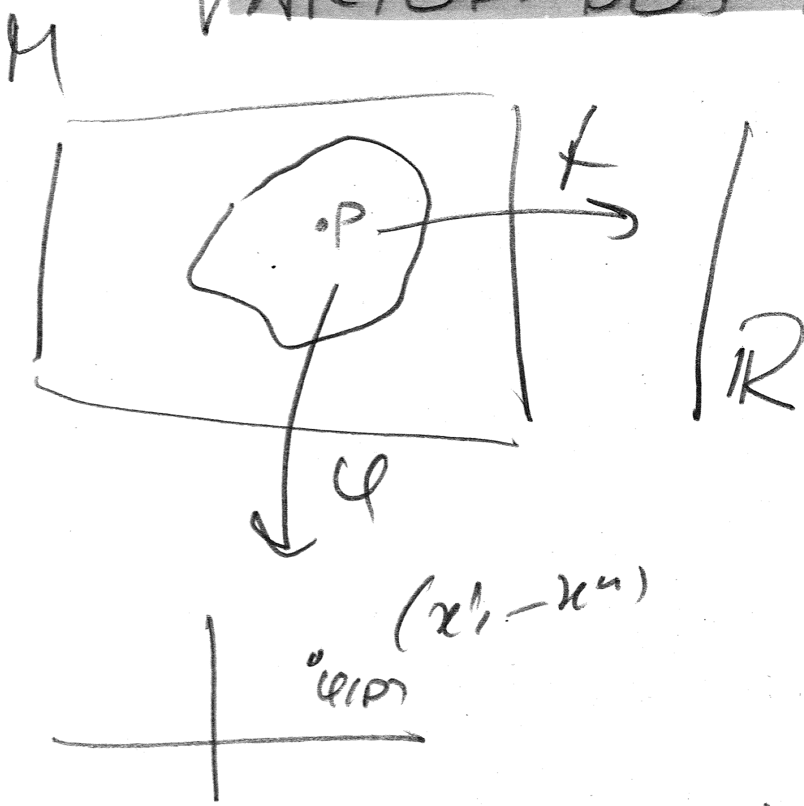
VARIEDADES RIEMANNIANAS II



$g : M \ni p \mapsto g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida + diferenciable

$$g^{\varphi}_{ij}(\varphi(p)) = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

LECCIÓN 5

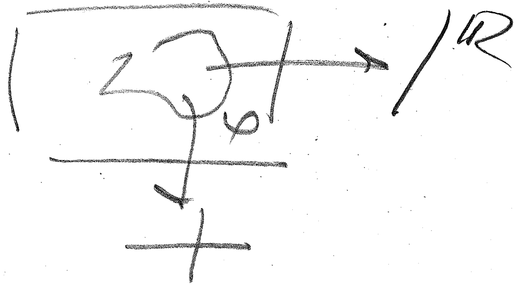
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}$$

$$T_pM = \left\{ \sum \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \,\middle|\, \xi^i \in \mathbb{R} \right\}$$

ANILLO DE FUNCIONES.

Sea M variedad diferenciable y $f: M \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es diferenciable si $\forall p \in M$ $\exists (U, \varphi)$ carta de M en $p \in U$ y $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$ diferenciable. Lo cual equivale a decir que $\forall (U, \varphi)$ carta de M en $p \in U$ es $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$ diferenciable.



$\mathcal{F}(M) = \{ f: M \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ diferenciable} \}$ es el anillo de funciones.

Si $p \in M$ y $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable para alguna (U, φ) carta de M con $p \in U$, diremos que f es diferenciable en torno a p y denotaremos por $\mathcal{F}_p$ al anillo de funciones diferenciables en torno a p.

En $\mathcal{F}_p$ se define la relación de equivalencia

$$f \sim_p g \iff \exists \underset{p \in U}{U \subseteq M} \text{ con } f|_U = g|_U$$

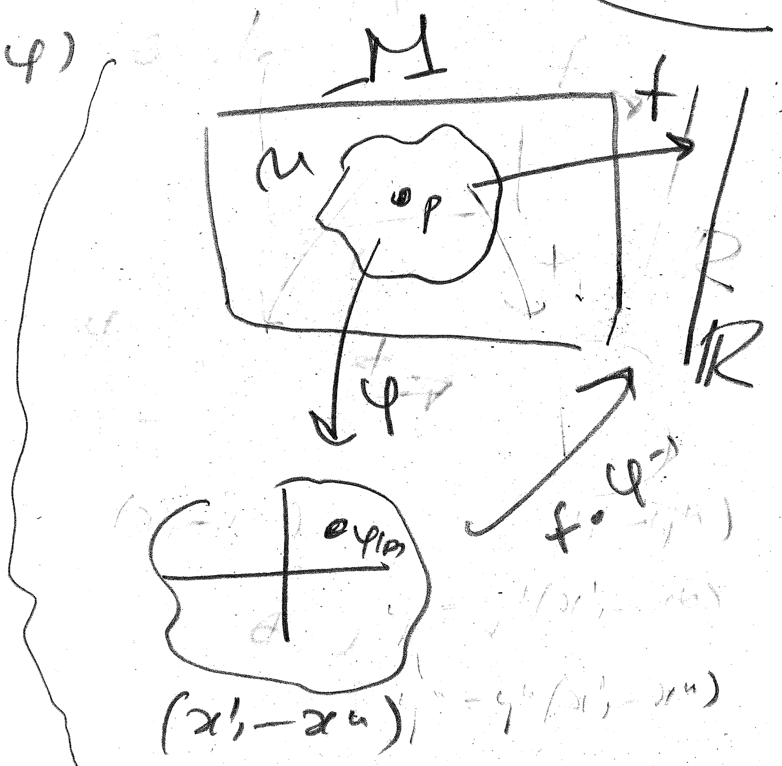
Observe que $\mathcal{F}_p$ también tiene estructura natural de anillo con las operaciones "obvias" de producto y suma de funciones.

(5-B)

Vectores tangentes.

Sea M variedad y $p \in M$; tenemos (U, φ)
$\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ carta de M con $p \in U$.
se define $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : F_p \longrightarrow F_p$ de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)\Big|_{\varphi(p)}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ es una derivación de M por p según la siguiente definición

$\xi : F_p \longrightarrow F_p$ se llama derivación si $\forall f, g \in F_p$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

(1) $\xi(af + bg) = a\xi(f) + b\xi(g)$ y

(2) $\xi(fg) = \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g)$

(Se puede demostrar entonces que:
si $f \underset{p}{\sim} g \Longrightarrow \xi(f) = \xi(g)$).

Denotamos por T_pM al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las derivaciones por p

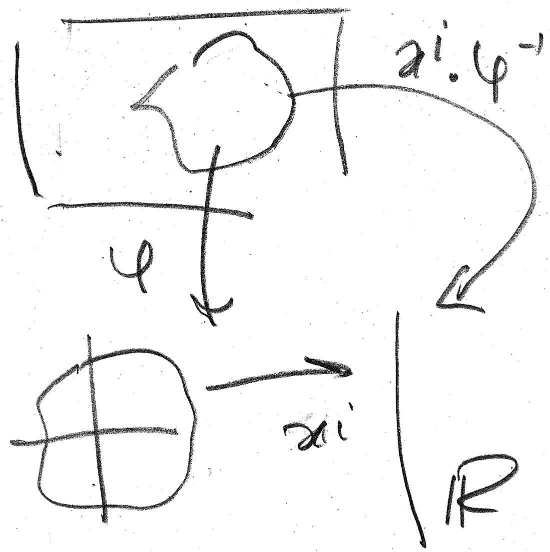
y así $L\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right) \subset T_pM$

se demuestra:

$\boxed{\text{TEOREMA. } T_pM \text{ es un } \mathbb{R}\text{-espacio vectorial de dimensión } n}$. En particular resulta que si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta en torno a p entonces $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right)$ son una base de T_pM y cada $\xi \in T_pM$ se puede escribir como $\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ y para cada $f \in \mathcal{F}_p$ tendremos $\xi(f) = \xi^i \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)$

además $\xi^j = \xi(\varphi^{-1} \circ x^j)$ donde

$x^i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es la "proyección" i-ésima



En efecto: si $\xi = \sum_i \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ entonces

$$\xi(x^j \circ \varphi^{-1}) = \sum_i \xi^i \left.\frac{\partial (x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} =$$

$$= \sum_i \xi^i \delta_i^j = \xi^j.$$

Si tenemos otra carta (V,ψ) $\psi=(y^1,\dots,y^n)$ en torno al punto p. entonces se tiene

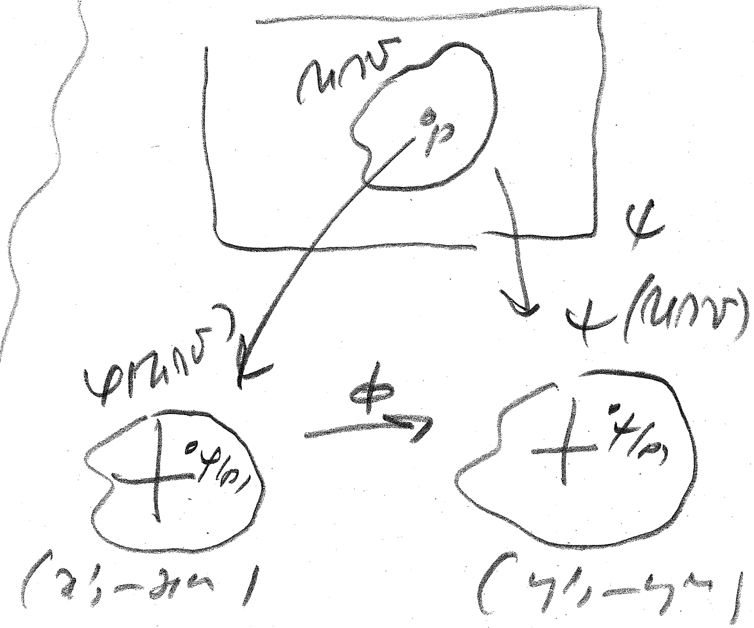
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (y^j\circ\varphi^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p$$

lo cual significa que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p D\phi\Big|_{\varphi(p)}$$

y $D\phi\big|_{\varphi(p)}$ es la matriz de cambio de base.



$$\phi : \begin{cases} y^1 = y^1(x^1,\dots,x^n) \\ \vdots \\ y^n = y^n(x^1,\dots,x^n) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial y^j}}$$

NOTA. Si $M \underset{VE}{\subset} \mathbb{R}^n$ y $P: U^m \to U \underset{as}{\subseteq} M$, $\varphi = P^{-1}$

es una parametrización entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum \frac{\partial P^j}{\partial u^i}\Big|_{\varphi(p)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

5E

DEFINICIÓN.

Una métrica riemanniana en $M = M^n$ v.d. es un operador que asigne a cada $p \in M$ una forma bilineal simétrica definida positiva $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ y esta asignación es diferenciable en el sentido de que para cada $p \in M$. $\exists$ una carta (U, φ) entorno a p tal que la aplicación $g^{\varphi}_{ij} : \varphi(U) \ni x \longrightarrow g_{\varphi^{-1}(x)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) \in \mathbb{R}$

es una aplicación diferenciable.

es decir ($\varphi(U)$ (g^{φ}_{ij})) es una VRC

Además si $(V, \psi = (y^1 - y^n))$ es otra carta que contiene al punto p entonces

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g^{\varphi}_{ij}\Big|_{\varphi(p)} = g_p\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p, \frac{\partial y^h}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right)_p\right) =$$

$$= \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial y^h}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right)_p\right) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial y^h}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} g^{\psi}_{kh}(\psi(p))$$

En particular, acabamos de demostrar que 5F

si (M, g) es una variedad Riemanniana con esta definición, también lo es con la definición dada en la lección anterior.

y recíprocamente...

una curva $\alpha : [a,b] \to M$ define $\forall t_0 \in [a,b]$ $\alpha'(t_0) \in T_{\alpha(t)}M$ por la condición $\alpha'(t_0)(f) = (f \circ \alpha)'(t_0)$ $\forall f \in F_{\alpha(t_0)}$

si (U, φ) es una carta con $\alpha(t_0) \in U$ entonces en un entorno de t_0 tenemos $\varphi \circ \alpha : \{x^i = x^i(t)\}$ y entonces

$$\alpha'(t_0) = \alpha'(t_0)(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t_0)} = (x^i \circ \alpha)'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t_0)} =$$

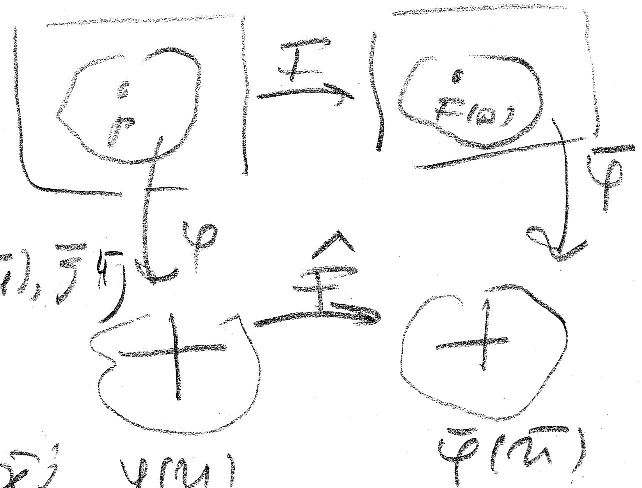
$$= \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_{\alpha(t_0)}$$ por esto escribimos

localmente $\alpha'(t) = \dfrac{dx^i}{dt} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

Se define $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$ donde $|\alpha'(t)| = g(\alpha'(t), \alpha'(t))^{1/2}$

ISOMETRIAS.

Una aplicación $F:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ entre dos variedades riemannianas se llama isometría (local) si para cada $p\in M$



$\exists\,(U,\varphi)$ carta de M $p\in U$ y $(\bar U,\bar\varphi)$ carta en $\bar M$ de forma que $F(U)=\bar U$

y la aplicación $\hat F=\bar\varphi\circ F\circ\varphi^{-1}:(\varphi(U),g^{\varphi})\to(\bar\varphi(\bar U),\bar g^{\bar\varphi})$

es una isometría. Esto significa que

si $\hat F:\begin{cases}\bar x^1=\bar x^1(x^1\ldots x^n)\\ \vdots\\ \bar x^n=\bar x^n(x^1\ldots x^n)\end{cases}$ $\qquad g^{\varphi}_{kh}=\bar g^{\bar\varphi}_{ij}\,\dfrac{\partial\bar x^i}{\partial x^k}\,\dfrac{\partial\bar x^j}{\partial x^h}$

se dice que es isometría, si es isometría local y biyectiva.

Si a $\hat F$ se le pide solo ser difeomorfismo, entonces se dice que F es difeomorfismo local.

PROPOSICIÓN: Un difeo local $F:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ es isometría local si y solo si preserva las longitudes de las curvas