio de 1944) es una excelente prueba de cómo la matemática pura puede dar luz a sofisticados problemas abordados por la matemática aplicada.



Haïm Brezis, en 2014, en París : Foto de J.I. Díaz

Haïm se formó inicialmente en el entorno de la matemática pura (su primer director de tesis fue G. Choquet) pero su segundo director, J.-L. Lions, le dirigió hacia temas más aplicados (en Francia, en esos años, las Tesis de Estado habían de tratar sobre dos temas disjuntos y con directores diferentes). Haïm pronto se orientó por un camino superador del estilo bourbakista reinante hacia el mundo de aplicación del Análisis Funcional como herramienta para el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) “no lineales”: en los años sesenta del pasado siglo casi todo era misterio en estos temas y se carecía de “métodos” sistemáticos para abordar problemas aparentemente muy diversos e inconexos. Por ejemplo, los resultados de regularidad de soluciones sobre los “problemas unilaterales”, recogidos en su tesis doctoral, se publicaron íntegramente en la prestigiosa revista *J. Math. Pures Appl*, ver cita [B72], y abrieron la puerta de la aplicación

eficiente de métodos numéricos que luego serían desarrollados por R. Glowinski, el propio J.-L. Lions y otros muchos.

### La emergencia de una figura excepcional

La obra de grandes figuras como E. De Giorgi, L. Hörmander, P. Lax, J. L. Lions, L. Nirenberg, J. Serrin, G. Stampacchia y otros había preparado el camino, y H. Brezis tomaría un brillante relevo en los 70 colaborando con la mayor parte de ellos y también con F.E. Browder, M.G. Crandall, T. Kato, A. Friedman, E. Lieb, D. Kinderlehrer, L. Peletier, J. Bourgain, L.C. Evans y otros muchos, entre los que hay que contar la larga lista de sus alumnos. Según el Mathematics Genealogy

Project, Haïm dirigió 58 tesis doctorales y tuvo 1.161 descendientes científicos. Entre ellos se cuentan ganadores de la Medalla Fields como P.L. Lions (el reciente Medallista Fields A. Figalli figura entre sus colaboradores), y distinguidos especialistas de más de 16 países.

A comienzos de los años 70 el joven Brezis causó sensación entre los expertos citados por su dominio del análisis funcional aplicado a las EDPS no lineales y su interés por las aplicaciones que entonces ocupaban a las grandes figuras que iba conociendo. Tenía una mente prodigiosa que sabía ver rápidamente la solución de un problema allí donde otros no alcanzaban y lo expresaba con pasión y elegancia. Su visión se basaba con frecuencia en hallar sutiles conexiones entre los múltiples conceptos que se manejaban para abarcar fenómenos en apariencia muy diversos y en enlazar los resultados obtenidos a la “teoría clásica de análisis”. A su creatividad visionaria unía un certero instinto para detectar lo importante. A Brezis se le asocian conceptos del análisis de las ecuaciones no lineales, como operadores maximales monótonos, semigrupos no lineales de contracciones, inecuaciones variacionales, concepto apropiado de solución débil, soluciones con soporte compacto, singularidades, ecuaciones de Ginzburg-Landau, etc.

En 1973 Haïm escribió un libro importante, [BOMM], explicando en él la teoría de los operadores maximales monótonos y su relación con la generación de semigrupos como técnica para resolver ecuaciones diferenciales de evolución por métodos funcionales. Es una teoría bien conocida hoy día, pero fue lectura obligada para muchos de nosotros al iniciarnos en la investigación pues entonces era una gran novedad. Contó con la colaboración del primero de sus alumnos, Ph. Bénilan (1940-2001), cuya temprana muerte tanto nos ha afectado a los que le tratábamos asiduamente. Es curiosa la forma en que surgió el libro. Brezis daba su curso de doctorado en Paris VI, y Bénilan tomaba notas y entre los dos editaban el texto según surgía. Veamos otro ejemplo de Brezis en acción en estos años. Tras establecer su conexión con los EE.UU, cultivó la amistad del gran físico matemático Elliott Lieb y con él se adentró en las dificultades matemáticas del modelo atómico de Thomas Fermi [BL79] con resultados notables para la teoría de existencia de soluciones de EDPs no lineales. Cambiando de registro, en 1983 publicaron el famoso “Brezis-Lieb lemma” de convergencia de funciones  $L^p$ , [BL83]. Volviendo al otro extremo de problemas aplicados, se pueden citar sus trabajos pioneros en la modelización de los plasmas de fusión nuclear en Tokamaks (desarrollado junto con H. Berestycki [BB80] y más tarde analizado numéricamente por R. Glowinski y su alumno español E. Fernández Cara), el estudio de cristales líquidos [BCL86], la superconductividad, etc. Brezis cultivó toda su vida el “arte de las desigualdades”, útil fundamental del análisis funcional aplicado, entre los muchos ejemplos podemos citar la desigualdad de Brezis-Gallouët [BG80]. Más abajo citaremos la “desigualdad de Hardy”.

Un ejemplo más de cómo su enfoque mediante técnicas de Análisis Funcional abrió nuevas perspectivas en problemas aplicados clásicos fue el de los modelos de la ecuación no lineal del calor y de la filtración en medios porosos que darían tanto juego a la “joven escuela española”, y en las que tanto descolló el genio de Ph. Bénilan (que tan grato recuerdo dejó en España). Se trata de unas EDPs no lineales en las que resulta crucial (incluso para el buen tratamiento numérico del problema) elegir el espacio funcional en el que se plantea naturalmente el modelo (es decir, el espacio donde hay estimaciones y donde se buscarán las soluciones, sean teóricas o numéricas): la enorme pista que le dio Brezis a Bénilan, al comienzo de la tesis del último, es que ese espacio no sería el espacio de Hilbert de las funciones  $L^2$ , usual para muchos otros problemas de la Física-Matemática, sino el espacio no reflexivo  $L^1$  de las funciones meramente integrables.

En esas fechas, Brezis ya estaba preparando el que sería uno de sus artículos más innovadores, [BS74]. El cambio de espacio no es nada trivial, pues obliga a ocuparse de un espacio con propiedades mucho menos agradables, un espacio más propio "de matemáticos puros y probabilistas". Tal espacio resulta ser imprescindible, y a su utilización y beneficio se lanza la "escuela de Brezis". No podemos dejar de mencionar aquí la figura de M. Crandall y su distinguido alumno L.C. Evans en EE.UU., que tan estrechas relaciones tuvieron con Brezis y sus alumnos. Digno de citar por su estilo clásico es el artículo [BBC75]. Aunque no es muy conocido, Brezis abordó el análisis numérico de ese tipo de problemas en su bello artículo [BBR]. En el artículo se menciona la convergencia del esquema semi-discretizado implícito y de otros algoritmos numéricos que resultan convergentes gracias a un resultado abstracto: la llamada "fórmula de Chernoff".

### **Madurez y reconocimiento universal**

Con el paso del tiempo Brezis desarrolló una actividad creciente, fue conocido en todo el mundo y es hoy día uno de los autores matemáticos más citados por sus artículos y libros de investigación, y famoso también por la claridad y amenidad de sus conferencias. La brevedad de este relato nos aconseja dejar el estudio de tantos temas fascinantes para futuros autores. Entre los cuales se halla su trabajo pionero sobre la estructura matemática de los vórtices de Ginzburg-Landau recogido en el libro con Bethuel y Hélein [BBH94]. El modelo de Ginzburg-Landau ha sido una fuente sorprendente de nuevos problemas y nuevas ideas en análisis, geometría y topología.

Brezis fue una figura universal: Fue catedrático de la Universidad de Paris VI (oficialmente, Univ. Pierre and Marie Curie), desde 1972 a su jubilación, en 2007. Pero su extraordinaria energía y capacidad le permitían doblar servicios durante un semestre para dedicar el otro visitando otros países, especialmente los Estados Unidos (fue "visiting distinguished profesor" en Rutgers University desde 1987) e Israel (Technion Institute, Haifa); su familia reside actualmente en Jerusalén.

Su influencia entre los matemáticos de su generación y especialmente en las posteriores fue excepcional para un campo como el de la matemática, tan diferente a otras ciencias experimentales. En un lugar destacado figura su "escuela española". Su contribución personal al progreso y reconocimiento internacional de jóvenes matemáticos españoles fue muy especial y tuvo una importancia estratégica singular pues hizo de detonador y luego se expandió a otras áreas.

### **Apuntes sobre su relación con España**

Este es solo un breve relato de una relación que empezó inesperadamente y terminó cambiando la vida profesional de muchos matemáticos españoles. La primera visita a Madrid tuvo lugar en 1974 invitado por A. Dou y M. de Guzmán que tan aguda visión tuvieron en aquellos años de por dónde iba el futuro. En esos años la Embajada de Francia jugó un papel de mecenazgo de capital importancia dada la situación aún precaria de nuestro país.

La relación de investigación comenzó en los años sucesivos en el Dpto. de Ecuaciones Funcionales de la Universidad Complutense, y cristalizó con las tesis doctorales de los autores de este Obituario (en 1976 y 1979, respectivamente), a las que se unieron las de J. Hernández (1977), M.A. Herrero (1979), J. Carrillo (1981) y M. Escobedo (1988). Su contribución a la formación de

otros muchos españoles fue también sobresaliente (G. Díaz (1980), F. Bernis (1982), X. Cabré (1998), D. Gómez-Castro (2015), etc.). Por ejemplo, Haïm visitó Sevilla en 1978, a invitación de A. Valle, gran valedor de las relaciones con Francia, y también nos constan visitas a Granada y otras universidades españolas.

La gran aportación de Brezis (a diferencia de otras figuras extranjeras que también dirigieron meritorias tesis a españoles desplazados fuera de nuestras fronteras) fue el extremo cuidado que prestó a las carreras investigadoras de sus alumnos, insertándolos en una comunidad internacional que propiciaba la colaboración investigadora que apenas existía en nuestro país.

### **Unas muestras de la colaboración con Brezis**

Haïm colaboró de forma muy activa en el lanzamiento de nuevas revistas matemáticas en nuestro país. Por ejemplo, Haïm publicó junto al segundo autor de este obituario un importante artículo en la recién nacida Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, citado como [BV97]. Ese artículo trataba sobre un problema clásico, ya tratado por Lord Kelvin para modelizar una bola de gas isotérmico en equilibrio gravitacional: modelo que más tarde fue utilizado en la descripción de ciertas configuraciones de equilibrio en combustión por numerosos autores, entre otros I. M. Gelfand (1959). La ecuación es simple,  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ , en un dominio acotado  $\Omega$  en el espacio de  $n$  dimensiones y  $f$  creciente. Se demuestra que existe un  $\lambda^* > 0$ , llamado parámetro extremal, tal que la ecuación tiene soluciones de energía solo hasta  $\lambda^*$ . En el trabajo se toma en particular una no linealidad  $f$  de tipo exponencial y se demuestra que para dimensión  $n > 9$  la solución extremal no puede ser acotada (algo que numéricamente es difícil de detectar). Una herramienta clave fue el refinamiento hecho por los autores de la famosa “desigualdad de Hardy con mejor constante”. Una vez más la matemática “abstracta” aclara la comprensión de un tema aplicado a la ciencia, en este caso concerniente a la mecánica de fluidos. Las muchas citas que fue recibiendo ese artículo beneficiaron al reconocimiento internacional de la revista de la UCM. Autores como Adimurthi, X. Cabré, S. Filippas, N. Goussoub, I. Peral, X. Ros-Oton, A. Tertikas y E. Zuazua contribuyeron a esta línea de trabajo y profundizaron en los resultados reseñados.

Una labor de mecenazgo similar también la brindó Brezis con el lanzamiento de la revista RACSAM por parte de la Real Academia de Ciencias de España, enviando un artículo importante cuando el Editor Principal era el primer firmante de este escrito, [BM01], que luego llevaría a su último libro con P. Mironescu [BM21].

Haïm tuvo una influencia decisiva para animar a sus alumnos a escribir sus principales resultados de forma clara y con argumentos convincentes, no rehusando emplear el tiempo necesario. Nosotros quisiéramos desde aquí mostrar nuestra deuda con su enseñanza recordando dos de nuestros libros, [D85] y [V07], que creemos que tienen huellas de su estilo e intereses, pues tratan de problemas que forman parte de su legado.

### **Honores y distinciones**

Brezis fue miembro del comité editorial de numerosas y prestigiosas revistas, su dedicación fue incesante y a nuestro entender agotadora. Ciertamente es una labor tan importante como mal apreciada; gracias a ella mantienen las revistas su nivel y los investigadores ven leídos sus trabajos y premiados sus esfuerzos. Brezis era rápido en sus respuestas y su criterio solía ser

imparcial y certero. Su trabajo al frente *del Journal of the European Mathematical Society* al comienzo de este siglo fue impresionante. A esa labor editorial unió una intensa actividad como responsable de colecciones de libros para Pitman y Birkhäuser.

Por todo ello, sus servicios fueron reconocidos con multitud de honores y premios patentes en su currículum (accesible en Wikipedia). Comenzaron con el Prix Peccot en 1974 y su entrada en la Académie des Sciences de Paris en 1988. Fue también miembro de la Academia Europaea (1988), de la United States National Academy of Sciences (2003), de la American Academy of Arts and Sciences, y Distinguished Fellow de la American Mathematical Society desde 2012, entre otras muchas distinciones, entre las que destaca el *Steele Prize for Lifetime Achievement*, concedido por la AMS en 2024. Haïm fue además Vicepresidente de la American Mathematical Society.

Su labor en España fue reconocida con su nombramiento como Miembro extranjero de la Real Academia de Ciencias en 1999 y con el Dr. Honoris Causa por la Universidad Autónoma de Madrid en el 2002. Da idea de su compromiso con la matemática española que él fuera el principal motor francés del acuerdo entre las Academias de Ciencias francesa y española firmado en Paris en 2002 (el primer acuerdo en la historia de nuestro país) y la celebración en París, en 2003, de un Congreso conjunto entre ambas academias, cuyas actas salieron publicadas en la recién creada revista RACSAM y editadas por él y el primer firmante de este obituario en [BD03].

### **Algunos detalles personales**

Haïm era muy comprometido con sus convicciones religiosas. El libro *“Haïm Brezis: Un mathématicien juif”*, [LBr99], da una idea de sus ideas y su gran altura intelectual, como también la poseen su viuda, Michal Govrin (poeta, escritora y directora de teatro), y sus dos hijas, Rachel y Miriam.

Haïm (que significa “Vida” en hebreo) era una persona frugal, cuando venía a Madrid le gustaba alojarse en hoteles normales en barrios bulliciosos para experimentar la vida de la vieja ciudad, como el Hotel Inglés en la calle Echegaray.

Sus libros, escritos en un estilo de una gran elegancia y claridad, siguen siendo libros de texto en numerosas universidades de todo el mundo. Su libro *“Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications”*, [B83], fue lectura obligada para tantos de nosotros y configuró toda una nueva filosofía para abordar problemas de la Matemática Aplicada. La huella del maestro permanecerá por siempre y servirá de ejemplo a generaciones venideras.

Madrid, 13 de Julio de 2024

### **Autores**

#### **Jesús Ildelfonso Díaz y Juan Luis Vázquez.**

Profesores Eméritos de la Universidad Complutense de Madrid y Autónoma de Madrid, respectivamente. Académicos de la Real Academia de Ciencias de España. Expresidentes de SEMA.

## BIBLIOGRAFÍA

- [BBC75] Ph. Bénilan, H. Brezis, M.G. Crandall. *A semilinear equation in  $L^1(\mathbb{R}^N)$* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 2 (1975), no. 4, 523–555
- [BB80] H. Berestycki, H. Brezis. On a free boundary problem arising in plasma physics. Nonlinear Anal. 4 (1980), no. 3, 415–436.
- [BBR] A. Berger, H. Brezis, J. Rogers. *A numerical method for solving the problem  $u_t - \Delta f(u) = 0$* , RAIRO Anal. Num. 13 (1979), p. 297–312.
- [BBH94] F. Bethuel, H. Brezis, F. Hélein. *Ginzburg-Landau vortices*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 13. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [B72] H. Brezis. *Problèmes unilatéraux*. J. Math. Pures Appl. (9) 51 (1972), 1–168.
- [BOMM] H. Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática, No. 50. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.
- [B83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. [Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones] Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Versión renovada y extendida: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [LBr99] “*Haïm Brezis: Un mathématicien juif*”, Libro-entrevista con J. Vauthier. Ed. Beauchesne, Paris, 1999.
- [BCL86] H. Brezis, J.-M. Coron, E. H. Lieb. *Harmonic maps with defects*. Comm. Math. Phys. 107 (1986), no. 4, 649–705.
- [BD03] H. Brézis, J.I. Díaz, eds. *Matemáticas y Medio Ambiente, Volumen especial de RACSAM*, (Rev. R. Acad. Cien., Serie A Matem.), 96, nº 3, 2003.
- [BG80] H. Brezis, T. Gallouët. *Nonlinear Schrödinger evolution equations*. Nonlinear Anal. 4 (1980), no. 4, 677–681.
- [BL83] H. Brézis, E. Lieb. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*. Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486–490. Tiene 1608 citas en Mathscinet.
- [BL79] H. Brezis, E. Lieb. *Long range atomic potentials in Thomas-Fermi theory*. Comm. Math. Phys. 65 (1979), no. 3, 231–246.
- [BM01] H. Brezis, P. Mironescu. *On some questions of topology for  $S^1$ -valued fractional Sobolev spaces*. RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 95 (2001), no. 1, 121–143.
- [BM21] H. Brezis, P. Mironescu. *Sobolev Maps to the Circle- From the Perspective of Analysis, Geometry and Topology*, Birkhäuser, New York (2021).
- [BS74] H. Brezis, W. A. Strauss. *Semi-linear second-order elliptic equations in  $L^1$* . J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 565–590.
- [BV97] H. Brezis, J. L. Vázquez. *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 10 (1997), no. 2, 443–469.
- [D85] J.I. Díaz. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*. Research Notes in Mathematics, 106. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [V07] J. L. Vázquez. *The porous medium equation. Mathematical theory*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.