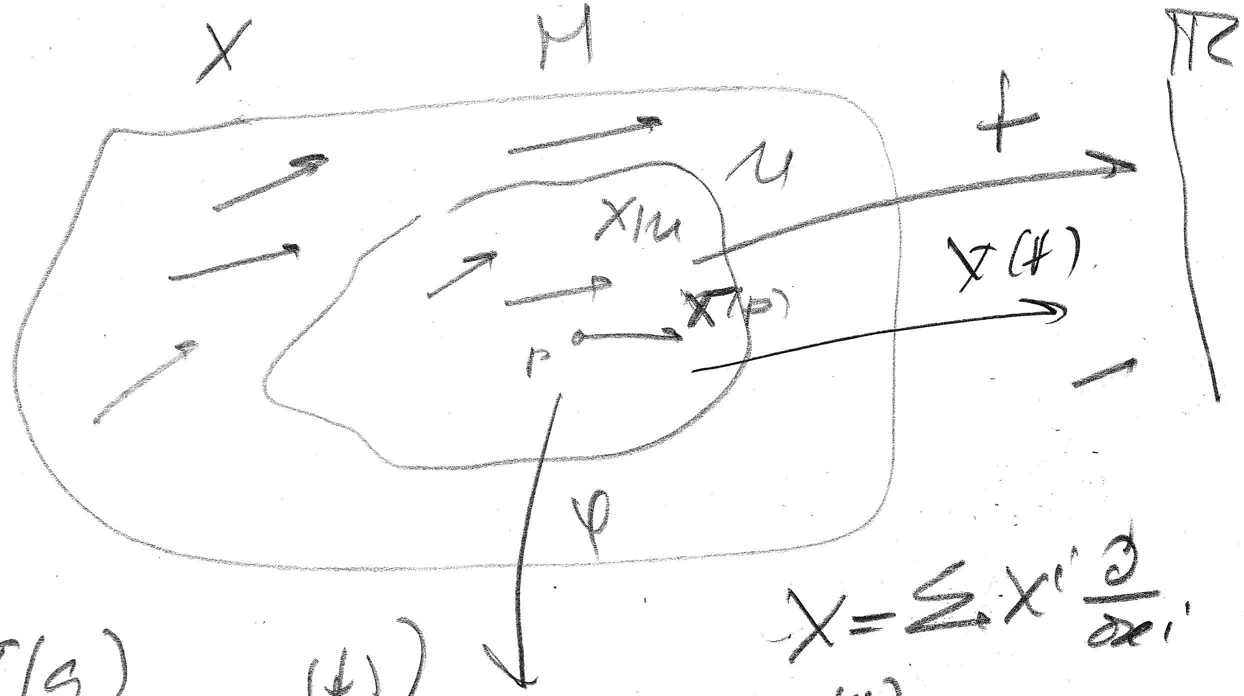
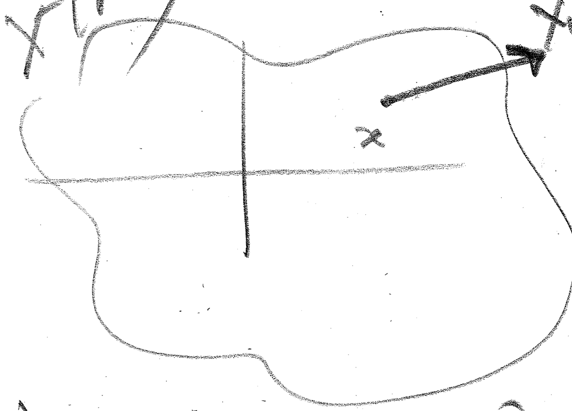
LECCION 7

CAMPOS.



$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$



$$X_\varphi(x) = (X^1_\varphi(x), \ldots, X^n_\varphi(x)) \cong \sum X^i_\varphi \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\underline{X^i_\varphi = X^i \circ \varphi^{-1}}$$

(1) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}(M) \arrow[d, "X"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "Y"] & \mathcal{F}(M) \end{tikzcd}$$

Sea $M = M^n$ una variedad diferenciable.

Un campo de vectores, es una aplicación diferenciable

$X : M \to TM$, tal que $X(p) \in T_pM \quad \forall p \in M$.

Por ejemplo, si $\mathbb{M} \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ entonces $T\mathbb{M} = \left\{ (x, \dot{x}) \,/\, \begin{matrix} x \in \mathbb{M} \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n \end{matrix} \right\}$

$\pi : T\mathbb{M} \ni (x, \dot{x}) \longrightarrow x \in \mathbb{M}$ y un campo es

$X : \mathbb{M} \ni x \longrightarrow (x, \vec{X}(x)) \in T\mathbb{M}$ y viene definido

por $\vec{X} : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicación diferenciable.

En _general_ si X es un campo en M y (U, φ) es una carta tenemos

$$
\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{X} & TU \\
\varphi \downarrow & & \downarrow T\varphi \\
\varphi(U) & \longrightarrow & T\varphi(U) \\
x & \longrightarrow & (x, X_\varphi(x))
\end{array}
$$

X_φ es un campo en $\varphi(U)$

y podemos escribir

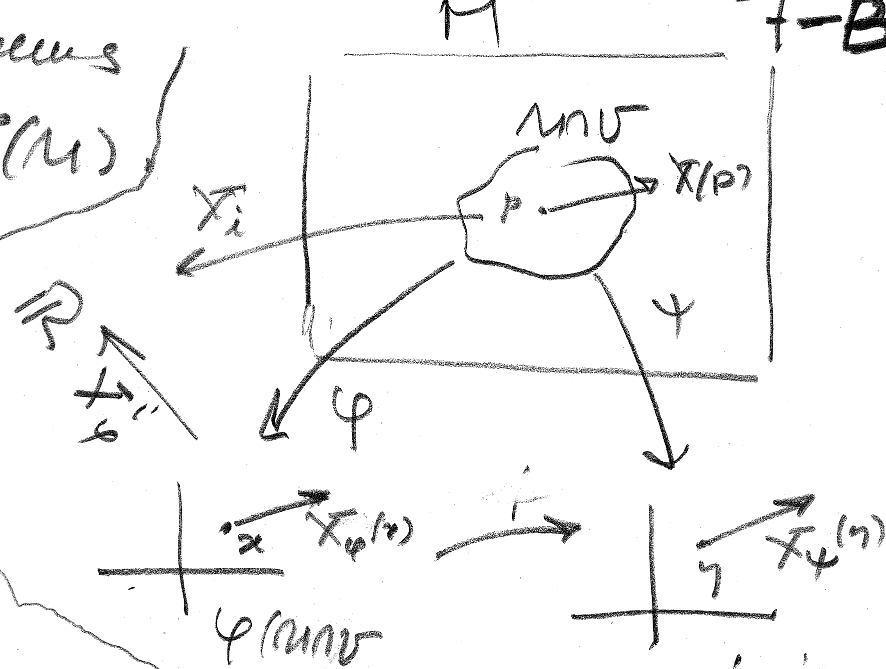
$$X = \sum (X^i_\varphi \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial x_i}$$ es

decir

$$X(p) = \sum X^i_\varphi(\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

Llamando $X^i_{\varphi} \circ \varphi = X^i_{(\varphi)} : U \to \mathbb{R}$ tendremos

$$X = \sum_i X^i_{(\varphi)} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{donde} \quad X^i_{(\varphi)} \in \mathcal{F}(U)$$



si cambiamos de carta,

$(V, \psi = (y^1 \dots y^n))$ entonces

en $U \cap V$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{por lo que}$$

$$X = \sum_i X^i_{(\varphi)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i X^i_{(\varphi)} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{así}$$

$$\phi : \begin{cases} y^1 = y^1(x^1 \dots x^n) \\ y^n = y^n(x^1 \dots x^n) \end{cases}$$

$$\boxed{X^j_{\psi} \circ \phi = X^i_{\varphi} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}}$$

si $\mathfrak{X}(M)$ es el conjunto de campos de M

entonces $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ se define

$$(X+Y) : M \to TM \quad p \to X(p) + Y(p) \qquad X+Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$$fX : M \to TM \quad p \to f(p)\,X(p) \qquad fX \in \mathfrak{X}(M)$$

y $\mathfrak{X}(M)$ es un "espacio vectorial" sobre $\mathcal{F}(M)$.

módulo

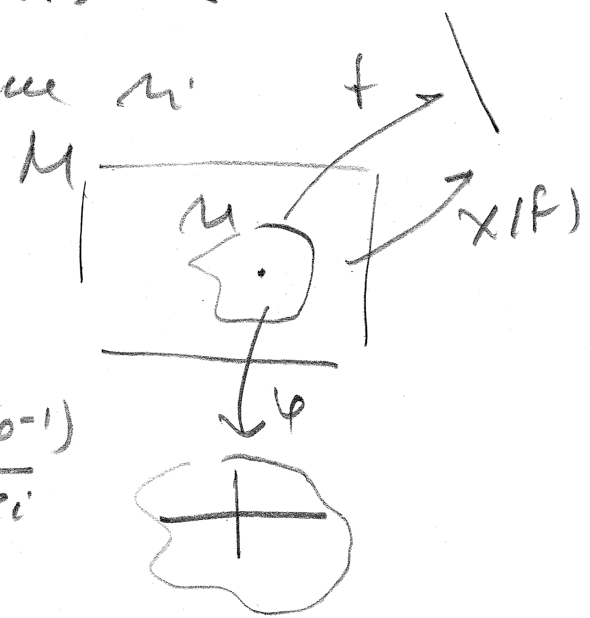
Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ induce una aplicación (7-C)

$X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ de la siguiente forma

si $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable $X(f) : M \ni p \longrightarrow X(p)(f) \in \mathbb{R}$

y $X(f) : M \to \mathbb{R}$ es también diferenciable ya que si

$(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ carta se tiene



$$X(f) \circ \varphi^{-1}(x) = X(\varphi^{-1}(x))(f) =$$

$$= \sum_i X^i_\varphi(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi^{-1}(x)} (f) = \sum_i X^i_\varphi(x) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}$$

que es aplicación diferenciable.

se verifica: $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(1) $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$ (X es $\mathbb{R}$-lineal)

(2) $X(fg) = X(f) g + f X(g)$

(R) Además si $U \underset{\text{ab}}{\subseteq} M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $X \in \mathfrak{X}(U)$

por restricción es decir $X : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$

cumple (1) y (2)

(7-D)

En particular si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta

se tiene $X = \sum_i X(x^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ya que

$$X(p) = \sum_i X(p)(x^i \circ \varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_i X(x^i \circ \varphi)|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Consideremos ahora el conjunto

$\tilde{\mathfrak{X}}(M) = \{ X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M) \mid (1), (2) \}$. Entonces resulta que

$\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ es un $\mathcal{F}(M)$-espacio vectorial (módulo)

Se demuestra entonces que se verifica la propiedad

(R): $\forall U \subseteq_{ab} M \quad \exists!\, X_U \in \tilde{\mathfrak{X}}(U)$ tal que (función meseta pág 19)

$$X_U(f|_U) = X(f)|_U \quad \forall f \in \mathfrak{X}(M)$$

y entonces la aplicación natural

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{X}}(M) \quad (\tilde{X}(f) = X(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}(M))$$

isomorfismo de $\mathcal{F}(M)$-módulos.

Idea de la demostración:

(1) si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\tilde{X} = 0 \Longrightarrow \forall\, (U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ carta de

M es $X = \sum \tilde{X}(x^i \circ \varphi) \dfrac{\partial}{\partial x^i} = 0 \Longrightarrow X|_U = 0$

por tanto $X = 0$

(2) Si $\underset{\sim}{X} \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ definimos $X : M \longrightarrow TM$

de forma que $X(p)(f) = \underset{\sim}{X}(f)|_p \quad \forall f \in \mathcal{F}(p)$

entonces $X : M \to TM$ es diferenciable y $\tilde{X} = \underset{\sim}{X}$.

En adelante no distinguiremos entre X y $\tilde{X}$,

ni entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\hat{\mathfrak{X}}(M)$.

<u>CORCHETE</u> <u>DE</u> <u>LIE</u> ...

si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "X \circ Y"'] & \mathcal{F}(M) \arrow[d, "X"] \\ & \mathcal{F}(M) \end{tikzcd}$$

¿es $X \circ Y : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$
$\qquad f \longrightarrow X(Y(f))$ un campo?

evidentemente $X \circ Y : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal

pero la regla de Leibnitz...

$$(X\circ Y)(fg) = X(Y(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) =$$
$$= X(Y(f)g) + X(fY(g)) =$$
$$= X(Y(f))g + \underline{Y(f)X(g)} + \underline{X(f)Y(g)} + fX(Y(g))$$

∴ nos sobran dos sumandos

tomando ahora

$$(Y\circ X)(fg) = Y(X(f))g + X(f)Y(g) + Y(f)X(g) + fY(X(g))$$

y restando, y llamando $[X,Y] = X\circ Y - Y\circ X$ queda

$$[X,Y](fg) = (X\circ Y)(fg) - (Y\circ X)(fg) =$$
$$= \big(X(Y(f)) - Y(X(f))\big)g$$
$$+ f\big(X(Y(g)) - Y(X(g))\big) =$$
$$= [X,Y](f)\cdot g + f[X,Y](g)$$

por tanto $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$

El Corchete de Lie tiene las siguientes propiedades para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $f \in \mathcal{F}(M)$

1) $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \to [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ es $\mathbb{R}$-bilineal

2) $[X, Y] = [-Y, X]$

3) $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$

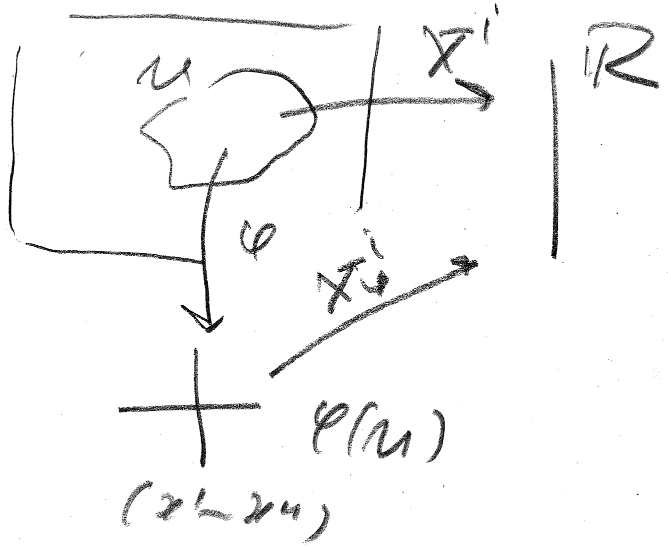
4) $[fX, Y] = -Y(f)X + f[X, Y]$

5) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidad de Jacobi)

Las propiedades 1) 2) 5) dan structura de álgebra de Lie al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$

Queda como ejercicio demostrar todas y cada una de las anteriores propiedades.

CALCULOS EN COORDENADAS



si (U,φ) es una carta de M y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces podemos "localizar" $X \in \mathfrak{X}(U)$ y podemos escribir

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{donde } X^i \in \mathcal{F}(U)$$

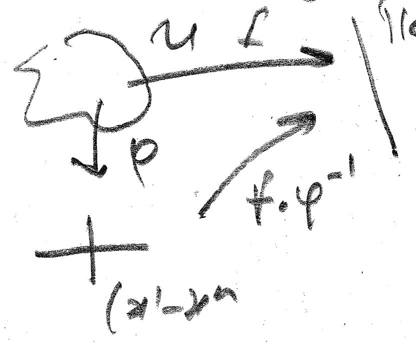
esto significa que X aplica a cada $p \in U$.

$$X(p) = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_pM$$

o también que para cada $f \in \mathcal{F}(U)$

$$X(f) = \sum X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{F}(U) \quad \text{donde se entiende}$$

que $$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi$$



tenemos entonces

$$X(p) = \sum_i X^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_i X(p)(x^i\circ\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p =$$

$$\sum_i X(x^i\circ\varphi)\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$ de donde se deduce que

$$X^i(p) = X(x^i\circ\varphi)\Big|_p \quad \forall p \quad \text{es decir} \quad X^i = X(x^i\circ\varphi)$$

por tanto tenemos la identidad

$$\boxed{X = \sum_i X(x^i\circ\varphi)\frac{\partial}{\partial x^i}} \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(U)$$

así si $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$

tenemos

$$[X,Y] = \sum_i [X,Y](x^j\circ\varphi)\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i (X(Y^j) - Y(X^j))\frac{\partial}{\partial x^i} =$$

$$= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = [X,Y]$$

si $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ llamamos

$$X_\varphi = \sum X_\varphi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \simeq (x, X_\varphi(x)) \quad \text{con } X_\varphi^i = X^i \circ \varphi^{-1}$$

su representación local (RL)

y tenemos la siguiente "regla de cálculo":

$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ entonces

$[X, Y]_\varphi = [X_\varphi, Y_\varphi]$; es decir la (RL) del corchete de Lie $[X, Y]$ se obtiene como corchete de Lie de las representaciones locales de X y de Y.

En efecto

En efecto (7-K)

$$[X,Y]_\varphi = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \circ \varphi^{-1} \frac{\partial}{\partial x^j} =$$

$$= \left\{ (X^i \circ \varphi^{-1}) \left(\frac{\partial (Y^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi \right) \circ \varphi^{-1} - (Y^i \circ \varphi^{-1}) \left(\frac{\partial (X^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi \right) \circ \varphi^{-1} \right\} \frac{\partial}{\partial x^j} =$$

$$= \left\{ X^i_\varphi \frac{\partial Y^j_\varphi}{\partial x^i} - Y^i_\varphi \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right\} \frac{\partial}{\partial x^j} = [X_\varphi, Y_\varphi].$$

Como este asunto de "subir y bajar" por φ es un poco intolerable, vamos a aligerar la notación la idea, es "confundir" x^i con $x^i \circ \varphi$ es decir si $p \in M$ $x^i(p) = x^i \circ \varphi(p)$ es la coordenada i-ésima del punto p de forma que $\varphi(p) = (x^1(p), \dots x^n(p))$ la RL de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ la escribimos de forma $X = \sum_i X^i(x^1, \dots x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$

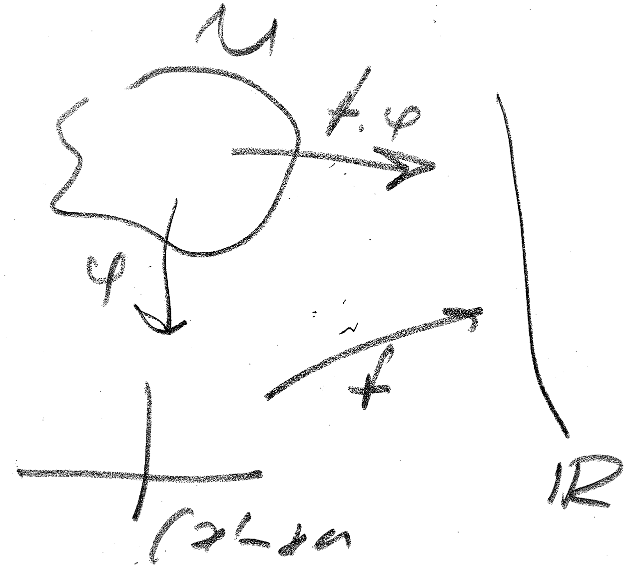
donde "interpretamos"

$$X(p) = \sum_i X^i(x^1(p),\dots,x^n(p))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_pM$$

y si $f = f(x^1,\dots,x^n)$ es una función en $\varphi(U)$

entendemos que $f(p) = f(x^1(p),\dots,x^n(p))$ es una función en U de tal manera que identificamos $f \simeq f\circ\varphi$

así $X(f) = \sum_i X^i(x^1\dots x^n)\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$



y la identidad fundamental

puede $X = \sum_i X(x^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$