LECCION 9

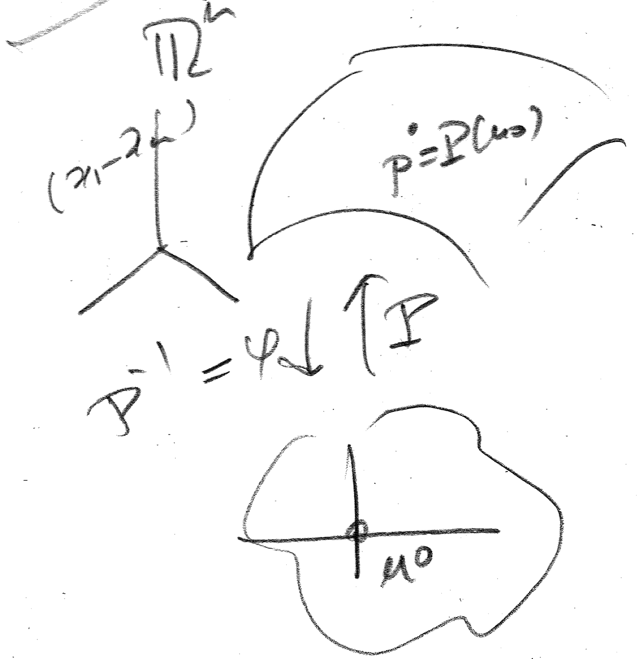
LA CONEXION DE LEVI-CIVITA.

(M,g) Riemanniana $\exists!\ \nabla$ conexión métrica y simétrica

¡¡¡MILAGRO!!!

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X Y)\big|_p = D_{X(p)} Y$$



$$\left(\frac{\partial P}{\partial u^i}\Big|_{u_0}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

$$(g_{ij}^{\varphi}) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u^i}, \frac{\partial P}{\partial u^j} \right\rangle = DP^t \cdot DP.$$

LA CONEXION DE LEVI-CIVITA

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Esto significa que $\forall p \in M$ tenemos $g_p : T_pM \times T_pM \ni (\xi, \eta) \to \langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{R}$ que un producto escalar euclídeo.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se define $\langle X, Y \rangle : M \ni p \to \langle X(p), Y(p) \rangle \in \mathbb{R}$

y tenemos $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$.

TEOREMA (Fundamental de la Geometría Riemanniana)

Si (M, g) es Riemanniana, existe una única conexión lineal (o derivada covariante) $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \to \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$

que verifica $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (simetría)

(b) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

Se denomina a ∇, conexión de Levi-Civita de (M, g)

Demostración

Lo probaremos para una VRC (M, g) donde $M \underset{as}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x^1 \ldots x^n)$ $g = \sum g_{ij}\, dx^i dx^j$ en donde

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1 \ldots x^n) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$$

Recordemos que una curva $\gamma : I \to M$ la llamábamos geodésica, si era extremal para la función energía $E : TM \ni (x, \dot{x}) \longrightarrow \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x)\, \dot{x}^i \dot{x}^j \in \mathbb{R}$ entre dos cualesquiera de sus puntos $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ $a < b$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange probaban que deberían satisfacer las ecuaciones

$$\left.\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt} = 0 \right\} k = 1 \ldots n.$$

donde $\Gamma^h_{ij} = g_{hk} \Gamma_{kij}$ siendo

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}$$

Vamos a demostrar que precisamente la conexión ∇ que buscamos viene definida por los símbolos Γ^k_{ij} es decir $\nabla_{\partial/\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^k}$

En efecto (olvidémonos del significado de los Γ^k_{ij} en 9-B)

si existiese una conexión de Levi-Civita para (M^n, g) tendríamos por ser simétrica $\boxed{\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}}$ (*) y

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\partial/\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \Gamma^h_{ki} \frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^h_{kj} \frac{\partial}{\partial x^h}\right\rangle =$$

$$= g_{hj}\Gamma^h_{ki} + g_{ih}\Gamma^h_{kj}$$

denotamos $g_{hj}\Gamma^h_{ki} = \Gamma_{jki}$

por (*) es $\boxed{\Gamma_{jki} = \Gamma_{jik}}$

así tenemos

$$(1) \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \qquad (1)$$

análogamente podemos escribir

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} & (2) \\ \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} & (3) \end{array} \right.$$

así que teniendo en cuenta que $\Gamma_{jki} = \Gamma_{jik}$ (9-D)

tenemos $\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} + \cancel{\Gamma_{jik}} + \Gamma_{kij} \\ \quad - \cancel{\Gamma_{jkj}} - \cancel{\Gamma_{jki}} \end{array} \right\} =$

$= 2\Gamma_{kij}$ que es justo lo que aparece en la página (9-B)

Ahora se puede probar que en efecto esta conexión es simétrica y métrica, pues si $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

es $\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(Y^j \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\{X^i \dfrac{\partial Y^k}{\partial x_i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right\} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ $\quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

$\nabla_Y X = \left\{Y^i \dfrac{\partial X^k}{\partial x_i} + Y^i X^j \Gamma_{ij}^k\right\} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ $\Longrightarrow$

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \left(X^i \dfrac{\partial Y^k}{\partial x_i} - Y^i \dfrac{\partial X^k}{\partial x_i}\right) \dfrac{\partial}{\partial x_k} = [X, Y]$.

Además $X\langle Y, Z\rangle = \left(X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) \left\langle Y^j \dfrac{\partial}{\partial x_j}, Z^k \dfrac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle =$

$= \left(X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)\left((Y^j Z^k) \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_j}, \dfrac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle\right) = X^i \dfrac{\partial (Y^j Z^k)}{\partial x_i} + X^i Y^j Z^k \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}$

9-E

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \left\langle X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}, Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle + \left\langle X^i Y^j \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h}, Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle$$

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} Z^k g_{jk} + X^i Y^j Z^k \Gamma_{ij}^h g_{hk} \to \Gamma_{kij}$$

$$+$$

$$\langle Y, \nabla_X Z\rangle = X^i Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} g_{jk} + X^i Y^j Z^k \Gamma_{ik}^h g_{hj} \to \Gamma_{jik}$$

$$\|$$

$$\boxed{\Gamma_{kij} + \Gamma_{jik} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}} \; !!! \iff \frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle$$

$$X\langle Y, Z\rangle \leftarrow \frac{\partial (Y^j Z^k)}{\partial x^i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} Z^k + Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^i}$$

Demostración del Teorema

Si (M,g) es riemanniana, y (U,φ) es una carta de M $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$ hemos probado que la conexión $\nabla^U=\nabla^\varphi$ definida por

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\quad \text{con}\quad \Gamma_{ij}^k=g^{kh}\Gamma_{hij}\quad \Gamma_{hij}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right\}$$

es la única métrica y simétrica en (U,g)

si $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ se define $\nabla_X Y\big|_U=\nabla^U_X Y$ y esta definición carece de ambigüedad.

Si aún hay alguien a quien no le convence este razonamiento tengo otro (Fórmula de Koszul).

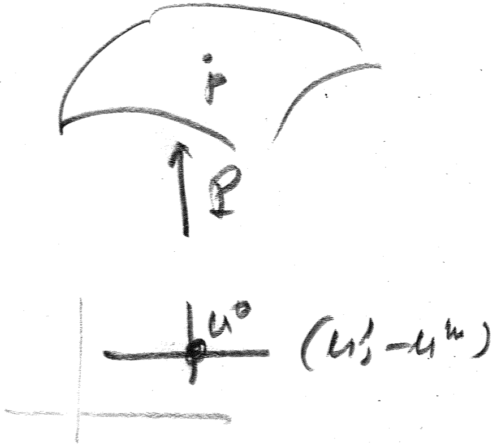
VARIEDADES EUCLIDEAS

Sea $M^m \underset{\text{v.e}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$. Dotamos $g_{\mathbb{R}^n} = \sum (dx^i)^2$ la métrica canónica.

Si $P: \mathbb{R}^m \underset{\text{ab}}{\supset} \mathcal{U} \longrightarrow P(\mathcal{U}) = U \underset{\text{ab}}{\subseteq} M^m$ es una parametrización local: $P: \begin{cases} x^1 = x^1(u^1 \dots u^m) \\ \vdots \\ x^n = x^n(u^1 \dots u^m) \end{cases}$ entonces en cada $p = P(u_0)$

tenemos $T_pM = \{p\} \times L\left(\frac{\partial P}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial u^m}\right)_{u=u_0} \subset$

$\subset T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$



pero $\left(\frac{\partial P}{\partial u^i}\Big|_{u=u_0}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$!!!

ya que $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_p$ y

$$\left(\frac{\partial P}{\partial u^i}\Big|_{u=u_0}\right)_p = \frac{\partial x^j}{\partial u^i}\Big|_{u=u_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

$f = f(x^1 \dots x^n)$

$$\frac{\partial(f \circ P)}{\partial u^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^i} \quad !!!$$

así que $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n$ "hereda" por restricción una métrica. para cada $p \in M$ que en las coordenadas $(u_1, \dots, u_m)$ de la carta $\varphi = P^{-1}$ se escribe

$$g_{ij}^{\varphi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u_i}, \frac{\partial P}{\partial u_j} \right\rangle = DP^t \cdot DP.$$

→ la llamada I F.F.

Veamos cual es su conexión de L-C.

Sea D la conexión canónica de $(\mathbb{R}^n; g_{\mathbb{R}^n})$

si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definimos para cada $p \in M$

$$(\nabla_X Y)\big|_p = \left(D_{X(p)} Y\right)^{TAN} \in T_pM$$

en donde hemos denotado

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{R}^n &\longrightarrow T_pM \\ \xi &\longrightarrow \xi^{TAN} = \text{ su} \end{aligned}$$

proyección ortogonal en $T_p\mathbb{R}^n = (T_pM) \oplus (T_pM)^{\perp}$

observese que $D_{X(p)}Y$ tiene sentido pues conocemos Y a lo largo de una curva que define $X(p)$

Hay que probar

(1) $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ (es un campo diferenciable)

(2) $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es conexión

(3) ∇ es simétrica

(4) ∇ es métrica.

(4) veamos que es métrica tenemos $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle D_X Y, Z \rangle = \langle (D_X Y)^{TAN}, Z \rangle + \cancel{\langle (D_X Y)^{NOR}, Z \rangle}$$

$$\langle Y, D_X Z \rangle = \langle Y, (D_X Z)^{TAN} \rangle$$ sumando:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$ c.q.d.

(3) veamos que es simétrica si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

pongamos $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ / $\overline{X}|_M = X$ $\overline{Y}|_M = Y$

entonces $[\overline{X}, \overline{Y}]|_M = [X, Y]$ (Ejercicio) entonces se tiene: (9-5)

para todo $p \in M$ $\left(D_{\bar{X}} \bar{Y}\right)\Big|_p = D_{\bar{X}(p)} \bar{Y} = D_{X(p)} Y$ por tanto

se tiene $\left(D_{\bar{X}} \bar{Y}\right)^{TAN} = \nabla_X Y$ así que partiendo

de la igualdad $D_{\bar{X}} \bar{Y} - D_{\bar{Y}} \bar{X} = [\bar{X}, \bar{Y}]$

y tomando la parte tangente (restringida a M) tenemos

$$\left(D_{\bar{X}} \bar{Y}\right)^{TAN} - \left(D_{\bar{Y}} \bar{X}\right)^{TAN} = [\bar{X}, \bar{Y}]^{TAN}$$ es decir

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

En particular, una curva $\gamma : I \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ es

geodésica $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\nabla \gamma'}{dt} = \left(\dfrac{D\gamma'}{dt}\right)^{TAN} = \gamma''(t)^{TAN} = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)} M.$