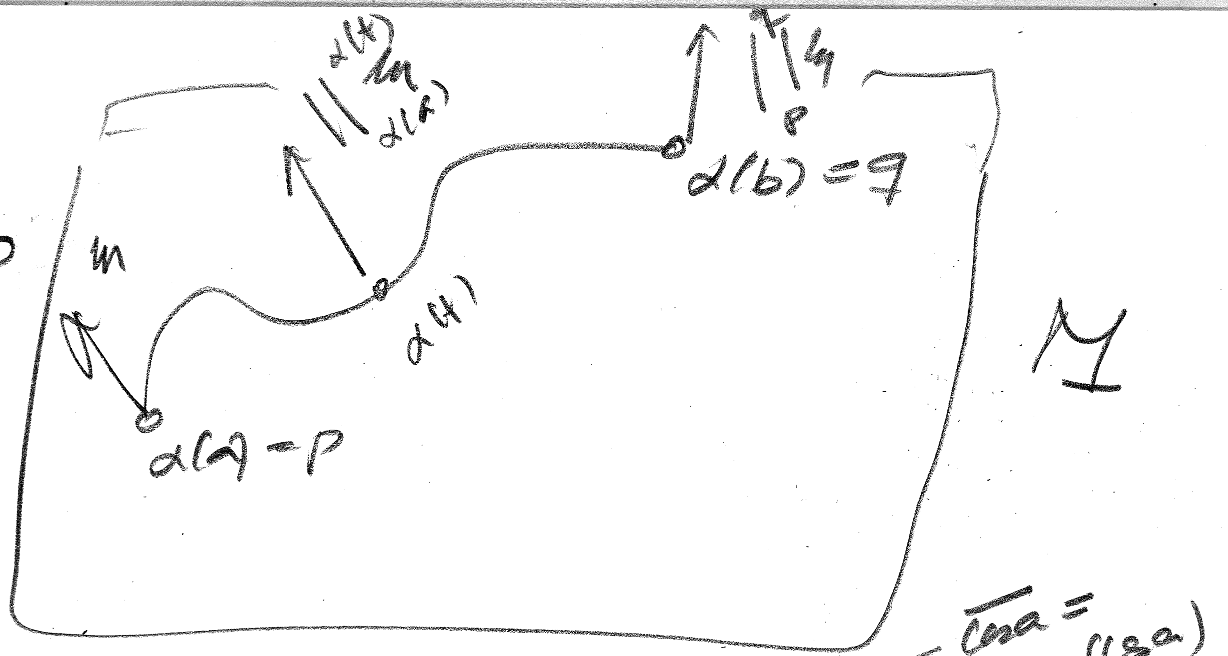
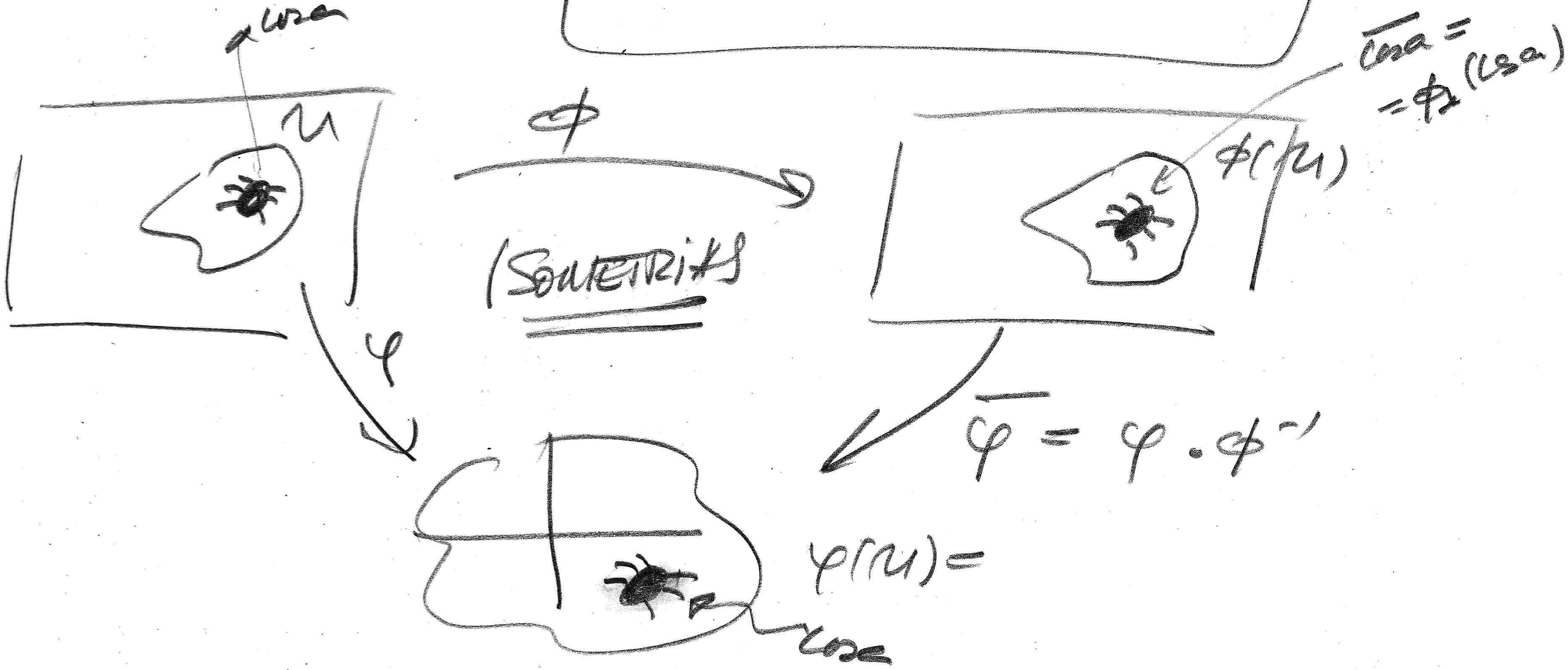
Lección 10

Transporte paralelo





TRANSPORTE PARALELO

Sea $M = M^n$ variedad diferenciable dotada de una conexión lineal $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Simétrica

Si $\alpha : I \to M$ es una curva diferenciable, se define

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_\alpha(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}_\alpha(M) \\ A & \longrightarrow & \frac{\nabla A}{dt} \end{array} \qquad \left.\frac{\nabla A}{dt}\right|_t = \nabla_{\alpha'(t)} A$$

Supuesto que $\alpha : I \to U \underset{\text{as}}{\subseteq} M$ siendo $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ carta de M, tenemos

$A = \sum A^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_\alpha$ donde $A^i = A^i(t)$ son funciones $A^i : I \to \mathbb{R}$ diferenciables y

$$\frac{\nabla A}{dt} = \left\{ \frac{dA^k}{dt} + A^i \frac{dx^j}{dt} \Gamma^k_{ij}\circ\alpha \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_\alpha$$

Las propiedades formales de este operador $\frac{\nabla}{dt}$ son las siguientes

$\forall A, B \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ $f: I \to \mathbb{R}$ diferenciable (10-B)

(1) $\frac{\nabla(A+B)}{dt} = \frac{\nabla A}{dt} + \frac{\nabla B}{dt}$ (2) $\frac{\nabla(fA)}{dt} = \frac{df}{dt} A + f \frac{\nabla A}{dt}$.

Un campo $A \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ se llama paralelo si $\frac{\nabla A}{dt} = 0$. Denotamos $\mathfrak{X}_\alpha^{\parallel}(M) = \{A \in \mathfrak{X}_\alpha(M) \mid \frac{\nabla A}{dt} = 0\}$ entonces $\mathfrak{X}_\alpha^{\parallel}(M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

Supuesto que $\alpha: I \to M$. $A = \sum A^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ averigüemos que ecuación diferencial debe verificar las componentes $A^k = A^k(t)$ para que $\frac{\nabla A}{dt} = 0$

serán $\frac{dA^k}{dt} = -A^i \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k = A^i T_i^k$ donde

$T_i^k = -\frac{dx^j}{dt}(\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)$ y así tenemos

$$\begin{pmatrix} dA^1/dt \\ \vdots \\ dA^n/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 & \cdots & T_n^1 \\ \vdots & & \\ T_1^n & & T_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

por tanto $A^1, \dots A^n$ satisfacen un sistema (10-C

de ecuaciones diferenciales lineales:

$$(*) \quad \frac{dX}{dt} = \Gamma X; \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}, \quad \Gamma = (\Gamma^i_j)$$

Aplicando la teoría de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación $(*)$ se concluye que fijado $t_0 \in I$ $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ existe una única $X_\xi = X_\xi(t)$ con $\frac{dX_\xi}{dt} = \Gamma X_\xi$ $X_\xi(t_0) = \xi$.

por otra parte, la aplicación

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \to X_\xi \in \text{Soluciones}\left(\frac{dX}{dt} = \Gamma X\right)$$

resulta ser un isomorfismo lineal

En consecuencia:

TEOREMA: Fijado $t_0 \in I$ si, $\xi \in T_{\alpha(t_0)} M$ existe un único $A_\xi \in \mathfrak{X}^{\parallel}_\alpha(M)$ con $A(t_0) = \xi$ y la aplicación $T_{\alpha(t_0)} M \ni \xi \to A_\xi = \|_{t_0} \xi \in \mathfrak{X}^{\parallel}_\alpha(M)$ es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

Definición:

si $\alpha : [a,b] \to M$ diferenciable, entonces la aplicación $T_{\alpha(a)} M \ni \xi \to A_{\xi}(b) = \|_a^{\alpha} \xi \in T_{\alpha(b)} M$ se denomina transporte paralelo de vectores de $\alpha(a) = p$ a $\alpha(b) = q$ mediante la curva α.

y es un isomorfismo lineal

En el caso de que ∇ sea la conexión de Levi-Civita de (M, g) se tiene además la propiedad

$$\frac{d\langle A, B\rangle}{dt} = \left\langle \frac{\nabla A}{dt}, B \right\rangle + \left\langle A, \frac{\nabla B}{dt} \right\rangle.$$

En particular si $A, B \in \mathfrak{X}^{\|}_{\alpha}(M)$ entonces

$$\frac{d\langle A, B\rangle}{dt} = 0 \Longrightarrow \langle A, B\rangle = cte$$

lo cual significa que el transporte

$$T_{\alpha(a)} M \ni \xi \to \|_a^{\alpha} \xi \in T_{\alpha(b)} M$$

define una isometría lineal

por último obsérvese que

$\gamma : I \to M$ geodésica $\Leftrightarrow \frac{\nabla \gamma'}{dt} = 0 \Leftrightarrow \gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma^{\parallel}(M)$

en particular $\langle \gamma', \gamma' \rangle = cte$, es decir γ está parametrizada necesariamente con el parámetro proporcional al arco.

Obsérvese por otra parte que si $A \in \mathfrak{X}_\gamma^{\parallel}(M)$ entonces $|A| = cte$ y $\cos(\measuredangle(\gamma', A)) = cte$

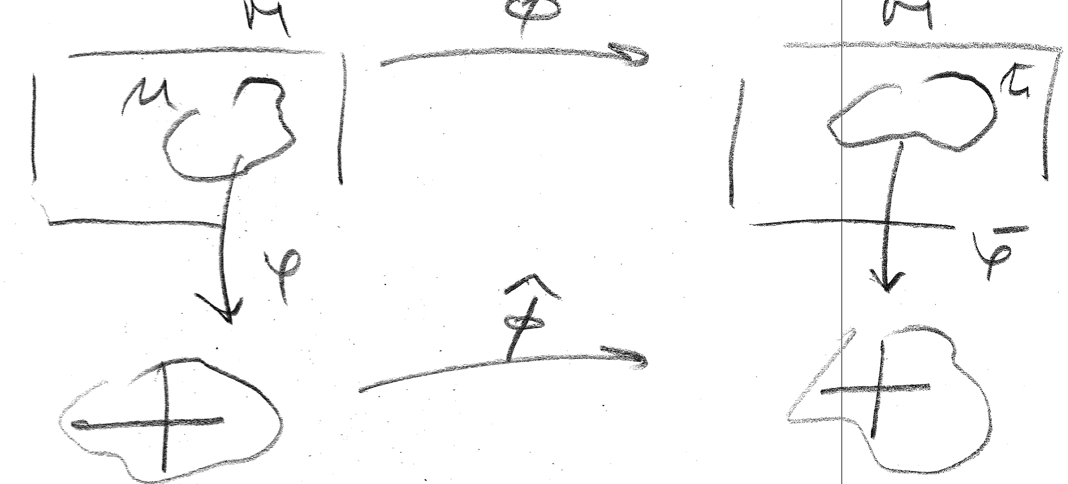
Hay otra propiedad del transporte paralelo que conviene remarcar y es que no depende de cómo está parametrizada la curva α que une los ptos p y q y es que si $t = \bar{t}(t)$ es cambio de parámetro

$$\frac{\nabla A}{d\bar{t}} = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{t}}$$

es decir $A = A(t) \in \mathfrak{X}_\alpha(M) \Leftrightarrow \frac{\nabla A}{dt} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\nabla A}{d\bar{t}} = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = A(\bar{t}) \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$

LAS ISOMETRIAS, REVISITADAS: Recordemos que una isometría $\phi:(M,g)\to(\bar{M},\bar{g})$ entre variedades riemannianas, viene definida por un difeomorfismo $\phi: M\to\bar{M}$ de forma que para cualquier representación local



$(x^1,\dots,x^n)$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \bar{U} \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\bar{\varphi} \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \bar{\varphi}(\bar{U}) \end{array}$$

$$\hat{\phi}:\begin{cases} \bar{x}^1=\hat{\phi}^1(x^1,\dots,x^n) \\ \vdots \\ \bar{x}^n=\hat{\phi}^n(x^1,\dots,x^n) \end{cases}$$

se tenga $\quad (g^{\varphi}_{ij}) = D\hat{\phi}^{t}\,(\bar{g}_{ij}\circ\varphi)\,D\hat{\phi}$

sentido formal

o también $\quad \bar{g}^{\bar{\varphi}} = \bar{g}_{ij}\,d\bar{x}^i d\bar{x}^j \rightsquigarrow (\bar{g}_{ij}\circ\phi)\,\dfrac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^h}\,dx^k dx^h$

$$\| $$

$$g_{kh}\,dx^k dx^h$$

es decir

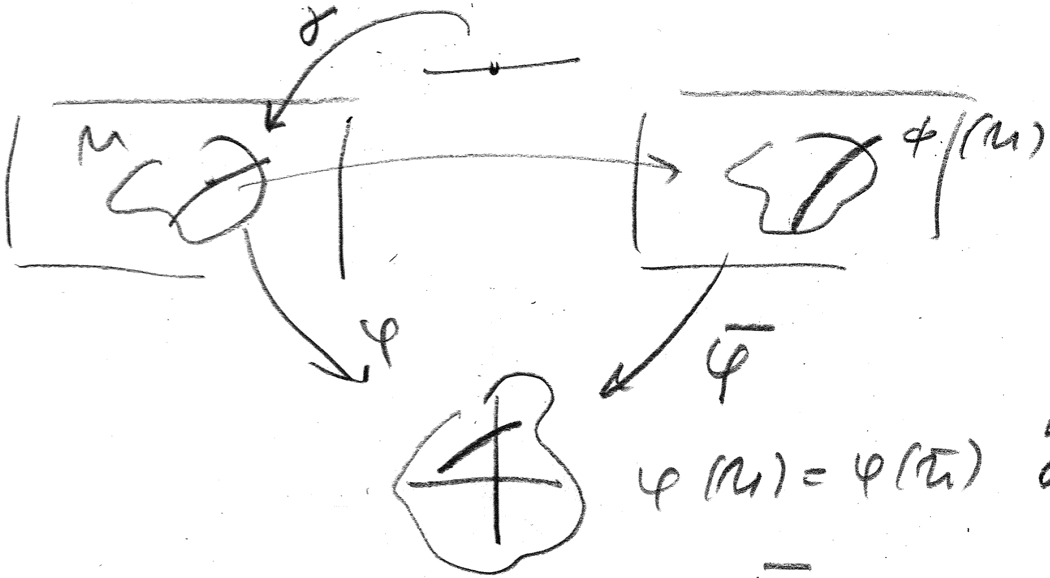
$\hat{\phi}:(\varphi(U),g^{\varphi})\to(\bar{\varphi}(\bar{U}),g^{\bar{\varphi}})$ es una isometría $\Longleftrightarrow$ preserva longitudes de curvas. $\Longrightarrow$ preserva distancia

$\xleftarrow{?}$

Si ϕ es isometría, hecho para ... tomamos (M, φ) carta en $\overline{M}$, entonces $\phi(M) \subseteq \overline{M}$ y podemos considerar

$\overline{\varphi} = \varphi \cdot \phi^{-1}$; $\phi = \overline{\varphi}^{-1} \cdot \varphi$

en este caso $\hat{\phi} = id$



$\varphi(M) = \overline{\varphi}(\overline{M})$ y entonces $g^{\varphi} = g^{\overline{\varphi}}$

Esto significa que $\Gamma_{ij}^{k} = \overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ y si $\gamma : I \to M$ es geodésica $\Longleftrightarrow$ $(\varphi \cdot \gamma)$ es $(g^{\varphi} = g^{\overline{\varphi}})$-geodésica $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\overline{\varphi}^{-1}(\varphi \cdot \gamma) = \phi \cdot \gamma$ es geodésica.

Este esquema de razonamiento puede aplicarse a cualquier planteamiento geométrico que depende de la métrica.

Por ejemplo.

Si $\sigma : I \longrightarrow \varphi(U) = \bar{\varphi}(\bar{U}) \overset{= W}{}$ es una curva, esta curva está representada $\alpha = \varphi^{-1} \circ \sigma : I \longrightarrow U$. y

$\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha : I \longrightarrow \phi(U)$.

tomando $A = \sum A^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}_\sigma(W)$ podemos calcular

$$\frac{\nabla A}{dt} = \left\{ \frac{dA^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} A^j \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}$$ y esta tiene una

"lectura" en U y otra en $\bar{U}$ ... etc.

Diríamos que la isometría preserva la derivada covariante a lo largo de curvas.... (¿?)

Recordemos: $\forall p \in M$ se define

$d\phi|_p : T_p M \longrightarrow T_{\phi(p)} \bar{M}$ .. $\alpha(t_0) = p$ entonces

$\alpha'(t_0) \longrightarrow (\phi \circ \alpha)'(t_0)$

en nuestro caso $\xi^i \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \xrightarrow{d\phi|_p} \xi^i \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right)_{\phi(p)}$

Tenemos el siguiente

TEOREMA

Sea $\phi : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ es isometría si y solo si $\phi : M \to \bar{M}$ es un difeomorfismo tal que $d\phi|_p : T_pM \to T_{\phi(p)}\bar{M}$ es isometría $\forall p$.

Además: Si ϕ es isometría entonces

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{\phi_* X} \phi_* Y$$

$$\phi_* R(X, Y)Z = R(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z$$

si $\alpha : I \to M$ es una curva $A \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ entonces

$\phi_* A \in \mathfrak{X}_{\phi \circ \alpha}(\bar{M})$ y

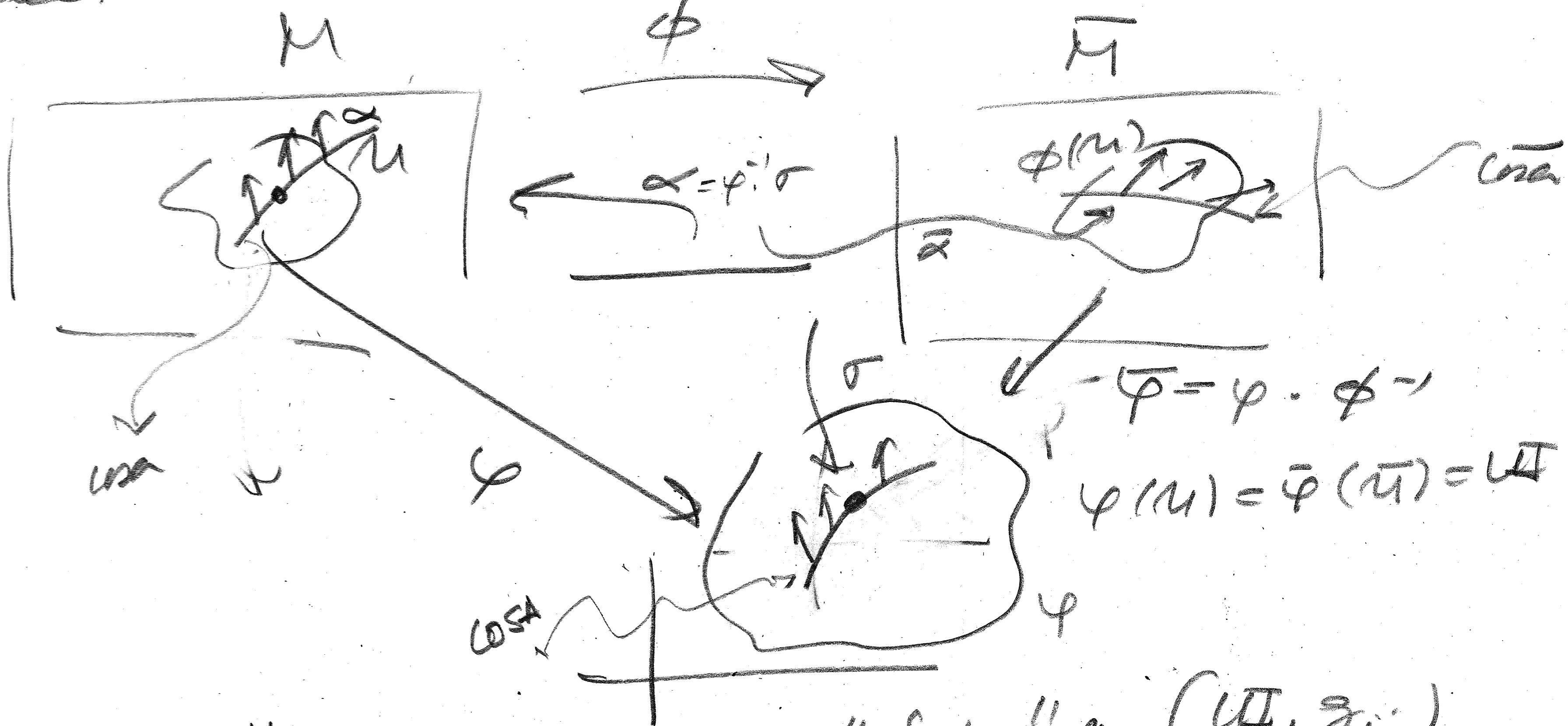
$$\phi_* \frac{\nabla A}{dt} = \frac{\nabla \phi_* A}{dt}$$

En particular ϕ transforma geodésicas en geodésicas

Nota $X \in \mathfrak{X}(M)$ $(\phi_* X)(\bar{p}) = d\phi|_{\phi^{-1}(\bar{p})} X(\phi^{-1}(\bar{p}))$; $\phi_* X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$

La demostración del teorema, se basa en la idea.

(10-J)



Cualquier "COSA" que llegamos "abajo" a $(u\pi, g_{ij})$ tiene una "subida" "cosa" a M y otra subida "$\overline{cosa}$" a $\phi(u)$. Entonces ϕ lleva cosa a $\overline{cosa}$...

y $\phi_*(cosa) = \overline{cosa}$ ....etc.