SOBRE EL PROBLEMA DE LA CLASIFICACIÓN DE CURVAS EN UNA GEOMETRÍA DE KLEIN.

Javier Lafuente López *
Departamento de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid

A Joaquín Arregui. Con él aprendí a contar más allá del infinito, y a escalar algunos picos de la sierra madrileña.

Resumen

Se plantea el problema de clasificación de curvas en una geometría diferenciable de Klein, y se muestran estrategias generales para su solución. Finalmente, se resuelve el problema para el plano de Möbius.

1 Introducción

Vamos a poner en funcionamiento una maquinaria ideada por Cartan y Wilczynski (ver [1], [8]) que entre otras cosas, permite resolver problemas de clasificación geométrica de curvas. Se usa el denominado método de la referencia móvil, cuya aplicación es bien conocida en el caso de la geometría euclidea.

El método se puede aplicar a las distintas geometrías del plano: proyectiva, equiafín, afín, conforme, y euclidea, y ha cobrado hoy en día actualidad entre los ingenieros informáticos, por sus aplicaciones a la visión computacional (ver por ejemplo [3]).

*Se ha realizado este trabajo con el apoyo parcial del Proyecto Complutense PB-98-0758.

El núcleo de nuestro trabajo (sección 3) va a consistir *dar vueltas a la manivela* que mueve esa maquinaria para resolver el problema de la clasificación de las curvas en el *Plano de Möbius* (o *Esfera Conforme de Riemann*) siguiendo los mismos pasos que establece Cartan en [2] para clasificar las curvas del plano proyectivo real.

Pero antes, en la sección 2, haremos algunas reflexiones sobre el planteamiento del problema de clasificación de curvas en una geometría de Klein, y la filosofía general para resolverlo. Despues particularizaremos estas ideas (a modo de ejemplo sencillo) para el caso del plano afín euclideo.

Las secciones 2 y 3 pueden leerse de forma independiente

2 Curvas en una Geometría de Klein.

Vamos a exponer brevemente aquí en un leguaje moderno, algunas ideas centrales relativas a la teoría de invariantes en una geometría de Klein, adaptadas al problema de clasificación de curvas. Las ideas básicas están entresacadas de Cartan [2], Guggenheimer, [4], y Sharpe [7]

2.1 Actuación de un grupo sobre un conjunto

Un grupo G actua (por la izquierda) sobre un conjunto Ω, si hay definida una aplicación

$$G \times \Omega \ni (g, \omega) \to g\omega \in \Omega$$

verificando las propiedades habituales $(gg')(\omega) = g(g'\omega)$, $e\omega = \omega$, para todo $g, g' \in G$ y todo $\omega \in \Omega$. La actuación se dice efectiva si el elemento neutro $e \in G$, es el único elemento del grupo que deja fijos todos los elementos de Ω.

Fijado $\omega \in \Omega$ llamamos a $G\omega = \{g\omega : g \in G\}$ *órbita* de ω. Denotamos por $G\backslash\Omega$ al espacio de las órbitas.

Diremos que la actuación es *simple*, si la aplicación $G \ni g \to g\omega \in G\omega$ es inyectiva para cada $\omega \in \Omega$

2.2 Geometrías de Klein

Una *Geometría* de *Klein* en una variedad diferenciable E, viene definida por un grupo de Lie G que actua diferenciablemente $G \times E \to E$ sobre

E de forma efectiva. Podemos por tanto identificar G con un subgrupo del grupo $Difeo(E)$ de difeomorfismos de E.

La actuación de G sobre E, puede inducir *de forma natural* actuaciones $G \times \Omega \ni (g, \omega) \rightarrow g\omega \in \Omega$ sobre determinadas familias Ω de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (métricas, conformes,...) sobre E. La propiedad que define a los objetos de Ω es conservada por el grupo G y se denomina propiedad $(G-)$geométrica. La idea de Klein es que el estudio de la $(G-)$geometría, consiste en el análisis de las propiedades y conceptos relativos a E que permanecen invariantes por la acción del grupo G. Cada vez que tenemos una tal familia Ω, queda planteado un problema de clasificación:

Dos objetos ω, $\tilde{\omega} \in \Omega$ se dicen equivalentes ($\omega \simeq_G \tilde{\omega}$), si están en la misma órbita, es decir, si existe $g \in G$, tal que $g\omega = \tilde{\omega}$. Un invariante, es una aplicación $\phi : \Omega \rightarrow \Phi$ con la propiedad de que $\phi(\omega) = \phi(\tilde{\omega})$ cada vez que $\omega \simeq_G \tilde{\omega}$.

Se dice que un invariante ϕ depende de un sistema de invariantes $\{\phi_1, \ldots \phi_r\}$ si , $\phi(\omega) = \phi(\tilde{\omega})$ cada vez que $\phi_i(\omega) = \phi_i(\tilde{\omega})$ $i = 1, \ldots r$. El sistema $\{\phi_1, \ldots \phi_r\}$ se dice independiente, si ϕ_i no depende de $\{\phi_1, \ldots \phi_r\} - \{\phi_i\}$ $i = 1, ..., r$. Se dice completo, si se verifica la implicación:

$$\phi_i(\omega) = \phi_i(\tilde{\omega}) \ i = 1, \ldots r \Longrightarrow \omega \simeq_G \tilde{\omega}$$

Resolver un problema de clasificación, consiste esencialmente en determinar un sistema completo independiente de invariantes. Nótese que tal sistema induce una biyección

$$G \backslash \Omega \ni G\omega \rightarrow (\phi_1(\omega), \ldots \phi_r(\omega)) \in im\phi_1 \times \cdots \times im\phi_r$$

Observación: Si el espacio cociente (de las órbitas) $G \backslash \Omega$ admite una estructura de variedad diferenciable, entonces hay un sistema de invariantes *locales* en torno a cada punto de $G \backslash \Omega$

2.3 Geometrías Homogeneas.

Una Geometría de Klein G sobre E se dice homogenea, si G actua transitivamente sobre E, es decir, para todo $x, y \in E$, existe $g \in G$, tal que $g(x) = y$. Denotamos

$$G_{xy} = \{g \in G : g(x) = y\}$$

Llamamos grupo de isotropía de un punto $x \in E$, al subgrupo H_x de las transformaciones de G que dejan fijo el punto x, es decir:

$$H_x = G_{xx} = \{h \in G : h(x) = x\}$$

Nótese que si $g \in G$, es tal que $g(x) = y$ entonces $H_y = gH_xg^{-1}$. Así fijado un punto $o \in E$, todos los grupos de isotropía H_x de los puntos de E son conjugados con $H = H_0$. Claramente H es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim H$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (fijado $o \in E$):

$$\pi_o : G/H \ni gH \to g(o) \in E$$

que permite identificar ambos espacios ($E = G/H$). Así $\pi : G \to G/H$ se identifica con

$$\pi : G \to E \ , \ g \longmapsto g(o)$$

En estas condiciones, E resulta ser un espacio homogéneo en el sentido clásico.

2.4 Vectores tangentes de órden superior

Dos curvas $A = A(t)$, $B = B(t)$ de una variedad diferenciable E, se dice que definen el mismo vector de orden r (o r-vector) en $t = 0$, si $A(0) = B(0) = C$ y en algún sistema de coordenadas locales $(X_1, \dots, X_n)$ en torno a C, se verifica para todo k con $1 \le k \le r$:

$$\left.\frac{d^k (X_i \circ A)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k (X_i \circ B)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Se demuestra que esta propiedad, no depende del sistema local de coordenadas utilizado. La relación anterior es de equivalencia, y denotamos por $A^{(r)}(0)$ la clase de equivalencia definida por la curva A. Se denomina vector tangente de órden r de A en $t = 0$ y se denota $T^r_C E = \left\{A^{(r)}(0) : A(0) = C\right\}$ al conjunto de todos ellos. La unión $T^r E$

de todos los $T^r_C E$ con $C \in E$, constituye el fibrado r-tangente. La derivada r-ésima de A en $t = t_0$ es el vector de órden r definido por la curva $A_{t_0}(t) = A(t + t_0)$ en $t = 0$:

$$A^{(r)}(t_0) = A^{(r)}_{t_0}(0) \in T_{A(t_0)}M$$

$T^{(r)}E$ es una variedad diferenciable. De hecho, a partir del sistema de coordenada locales $(X_1, \dots, X_n) = (X_i)$ se puede construir un sistema de coordenadas para $T^{(r)}E$, $(X_i, X_i^{(1)}, \dots X_i^{(r)})$, en donde se entiende que

$$X_i^{(k)}\left(A^{(r)}(0)\right) = \left.\frac{d^k\left(X_i \circ A\right)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Si tenemos una Geometría de Klein sobre E, el grupo G actua de forma natural sobre los vectores tangentes de orden r:

$$G \times T^{(r)}E \to T^{(r)}E, \ \left(g, A^{(r)}(0)\right) \longmapsto (gA)^{(r)}(0) \tag{1}$$

y da lugar a una geometría de Klein sobre $T^{(r)}E$ y al problema de clasificación correspondiente.

2.5 Invariantes diferenciales

La familia de curvas diferenciables ($\mathcal{C}^\infty$), $A = A(t)$ sobre E parametrizadas sobre cierto intervalo I real, pueden ser objeto de clasificación en cualquier geometría G sobre E. Para este tipo de problema, solo vamos a considerar de invariantes ϕ, que asocian a cada curva $A = A(t)$ una función diferenciable definida en I, $\phi_A = \phi_A(t)$ con valores en cierta variedad diferenciable Φ, y con la propiedad de invariancia:

$$\phi_A = \phi_{gA} \text{ para todo } g \in G$$

El invariante ϕ se dirá *diferencial*, si viene determinado por una aplicación diferenciable (que denotamos por el mismo nombre) $\phi : T^{(r)}E \to \Phi$ con la condición

$$\phi_A(t) = \phi\left(A^{(r)}(t)\right)$$

Si r es el mínimo entero positivo que verifica la propiedad

$$\phi_A(t) = \phi_B(t) \text{ cuando } A^{(r)}(t) = B^{(r)}(t)$$

se dice que ϕ es invariante de orden r. Nótese que tal invariante induce una aplicación natural (ver(1))

$$\phi : G \backslash T^{(r)}E \to \Phi$$

2.6 Invariantes Intrínsecos

Dos curvas $A = A(t)$, $t \in I$, $\tilde{A} = \tilde{A}(s)$, $s \in J$ se dice que *definen la misma trayectoria*, si existe un cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$ tal que $\tilde{A} = A(\mathbf{t}(s))$. Se entiende que la función cambio de parámetro $\mathbf{t} : J \to I$ es un difeomorfismo.

Un invariante diferencial ϕ (de orden r) se dirá *intrínseco* si $\phi_{\tilde{A}} = \phi_A(\mathbf{t}(s))$ cuando $\tilde{A}$ se obtenga de A por un cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$. Los invariantes intrínsecos dependen en este sentido solo de la trayectoria de la curva.

2.7 Arco geométrico.

Supongamos que tenemos un operador dl que asocia a cada curva $A = A(t)$ una 1-forma $dl_A = \zeta_A(t)dt$, donde $\zeta : T^{(k)}E \to \mathbb{R}$ es un invariante diferencial, que verifica para cada cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$ la condición:

$$\zeta_B(s) = \zeta_A(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds} \text{ si } B(s) = A(\mathbf{t}(s)) \tag{2}$$

se dice que dl es *elemento* (invariante) *de arco*, y escribimos:

$$dl = \zeta dt$$

Si $A = A(t)$, $t \in I = [a, b]$ se llama longitud de A respecto a dl a:

$$\mathbf{l}(A) = \int_a^b dl_A(t)$$

y la longitud $\mathbf{l}$ es intrínseca, ya que si $B = A(\mathbf{t}(s))$ $s \in J = [c, d]$ (donde

$t = \mathbf{t}(s)$ es un cambio de parámetro) se tiene por el teorema del cambio de variable:

$$\mathbf{l}(B) = \int_c^d \zeta_B(s)ds = \int_c^d \zeta_A(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds}ds = \int_a^b \zeta_A(t)dt$$

Una curva $A = A(t)$ se dice dl-regular si $\zeta_A(t) = \zeta\left(A^{(k)}(t)\right) \neq 0$ para todo t. Fijado entonces un valor inicial $t = a$, podemos considerar la función:

$$\mathbf{l}_A(t) = \int_a^t \zeta_A(t)dt$$

como $\zeta_A(t) \neq 0\ \forall t$, entonces $l = \mathbf{l}_A(t)$ define un cambio de parámetro, y la nueva curva resultante $B = B(l)$ con $A(t) = B(\mathbf{l}_A(t))$ se dice parametrizada por el arco (brevemente PPA). Nótese que el parámetro longitud de arco l está determinado salvo traslaciones.

La condición de ser dl-regular, es intrínseca, es decir, si una curva es dl-regular, también lo es cualquier reparametrización suya. Denotamos

$$R_x^{(r)}[dl] = \left\{A^{(r)}(0) \in T^{(r)}E : \ A \text{ está PPA}\right\}$$

2.8 Geometrías regulares.

Una geometría homogenea G sobre E se dice regular de orden r si existe un elemento regular de arco $dl = \zeta dt$ de forma que:

(1) La actuación natural inducida de $G \times T^{(r)}E \to T^{(r)}E$ (ver (1)).

$$H \times R_0^{(r)}[dl] \to R_0^{(r)}[dl] \text{ es simple} \tag{3}$$

es decir, dado $\omega \in R_0^{(r)}[dl]$ si $h\omega = \omega$ $(h \in H)$ entonces $h = e$.

(2) La actuación de H sobre $R_0^{(r)}[dl]$ da lugar al espacio cociente $H\backslash R_0^{(r)}[dl]$ que tiene estructura de variedad diferenciable tal que la proyección canónica $R_0^{(r)}[dl] \to H\backslash R_0^{(r)}[dl]$ es submersión.

2.9 Sistemas de referencia

Dada una geometría homogenea G regular de orden r sobre el espacio E con punto base $o \in E$. Se llama sistema de referencia a una sección diferenciable $\mathcal{R} : H\backslash R_0^{(r)}[dl] \to R_0^{(r)}[dl]$. Denotamos por

$$\mathcal{R}_0^{(r)}[dl] = im\mathcal{R}$$

Los elementos de $\mathcal{R}_0^{(r)}[dl]$ se denominan r-vectores del sistema.

2.10 Referencias y referencias móviles

Este epígrafe está inspirado en [7] págs 164-165.

Dada la geometría homogenea G sobre E con punto base $o \in E$, la proyección $\pi : G \ni g \to go \in E$, induce en G una estructura natural de fibrado principal (con base E y grupo H), y lo podemos considerar como un fibrado de referencias en el siguiente sentido:

Una referencia en un punto $x \in E$, es un elemento $g \in G$, tal que $g(o) = x$. Así $G_{ox} = \pi^{-1}(x)$ es el conjunto de las referencias en el punto x. El grupo G se ve asi como el conjunto de todas las referencias.

Si $g_1 \in G_{ox_1}$, y $g \in G$ transforma x_1 en $g(x_1) = x_2$, entonces se entiende que g transforma la referencia $g_1 \in G_{ox_1}$ en la $gg_1 = g_2 \in G_{ox_2}$. Recíprocamente si $g_1 \in G_{ox_1}$, $g_2 \in G_{ox_2}$ existe una única transformación $g = g_1^{-1}g_2$ que transforma la referencia g_1 en la g_2.

Una referencia móvil (local) en torno a un punto $p \in E$, es una aplicación diferenciable $\sigma : \mathcal{U} \to G$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de p en E, y $\sigma(x) \in G_{ox}$ para todo $x \in \mathcal{U}$. De hecho, E admite referencias móviles σ en torno a cada punto p con un valor predeterminado $\sigma(p) = g \in G_p$.

Si $A = A(t)$ es una curva parametrizada en E, una referencia movil a lo largo de A viene definida por una aplicación diferenciable $\sigma = \sigma(t)$ donde $\sigma(t)$ es una referencia en $A(t)$ para todo t.

Existen referencias móviles a lo largo de toda curva A. De hecho, fijado un origen t_0 en el intervalo del parámetro t, y una referencia g_0 en $A(t_0)$ hay referencias móviles $\sigma = \sigma(t)$ con $\sigma(t_0) = g_0$.

2.11 Referencia móvil de Frenet

Supongase ahora que nuestra geometría es homogenea y regular de órden r, con elemento de arco dl, y sobre el punto base $o \in E$, supongase fijado un sistema de referencia $\mathcal{R} : H\backslash R_0^{(r)}[dl] \to R_0^{(r)}[dl]$.

Dada la curva regular $A = A(l)$ PPA vamos a construir una referencia movil *canónica* $\varphi_A = \varphi_A(l)$ a lo largo de A que denominamos *referencia* *movil de Frenet*. Para ello construyamos una referencia movil auxiliar $g = g(l)$. Como $\mathcal{R}\left(g(l)^{-1}A^{(r)}(l)\right)$ y $g(l)^{-1}A^{(r)}(l)$ son H-equivalentes, la condición (3) asegura que existe un único $h(l) \in H$ verificando la condición:

$$h(l)\left(\mathcal{R}\left(g(l)^{-1}A^{(r)}(l)\right)\right) = g(l)^{-1}A^{(r)}(l)$$

y definimos $\varphi_A(l) = g(l)h(l)$ de forma que $\varphi_A(l)^{-1}$ resulta ser el único elemento de G tal que transforma el r-vector $A^{(r)}(l)$ en un r-vector del sistema $\mathcal{R}_0^{(r)}[dl]$ es decir:

$$\varphi(l)^{-1}A^{(r)}(l) \in \mathcal{R}_0^{(r)}[dl] \ \ \forall l$$

Hay una propiedad que conviene destacar:
Si $A = A(l)$, $B = gA(l)$ son G-equivalentes, entonces $\varphi_B = g\varphi_A$

2.12 Matriz de Curvaturas: Ecuación de Frenet.

Dada la curva regular $A = A(l)$ sea $\varphi_A = \varphi_A(l)$ su referencia de Frenet. Si ω_G es la forma de Cartan del grupo de Lie, la *matriz de curvaturas* de A es la curva $\phi_A = \phi_A(l)$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G definida por:

$$\phi_A(l) = \omega_G\left(\varphi_A'(l)\right) = \left(L_{\varphi_A(l)^{-1}}\right)_*\left(\varphi_A'(l)\right)$$

simbólicamente podríamos escribir $\phi_A = \varphi_A(l)^{-1}\varphi_A'(l)$ o mejor aún (abusando ostensiblemente de la notación):

$$\varphi_A' = \varphi_A\phi_A$$

y se puede llamar ecuación de Frenet

Nótese que si $A = A(l)$ y $B = B(l)$ son curvas PPA G-equivalentes entonces $\phi_A = \phi_B$

2.13 Un Teorema de Clasificación

Supongamos que partimos de una curva $\phi = \phi(t)$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G y nos planteamos el problema de determinar las curvas en G, $\varphi = \varphi(t)$ solución de la ecuación diferencial tipo Frenet $\varphi' = \varphi\phi$ es decir:

$$\phi(t) = \left(L_{\varphi(t)^{-1}}\right)_*\left(\varphi'(t)\right)$$

la teoría dice (ver [6] pág 69) *que hay una única solución $\varphi_e = \varphi_e(t)$ con $\varphi_e(0) = e$, y todas las demás, se obienen de φ_e por traslaciones de parámetro, o traslaciones a la izquierda en el grupo. En particular, fijado $g \in G$, existe una única solución $\varphi_g = g\varphi_e(t)$ con $\varphi_g(0) = g$.*

Supongamos ahora que $\phi = \phi_A$ para cierta curva regular $A = A(t)$ en E, entonces fijado $x \in E$, y $g \in G_{ox}$ referencia en x, existe una única curva $B = B(t)$ con $B(0) = x$, $\varphi_B(0) = g$, y $\phi_B = \phi$. Además A y B son G-equivalentes.

Como consecuencia se obtiene

Corolario

Dos curvas PPA $A = A(l)$, $B = B(l)$ de E son G-equivalentes, si y solo si tienen la misma matriz de curvatura ($\phi_A = \phi_B$)

2.14 Un Ejemplo elemental: El plano euclideo

Considerese el plano $E = \mathbb{R}^2$ con la geometría dada el grupo G de transformaciones afines euclideas $g_\theta : E \to E$, $(X, Y) \to \left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\theta & -\sin\theta \\ b & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

cuyo grupo de isotropía H para el origen $O = (0, 0)$ es el de las transformaciones de G con $a = b = 0$.

Si $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, entonces $d\mathbf{l}_A = \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}dt$ define un elemento invariante de arco. Las curvas $d\mathbf{l}$-regulares, A son las que $A'(t) \neq 0$ $\forall t$, y t es el parámetro arco si y solo si $\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2} = 1$. Así, $R_0^{(1)}[dl] = \{A'(0) : A \text{ es PPA } A(0) = 0\}$ es esencialmente la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$. Nótese que un vector $U \in \mathbb{S}^1$ determina completamente una base ortonormal positiva que denotamos $\left(U, U^\perp\right)$.

Como el producto escalar $A'(l).A'(l) = X'(l)^2 + Y'(l)^2 = 1$ es constante, se concluye que $A'(0).A''(0) = 0$ y por tanto

$$R_0^{(2)}[dl] = \left\{\left(A'(0), A''(0)\right) : A \text{ es PPA } A(0) = 0\right\}$$

que puede identificarse con $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ vía la biyección natural:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \ni (U, k) \to \left(U, kU^\perp\right) \in R_0^{(2)}[dl]$$

La actuación $H \times R_0^{(2)}[dl] \rightarrow R_0^{(2)}[dl]$ es simple, y el cociente $H \backslash R_0^{(2)}[dl]$ está parametrizado por k y es por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$. En consecuencia, la geometría es regular de órden 2.

Un sistema de referencia $\mathcal{R}$ es entonces una sección

$$\mathcal{R}{=}H \backslash R_0^{(2)}[dl] \rightarrow R_0^{(2)}[dl] = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$

y se corresponde con un vector unitario, $U \in \mathbb{S}^1$. Por ejemplo podemos tomar $U = I_1 = (1, 0)$.

El vector $I_1 = (1, 0)$ determina con $I_2 = I_1^{\perp} = (0, 1)$ la base canónica en O, de forma que una referencia en un punto P es esencialmente un par (P, U), $U = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1$ que determina el único giro $g_\theta \in G$ que lleva O a P. Normalmente se interpreta la referencia (P, U) como $\left(P, U, U^{\perp}\right)$, es decir la base $\left(U, U^{\perp}\right)$ apoyada en P.

Así para una curva $A = A(l)$ PPA denotando $T_A = A'$, $N_A = A'^{\perp}$ es

$$\varphi_A(l) = (A(l), T_A(l), N_A(l))$$

Las ecuaciones de Frenet quedan:

$$(A', T_A', N_A') = (A, T_A, N_A)\phi_A \text{ siendo } \phi_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

y ϕ_A es la matriz de curvaturas, que depende de una función $\kappa = \kappa_A(l)$ que es denominada la curvatura de A.

Así, dos curvas PPA A, y B son congruentes si y solo si las funciones de curvatura κ_A y κ_B coinciden. Por otra parte, es fácil ver que una función *curvatura* $\kappa = \kappa(l)$ determina la curva salvo movimientos.

3 Clasificación de curvas en el plano de Möbius

3.1 El plano de Möbius

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, se identifica con el plano real $\mathbb{R}^2$. Basta para ello identificar la pareja (x_0, x_1) de números reales con el número complejo $X = x_0 + ix_1$. Recordemos que la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}$, está formada por puntos de la forma $(X : Y)$ con $X, Y \in \mathbb{C}$, en donde $(X : Y)$ y $(\lambda X : \lambda Y)$ se consideran iguales cuando $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Al escribir $[A] = (X : Y)$ estamos queriendo decir que que $A = (X, Y) \in \mathbb{C}^2$ es un punto analítico que representa el punto geométrico $[A] \in \mathbb{P}$.

$\mathbb{P}$ una superficie gracias a las parametrizaciones locales

$$j_0 : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni Y \to (1 : Y) \in \mathbb{P} - \{(0 : 1)\} = \mathbb{P}_0$$

$$j_1 : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni X \to (X : 1) \in \mathbb{P} - \{(0 : 1)\} = \mathbb{P}_1$$

las ecuaciones del cambio de coordenadas son

$$\mathbb{C} - \{0\} \ni X \to Y = \frac{1}{X} \in \mathbb{C} - \{0\}$$

que define una transformación conforme en $\mathbb{R}^2$ con su estructura euclidea natural. Es por esto que en $\mathbb{P}$ hay una estructura conforme natural. $\mathbb{P}$ con esta estructura conforme, se denomina *Plano de Möbius*.

3.1.1 Nota

El plano de Möbius $\mathbb{P}$ (con su estructura conforme), puede verse geométricamente a través de j_1, como *el plano ampliado* $\widetilde{\mathbb{C}}$ (con su estructura euclidea conforme). El punto del infinito es , $\infty = (1 : 0)$ cuando identificamos:

$$(X : Y) = \frac{X}{Y}, \text{ siendo } \frac{X}{0} = \infty = (1 : 0) \tag{4}$$

También puede verse $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}}$ como la esfera $\mathbb{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (con su estructura conforme canónica), cuando identificamos:

$$(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right), \ (0, 0, 1) = \infty$$

Se denomina a $\mathbb{S}$ *esfera de Riemann*.

3.2 Transformaciones de Möbius

Una matriz $M = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ con coeficientes complejos y con $\det M \neq 0$ define una aplicación $[M] : \mathbb{P} \ni (X : Y) \to (\tilde{X} : \tilde{Y}) \in \mathbb{P}$ de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ \det M \neq 0 \tag{5}$$

Nótese que la matriz λM, con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ define la misma transformación.M. El conjunto de estas transformaciones, forman el grupo G de las homografías de la recta proyectiva compleja, y respetan la estructura conforme (ver observación 3.2.1). Se denominan también *Transformaciones de Möbius* .

3.2.1 Observación:

En el plano ampliado $\widetilde{\mathbb{C}}$ las transformaciones de Möbius (5) se describen por:

$$Z \to \frac{aZ + b}{cZ + d}, \text{ con } ad - bc \neq 0 \tag{6}$$

Una transformación Möbius como (6) siempre puede escribirse como composición de transformaciones del tipo:

$$Z \to aZ + b \text{ con } a \neq 0 \tag{7}$$

y del tipo

$$Z \to 1/Z \tag{8}$$

Las transformaciones del tipo (7) describen el grupo de semejanzas del plano afín $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ que daba lugar al problema de clasificación de la sección anterior. La transformación (8) es composición de

$$Z \to 1/\overline{Z} \tag{9}$$

y de

$$Z \to \overline{Z} \tag{10}$$

La transformación (9) es una inversión de centro el origen, y potencia igual a la unidad, y como es sabido, conserva los ángulos (en la estructura euclidea de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$). La transformación (10) es una simetría ortogonal respecto al eje real. Esto prueba que la transformación (8) es transformación conforme, y en consecuencia lo son las transformaciones Möbius. Por otra parte, las transformaciones de Möbius forman el grupo total de las transformaciones conformes de $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{S}$, que preservan la orientación.

3.3 Curvas en el plano de Möbius

Apliquemos ahora el método de Wilczyinski(ver [1] y [8]):

Una curva sobre el plano de Möbius $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}}$, (es decir una $\mathbb{P}$-curva) viene representada por una $\mathbb{C}^2$-curva $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, es decir, las funciones $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ son de variable real t con valores complejos, y satisfacen tautológicamente una ecuación diferencial del tipo

$$\det \begin{pmatrix} \theta'' & \theta' & \theta \\ X'' & X' & X \\ Y'' & Y' & Y \end{pmatrix} = 0$$

que podemos escribir de la forma:

$$\theta'' + p\theta' + q\theta = 0 \tag{11}$$

siendo:

$$p = p_0 + p_1 i = -\frac{\det(A'', A)}{\det(A', A)}, q = q_0 + q_1 i = \frac{\det(A'', A')}{\det(A', A)} \tag{12}$$

excluyendo los puntos *singulares* en donde $\det(A', A) = 0$. Como cada componente de A satisface (11), podemos escribir

$$A'' + pA' + qA = 0$$

Trabajaremos solo con curvas *regulares*, es decir, sin puntos de singulares.

3.3.1 Observación

Nótese que el conjunto de soluciones de (11) tiene estructura de espacio vectorial complejo de dimensión 2, y $X(t)$, $Y(t)$ constituyen soluciones independientes si $A(t)$ es regular. En particular si $A = A(t)$ satisface otra ecuación diferencial de la forma

$$A'' + \tilde{p}A' + \tilde{q}A = 0$$

entonces necesariamente $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$.

3.3.2 Observación

Una $\mathbb{C}^2$-curva $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, define la $\mathbb{P}$-curva $[A] = (X(t) : Y(t))$ en $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{C}}$ y la $\mathbb{C}$-curva (en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$)

$$[A]\,(t) = (X(t) : Y(t)) = \frac{X(t)}{Y(t)}$$

según la identificación (4) Nótese que como la curva es regular, puede *no estar definida* en valores aislados del parámetro y romperse en varias componentes.

3.4 Invariantes

Dos curvas $\mathbb{C}^2$-planas $A = A(t) = (X(t), Y(t))$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ se dicen *linealmente equivalentes*, si sus componentes están relacionadas por automorfismos lineales de $\mathbb{C}^2$ del tipo (5). Los invariantes (de las curvas $\mathbb{C}^2$-planas) frente a estas equivalencias, se llaman *invariantes lineales*. Por ejemplo los invariantes p_0, p_1, q_0, q_1 definidos en (12) son invariantes lineales (usar la observación 3.3.1).

Las curvas $\mathbb{C}^2$-planas $A = A(t)$, y $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ se dicen *Möbius-equivalentes* si las correspondientes $\mathbb{P}$-curvas lo son, es decir, existe una función de valores complejos, $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable ($\lambda(t) \neq 0\ \forall t$) tal que $B(t) = \lambda(t)\tilde{A}$ es linealmente equivalente a A.

3.4.1 Nota

Un invariante de Möbius es el que toma el mismo valor sobre curvas Möbius equivalentes.

Un invariante que permanece impasible cuando transformamos la curva $A = A(t)$ en $\tilde{A} = \lambda A(t)$, con $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable ($\lambda(t) \neq 0\ \forall t$) se dice que es proyectivo. Así los invariantes lineales y proyectivos son exactamente los invariantes de Möbius.

3.5 Reducción de la ecuación diferencial

Sin embargo, los invariantes p_0, p_1, q_0, q_1 definidos en (12) no son invariantes intrínsecos ni proyectivos de $A = A(t)$, es decir, varían frente a cambios de parámetro $\hat{t} = f(t)$, y transformaciones $\tilde{A} = \lambda A(t)$, con $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable ($\lambda(t) \neq 0\ \forall t$). De hecho se tiene:

3.5.1 Cambio de parámetro

Sea $A = A(t)$ una $\mathbb{C}^2$-curva, $\hat{t} = f(t)$ cambio de parámetro y $\hat{A} = \hat{A}(\hat{t})$ tal que $A(t) = \hat{A}(f(t))$, entonces:

$$(p, q) \overset{\hat{t}=f(t)}{\rightsquigarrow} (\hat{p}, \hat{q}) : \begin{cases} \hat{p} = \dfrac{f''}{f'^2} + \dfrac{p}{f'} \\ \hat{q} = \dfrac{q}{f'} \end{cases} \tag{13}$$

donde se supone que $A'' + pA' + qA = 0$ y $\ddot{\hat{A}} + \hat{p}\dot{\hat{A}} + \hat{q}\hat{A} = 0$ son las ecuaciones diferenciales correspondientes a A y $\hat{A}$ y en donde hemos denotado por $\dot{\varphi}$ a la derivada de φ respecto a $\hat{t}$

3.5.2 Cambio de representante

A partir de $\lambda = \lambda(\hat{t})$ diferenciable ($\lambda(\hat{t}) \neq 0 \ \forall \hat{t}$) sea $\tilde{A} = \lambda\hat{A}(\hat{t})$, entonces:

$$(\hat{p}, \hat{q}) \overset{\tilde{A}=\lambda\hat{A}}{\rightsquigarrow} (\tilde{p}, \tilde{q}) : \begin{cases} \tilde{p} = -2\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \hat{p} \\ \tilde{q} = 2\left(\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \dfrac{\ddot{\lambda}}{\lambda} - \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}\hat{p} + \hat{q} \end{cases} \tag{14}$$

3.5.3 Reducción de la EDT, fijado el cambio de parámetro.

De la primera fórmula de (14) y de la identidad:

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{d\hat{t}} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{dt}{d\hat{t}} = \frac{\lambda'}{f'}$$

se concluye, que fijado $\hat{t} = f(t)$ cambio de parámetro en $A = A(t)$ podemos elegir $\lambda = \lambda(t)$ de forma que:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'} + p\right) \tag{15}$$

para conseguir $\tilde{p} = 0$, además $\lambda = \lambda(t)$ queda así unívocamente determinada por f salvo constantes multiplicativas.

3.5.4 La ecuación Schwartziana

Dada una función diferenciable definida sobre un intervalo real con valores complejos $f = f(t)$ con $f'(t) \neq 0$ para todo t, se llama derivada Schwartziana de f a:

$$\{f\}_t = \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{4}\frac{f''^2}{f'^2}$$

Una ecuación diferencial de la forma

$$\{f\}_t = K(t) \tag{16}$$

donde $K = K(t)$ una función diferenciable definida sobre un intervalo I real con valores reales, se denomina ecuación Swartziana.

Es fácil probar, que si $z = f(t)$ es una solución de (16) también lo es

$$F(t) = \frac{af(t) + b}{cf(t) + d}$$

y esta es entonces la solución general, cuando a, b, c, d son constantes reales. (ver [5])

3.5.5 Reducción

Con la elección de $\lambda = \lambda(t)$ para cada parámetro $\hat{t} = f(t)$ dada en (15) queda $\ddot{\tilde{A}} + \tilde{q}\tilde{A} = 0$, con $\tilde{q} = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 i$. Se plantea buscar el cambio de parámetro $\hat{t} = f(t)$ que haga $\tilde{q}_0 = 0$. Para ello debemos determinar la $\tilde{q}$ dada en la fórmula (14.2) en función de f , p, y q usando (15) y el valor de $\hat{q}$ en (13.1). El resultado es

$$f'^2\tilde{q} = 4\{f\}_t + p^2 + 2p' - 4q$$

de forma que tomando una $\hat{t} = f(t)$ que satisface la ecuación Swartziana

$$\{f\}_t = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(-p^2 - 2p' + 4q\right) \tag{17}$$

se obtiene $\tilde{q}_0 = 0$, y llamando $r = r(\hat{t}) = \tilde{q}_1(\hat{t})$, $\tilde{A}$ verifica la ecuación:

$$\ddot{\tilde{A}} + ir\tilde{A} = 0 \tag{18}$$

donde

$$r_f = r(f(t)) = \frac{1}{f'^2}\operatorname{Im}\left(p^2 + 2p' - 4q\right) \tag{19}$$

se denomina a (18) ecuación normalizada de $A = A(t)$.

3.6 Parámetro de Möbius.

Un parámetro de Möbius para $A = A(t)$ viene definido por una función $\hat{t} = f(t)$ con la propiedad de que exista una función $\lambda = \lambda(t)$, tal que la curva

$$\tilde{A}(\hat{t}) = \lambda\left(f^{-1}\left(\hat{t}\right)\right) A\left(f^{-1}\left(\hat{t}\right)\right)$$

verifique una ecuación diferencial del tipo (18), es decir, $\ddot{\tilde{A}} + ir\tilde{A} = 0$ donde r es una función real de $\hat{t}$. Vistas así las cosas, conviene hacer dos observaciones claves:

(a) Si $\hat{t} = f(t)$ es parámetro de Möbius para $A = A(t)$, también lo es para $B = \mu(t)A(t)$ donde $\mu = \mu(t)$ es una función positiva.

(b) La funciones $\hat{t} = f(t)$ que son parámetro de Möbius para $A = A(t)$ son exactamente las soluciones de la ecuación Swartziana (17) que es la misma para cualquier otra curva B, linealmente equivalente a A.

De estas observaciones y del apartado 3.5.4 se concluye:

3.6.1 Proposición

1) La ecuación diferencial (17) solo depende de la clase de Möbius de la curva $A = A(t)$. En particular si $\hat{t} = f(t)$ es parámetro de Möbius para $A = A(t)$, también lo es para cualquier otra $B = B(t)$ Möbius equivalente.

2) En particular de la inspección del segundo miembro de la ecuación diferencial (17) se concluye que:

$$\operatorname{Re}\left(p^2 + 2p' - 4q\right) \text{ es invariante de Möbius} \tag{20}$$

3) El parámetro de Möbius, $\hat{t} = f(t)$ para la curva $A = A(t)$ está determinado salvo homografías. Esto permite definir el concepto de razón doble de cuatro puntos sobre la curva :

$$[[A(t_1)], [A(t_2)]; [A(t_3)], [A(t_4)]] = [f(t_1), f(t_2); f(t_3), f(t_4)] \tag{21}$$

independientemente del parámetro de Möbius $\hat{t} = f(t)$ elegido.

4) El parámetro t de la curva $A = A(t)$ es de Möbius, si y solo si se verifica:

$$[[A(t_1)], [A(t_2)]; [A(t_3)], [A(t_4)]] = \frac{(t_3 - t_1) \,/\, (t_4 - t_1)}{(t_3 - t_2) \,/\, (t_4 - t_2)}$$

para todos los t_i

3.6.2 Observación

Partiendo de la curva $\mathbb{C}^2$-plana $A = A(t)$, y fijado un parámetro de Möbius $\hat{t} = f(t)$ queda determinada salvo constante multiplicativa, una función $\lambda = \lambda(t)$, de manera que la curva $\tilde{A}$ resultante verifica la ecuación normalizada (18).

Por otra parte, se ve que un parámetro $\hat{t} = f(t)$ es de Möbius para la curva $A = A(t)$ si y solo si verifica la propiedad (21) anterior para todos los t_i., Por tanto si $B(s) = A(\mathbf{t}(s))$ es otra curva obtenida de $A(t)$ por cambio de parámetro, entonces $g(s) = f(\mathbf{t}(s))$ es parámetro de Möbius para $B(s)$

3.7 El invariante H de Möbius.

Elegido $\hat{t} = f(t)$ parámetro de Möbius para $A = A(t)$, se obtiene $r_f(t) = r(f(t))$ por medio de la fórmula (19). Esta fórmula muestra que la función $H_1^A = H_1(t)$ definida por

$$H_1 = f'^2 r_f = \operatorname{Im}\left(p^2 + 2p' - 4q\right) = 2p_0 p_1 + 2p_1' - 4q_1 \tag{22}$$

no depende del parámetro de Möbius elegido. Probemos que es un invariante de Möbius:

En efecto, si $A = A(t)$, y $C = C(t)$ son Möbius equivalentes, existe una función $\mu = \mu(t)$ de forma que $B = \mu(t)C$ es $\mathbb{C}$-linealmente equivalente a $A = A(t)$. Así A, y B verifican la misma ecuación diferencial

$$\theta'' + p\theta' + q\theta = 0$$

y podemos tomar $\hat{t} = f(t)$ parámetro de Möbius común para A y B (verificando la ecuación (17)). Pero $\hat{t} = f(t)$, también es parámetro de Möbius para C . Pongamos $\tilde{B} = \lambda(\hat{t})(B(\hat{t})$ la ecuación normalizada de B, se tiene así:

$$\frac{d^2\tilde{B}}{d\hat{t}^2} + ir\tilde{B} = 0$$

Como $\left[\tilde{B}(\hat{t})\right] = \left[C(\hat{t})\right]$ se concluye por la observación 3.6.2 que $\tilde{B} = \tilde{B}(\hat{t})$ es también ecuación normalizada de $C(\hat{t})$ así que $r_f(t) = r(f(t))$ es el 'r_f' común a $A = A(t)$, $B = B(t)$, y $C = C(t)$, y por tanto también es común $H_1(t) = r_f(t)f'^2$, como queríamos demostrar.

Haciendo uso ahora de la afirmación (20) se concluye entonces que

$$H = H_0 + iH_1 = p^2 + 2p' - 4q \text{ es invariante Möbius} \tag{23}$$

3.7.1 Observación

El parámetro t de las curvas $A = A(t)$ que verifican la ecuación diferencial $A'' = 0$, es parámetro de Möbius, y son todas de la forma $A(t) = (at+b, ct+d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Poniendo $[A](0) = \infty$, podemos suponer $d = 0$, quedando de la forma

$$[A](t) = Z(t) = \alpha + \frac{\beta}{t}$$

es decir:

$$Z_0 = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{t}$$
$$Z_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{t}$$

que es la recta que pasa (para $t = \infty$) por (α_0, α_1) y tiene dirección la del vector (β_0, β_1). Nótese que la imagen de $[A]$ se identifica con una recta proyectiva, Δ en donde $[A] : \widetilde{\mathbb{R}} \to \Delta$ es una homografía. Por otra parte, la recta $Z(t) = 1 + ti$, se transforma por la homografía $Z \to 1/Z$, en la curva:

$$Z_0 = \frac{1}{1+t^2}$$
$$Z_1 = \frac{-t}{1+t^2}$$

que es la circunferencia $(Z_0 - 1/2)^2 + Z_1^2 = (1/2)^2$. Quedan pues excluidas las rectas y las circunferencias. Como el grupo conforme total, es el generado por las semejanzas lineales y la transformación $Z \to 1/Z$, se concluye que rectas y circunferencias constituyen una única clase de Möbius caracterizada por la propiedad $H_1 = 0$.

3.7.2 El invariante de signo

Se excluyen a partir de ahora de nuestro estudio, las curvas cuyo invariante H_1 se anula en algún punto. Así $H_1 = H_1(t)$ tiene signo constante que denotamos por $\varepsilon = \pm 1$, y lo denominamos invariante Möbius de *signo.*

3.8 Construcción de un elemento invariante de arco

Dada una curva $A = A(t)$, $t \in I$, para cada $\bar{t} = f(t)$, parámetro de Möbius de A, denotamos por $A_f = A_f(\bar{t}) = A(f^{-1}(\bar{t}))$ a la curva reparametrizada . Como vimos en el epígrafe 3.7, la función

$$\zeta_A(t) = \sqrt{|r_{A_f}(f(t))|}\frac{df}{dt}(t) = \sqrt{\varepsilon H_1^A(t)}$$

no depende del parámetro de Möbius $\bar{t} = f(t)$ elegido y es invariante de Möbius. Probaremos entonces que el operador $d\sigma = \zeta dt$ que asocia a cada curva $A = A(t)$, la 1-forma

$$d\sigma_A = \zeta_A(t)dt = \sqrt{\varepsilon H_1^A(t)}dt \tag{24}$$

define un elemento invariante de arco. En efecto:

Si $B = B(s)$, $s \in J = [c, d]$, se obtiene por reparametrización arbitraria $t = \mathbf{t}(s)$ de $A = A(t)$, entonces por la observación 3.6.2, es $g = f(\mathbf{t}(s))$ parámetro de Möbius de B, y usando el parámetro común $\bar{t} = f(t) = f(\mathbf{t}(s))$ =$g(s)$ se concluye que $B_g(\bar{t}) = A_f(\bar{t})$ y $r_{B_g}(g(s)) = r_{A_f}(f(\mathbf{t}(s))$, por tanto:

$$\zeta_B(s) = \sqrt{|r_{B_g}(g(s))|}\frac{dg}{ds}(s) = \sqrt{|r_{A_f}(f(t))|}\frac{df}{dt}(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \zeta_A(\mathbf{t}(s))\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

y se verifica así la condición (2) Se denomina a $d\sigma$, *elemento de arco de Möbius.* Si $A = A(t)$, está definida para $a \leq t \leq b$ el arco de Möbius de

A es

$$\mathcal{L}(A) = \int_a^b d\sigma_A = \int_a^b \sqrt{\varepsilon H_1^A} dt$$

y define un invariante intrínseco de Möbius (escalar) (véase epígrafe 2.7), es decir $\mathcal{L}(A)$ no depende de la parametrización, y $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ si A y B son Möbius equivalentes.

3.9 Parametrización por el arco de Möbius.

Fijado un origen a en el intervalo del parámetro t de la curva $A = A(t)$, y supuesto que $H_1^A = H_1(t) \neq 0 \ \forall t$, denotamos brevemente

$$\zeta = \sqrt{\varepsilon H_1}$$

así tenemos $d\sigma = \zeta dt$, y la igualdad

$$\sigma = \sigma(t) = \int_a^t d\sigma = \int_a^t \zeta dt$$

define un cambio de parámetro. De hecho si $A = A(t)$ es ecuación normalizada verificando

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + irA = 0$$

entonces t es parámetro de Möbius, y

$$\sigma = \sigma(t) = \int_a^t \sqrt{\varepsilon r} dt, \ \zeta = \varepsilon r(t) \neq 0, \ \forall t$$

el parámetro arco de Möbius $\sigma = \sigma(t)$ es así un invariante geométrico de Möbius, unívocamente determinado salvo constantes aditivas.

Si $A = A(t)$ está parametrizada por el arco de Möbius (PPAM), $t = \sigma$, y por la igualdad (24) $d\sigma = \sqrt{\varepsilon H_1} dt$, el invariante H_1 de Möbius vale ahora $H_1 = \varepsilon$.

3.10 Curvatura de Möbius.

Elegido $\sigma = \sigma(t) = \int_a^t d\sigma$ el parámetro longitud de arco de Möbius para $A = A(t)$, podemos tomar ahora $\lambda = \lambda(t)$, verificando la ecuación (15) (y determinada salvo constante multiplicativa no nula).

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta'}{\zeta} + p\right)$$

para conseguir que la curva $A_0 = \lambda(\sigma)A(\sigma)$ satisfaga una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2 A_0}{d\sigma^2} - \rho A_0 = 0 \tag{25}$$

como en estas circunstancias es $H_1 = \varepsilon$, particularizando la fórmula (22) con $p = 0$, $q = \rho$, queda $H_1 = \mathrm{Im}(4\rho) = \varepsilon$, y llamando

$$\nu = \varepsilon\,\mathrm{Re}(\rho)$$

queda

$$\rho = \varepsilon\left(\nu + \frac{1}{4}i\right) \tag{26}$$

Observese que el invariante H definido en 23 admite la expresión

$$H = \varepsilon\,(4\nu + i)$$

La función $\nu = \nu(\sigma)$ es un invariante (geométrico) proyectivo que denominamos *curvatura de Möbius,* y solo depende de la clase de Möbius de la curva. Si $\hat{t} = \hat{t}(\sigma)$ es el parámetro de Möbius, entonces habrá de verificar una ecuación diferencial como la (17) que en este caso queda:

$$\{\hat{t}\}_\sigma = \varepsilon\nu$$

La expresión explícita de ν en una parametrización $A = A(t)$ arbitraria es:

$$\nu = \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{H_0}{H_1} - \frac{5}{4}\frac{H_1'^2}{H_1^3}\right) \tag{27}$$

3.11 La referencia movil de Möbius-Frenet.

Así pues si $A = A(\sigma)$ curva $\mathbb{C}^2$-plana parametrizada por el arco de Möbius, hay por tanto una única referencia movil a lo largo de la curva, (A_0, A_1) (determinada salvo una constante multiplicativa) de forma que $A_0 = \lambda A(\sigma)$ con $\lambda = \lambda(\sigma)$ función diferenciable, y verifican las siguientes ecuaciones (de Frenet):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dA_0}{d\sigma} = A_1 \\ \dfrac{dA_1}{d\sigma} = \varepsilon \left(\nu + \dfrac{i}{4} \right) A_0 \end{array} \right. \tag{28}$$

3.12 Clasificación de Möbius de las curvas.

Si $A = A(t)$, es una curva $\mathbb{C}^2$-plana, la función $\nu_A = \nu_A(t)$ denota su curvatura de Möbius. Esta función ν_A solo depende de la curva proyectiva $[A]$, y más exactamente, de la clase de Möbius de la curva, según se vió en el apartado 3.10. Es decir, si $A = A(t)$, y $B = B(t)$ son Möbius equivalentes, entonces $\nu_A(t) = \nu_B(t)\ \forall t$. Así la función curvatura de Möbius, es un invariante geométrico proyectivo de las curvas planas. Se trata de ver que este es un invariante completo, es decir:

3.12.1 Teorema

Dada una función diferenciable arbitraria $\nu = \nu(\sigma)$, un signo $\varepsilon = \pm 1$, una referencia $(C_0; C_1)$, y un valor concreto del parámetro $\sigma = a$, existe una curva $\mathbb{C}^2$-plana (determinada salvo constante multiplicativa) $A = A(\sigma)$ PPAM con curvatura $\nu_A = \nu$, y signo ε, cuya referencia de Frenet A_0, A_1 verifica:

$$A_0(a) = C_0, \ A_1(a) = C_1$$

En particular, si $A = A(\sigma)$, $B = B(\sigma)$ son curvas parametrizadas por el arco de Möbius (PPAM) que tienen la misma función de curvatura proyectiva $\nu(\sigma) = \nu_A(\sigma) = \nu_B(\sigma)$ y el mismo signo, entonces definen curvas Möbius equivalentes

Demostración:

Si $\nu = \nu(\sigma)$ $0 \leq \sigma \leq L$ es una función diferenciable, planteamos la búsqueda de $A = A_0$, A_1, verificando las ecuaciones de Frenet (28). Escribiendo estas ecuaciones tomando $A = A_0 = (X_1, X_2)$, $A_1 = (X_3, X_4)$, queda un sistema de la forma:

$$\begin{pmatrix} dX_1/d\sigma \\ \vdots \\ dX_4/d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{41} & \cdots & \varphi_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_4 \end{pmatrix} \tag{29}$$

donde $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(\sigma)$ son funciones diferenciables. Por tanto, fijadas condiciones iniciales en $\sigma = a$, C_0, C_1, queda determinada una única solución $X_j = X_j(\sigma)$ con $A_\alpha(a) = C_a$ $\alpha = 0, 1, 2$. que verifica las ecuaciones de Frenet (28). Así $A = A_0(\sigma)$ está parametrizada por el arco de Möbius (PPAM), y tiene por curvatura de Möbius la función $\nu = \nu(\sigma)$ dada.

Supóngase ahora que $A = A(\sigma)$, $B = B(\sigma)$ son curvas PPAM que tienen la misma función de curvatura proyectiva $\nu(\sigma) = \nu_A(\sigma) = \nu_B(\sigma)$ $0 \leq \sigma \leq L$. Podemos suponer que $A = A_0$, $B = B_0$ son los primeros vectores de las correspondientes referencias de Frenet. Apliquemos a $A = A(\sigma)$ la transformación lineal que lleva la referencia $(A_0(0), A_1(0))$ a $(B_0(0), B_1(0))$. Se obtiene así una curva $\tilde{A} = \tilde{A}(\sigma)$ Möebius equivalente, y $(\tilde{A}_0(0), \tilde{A}_1(0)) = (B_0(0), B_1(0))$ satisfaciendo identicas ecuaciones de Frenet. Por el teorema de unicidad de soluciones para un sistema como (29) se concluye que $\tilde{A} = B$, que es proyectivamente equivalente a A.

3.12.2 Corolario

Dos curvas C^2-planas $A = A(t)$, $B = B(t)$ tienen la misma curvatura de Möbius $\nu = \nu(t)$, (ver fórmula (27)), entonces son Möbius equivalentes, si y solo si se verifica:

$$\frac{d\sigma_A}{dt} = \frac{d\sigma_B}{dt}$$

donde σ_A, y σ_B son los parametros arco de Möbius correspondientes. Esta igualdad, equivale (ver (2)) a

$$|(H_A)_1| = |(H_B)_1|$$

En virtud de las fórmulas (27) y (2) se concluye entonces

Dos curvas C^2-planas $A = A(t)$, $B = B(t)$ son son Möbius equivalentes si y solo si

$$H_A = H_B$$

3.12.3 Epílogo

Vamos a reflexionar sobre el significado de referencia referencia móvil (ver epígrafe 2.10) y sistema referencia (ver epígrafe 2.9) en la geometría de Klein del plano Möbius.

Una referencia en el punto $[C] = (c_0 : c_1)$ es una transformación de Möbius $[M]$ (como la del epígrafe 3.2 definida por las fórmulas (5)) que transforma el punto base $\infty = (1 : 0)$ en $[C]$. y viene determinada por un vector $D = (d_0, d_1)$ con la condición de que (C, D) sea base de $\mathbb{C}^2$.Naturalmente $(\lambda C, \lambda D)$ determinan la misma referencia que denotamos por $[C, D]$.

Usando (25) y (26) se ve que una curva $A_0 = A_0(\sigma)$ PPA con $A_0(0) = (1, 0)$ con derivada $A_0'(0) = (d_0, d_1)$ verifica $A_0''(0) = (\varepsilon\,(\nu + i/4)\,, 0)$ de forma que $[A_0]^{(2)}\,(0)$ se identifica con $(d_0, d_1, \nu, \varepsilon)$

$$R_\infty^{(2)}\,[d\sigma] = \{(d_0, d_1, \nu, \varepsilon) : d_0, d_1 \in \mathbb{C},\ d_1 \neq 0, \nu \in \mathbb{R},\, \varepsilon = \pm 1\}$$

El grupo $\mathcal{H}$ de transformaciones de Möbius que deja fijo el punto $\infty = (1 : 0)$ se identifica entonces con

$$\mathcal{H} = \{(d_0, d_1) : d_0, d_1 \in \mathbb{C},\ d_1 \neq 0\}$$

y por ser la *curvatura* ν invariante de Möbius, se concluye que

$$\mathcal{H}\backslash R_\infty^{(2)}\,[d\sigma] = \{(\nu, \varepsilon) : \nu \in \mathbb{R},\, \varepsilon = \pm 1\}$$

y el sistema de referencia (en el sentido del epígrafe 2.9) es

$$\mathcal{R} : \mathcal{H}\backslash R_\infty^{(2)}\,[d\sigma] \to R_\infty^{(2)}\,[d\sigma] \quad (\nu, \varepsilon) \to (0, 1, \nu, \varepsilon)\,.$$

A partir de aquí, no es dificil deducir que la referencia de Frenet calculada en el epígrafe 3.11, es la que se obtiene aplicando el procedimiento general explicado en el epígrafe 2.11, y las ecuaciones (28) se corresponden con las del epígrafe 2.12.

Referencias

[1] Elie Cartan. *La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géometrié Différentiell traitée par la Métode du Repére Mobile.* Gauthiers-Villars, 1937.

[2] Elie Cartan. *Le ons sur la Théorie des Espaces á Connection Projective.* Gauthiers-Villars, 1937.

[3] O. Faugeras. *Cartan's moving frame methods and its applications to the geometry and evolution of curves in the Euclidean, affine and Projective planes.* INRIA TR-2053, 1993.

[4] Heinrich Guggenheimer. *Differential Geometry.* Dover Publications, 1977.

[5] E. Hille. *Lectures in ordinary differential equations.* Addison-Wesley, 1969.

[6] S. Kobayashi and K.Ñomizu. *Foundations of Differential Geometry. (Vol 1).* Interscience Publishers, 1963.

[7] R.W.Sharpe. *Differential Geometry. Cartan's Generalitation of Klein's Erlangen Program.* Springer, 1996.

[8] E. J. Wilczinsky. *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces.* Leipzig, Teubner, 1906.