CUADRICAS PROYECTIVAS CLASIFICACIÓN

Una cuádrica en $\mathbb{P}_n$, viene "en principio" definida a partir de una matriz simétrica. $a_{ij}=a_{ji}$

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} a_{00} & c^t \\ \hline c & A_{00} \end{array}\right)$$

mediante la ecuación $x^tAx=0$ es decir

$$(x_0,x_1,\dots,x_n)\,A\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0.$$

que indica el conjunto

$$\operatorname{im}\mathcal{C}=\{(x_0:\dots:x_n)\,/\,x^tAx=0\}$$

Pero convendremos en decir que $\mathcal{C}$ viene determinada por A salvo constantes multiplicativas no nulas. Es decir por la ecuación:

$$a_{00}x_0^2+2a_{01}x_1^2+\dots+2a_{0n}x_n^2+\dots+a_{nn}x_n^2=0.$$

Así las "cuádricas" en $\mathbb{P}_1$ son.

$$\mathcal{C}:\ a_{00}x_0^2+2a_{01}x_0x_1+a_{11}x_1^2=0$$

y las cuádricas en $\mathbb{P}_2$ (cónicas) son.

$$\mathcal{C}:\ a_{00}x_0^2+2a_{01}x_1^2+2a_{02}x_2^2+$$
$$+a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0$$

Si en $\mathbb{P}_n$ hacemos un cambio de coordenadas $\begin{pmatrix} x_0 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_0 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$ donde

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \text{—} & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \text{—} & p_{1n} \\ | & & & \\ p_{n0} & p_{n1} & & p_{nn} \end{pmatrix}$$ entonces

haciendo "sustitución formal" en la ecuación $x^t A x = 0$ obtenemos

$$0 = (Py)^t A (Py) = y^t (P^t A P) y$$

y tomando $B = P^t A P$ observamos que $B^t = (P^t A P) = P^t A^t P^{tt} = P^t A P = B$

y decimos que $(y_0, y_1, \ldots y_n) B \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_n \end{pmatrix} = 0$

son las ecuaciones de $\mathcal{C}$ en el nuevo sistema de coordenadas.

Nos preguntamos si dada una cuadrica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}_n$, existirá un sistema de coordenadas respecto al cual su ecuación sea lo más "sencilla posible"

Por ser A una matriz simétrica, sabemos por álgebra lineal que es diagonalizable, es más, existe una matriz P no singular con $P^tP=I$ de forma que

$$P^tAP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ si hacemos

el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$ la nueva ecuación de

e nos queda $y^t(P^tCP)y=y^t\Lambda y=0$ es

decir: $(\lambda_0y_0^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=0)$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_0,\dots,\lambda_r$ son positivos $\lambda_{r+1},\dots,\lambda_{r+s}$ son negativos y $\lambda_{r+s+1}=\cdots=\lambda_n=0$ con lo que podemos escribir la ecuación $y^t\Lambda y=0$ de la forma

$$(\sqrt{\lambda_0}\,y_0)^2+\cdots+(\sqrt{\lambda_r}\,y_r)^2$$
$$-(\sqrt{-\lambda_{r+1}}\,y_{r+1})^2-\cdots-(\sqrt{-\lambda_{r+s}}\,y_{r+s})^2=0$$

donde "$\sqrt{\ }$" se ha tomado raíz positiva. y haciendo el cambio

$z_0=\sqrt{\lambda_0}\,y_0,\dots,z_r=\sqrt{\lambda_r}\,y_r$ $\qquad z_{r+s+1}=y_{r+s+1}$

$z_{r+1}=\sqrt{-\lambda_{r+1}}\,y_{r+1},\dots,z_{r+s}=\sqrt{-\lambda_{r+s}}\,y_{r+s}$ $\qquad \vdots \qquad z_n=y_n$

nos quedan las ecuaciones reducidas

$$\underbrace{z_0^2+z_1^2+\dots+z_r^2}_{r+1}-\underbrace{z_{r+1}^2-\dots-z_{r+s}^2}_{s}=0 \qquad (r+s\le n)$$

(10-3)

NOTA:

$(x_0,\dots x_n)\,A\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=q(x_0,\dots x_n)$ puede interpretarse como una forma cuadrática en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $r+1, s, n-r-s$ representan los índices de positividad, negatividad, y nulidad, que están asociados a $q:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$.

Como la cuádrica está determinada por $[A]\simeq[q]$ se concluye que la signatura:

$(|r-s+1|,\ n-r-s)$, son números enteros no negativos, que se asocian a la cuádrica $\mathcal{C}$, y estos números determinan (salvo signo) su ecuación reducida.

Esto significa que dos cuádricas con distinta signatura, no pueden tener la "misma" ecuación reducida.

Si convenimos en tomar $r+1\geqslant s$ entonces la signatura de $\mathcal{C}$ sería

$\{r-s+1,\ r+s+1\}=\{\sigma,\rho\}$

$\sigma=|$nº sumandos positivos $-$ nº sumandos negativos$|$ = signatura proyectiva

$\nu=$ nº sumandos nulos; $\rho=$ rango.

DEFINICION

(10-4)

Dos cuádricas $\mathcal{C}: (x^t A x = 0)$ y $\mathcal{C}': (x^t A' x = 0)$ en $\mathbb{P}_n$ se dicen proyectivamente equivalentes, admiten las "mismas" ecuaciones reducidas.

Esto significa que existen cambios de coordenadas

$x = Pz$, $x = Qz$ que dan lugar para $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ a las mismas ecuaciones reducidas

$$\mathcal{C}_{red}: (z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \cdots - z_{r+s}^2 = 0)$$

NOTA:

todo esto se puede interpretar de otra forma:

si $\mathcal{C}: (x^t A x = 0)$ es una cuádrica en $\mathbb{P}_n$ y $\underset{y}{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{f} \underset{x}{\mathbb{P}^n}$ es homografía con ecuaciones $x = Py$

entonces la cuádrica $\mathcal{C}$ (que vive en el segundo $\mathbb{P}_n$) se transforma por f^{-1} en la cuádrica $f^{-1}\mathcal{C}: (y^t(P^t A P)y = 0)$

miradas así las cosas, dos cuádricas $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{P}_n$ son proyectivamente equivalentes, si y solo si existe una homografía $f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ tal que $f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

Hemos establecido por tanto el siguiente

TEOREMA

Dos cuádricas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ en $\mathbb{P}_n$ son proyectivamente equivalentes si y solo si tienen la misma signatura.

$$(\sigma, \rho) = (|r-s+1|, r+s+1)$$

Podemos conseguir siempre que (en lo supuesto)

$r+1 = $ nº autovalores positivos $\geq s = $ nº autovalores negativos

Tenemos así:

En $\mathbb{P}_1$

ρ	σ	ECUACIÓN	imagen
2	2	$x_0^2+x_1^2=0$	$\{i,-i\}$
	0	$x_0^2-x_1^2=0$	$\{1,-1\}$
1	1	$x_0^2=0$	$(0:1)$

en $\mathbb{P}_2$

ρ	σ	ecuación	Puntos	
3	3	$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$		Cónica imaginaria N.D
	1	$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$		Cónica real N.D
2	2	$x_0^2+x_1^2=0$		PAR DE RECTAS imaginarias
	0	$x_0^2-x_1^2=0$		Par de rectas reales
1	1	$x_0^2=0$	∞_{A_2}	recta doble

Sea $\mathcal{C}: (a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 = 0)$ una cónica en $\mathbb{P}_1$. Tenemos

$$\mathcal{C}: (x_0, x_1)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

sea $\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{00}a_{11} - a_{01}^2$

Entonces

$$\operatorname{im} \mathcal{C} = \begin{cases} \text{dos ptos reales} \Leftrightarrow \Delta < 0 \\ \text{un pto real} \Leftrightarrow \Delta = 0 \\ \text{dos ptos imagin} \Leftrightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

<u>Demostración</u>

(1) si $(0:1) \in \operatorname{im} \mathcal{C}$ entonces $a_{11} = 0$ y

queda $\mathcal{C}: x_0(a_{00}x_0 + 2a_{01}x_1) = 0$

soluciones $x_0 = 0$ $\quad (-2a_{01} : a_{00}) \in \operatorname{im} \mathcal{C}$

- si $a_{00} = 0$ $(a_{01} \neq 0) \Rightarrow (1:0) \in \operatorname{im} \mathcal{C}$

  y $\Delta = -a_{01}^2 < 0$
- si $a_{00} \neq 0$, tenemos $\begin{cases} a_{01} \neq 0 \ (\Delta = -a_{01}^2 < 0) & (a) \\ a_{01} = 0 \ (\Delta = 0) & (b) \end{cases}$

(a) en el primer caso $\operatorname{im} \mathcal{C}$ tiene dos puntos distintos $\operatorname{im} \mathcal{C} = \{(0:1), (1 : \frac{a_{11}}{-2a_{01}})$

(b) En el segundo caso $\operatorname{im} \mathcal{C} = \{(0:1)\}$ tiene un pto

(2) En el supuesto que $(0:1) \notin$ a la $\mathcal{C}$ se tienen pts que pertenecen a la $\mathcal{C}$ son de la forma $(1:x)$ tales que

$a_{11}x^2 + 2a_{10}x + a_{00} = 0 \Longrightarrow$

que es una ecuación con discriminante -4Δ

así si $\Delta = 0 \Longrightarrow$ a la $\mathcal{C}$ un pto

si $\Delta < 0 \rightarrow$ a la $\mathcal{C}$ dos puntos reales

si $\Delta > 0 \Longrightarrow$ a la $\mathcal{C}$ dos ptos imaginarios

10.7

NOTA

Si P_n es un espacio proyectivo y $x : P \to \mathbb{P}_n$ es un SCH, una cuádrica $\mathcal{C}$ en P, es "algo" que en el SCH $x \sim (x_0 : \dots : x_n)$ tiene ecuaciones de la forma

$$\mathcal{C}_x : (x^t A x = 0)$$

que es una cuádrica de $\mathbb{P}_n$.

La condición es que si $y \sim (y_0 : \dots : y_n)$ es otro SCH $y : P \to \mathbb{P}_n$ entonces las ecuaciones de $\mathcal{C}$ en y deben ser

$$\mathcal{C}_y : (x^t B x = 0) \quad \text{con } B = P^t A P$$

siendo P la matriz de cambio de coordenadas, $x = Py$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ \mathbb{P}_n & & \mathbb{P}_n \arrow[ll, "P"'] \end{tikzcd}$$

Obsérvese que podemos hablar de las ecuaciones reducidas de $\mathcal{C}$, de su rango ρ y su signatura σ.