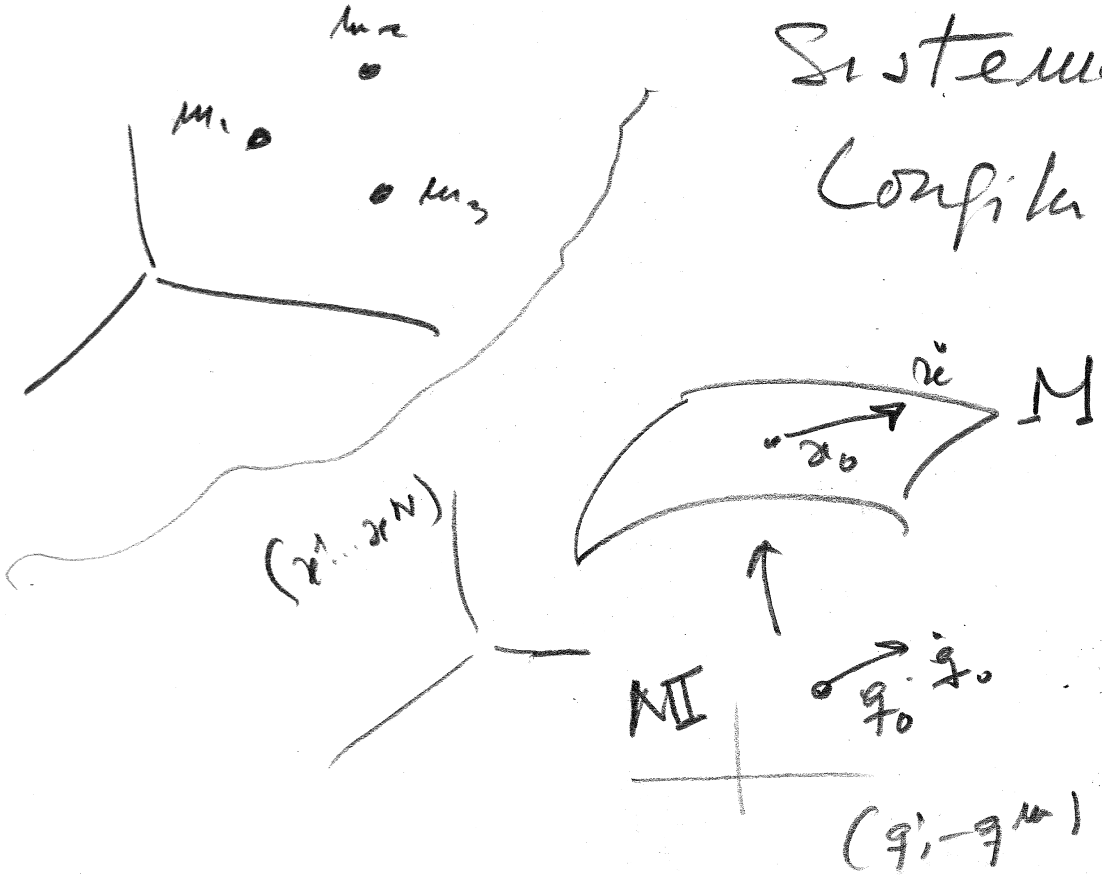
LECCIÓN 2

Sistemas Mecánicos
Configuración y Energía



$$x^i = x^i(q^1 \ldots q^n)$$
$$\dot{x}^i = DP|_x \, \dot{q}$$

Sistemas holónomos

Sistemas holónomos de Partículas. **2-A**

Consideremos un sistema de N partículas $P_1,\dots,P_N$ con masas $m_1,\dots,m_N$ que vagan por $\mathbb{R}^3$. En cada instante su posición viene determinada por $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ con $n=3N$ de forma que $(x^{3i-2},x^{3i-1},x^{3i})=P_i$. La velocidad instantánea de la partícula P_i viene determinada por $\vec{v}_i=(\dot{x}^{3i-2},\dot{x}^{3i-1},\dot{x}^{3i})$

de forma que los datos $(x,\dot{x})=(x^1,\dots,x^n,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)$ determinan el stado del sistema. Así el conjunto de todos los posibles estados es

$$T\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n=\left\{(x,\dot{x})\ \middle/\ \begin{array}{l}x\in\mathbb{R}^n\\ \dot{x}\in\mathbb{R}^n\end{array}\right\}$$

de forma que si $\gamma(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))$ $\gamma: I\to\mathbb{R}^N$ es "una curva de evolución del sistema" que indica la posición del sistema en cada instante t, entonces

$$\gamma'(t)=((x^1(t),\dots,x^n(t)),(x^1)'(t),\dots,(x^n)'(t))\in T\mathbb{R}^n$$

$$\gamma':\begin{cases}x^i=x^i(t)\\ \dot{x}^i=(x^i)'(t)\end{cases}$$ denota el stado del sistema en ese instante.

se define la energía cinética del sistema en la posición $(x, \dot{x})$ como

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i (\dot{x}^i)^2 \quad : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{donde}$$

se supone $M_{3i-2} = M_{3i-1} = M_{3i} = m_i$ es la masa de la partícula p_i (obsérvese que no depende de la posición)

y podemos construir una métrica riemanniana en $\mathbb{R}^N$ G

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_n \end{pmatrix} = (G_{ij})$$

$$K = \frac{1}{2} (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^N) (G_{ij}) \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} G(\dot{x}, \dot{x})$$

Nótese que $(\mathbb{R}^N, G)$ es una VRC en donde

para cada $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad G|_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(\xi, \eta) \longrightarrow \sum M_i \xi^i \eta^i$$

si todas las masas $m_i = 1$, tenemos el producto escalar ordinario.

Un sistema de ligaduras viene definido por funciones

$\{F_j(x, \dot{x}) = 0\}_{j=1\ldots r}$ de manera que $\gamma(t)$ curva de evolución a $F_j(\gamma(t), \gamma'(t)) \equiv 0$.

(2-6

Un sistema mecánico holónomo, viene determinado por una variedad embebida $M^m \subset_{V.E} \mathbb{R}^n$ de forma que M^m describe el espacio de todas las posiciones del sistema. Se dice que tiene n grados de libertad.
Esta condición impone también ligaduras sobre las velocidades.

Una parametrización $M^m \xrightarrow{P} M_0$ viene definida por $P: \begin{cases} x^1 = P^1(q^1, \dots, q^m) \\ \vdots \\ x^n = P^n(q^1, \dots, q^m) \end{cases}$ que describe el espacio de las posiciones.

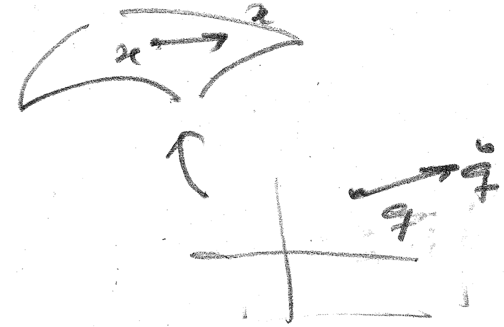
Las coordenadas $(q^1, \dots, q^n)$ se denominan "coordenadas generalizadas".
entonces fijado $x_0 \in M$ $\quad x_0 = P(q_0^1, \dots, q_0^m) = P(q_0)$

$$y \; T_{x_0}M = L\left(\frac{\partial P}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q^m}\right)\Big|_{q_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot x_0^1 \\ \vdots \\ \dot x_0^m \end{pmatrix} = DP\Big|_{q_0} \begin{pmatrix} \dot q_0^1 \\ \vdots \\ \dot q_0^m \end{pmatrix} : \dot q_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

~~de forma que~~ $\cancel{\left(\frac{\partial P}{\partial q^1}, \frac{\partial P}{}\right)}$

$(q_0, \dot q_0)$ describe un posible estado del sistema M^0

$$\begin{cases} x = P(q) \\ \dot x = DP(\dot q) \end{cases}$$



$x \in TM = \{ (x, \dot x) / \dot x \in T_x M \}$

Supongamos ahora que el sistema esté sometido a ligaduras holonomas, **(2-D)**
esto significa que está constreñido a "moverse" en una variedad euclídea $M^m \subset \mathbb{R}^n$, con una parametrización:

$$P : \begin{cases} x^1 = P^1(q^1, \dots, q^m) \\ \vdots \\ x^n = P^n(q^1, \dots, q^m) \end{cases} \quad \text{entonces} \quad T_{P(q)} M = L\left(\frac{\partial P}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q^m}\right)\Big|_q$$

y en $\mathbb{R}^n$ tenemos la métrica

$$\langle \xi, \eta \rangle = (\xi^1 \dots \xi^n) \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = (*)$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = DP\big|_q \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \sum \frac{\partial P}{\partial q^i} \lambda_i$$

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = DP\big|_q \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \sum \frac{\partial P}{\partial q^j} \mu_j$$

$$(*) = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial P}{\partial q^i}, \frac{\partial P}{\partial q^j} \right\rangle = \sum_k M_k \frac{\partial P_k}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q^j}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q^i} = \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial q^i \\ \vdots \\ \partial x^n / \partial q^i \end{pmatrix}$$

y la energía del estado definido por $(q, \dot q)$ es

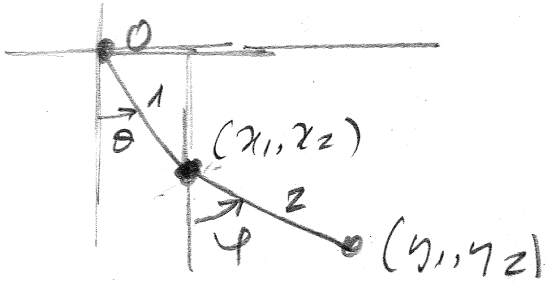
$$K(q,\dot q) = (\dot x^1, \ldots, \dot x^n)\,(G_{ij})\begin{pmatrix}\dot x^1\\ \vdots \\ \dot x^n\end{pmatrix} = \dot x^t\,(M_{ij})\,\dot x =$$

$$= \dot q^t\, DP^t\,(G_{ij})\,DP\,\dot q$$ y llamando

$$(g_{ij}) = DP^t\,(G_{ij})\,DP\,; \quad g_{ij} = \sum_k \frac{\partial P^k}{\partial q^i}\frac{\partial P^k}{\partial q^j} M_k$$

~~tenemos definida una~~ VRC $(M\mathbb{I}, g)$ de forma que $K(q,\dot q) = \frac{1}{2}\, g_q(\dot q,\dot q)$ representa la energía cinética del sistema en el estado definido por $(x,\dot x) = (P(q), DP(\dot q)) = dP(q,\dot q)$

Ejemplo: Péndulo doble en un plano



$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \operatorname{sen}\theta \\ y_1 &= \cos\theta + 2\cos\varphi \\ y_2 &= \operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\}$$

θ, φ son coordenadas generalizadas

ENERGIA y LONGITUD de una curva. (2.7)

Dada una curva $\alpha:[a,b]\to M$ regular en una VRC (M,g) se llama energía y longitud de α a

$$E(\alpha)=\frac{1}{2}\int_a^b \langle \alpha'(t),\alpha'(t)\rangle\, dt \quad y \quad L(\alpha)=\int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

que es la acción definida por las funciones

$TM\to\mathbb{R}$ $\quad K=\frac{1}{2}\sum g_{ij}(x^1,\dots x^n)\dot{x}^i\dot{x}^j$ y $L=\sqrt{2K}$

respectivamente.

Lema: $\quad L(\alpha)^2\leq 2(b-a)\,E(\alpha)$ y $L(\alpha)^2=2(b-a)E(\alpha) \Leftrightarrow |\alpha'|=\text{cte}$

Demostración: si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son funciones continuas entonces $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ define en $\mathcal{C}([a,b])$ un producto escalar y la desigualdad de Cauchy-Swartz asegura que $\quad \langle f,g\rangle\leq |f|\,|g|$ y se realiza la igualdad si y sólo si f y g son proporcionales

PROPOSICIÓN. $\Omega(p,q) = \{\alpha : [a,b] \to M$ regular $|\ \alpha(a)=p\ \ \alpha(b)=q\}$

Supongase que $\gamma : [a,b] \to M$ es curva regular que minimiza la longitud. Supongase $|\gamma'| = cte.$

Entonces $\forall\, \alpha \in \Omega(p,q) \Rightarrow E(\gamma) \leq E(\alpha)$ y además se tiene la equivalencia: $E(\gamma) = E(\alpha) \Leftrightarrow L(\alpha) = L(\gamma)$ y $|\alpha'| = cte$

Demostración:

$$2(b-a)E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\alpha)^2 \leq 2(b-a)\,E(\alpha)$$ además

$$E(\gamma) = E(\alpha) \Leftrightarrow L(\alpha)^2 = 2(b-a)E(\alpha) \Leftrightarrow |\alpha'| = cte,\ L(\alpha) = L(\gamma)$$

Fijados los puntos $p, q \in M$ $p \neq q$ estamos interesados en buscar curvas γ que minimizan la longitud entre p y q. Estas curvas γ, debemos de buscarlas entre las curvas $\gamma : [a,b] \to M$ con $\gamma(a) = p$ $\gamma(b) = q$ $(|\gamma'| = cte\ ^*)$ que minimizan la energía.

(*) A posteriori se prueba que si γ minimiza la energía, entonces necesariamente $|\gamma'| = cte.$

Tomando $f = |\alpha'|$ $g=1$ tenemos de $\langle f,g\rangle^2 \leq |f|^2 |g|^2$: (2-54)

$$L(\alpha)^2 = \left(\int_a^b |\alpha'|\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b |\alpha'|^2 dt\right) \int_a^b dt = 2(b-a)\, E(\alpha)$$

<u>además</u> $L(\alpha)^2 = 2(b-a)\, E(\alpha) \Leftrightarrow |\alpha'| = cte.$

Una curva $\gamma : [a,b] \to M^2$ regular, se dice que minimiza la longitud si es la curva regular más corta que une los extremos $p = \gamma(a)$ $q = \gamma(b)$ dentro de M^2.

Naturalmente si $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, entonces también $\gamma_1 = \gamma|_{[a_1,b_1]}$ minimiza la longitud.

Como la longitud NO depende del cambio de parámetro, podemos suponer ~~que suponer~~ sin pérdida de generalidad que $|\gamma'| = cte.$

Conclusión Final.

Sea $\gamma \in \Omega(p,q)$ con $|\gamma'| = cte.$ Entonces son equivalentes

(1) γ minimiza longitud

(2) γ minimiza energía.

Dem.

(1) $\Rightarrow$ (2) es consecuencia de la primera afirmación de la proposición anterior

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall\, \alpha \in \Omega(p,q)$ se tiene

$$L(\gamma)^2 \underset{|\gamma'| = cte}{=} 2(b-a)E(\gamma) \leq 2(b-a)E(\alpha) = *$$

pero como la longitud no depende de la parametrización podemos reparametrizarla de manera que $|\alpha'| = cte$

y entonces $* = L(\alpha)^2$

por tanto γ minimiza longitud.