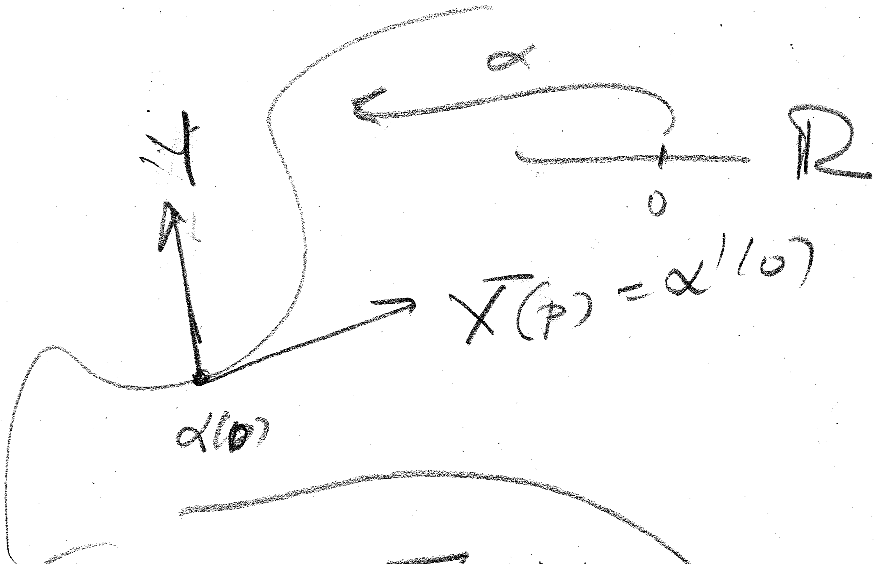
Lección 8

Conexiones Lineales

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$$

$$\frac{\nabla}{dt} : \mathfrak{X}_\alpha(M)\times\mathfrak{X}_\alpha(M)\longrightarrow\mathfrak{X}_\alpha(M)$$



$$(\nabla_X Y)|_p = \nabla_{\alpha'(0)} Y = \nabla_{X(0)} Y$$

Geodésicas

$$\frac{\nabla\gamma'}{dt} = 0$$

CONEXION CANÓNICA: DE $\mathbb{R}^n$ (Natural) Derivada covariante

Un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ viene definido por n-funciones $X^i = X^i(x^1, \dots x^n)$ diferenciables, y puede disfrazarse de varias formas

Derivación: $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$; $x_0 \to \sum X^i(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}$

vectorial $(x, X(x)) = X(x)_x$

función $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Así que si tenemos otro campo $Y = (Y^1, \dots Y^n)$ "disfrazado de función" podemos calcular la derivada de Y en la dirección X que da lugar a otro campo

$D_X Y = (X(Y^1), \dots, X(Y^n))$ "disfrazado" de función

$$D_X Y = X(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \left[\sum_i X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right]\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Obsérvese que "el valor" de $D_X Y$ en x_0 sólo depende de $\xi = X(x_0) = \sum_i X^i(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}$

$$D_\xi Y = (D_X Y)\big|_{x_0} = \sum_j \left[\sum_i \xi^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\Big|_{x_0}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}$$

y podemos escribir $D_\xi Y = \lim_{t\to 0} \dfrac{Y(x_0+t\xi)-Y(x_0)}{t}$.

PROPIEDADES:

$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad M \subseteq_{as} \mathbb{R}^n$. $\quad f \in \mathcal{F}(M)$

(1) $D_X(Y+Z) = D_XY + D_XZ$ $\qquad$ (3) $D_{fX}Y = f D_XY$

(2) $D_{X+Z}Y = D_XY + D_ZY$ $\qquad$ (4) $D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$

(7) $X\langle Y,Z\rangle = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle$

(5) $D_XY - D_YX = [X,Y]$

(6) $D_X D_Y W - D_Y D_X W - D_{[X,Y]} W = 0$

Una observación importante es que

(a) $(D_XY)|_{x_0}$ solo depende de $X(x_0) = \xi$. $\quad D_XY|_{x_0} = D_{X(x_0)}Y$

(b) para conocer $D_XY|_{x_0}$ basta conocer Y a lo largo de una curva $\alpha : I \to M$ con $\alpha(0) = x_0$ $\quad \alpha'(0) = X(x_0)$

$$D_XY|_{x_0} = \left(\frac{d(y^1\circ\alpha)}{dt}, \dots \frac{dy^n\circ\alpha}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \sum_i \frac{d(y^i\circ\alpha)}{dt}\Big|_{t=0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}.$$

CONEXIÓN LINEAL EN $M=M^n$: (8-C)

es una aplicación $\nabla: \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$
verificando $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall f\in\mathcal{F}(M)$

(1) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$ (3) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

(2) $\nabla_{X+Z}Y = \nabla_X Y+\nabla_Z Y$ (4) $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$.

Localización:

si $U \subseteq_{ab} M$, entonces existe una única conexión ∇^U en U tal que $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M) \Rightarrow (\nabla_X Y)|_U = \nabla^U_{X|_U}(Y|_U)$

Demostración:

fijemos $p\in U$. Sea $\mu: M\to\mathbb{R}$ una función diferenciable con $\operatorname{im}\mu \subset [0,1]$ $(\operatorname{sop}\mu) \subset U$

y $\mu=1$ en un entorno U' de p.

Entonces $\nabla_{\mu X}(\mu Y)|_{U'} = \mu \nabla_X(\mu Y)|_{U'} =$

$= \mu\{X(\mu)Y+\mu\nabla_X Y\} = (\nabla_X Y)|_{U'} = (*)$

si $\bar X,\bar Y\in\mathfrak{X}(M)$ con $\bar X|_U = X|_U$ $\bar Y|_U = Y|_U \Rightarrow \mu X=\mu\bar X$ $\mu Y=\mu\bar Y$

y entonces $(\ldots)(x) = \nabla_{\mu \bar{X}} (\mu \bar{Y})\big|_{U} = (\nabla_{\bar{X}} \bar{Y})\big|_{U}$.

así podemos definir ahora para $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$

$$(\nabla^{U}_{X} Y)\big|_{U} = \nabla_{\mu X} (\mu Y)\big|_{U} \quad \text{pues } \mu X, \mu Y \in \mathfrak{X}(M)$$

definiendo $(\mu X)(x) = \begin{cases} \mu(x)\, X(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in M - \operatorname{sop}\mu. \end{cases}$

..... etc.

Por tanto, si

$(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ es una carta de M

Podemos escribir $\nabla_{\partial/\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ y entonces

$X = \sum X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ tenemos

$$\nabla_X Y = \nabla_X \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j} =$$

$$= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j X^i \nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

y como consecuencia de esta fórmula tenemos dos conclusiones. (8E

(a) $\nabla_X Y\big|_p$ sólo depende del "valor" $X(p) \in T_pM$ de X en p

En efecto, si $x_0 = \varphi(p)$ entonces

$$\nabla_X Y\big|_p = \left\{ X^i(x_0) \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\Big|_{x_0} + X^i(x_0)\, Y^j(x_0)\, \Gamma^k_{ij}(x_0) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$$

así si $\xi = X(p) = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ $\xi^i = X^i(x_0)$ entonces definimos

$$\nabla_\xi Y = \left\{ \xi^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\Big|_{x_0} + \xi^i Y^j(x_0)\, \Gamma^k_{ij}(x_0) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p \in T_pM$$

además si $\alpha : I \to U \subset M$ es una curva, $\varphi \circ \alpha : \{ x^i = x^i(t) \}$ se sigue $\alpha'(t) = \frac{dx^i}{dt} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$ y tenemos

$$\nabla_{\alpha'(t)} Y = \left\{ \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \frac{dx^i}{dt} Y^j\, \Gamma^k_{ij} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} \Bigg|_{x^i = x^i(t)} =$$

$$= \left\{ \frac{d(Y^k \circ \alpha)}{dt} + \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Y^j \alpha(t)\, \Gamma^k_{ij} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\alpha(t)}$$

y el valor sólo depende de los valores de Y a lo largo de α, es decir $Y \circ \alpha(t)$ (8-F.

Por tanto, llamando $V(t) = Y \circ \alpha(t)$ $V^i(t) = Y^i \circ \alpha(t)$

tendremos

$$\nabla_{\alpha'(t)} V = \left.\frac{\nabla V}{dt}\right|_t = \left\{ \frac{dV^k}{dt} + \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} V^j \, \Gamma^k_{ij} \circ \alpha \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{\alpha(t)}$$

DEFINICIÓN

Dada $\alpha : I \to M$, diferenciable, un campo a lo largo de α es $V : I \to TM$ diferenciable tal que

$\pi(V(t)) = \alpha(t)$

localmente (en una carta $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ se escribe $V(t) = \sum V^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\alpha(t)}$ donde las $V^i = V^i(t)$ son diferenciables

se define entonces $\frac{\nabla V}{dt} = \nabla_{\alpha'} V = \left\{ \frac{dV^k}{dt} + \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} V^j \, \Gamma^k_{ij} \circ \alpha \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{\alpha(t)}$

Si llamamos $\mathfrak{X}_\alpha(M)$ a la familia de de todos los campos a lo largo de M

tenemos que $\frac{\nabla}{dt} : \mathfrak{X}_\alpha(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_\alpha(M)$ verifica las propiedades (8-[redacted] 9)

$\forall\ V, W \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ $\forall\ f = f(t) : I \Rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable

1) $\frac{\nabla(V+W)}{dt} = \frac{\nabla V}{dt} + \frac{\nabla W}{dt}$ (2) $\frac{\nabla(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{\nabla V}{dt}$.

3) si $\bar{t} = \bar{t}(t)$ es un cambio de parámetro y $t = t(\bar{t})$

su inversa llamando $\bar{\alpha} = \alpha(t(\bar{t}))$

$\bar{V} = V(t(\bar{t}))$ $\bar{W} = W(t(\bar{t}))$ se tiene

$$\boxed{\left.\frac{\nabla V}{dt}\right|_t = \left.\frac{\nabla \bar{V}}{d\bar{t}}\right|_{\bar{t}=\bar{t}(t)} \left.\frac{d\bar{t}}{dt}\right|_t}$$

Definición (Geodésica)

En particular si $\gamma : I \Rightarrow M$ entonces $\gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$

decimos que γ es geodésica si

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = 0$$

En una carta (U,φ) tenemos $\quad \gamma'(t) = \dfrac{d(x^i \circ \gamma)}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)}$ (8-H)

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = \left\{ \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

de donde $\quad \left\{ \dfrac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \dfrac{dx^i}{dt}\cdot\dfrac{dx^j}{dt} = 0 \right\}_k$ son las

ecuaciones diferenciales de las geodésicas.

TEOREMA: $\forall p \in M$ $\xi \in T_pM$ $\exists!\ \gamma_\xi : I_\xi \to M$ geodésica

maximal con $\gamma_\xi(0) = p$ $\gamma_\xi'(0) = \xi$.

Además se cumple $\gamma_{a\xi}(t) = \gamma_\xi(at)$

Para cada $p \in M$ $\exists$ $\mathcal{U}_p \underset{ab}{\subset} T_pM$ tal que

$\forall \xi \in \mathcal{U}_p$ $1 \in I_\xi$ y $\exp_p : \mathcal{U}_p \longrightarrow U_p \underset{ab}{\subset} M$

$\xi \longrightarrow \gamma_\xi(1)$

es un difeomorfismo.

Transporte paralelo

Sea $M = M^m$ variedad y ∇ una conexión lineal simétrica.

definida en las coordenadas $(U, \varphi = (x^1 \ldots x^n))$ de una carta por los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k con $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

si $\alpha : J \to M$ es una curva diferenciable

definimos $\frac{\nabla}{dt} : \mathfrak{X}_\alpha(M) \to \mathfrak{X}_\alpha(M)$ con. $\frac{\nabla V}{dt} = \nabla_{\alpha'} V$ que en coordenadas se escribe para $V = V^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k}$ como

$$\frac{\nabla V}{dt} = \left\{ \frac{dV^k}{dt} + V^i \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Llamando $\Gamma_i^k(t) = \Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{dt}$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^k \\ \vdots \\ \Gamma_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^k & \cdots & \Gamma_{1n}^k \\ \vdots & & \\ \Gamma_{n1}^k & - & \Gamma_{nn}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1/dt \\ \vdots \\ dx^n/dt \end{pmatrix}$$

$(k = 1 \ldots n)$

$$\frac{\nabla V}{dt} = \left\{ \frac{dV^k}{dt} + V^i \Gamma_i^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} dV^1/dt \\ \vdots \\ dV^n/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_1^1, & \ldots, & -\Gamma_n^1 \\ \vdots & & \\ -\Gamma_1^n & & -\Gamma_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix}$$

Sea $\mathfrak{X}^{\parallel}_{\alpha}(M)=\{V\in\mathfrak{X}_{\alpha}(M) \,/\, \frac{DV}{dt}=0\}$ (8-J

Entonces $\mathfrak{X}^{\parallel}_{\alpha}(M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

si si $\alpha: I=[a,b]\longrightarrow U$, con $(U,\varphi=(x^1,\dots,x^n))$ carta de M tenemos

$$V\in\mathfrak{X}^{\parallel}_{\alpha}(M) \iff \frac{dV^k}{dt}=-\Gamma^{k}_{i}(t)\,dx^i$$

por lo que fijado $\xi=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(a)}\in T_{\alpha(a)}M$ $\exists!$ $V_\xi\in\mathfrak{X}^{\parallel}_{\alpha}(M)$ tal que $V_\xi(a)=\xi$

y la aplicación: $T_{\alpha(a)}M\ni\xi\longrightarrow V_\xi\in\mathfrak{X}^{\parallel}_{\alpha}(M)$ es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal

Denotamos $\overset{b}{\underset{a}{\parallel}}\xi=V(b)$ de forma que $V(t)=\overset{t}{\underset{a}{\parallel}}\xi$ $\forall t$

Si $\alpha:[a,b]\longrightarrow M$ es una curva continua y diferenciable a trozos $(a=t_0<\dots<t_r=b)$ con $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}\subset U_i$ carta

$\xi\in T_{\alpha(a)}M$ definimos para $\xi\in T_{\alpha(a)}M$

$$\overset{b}{\underset{a}{\parallel}}\xi=\overset{t_r}{\underset{t_{r-1}}{\parallel}}\cdots\overset{t_2}{\underset{t_1}{\parallel}}\cdot\overset{t_1}{\underset{t_0}{\parallel}}\xi$$

y $T_{\alpha(a)}M\longrightarrow\mathfrak{X}^{\parallel}_{\alpha}(M)$, $\xi\longrightarrow\overset{b}{\underset{a}{\parallel}}\xi$ es isomorfismo lineal

8K

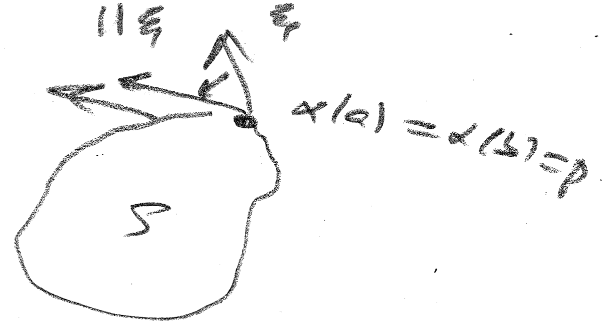
Si la conexión ∇ es Riemanniana en (M,g) entonces se verifica la propiedad: $\forall\, V, W \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

En particular si $A, B \in \mathfrak{X}_\alpha^{\parallel}(M)$ es $\frac{d}{dt}\langle A,B\rangle = 0$ y por lo tanto $\langle A,B\rangle = cte$. Esto significa que

$\overset{b}{\underset{a}{\parallel}} : T_{\alpha(a)}M \longrightarrow T_{\alpha(b)}M$ es una isometría

Si $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ entonces $\overset{b}{\underset{a}{\parallel}} : T_pM \longrightarrow T_pM$ induce un giro de ángulo θ.



En la teoría de superficies, este ángulo viene medido por la integral $\int_S K\, d\sigma$ de la curvatura de Gauss en el recinto determinado por la curva.