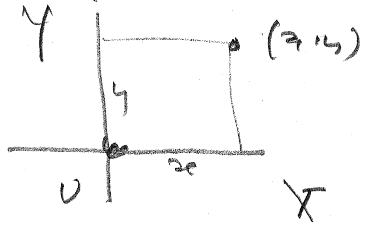
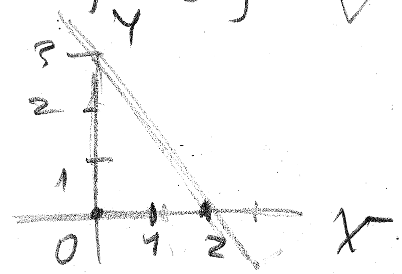
SESIÓN 1

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ que podemos representar como el conjunto de puntos de un plano afín $\mathbb{A}^2$.



Por ejemplo, la ecuación
$$6-3X-2Y=0$$
representa la ecuación de una recta

$L = \{(x,y) \mid 6-3x-2y=0\}$ que podemos dibujar así



En general, la ecuación de una recta L es $u_0+u_1X+u_2Y=0$, donde se supone que $(u_1,u_2) \neq (0,0)$, además $u'_0+u'_1X+u'_2Y=0$ es la ecuación de la misma recta L si y solo si existe $\lambda \neq 0$
$(u'_0,u'_1,u'_2) = \lambda(u_0,u_1,u_2)$
así una recta tiene infinitas ecuaciones. Para indicar que los coeficientes están definidos salvo proporcionalidad escribimos $(u_0:u_1:u_2)$

Vamos a considerar el plano proyectivo:

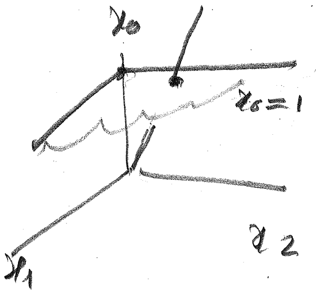
$$\mathbb{P}_2 = \{(x_0:x_1:x_2) \mid (x_0,x_1,x_2) \neq (0,0,0)\}$$

Tenemos entonces una aplicación inyectiva del conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{A}^2)$ de las rectas afines de $\mathbb{A}^2$ en $\mathbb{P}_2$ $L:(u_0+u_1X+u_2Y) \mapsto (u_0:u_1:u_2)$

el único punto en $\mathbb{P}_2$ no cubierto es el $(1:0:0)$

Podemos también representar los puntos (x,y) del plano afín $\mathbb{A}_2$ dentro del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$

$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow (1:x:y) \in \mathbb{P}_2$ que es una aplicación inyectiva, 1.2



pero ahora, se han quedado fuera todos los puntos en $\mathbb{P}_2$ de la forma $(0:v_1,v_2)$
$(v_1,v_2)\neq(0,0)$.

así podemos escribir coordenadas homogéneas de (x,y)

$$\mathbb{A}_2=\{(1:x:y) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \qquad (v_1,v_2)\neq(0,0)$$

y los puntos de la forma $(0:v_1,v_2)$ se llaman puntos del infinito de $\mathbb{A}_2$.

$$\infty_{\mathbb{A}_2}=\{(0:v_1,v_2) \,/\, (v_1,v_2)\neq(0,0)\}$$

Vamos a interpretar geométricamente los ptos del infinito:

Si $L:(u_0+u_1X+u_2Y=0)$ es una recta afín. podemos escribir $L=\{(1:x:y) \,/\, u_0+u_1x+u_2y=0\}=$

$$=\{(x_0:x_1:x_2) \,/\, \underset{x_0\neq 0}{u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0}\}$$

si llamamos $\overline{L}=\{(x_0:x_1:x_2) \,/\, u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0\}$

entonces. $\overline{L}=L\cup\{(0:x_1:x_2) \,/\, u_1x_1+u_2x_2=0\}=$
$=L\cup\{(0:v_1:v_2)\}$ donde
(v_1,v_2) es el vector director de L.

a $(0:v_1,v_2)=\infty_L$ se llama pto del infinito de L. y a $\overline{L}$ es el completado proyectivo de L

En consecuencia, dos rectas L y L' de $\mathbb{A}_2$ tienen el mismo pto del infinito $\iff$ $L \| L'$. (13)

Definición.

Una recta de $\mathbb{P}_2$, es un subconjunto de la forma $\{(x_0:x_1:x_2) \mid u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0\} = \Delta$ y escribimos $\underset{\sim}{L}: (u_0X_0+u_1X_1+u_2X_2=0)$ donde se supone $(u_0,u_1,u_2) \neq (0,0,0)$, y la ecuación de la recta $\underset{\sim}{L}$ está determinada por $(u_0:u_1:u_2)$ así que tenemos una biyección. Dada $\mathbb{P}_2^* \longrightarrow \mathbb{P}_2$

$$\underset{\sim}{L} \longrightarrow (u_0:u_1:u_2).$$

donde $\mathbb{P}_2^*$ indica el conjunto de rectas de $\mathbb{P}_2$.

Pregunta. ¿todas las rectas de $\mathbb{P}_2$ se obtienen completando rectas afines?

No: recordemos que si $L: u_0+u_1X+u_2Y=0$ es $(u_1,u_2)\neq(0,0)$ así que cuando $(u_1,u_2)=(0,0)$ tenemos la recta $\infty: (X_0=0)$ que es la recta del infinito $\mathbb{A}_2$, y no es la completada de una recta afín.

Principio de dualidad.

Una recta en $\mathbb{P}_2^*$ viene definida por la ecuación $a_0u_0+a_1u_1+a_2u_2=0$ y es el conjunto de todas las rectas $u_0X_0+u_1X_1+u_2X_2=0$ que pasan por el punto $(a_0:a_1:a_2)$.

$$(a_0,a_1,a_2) \neq (0,0,0)$$

Así en el plano proyectivo dual $\mathbb{P}_2^*$

- un punto, viene definido por una recta en $\mathbb{P}_2$
- una recta, viene definida por un pto de $\mathbb{P}_2$ *

El principio de dualidad afirma que

Si hemos demostrado un enunciado $\mathcal{E}$ geometría proyectiva del plano, en donde intervienen rectas, puntos $\subset$, $\supset$,

Podemos también dado por demostrado un enunciado $\mathcal{E}^*$ (enunciado dual) obtenido a partir de $\mathcal{E}$ cambiando

> donde dice punto, ponemos recta
> donde dice recta, ponemos punto
> donde dice "contenido", ponemos contiene
> donde dice contiene, ponemos contenido

La demostración de este hecho, reside en la idea de aplicar $\mathcal{E}$ al plano proyectivo $\mathbb{P}_2^*$ y reinterpretar el enunciado en $\mathbb{P}_2$.

Ejemplo: $\mathcal{E}$: por dos puntos distintos pasa una única recta.

$\mathcal{E}^*$: dos rectas distintas se cortan en un único punto.

$\mathcal{E}$: $\forall a, b$ ptos $a \neq b$, $\exists!\, c$ recta con $a \subset c$, $b \subset c$

$\mathcal{E}^*$ $\forall a, b$ rectas $a \neq b$ $\exists!\, c$ pto. con $a \supset c$, $c \supset b$.