LECCIÓN 1

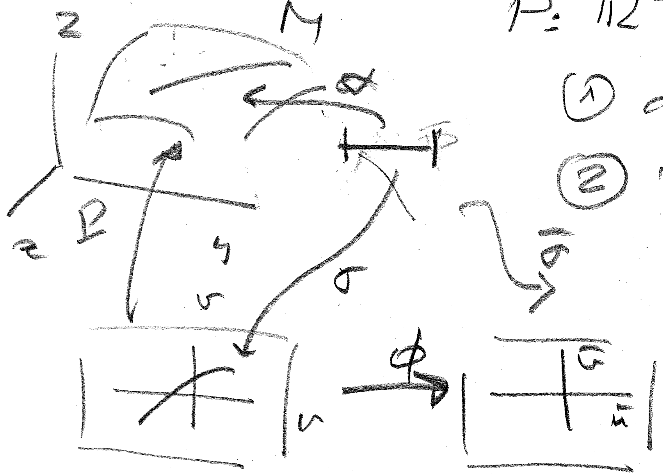
INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA

(local)

(M, g)

Sesion. 1. (1-A)

(1) Recordemos la definición de superficie Parametrizada



$P: \mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{U} \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3$

(1) diferenciable, homeomorfismo

(2) $\text{rg}\, DP = 2$

$P: \begin{cases} x = x(u,v) = P_1(u,v) \\ y = y(u,v) = P_2(u,v) \\ z = z(u,v) = P_3(u,v) \end{cases}$

$DP = (P_u, P_v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$

$\alpha: I \to M$ diferenciable, $I = [a,b]$ entonces

$\alpha(t) = P(u(t), v(t)) = P \circ \sigma(t)$

$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle}\, dt$

$\begin{cases} E = \langle P_u, P_u \rangle \\ F = \langle P_u, P_v \rangle \\ G = \langle P_v, P_v \rangle \end{cases}$

$\alpha'(t) = P_u u'(t) + P_v v'(t)$ con lo que

$\langle \alpha', \alpha' \rangle = (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = DP^t\, DP$

así tenemos $L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{\sigma} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}\, dt \quad (*)$

Así podemos calcular longitudes de curvas en M utilizando la matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ mediante la fórmula $(*)$

(1-B)

② Supongamos que $\overline{P}: \mathbb{R}^2 \supseteq_{ab} \overline{U} \to M \subset \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de M

entonces hay un difeomorfismo de cambio de coordenadas

$\phi: \begin{cases} \overline{u} = \overline{u}(u,v) \\ \overline{v} = \overline{v}(u,v) \end{cases}$ de forma que se verifica la identidad

$\overline{P}(\overline{u}(u,v), \overline{v}(u,v)) = P(u,v)$ y por la regla de la cadena

se tiene $DP| = D\overline{P} \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} \Rightarrow \begin{pmatrix} E, & F \\ F, & G \end{pmatrix} = \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}^t \begin{pmatrix} \overline{E} & \overline{F} \\ \overline{F}, & \overline{G} \end{pmatrix} \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}$

y si $\alpha = \overline{P} \circ \overline{\sigma}(t) = \overline{P}(\overline{u}(t), \overline{v}(t))$ tenemos

$\overline{\sigma} = \phi \circ \sigma$ y $L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\overline{u}', \overline{v}') \begin{pmatrix} \overline{E}, & \overline{F} \\ \overline{F}, & \overline{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u}' \\ \overline{v}' \end{pmatrix}}\, dt$

Hacemos notar que $\begin{pmatrix} E, & F \\ F, & G \end{pmatrix}\Big|_{(u,v)}$ es la matriz de la forma

bilineal $\langle\,,\rangle$ del producto escalar en $\mathbb{R}^3$ restringida

a $T_{P(u,v)}M = \operatorname{span}(P_u, P_v) \subset \mathbb{R}^3$

$T_{P(u,v)}M \times T_{P(u,v)}M \xrightarrow{I} \mathbb{R}$ I. forma fundamental

Todo lo anterior se puede generalizar a dimensión mayor cualquiera **1-C**

$P: \mathbb{R}^m \underset{\text{ab}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^n$ define una variedad euclídea parametrizada $M = P(U)$

si $P: \begin{cases} x_1 = P_1(u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ x_n = P_n(u_1, \dots, u_m) \end{cases}$ | $P: U \to M$ es homeomorfismo, $\operatorname{rg} DP = m$ $\quad DP = (P_{u_1}, \dots, P_{u_m})$

diferenciable

si $\alpha: I \to M \subset \mathbb{R}^n$ diferenciable $\Rightarrow \alpha(t) = P \circ \sigma(t)$ $\quad \sigma: \begin{cases} u_1 = u_1(t) \\ \vdots \\ u_m = u_m(t) \end{cases}$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_i \frac{\partial P}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dt}; \quad \left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = \sum_i \frac{du_i}{dt} g_{ij} \frac{du_j}{dt} \quad \text{y así}$$

$$L(\alpha) = \int \sqrt{\sum_i g_{ij} \frac{du_i}{dt} \cdot \frac{du_j}{dt}}\, dt \qquad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u_i}, \frac{\partial P}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial u_i} \frac{\partial x^k}{\partial u_j}$$

En un cambio parametrización $\overline{P}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) = P(u_1, \dots, u_m)$ es $\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{u}_1(u_1, \dots, u_m) \\ \bar{u}_m = \bar{u}_m(u_1, \dots, u_m) \end{cases}$

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial \bar{u}_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i} \Rightarrow (g_{ij}) = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_j}\right)^t (\bar{g}_{ij}) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_j}\right).$$

si $\alpha = P(\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_m(t))$ tenemos $L(\alpha) = \int \sqrt{\sum_i \bar{g}_{ij} \frac{d\bar{u}_i}{dt} \cdot \frac{d\bar{u}_j}{dt}}\, dt$

$$T_{P(u,v)} M = \operatorname{Span}(P_{u_1}, \dots, P_{u_m}) = \left\{ DP \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} : \xi_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$g_M(\xi, \eta) = (\xi_1, \dots, \xi_m) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & & \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

$I: T_{P(u,v)} M \times T_{P(u,v)} M \to \mathbb{R}$.

I forma fundamental.

DEFINICIÓN:

Una estructura riemanniana sobre un abierto M de $\mathbb{R}^n$ es un operador g que asigna a cada $x \in M$ un producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\xi,\eta) \to g_x(\xi,\eta) = \langle \xi,\eta\rangle_x$ de forma que $\forall\, \xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ la aplicación $g(\xi,\eta)=\langle\xi,\eta\rangle : M \ni x \to g_x(\xi,\eta) = \langle \xi,\eta\rangle_x \in \mathbb{R}$ es diferenciable.

Por tanto si $(\partial_1 \dots \partial_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ g viene determinada por $g_{ij} = g_{ji} = g(\partial_i,\partial_j) \in \mathcal{F}(M)$ de forma que

$$g(\xi,\eta) = (\xi^1 \dots \xi^n)(g_{ij})\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots \\ \eta^n\end{pmatrix} = \sum g_{ij}\,\xi^i\eta^j = \xi^t (g_{ij})\,\eta$$

y (g_{ij}) es una matriz simétrica definida positiva.

Si $\alpha(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t))$ es una curva en M $t\in I \subset_{int} \mathbb{R}$ denotamos $\langle\alpha',\alpha'\rangle : I \to \mathbb{R}$ con $\langle\alpha',\alpha'\rangle|_t = \langle\alpha'(t),\alpha'(t)\rangle_{\alpha(t)}$

y $|\alpha'| = \sqrt{\langle\alpha',\alpha'\rangle}$ se define entonces

$$L(\alpha) = \int_I |\alpha'|\,dt = \int_I \sqrt{\sum g_{ij}\,(x^i)'(x^j)'}$$

y se llama longitud de la curva α.

Se dice que (M,g) es una variedad riemanniana coordenada ó brevemente VRC.

Sean (M, g) $(\overline{M}, \overline{g})$ VRC de la misma dimensión. (1.F)

Un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ se llama isometría, si preserva las longitudes de las curvas. Es decir $\forall \alpha : I \to M$ curva diferenciable en M se tiene

$L_{\overline{g}}(\phi \circ \alpha) = L_g(\alpha)$.

Supuesto $\phi : \begin{cases} \overline{x}^1 = \overline{x}^1(x^1 \ldots x^n) \\ \vdots \\ \overline{x}^n = \overline{x}^n(x^1, \ldots x^n) \end{cases}$ se tiene el siguiente.

TEOREMA. Son equivalentes

(1) ϕ es isometría

(2) $\forall p \in M$ $D\phi|_p : (\mathbb{R}^n, g_p) \to (\mathbb{R}^n, \overline{g}_{\phi(p)})$ es isometría lineal

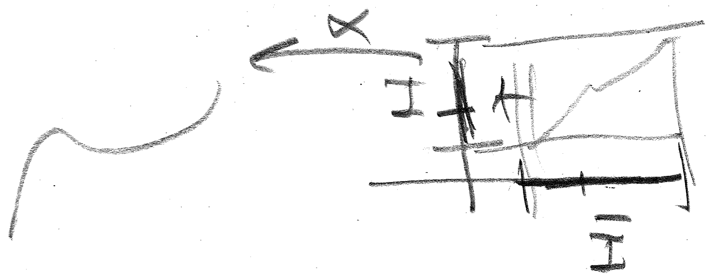
(3) $$(g_{ij}) = \frac{\partial(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)}{\partial(x^1 \ldots x^n)}^t (\overline{g}_{ij}) \frac{\partial(\overline{x}^1 \ldots \overline{x}^n)}{\partial(x^1 \ldots x^n)}$$

$$g_{ij} = \overline{g}_{kh} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^j}$$

PROPOSICION. Sea (M, s) V.R.C (1.E)

si $\alpha : I \to M$ es una curva regular, entonces $L(\alpha)$ no depende de la parametrización

es decir si $\bar{t} = \bar{t}(t)$ es un cambio de parámetro $\frac{d\bar{t}}{dt} > 0 \quad t = t(\bar{t})$



entonces

si $\bar{\alpha}(\bar{t}) = \alpha(t(\bar{t}))$

$\alpha(t) = \bar{\alpha}(\bar{t}(t))$

tenemos

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_t = \left.\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{t}}\right|_{\bar{t}(t)} \left.\frac{d\bar{t}}{dt}\right|_t$$

así

$$L(\bar{\alpha}) = \int_{\bar{I}} \left| \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{t}} \right| d\bar{t} \underset{\bar{t} = \bar{t}(t)}{=} \int_I \left| \left.\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{t}}\right|_{\bar{t}(t)} \right| \frac{d\bar{t}}{dt} \, dt =$$

$$= \int_I \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = L(\alpha)$$

$(1) \Rightarrow (2)$. Fijemos $p \in M$. Entonces $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ 1-G

consideremos la curva $\alpha_\xi(t) = p + t\xi$ se tiene

$$L(\alpha_\xi|_{[0,t]}) = \int_0^t |\alpha'| \, dt = L(\phi \circ \alpha)|_{[0,t]} = \int_0^t |\phi \circ \alpha|' \, dt$$

por tanto $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(\alpha) = |\alpha'(0)|_g = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(\phi \circ \alpha) = |(\phi \circ \alpha)'(0)|_{\bar{g}}$

Pero: $(\phi \circ \alpha)'(0) = D\phi|_p(\xi)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{D\phi|_p} \mathbb{R}^n$$

$$\alpha'(0) = \xi \longrightarrow (D\phi|_p)\xi = (\phi \circ \alpha)'(0)$$

por tanto $|D\phi|_p(\xi)| = |\xi| \ \forall \xi \Longrightarrow D\phi|_p : (\mathbb{R}^n, g_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{g}_{\phi(p)})$ es isometría.

$(2) \Rightarrow (3)$ Algebra lineal

$$\bar{g}(D\phi|_p \xi, D\phi|_p \eta) = \xi^t \underbrace{D\phi|_p^t (\bar{g}_{ij}) D\phi|_p}_{(g_{ij})} \eta = g_p(\xi, \eta)$$

(3) $\Rightarrow$ (1) La mappa $\phi \circ \alpha = \bar{\alpha}$ è $\bar{\alpha}$: $\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n = \bar{x}_n(t) \end{cases}$ (1-#)

è ancora differenziabile e $\bar{x}_i(t) = \bar{x}_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$ per tanto

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$ e si tiene per la regola della catena

$$\begin{pmatrix} d\bar{x}_1/dt \\ \vdots \\ d\bar{x}_n/dt \end{pmatrix} = \frac{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$ così

$$\left(\frac{d\bar{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\bar{x}_n}{dt}\right)(\bar{g}_{ij}) \begin{pmatrix} d\bar{x}_1/dt \\ \vdots \\ d\bar{x}_n/dt \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right) \frac{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}^t (\bar{g}_{ij}) \frac{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)(g_{ij}) \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix}.$$

per tanto $\int_I \sqrt{g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt = \int_I \sqrt{\bar{g}_{ij} \frac{d\bar{x}_i}{dt} \frac{d\bar{x}_j}{dt}}\, dt$

$\Rightarrow L_{(g_{ij})}(\alpha) = L_{(\bar{g}_{ij})}(\bar{\alpha})$

Sistemas de Partículas   Ejemplo 1.   1-I

Un sistema de partículas consiste en una colección de N partículas con masas $m_1 \ldots m_N$ que pueden desplazarse por el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ formado $n = 3N$ los números $(x^1, \ldots x^n)$ determinan la posición del sistema donde $(x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i})$ denota las coordenadas de la partícula m_i

$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x^1, \ldots x^n, \dot{x}^1, \ldots \dot{x}^n)$ 'denote el espacio de estados

$(\dot{x}^{3i-2}, \dot{x}^{3i-1}, \dot{x}^{3i})$ denota la velocidad instantánea de la partícula m_i. de forma que su energía cinética es

$$\frac{1}{2} m_i \left((\dot{x}^{3i-2})^2 + (\dot{x}^{3i-1})^2 + (\dot{x}^{3i})^2 \right)$$

conviniendo en denotar $M_{3i-2} = M_{3i-1} = M_{3i} = m_i$ tenemos

$$K = \frac{1}{2} \sum M_i (\dot{x}^i)^2 : T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

y se define $g_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \xi^i \eta^i$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que el sistema esta sometido a ligaduras holonomas esto significa que está constreñido a "moverse" en una variedad euclídea $M^m \subset \mathbb{R}^n$, con una parametrización. 1-J

$$P: \begin{cases} x^1 = P^1(q^1, \dots, q^m) \\ \vdots \\ x^n = P^n(q^1, \dots, q^m) \end{cases} \quad \text{entonces} \quad T_{P(q)} M = L\left(\frac{\partial P}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q^m}\right)\Big|_q$$

y en $\mathbb{R}^n$ tenemos la métrica

$$\langle \xi, \eta \rangle = (\xi^1 \dots \xi^n) \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = (*)$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = DP\big|_q \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \sum \frac{\partial P}{\partial q^i} \lambda_i$$

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = DP\big|_q \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \sum \frac{\partial P}{\partial q^j} \mu_j$$

$$(*) = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial P}{\partial q^i}, \frac{\partial P}{\partial q^j} \right\rangle = \sum_k M_k \frac{\partial P_k}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q^j}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q^i} = \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial q^i \\ \vdots \\ \partial x^n / \partial q^i \end{pmatrix}$$