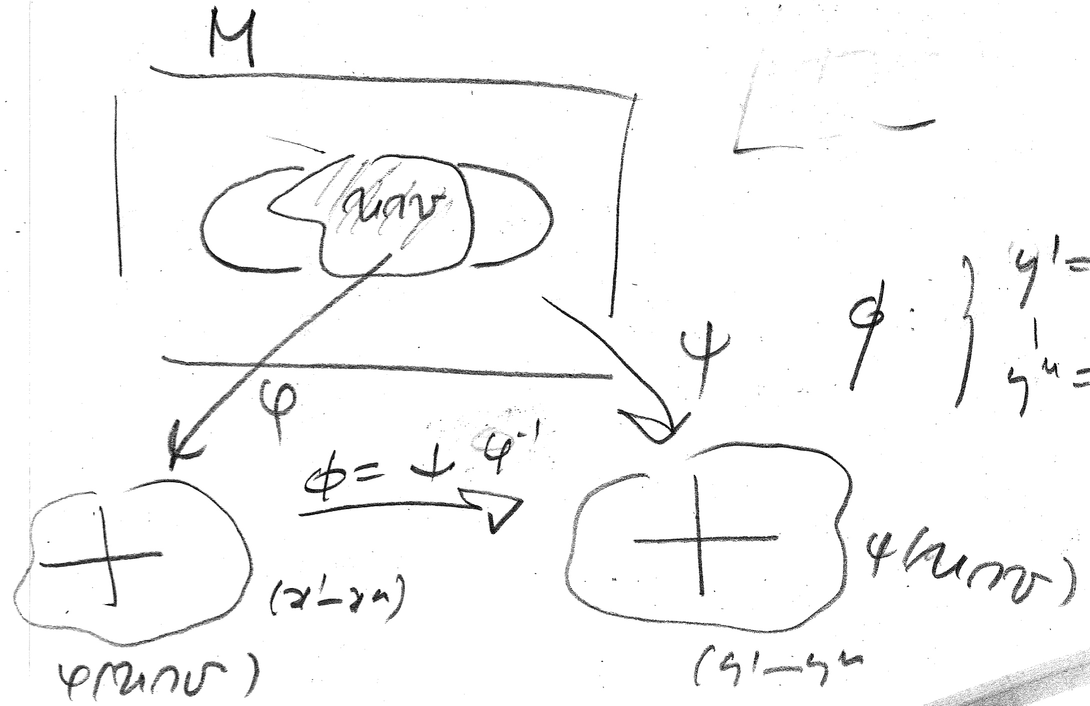
VARIEDADES RIEMANNIANAS (I)



$$\phi : \begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

$$(g^\varphi_{hk}) = D\phi^t (g^\psi_{ij}) D\phi^t$$

$$g^\varphi_{hk} = g^\psi_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^h}$$

SESION 4

① Variedad. Diferenciable 1-A

Sea M un espacio topológico, una carta de M es un par (U, φ) donde $U \underset{ab}{\subseteq} M$ y $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U) \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Dos cartas (U, φ) (V, ψ) de M se dicen compatibles si $U \cap V = \emptyset$, o bien si $U \cap V \neq \emptyset$ entonces $\varphi^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\psi^{-1} \circ \varphi} \psi^{-1}(U \cap V)$ es difeomorfismo.

- Un atlas de M es una familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) / \alpha \in A\}$ donde (1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ (2) $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \underset{comp}{\sim} (U_\beta, \varphi_\beta)$ $\forall \alpha, \beta \in A$.

- Un atlas $\mathcal{A}$ de M da structure de variedad diferenciable a M.

Una carta de M (como variedad diferenciable) es una carta (U, φ) de M que es compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$. el conjunto $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \{(U, \varphi) / (U, \varphi) \sim \mathcal{A}\}$ se llama atlas maximal. y se cumple. $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

Además $\{U \underset{ab}{\subseteq} M / \exists (U, \varphi) \in \mathfrak{M}\}$ es base de la topología de M

Ejemplos de variedades 4B

1) Variedades Euclídeas: si $M^m \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad euclídea, cada parametrización $P: \mathbb{R}^m \underset{ab}{\supset} W \to U \underset{ab}{\subset} M$ define la carta (U, P^{-1}) y $\mathcal{A} = \{(U, P^{-1}) \mid P$ parametrización de $M\}$ forma un atlas maximal.

En particular, las superficies de $\mathbb{R}^3$ son variedades de dimensión 2.

2) El espacio $\mathbb{R}P_2 = \{(x_0 : x_1) \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\}$ es un espacio topológico (con la topología inicial de $\pi: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}P^2$, $(x_0, x_1) \mapsto (x_0 : x_1)$)

y las cartas

$$U_0 = \{(x_0 : x_1) \mid x_0 \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{R}, \quad (x_0 : x_1) \longrightarrow x_1/x_0$$

$$U_1 = \{(x_0 : x_1) \mid x_1 \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R}, \quad (x_0 : x_1) \longrightarrow x_0/x_1$$

3) Este ejemplo se generaliza a $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P_n, \ldots$

4) $Gr_m(\mathbb{R}^n) \equiv$ subespacios vectoriales m-dimensionales de $\mathbb{R}^n$ $(m < n)$ Grassmannianas

DEFINICION. (Variedad Riemanniana)

Sea M variedad diferenciable de dimensión n $(M = M^n)$ una métrica riemanniana en M es un "operador" g que asigna a cada carta (U, φ) de M una RC $(\varphi(U), g^\varphi)$

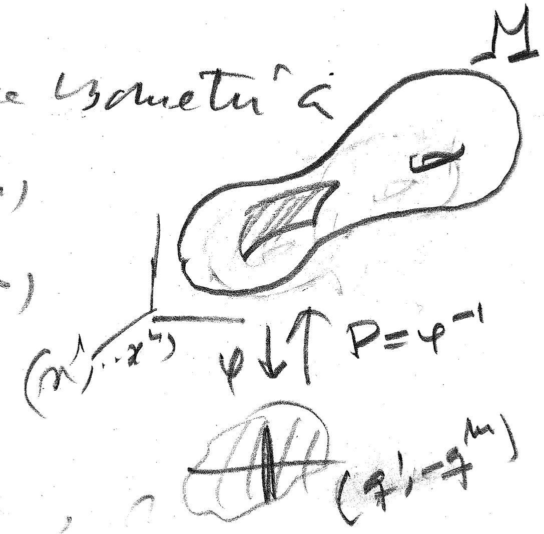
$g^\varphi = g^\varphi_{ij}\, dx^i dx^j$, de forma que si (V, ψ) es otra carta con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces la aplicación:

$$(\varphi(U \cap V), g^\varphi) \xrightarrow{\psi \cdot \varphi^{-1}} (\psi(U \cap V), g^\psi) \text{ es una isometría}$$

es decir

$$(g^\varphi_{ij}) = \frac{\partial(y^1 \dots y^n)^t}{\partial(x^1 \dots x^n)} (g^\psi_{ij}) \frac{\partial(y^1 \dots y^n)}{\partial(x^1 \dots x^n)}$$

o también: $$g^\varphi_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^h}{\partial x^j} g^\psi_{kh}$$



Ejemplo $M^n \underset{VE}{\subset} \mathbb{R}^n$.

o más general, un sistema holónomo de partículas con espacio de posiciones $M^n \underset{VE}{\subset} \mathbb{R}^N$ y métrica

$(g^\varphi_{ij}) = DP^t\,(M_{ij})\,DP$ con $P = \varphi^{-1}$ ... etc.

Longitud de una curva

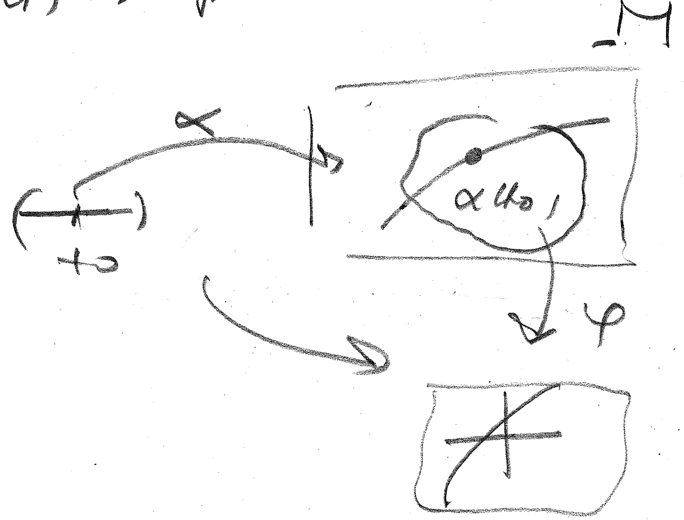
(4·E

Sea (M,g) VR

Una curva en M es una aplicación $\alpha : [a,b] \to M$ continua que sea diferenciable en el sentido de que $\forall t_0 \in [a,b]$ existe (U,φ) carta con $\alpha(t_0) \in U$, y se tiene que

$$[a,b] \underset{ab}{\supseteq} \alpha^{-1}(U) \xrightarrow[\varphi\circ\alpha]{} \varphi(U) \text{ es aplicación}$$

diferenciable.



Entonces si (V,ψ) es otra carta con $\alpha(t_0) \in V$ se tiene que

$$[a,b] \underset{ab}{\supseteq} \alpha^{-1}(V) \xrightarrow[\psi\circ\alpha]{} \psi(V)$$

también es diferenciable.

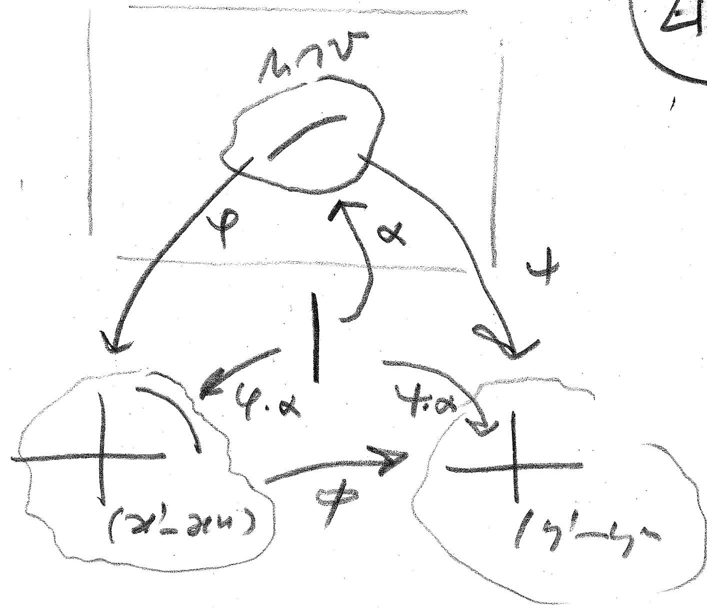
Podemos entonces encontrar una partición de $[a,b]$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$, tal que $\alpha[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ carta y definir

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} L(\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}) = \sum L(\varphi_i \circ \alpha|_{[t_{i-1},t_i]})$$

4F

Energía de una curva $\alpha:[a,b]\to M$

Supongamos $\alpha:[a,b]\to U\cap V$ donde $(U,\varphi=(x^1,\dots,x^n))$ $(V,\psi=(y^1,\dots,y^n))$ son cartas de M y $\phi=\psi\circ\varphi^{-1}$ el cambio de coordenadas.



La energía de α "medida por φ" es $E_\varphi(\alpha)=E_{g^\varphi}(\varphi\circ\alpha)=\frac{1}{2}\int_a^b\langle(\varphi\circ\alpha)',(\varphi\circ\alpha)'\rangle_{g^\varphi}\,dt$

veamos que coincide con $E_\psi(\alpha)$

En efecto

$$E_\psi(\alpha)=\frac{1}{2}\int_a^b\langle(\psi\circ\alpha)',(\psi\circ\alpha)'\rangle\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b g^\psi_{ij}\frac{dy^i}{dt}\frac{dy^j}{dt}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{g^\psi_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^h}}\frac{dx^h}{dt}\cdot\underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial x^k}}\frac{dx^k}{dt}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int g^\varphi_{kh}\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dx^h}{dt}\,dt=E_\varphi(\alpha)$$

$\phi=\psi\circ\varphi^{-1}$: $\begin{cases} y^1=y^1(x^1\dots x^n)\\ \vdots\\ y^n=y^n(x^1\dots x^n)\end{cases}$

$$g^\varphi_{kh}=g^\psi_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^h}$$

$\varphi\circ\alpha:\begin{cases} x^1=x^1(t)\\ \vdots\\ x^n=x^n(t)\end{cases}$

$\psi\circ\alpha=\begin{cases} y^1=y^1(x^1(t),\dots x^n(t))\\ \vdots\\ y^n=y^n(x^1(t),\dots x^n(t))\end{cases}$

$$(g^\varphi_{ij})=D\phi^t\,(g^\psi_{ij})\,D\phi$$

$$D\phi=\frac{\partial(y^1,\dots y^n)}{\partial(x^1,\dots x^n)}$$

En estas condiciones definimos una variación de α con extremos fijos $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ como una aplicación $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \xrightarrow{f} U\cap V \subseteq M$ tal que (II-G)

1) es diferenciable ($\Longleftrightarrow \varphi\circ f$ diferenciable $\Longleftrightarrow \psi\circ f$ diferenciable)

2) Si $\alpha_s(t)=f(s,t)$ $\forall t$, es $\alpha_s \in \Omega(\alpha(a),\alpha(b))$

3) $\alpha_0=\alpha$.

y se tiene $E(\alpha_s)=E_{g\varphi}(\varphi\circ\alpha_s)=E_{g\psi}(\psi\circ\alpha_s)$ por lo que

$$\left.\frac{dE(\alpha_s)}{ds}\right|_{s=0}=\left.\frac{dE_{g\varphi}(\varphi\circ\alpha_s)}{ds}\right|_{s=0}=\cdots$$

si $\left.\frac{dE(\alpha_s)}{ds}\right|_{s=0}=0$ $\forall f$ variación de α con extremos fijos decimos que α es extremal de la energía $E \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \varphi\circ\alpha$ extremal de $E_{g\varphi} \Longleftrightarrow \psi\circ\alpha$ extremal de $E_{g\psi}$

$\Longleftrightarrow \varphi\circ\alpha$ es g^φ-geodésica $\Longleftrightarrow \psi\circ\alpha$ es g^ψ-geodésica.

Así por definición α es geodésica $\Longleftrightarrow \varphi\circ\alpha$ es g^φ geodésica

$\forall$ carta (U,φ) que corta a α

$\exists$

(4.H)

DEFINICIÓN. Sea (M, g) riemanniana. Una curva $\gamma : I \to M$ es geodésica si es diferenciable y si $\gamma(t_0) \in U$, con (U, φ) carta de M, $\varphi \circ \gamma|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)}$ es geodésica de $(\varphi(U), g^{\varphi})$.

Ejemplos de variedades Riemannianas

(1) $M^m \underset{v.e}{\subset} (\mathbb{R}^n, G)$ donde $G = g_{ij}\, dx^i dx^j$ es una métrica riemanniana a $\mathbb{R}^n$

Si $P : W \to U \subset M \subset \mathbb{R}^n$ es una parametrización

se toma para $P = \varphi^{-1}$: $\begin{cases} x^1 = P^1(u^1, \dots, u^m) \\ \vdots \\ x^n = P^n(u^1, \dots, u^m) \end{cases}$

$$(g_{ij}^{\varphi}) = DP^t (G_{ij})\, DP$$

Ejemplo 2. En $\mathbb{R}^3$ con $dx^2 + dy^2 - dz^2$

la superficie $M : (x^2 + y^2 = z^2 - 1 \quad z > 0)$ hereda una métrica riemanniana.