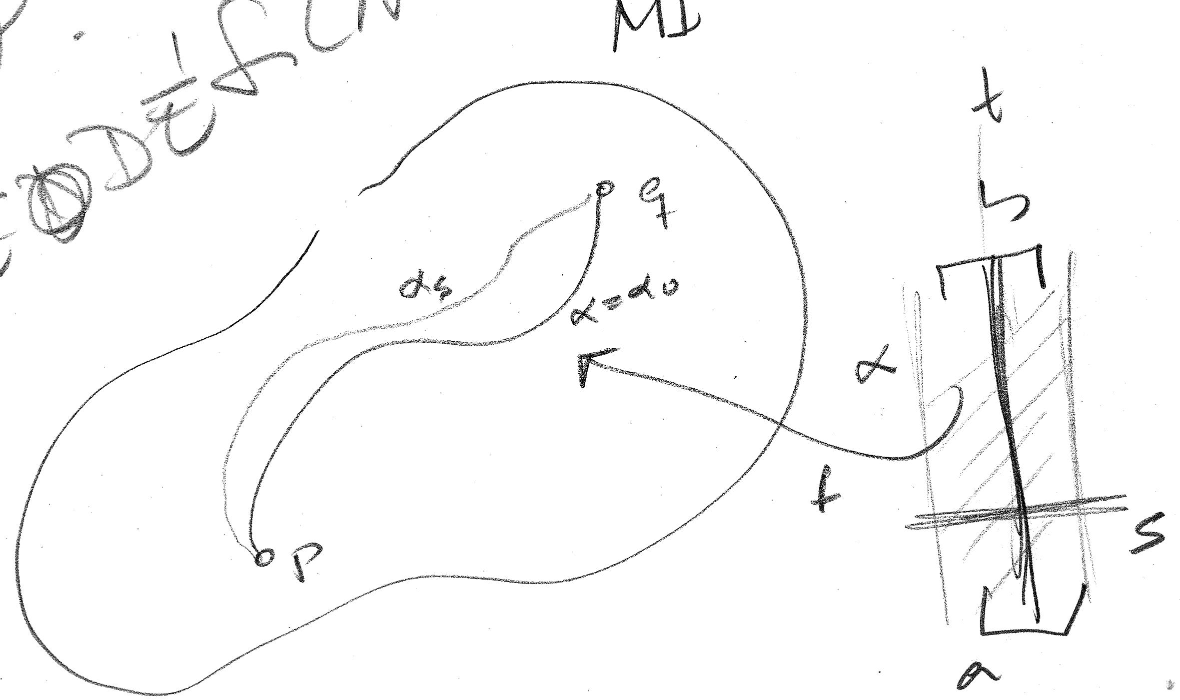
Lección 3

Calculo de variaciones: Geodésicas



$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0$$

CALCULO DE VARIACIONES

(3.A)

NOTACIONES PREVIAS

si $\mathbb{M} \underset{as}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, denotamos por $T\mathbb{M} = \mathbb{M} \times \mathbb{R}^n$

si $(p,\xi) \in T\mathbb{M}$, denotamos $(p,\xi) = \xi_p$ = vector $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ "apoyado"

en $p = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$. y $T_p\mathbb{M} = \{\xi_p \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$ es el espacio tangente

en p.

si $\alpha : J \to \mathbb{M}$ es una curva diferenciable, escribimos

identificamos $\alpha'(t)$ con $\alpha'(t)_{\alpha(t)}$.

de forma que si tomamos $(x^1 \ldots x^n)$ coordenadas en $\mathbb{M}$, las

coordenadas en $T\mathbb{M}$ son $(x^1, \ldots x^n, \dot{x}^1, \ldots \dot{x}^n)$ y

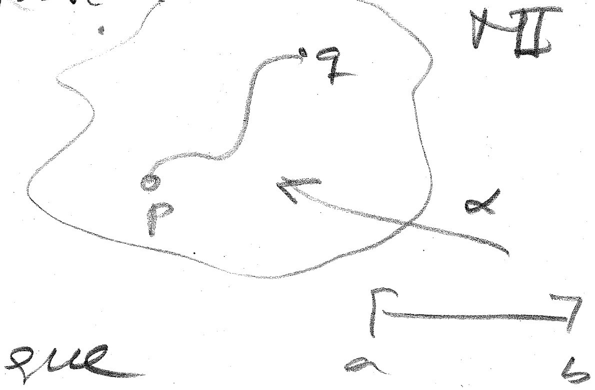
si $\alpha : \{x_i = x_i(t)\}$ entonces $\alpha' : \begin{cases} x^i = x^i(t) \\ \dot{x}^i = (x^i)'(t) = \dfrac{dx^i}{dt} \end{cases}$

si $(\mathbb{M}, g)$ es VRC entonces se entiende que

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = g_\alpha(\alpha', \alpha') = \sum g_{ij}(x^1(t), \ldots x^n(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

CALCULO DE VARIACIONES (Lagrangiano)

1. Sea $\mathbb{M}$ abierto de $\mathbb{R}^n$, y $L: T\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $\alpha:[a,b] \to \mathbb{M}$ es una curva diferenciable cualquiera, se denomina acción de L sobre α a



$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b L(\alpha'(t))\,dt$$

Estamos interesados en encontrar las curvas $f:[a,b] \to \mathbb{M}$ diferenciables que minimizan la acción, es decir

$$\mathcal{L}(f) = \min\{ L(\alpha) \mid \alpha \in \Omega(p,q)\}$$ en donde

hemos denotado a $\Omega(p,q)$ como conjunto de curvas dif. $\alpha:[a,b] \to \mathbb{M}$ que unen p y q, y $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$ (i.e. α regular)

El principio de mínima acción asegura que si $f(t) = (x_1(t), \ldots x_n(t))$ minimiza la acción entonces se verifica la ecuación (de Euler-Lagrange)

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad \text{para } \begin{cases} x_i = x_i(t) \\ \dot{x}_i = x_i'(t) \end{cases}$$

2. PUNTOS ESTACIONARIOS PARA $\mathcal{L}$. ($I = [a,b]$ $\quad I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\quad \varepsilon > 0$)

Una variación de $\alpha \in \Omega(p,q)$ viene definida por una aplicación diferenciable $f: I_\varepsilon \times I \to M$ $\quad f = f(s,t) = \alpha_s(t)$ de forma que $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_s \in \Omega(p,q)$ $\forall s$.

Se denomina a $V(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(0,t)}$ campo inicial de la variación. Obsérvese que como $f(s,a) = p$, $f(s,b) = q$ $\forall s$ se concluye que $V(a) = 0$, $V(b) = 0$.

La variación f de α induce una aplicación $f: I_\varepsilon \ni s \to \alpha_s \in \Omega(p,q)$, y la acción $\mathcal{L}$ da lugar a $\mathcal{L}_f : I_\varepsilon \ni s \to \mathcal{L}(\alpha_s) \in \mathbb{R}$ que es una aplicación diferenciable.

Se dice que α es un punto "estacionario" o singular para la acción $\mathcal{L}$ si $\left.\frac{d\mathcal{L}_f}{ds}\right|_{s=0} = 0$ $\forall$ variación f de α.

obviamente si α minimiza la acción, entonces la función $\mathcal{L}_f : I_\varepsilon \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo en $s=0$, para toda variación f de α, y por tanto α es estacionario para $\mathcal{L}$.

TEOREMA (Principio de mínima acción)

La curva $\alpha \in \Omega(p,q)$ con $\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ es stacionaria para $L = L(x^1, \dots x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ si y sólo si

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x^i}\right|_{\substack{x^i = x^i(t) \\ \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}}} - \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right|_{\substack{x^i = x^i(t) \\ \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}}} \right) = 0$$

o simbólicamente:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0$$

se conoce a esta ecuación como la ecuación de Euler-Lagrange.

Demostración. (3-E

Supongamos que $\alpha \in \Omega(p,q)$ es curva estacionaria para la acción $\mathcal{L}$ y sea $f = f(s,t) = \alpha_s(t)$ variación de α con extremos fijos $|s| < \varepsilon$ $t \in I$. entonces

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha_s) = \frac{d}{ds}\int_a^b L\left(\frac{d\alpha_s}{dt}\right)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} L\left(\frac{d\alpha_s}{dt}\right)dt.$$

pero $$\frac{\partial}{\partial s} L\left(\frac{d\alpha_s}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left\{L(x^1,\dots,x^n,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)\right\}_{\substack{x^i = x^i(s,t)\\ \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}(s,t)}} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial s} = (*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial s\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial s}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial x^i}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial s} \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha_s) = \int_a^b \left\{\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right\}\frac{\partial x^i}{\partial s}$$

ya que $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial s}\right) dt\Big|_{s=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial s}\right]_a^b = 0$ (3-7)

ya que $x^i(s,a) = p^i$ $\quad x^i(s,b) = q^i$ $\forall s$

pues $\alpha_s(a) = p$ $\quad \alpha_s(b) = q$ y $\displaystyle\frac{\partial x^i}{\partial s}\Big|_{(s,a)} = \frac{\partial x^i}{\partial s}\Big|_{(s,b)} = 0$

particularizando en $S=0$ queda

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(\alpha_s) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right\} X^i(t)$$

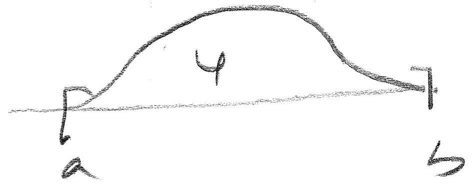
siendo $X^i(t) = \displaystyle\frac{\partial x^i}{\partial s}\Big|_{t=0}$ el campo inicial de la variación.

Así que si se verifica $\displaystyle\left.\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0\right\}_{i=1..n}$

entonces $\displaystyle\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(\alpha_s) = 0$ $\forall$ variación. de α.

Recíprocamente

Sea $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.



$\varphi(t) > 0 \quad a < t < b$
$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$

(3.6)

Tomamos

$$X^i(t) = \varphi(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)$$

y construimos una variación. $x^i(s,t) = x^i(t) + s X^i(t)$ de forma que $x^i(s,b) = x^i(b) = q^i$

$x^i(0,t) = \alpha^i(t) \quad x^i(s,a) = x^i(a) = p^i$

entonces si α es estacionaria para L. tenemos

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(\alpha_s) = \int_a^b \varphi(t) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^2 dt \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$$

tomamos $K = \frac{1}{2} g_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j$ y aplicamos la ecuación 3-H

de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial K}{\partial x^k} = 0$ tenemos

(1) $\frac{\partial K}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j$

(2) $\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^k} = g_{ik}\, \dot{x}^i$

(3) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^k}\right) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + g_{ik}\, \ddot{x}^i$

(4) Pero $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j$

aplicando Euler-Lagrange.

$$\underbrace{g_{ik}\, \ddot{x}^i}_{g_{hk}\, \ddot{x}^k} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)}_{\Gamma_{kij}} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}$ Γ_{kij} símbolo de Christoffel. 1ª especie.

$\Gamma^h_{ij} = g^{hk}\, \Gamma_{kij}$ $\quad \left(\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt} = 0\right)$

PROPOSICIÓN. Sea (M, g) VCR y $\gamma : J \to M$ geodésica que no es la curva constante. Entonces $3 - I$

(1) $\langle \gamma', \gamma' \rangle = cte$

(2) si hacemos $t = t(\bar{t})$ cambio de parámetro

$\bar{\gamma}(\bar{t}) = \gamma(t(\bar{t}))$ es geodésica $\Rightarrow \frac{d^2 t}{d\bar{t}^2} = 0$

Demostración. Pongamos $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ entonces

si $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ $\ddot{x}^i = \frac{d^2 x^i}{dt}$ tenemos

$\langle \gamma', \gamma' \rangle = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ así $g_{hk} \ddot{x}^h + \Gamma_{kij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = \frac{d}{dt}\left(g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \right) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^i \dot{x}^k +$$

$$+ \left(g_{ik} \ddot{x}^i \dot{x}^k \right) \leftarrow - \Gamma_{kij} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k$$

$$+ \left(g_{ik} \ddot{x}^k \dot{x}^i \right) \leftarrow - \Gamma_{ikj} \dot{x}^k \dot{x}^j \dot{x}^i$$

¡ $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij}$! ¡ $\overset{\shortparallel}{0}$!

3-J

(2) $\frac{dx^k}{d\bar t} = \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dt}{d\bar t}$; $\frac{d^2x^k}{d\bar t^2} = \frac{d}{d\bar t}\left(\frac{dx^k}{dt}\right)\frac{dt}{d\bar t} + \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\bar t^2} =$

$$= \left(\frac{dt}{d\bar t}\right)^2 \frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{dx^k}{dt}\,\frac{d^2t}{d\bar t^2}$$

por tanto como $\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma^k_{ij}\,\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}$ nos queda

$$\frac{d^2x^k}{d\bar t^2} = \left(\frac{dt}{d\bar t}\right)^2\left(-\Gamma^k_{ij}\,\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}\right) + \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\bar t^2} =$$

$$= -\Gamma^k_{ij}\left(\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dt}{d\bar t}\right)\left(\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dt}{d\bar t}\right) + \frac{dx^k}{dt}\,\frac{d^2t}{d\bar t^2} =$$

$$= -\Gamma^k_{ij}\,\frac{dx^i}{d\bar t}\cdot\frac{dx^j}{d\bar t} + \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\bar t^2}$$

por tanto $\bar f$ geodésica $\Longleftrightarrow$ $\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\bar t^2} = 0$ $k=1\ldots n$.

lo que implica que $\frac{d^2t}{d\bar t^2} = 0$ y $t = a\bar t + b$ $a \neq 0$

y recíprocamente si hacemos $t = a\bar t + b$ y f es geodésica, entonces $\bar f(\bar t) = f(a\bar t + b)$ lo es!

CONCLUSIÓN FINAL Sea (M, g) V.R.C $p, q \in M$. (3-K)

$\gamma \in \Omega(p,q)$

(1) Si γ es extremal para la energía E, entonces necesariamente $|\gamma'| = cte$, y γ es extremal para la longitud.

(2) Si γ es extremal para la longitud, entonces es extremal para la energía "si y sólo si" $|\gamma'| = cte$.

(3) $\gamma : \{x^i = x^i(t)\}$ es geodésica si verifica (por definición) la ecuación diferencial $\dfrac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dx^j}{dt} = 0 \quad \forall k$

$\gamma : I \to M$ diferenciable.

$\iff$ γ es extremal de E en $\Omega(\gamma(a), \gamma(b))$, $\forall a, b \in I$ $a < b$. $\iff$

$\iff$ γ extremal de L en y $|\gamma'| = cte$

NOTA: En el supuesto de estar trabajando en un sistema mecánico (M, g, V) donde $V = V(q^1, \dots q^n)$ es la función potencial, tendríamos que aplicar la ecuación de Euler a $L = K - V$. Las ecuaciones del movimiento quedarían.

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q^h} \cdot g^{hk} = Q^k$$

$Q^k = Q^k(q^1, \dots q^n)$ denotan las componentes de la fuerza generalizada $Q : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$; al "campo" "$Q = \operatorname{grad} V$ se llama $\operatorname{grad} V$" y se trata de un campo g-ortogonal a las hipersuperficies $V = cte$. Más concretamente:

$$\langle \nabla V(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = (V \circ \alpha)'(t)$$

$\forall\, \alpha = \alpha(t)$ curva en M