INTERSECCIÓN ENTRE RECTA CUADRICA! (11-1)

Sean $a=[\hat{a}]$, $b=[\hat{b}] \in \mathbb{P}_n$ dos puntos distintos $(n \geq 2)$ y sea $\mathcal{C}: (x^t A x = 0)$ una cuadrica

sea $r = V(a,b)$ $x = s\hat{a} + t\hat{b}$ entonces $(s:t)$ son coordenadas homogeneas en r

y $r \cap \mathcal{C}$ tiene por ecuacion

$$(s\hat{a}+t\hat{b})^t A (s\hat{a}+t\hat{b}) = 0$$

$$s^2(\hat{a}^t A \hat{a}) + (\hat{b}^t A \hat{a} + \hat{a}^t A \hat{b})st + (\hat{b}^t A \hat{b}) t^2 = 0$$

como $A^t = A$, es $\hat{a}^t A \hat{b} = (\hat{a}^t A \hat{b})^t = \hat{b}^t A \hat{a}$

así tenemos

$$\mathcal{C} \cap r : (s,t) \begin{pmatrix} \hat{a}^t A \hat{a} & \hat{a}^t A \hat{b} \\ \hat{a}^t A \hat{b} & \hat{b}^t A \hat{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 0$$

así si la matriz es identicamente nula

entonces $\Rightarrow r \subset \operatorname{im} \mathcal{C}$

en otro caso

$$\operatorname{im}(\mathcal{C} \cap r) = \begin{cases} 1 \text{ pto real si } \Delta = 0 \\ 2 \text{ ptos reales si } \Delta < 0 \\ 2 \text{ ptos imagin si } \Delta > 0 \end{cases}$$

con $\Delta = (\hat{a}^t A \hat{a})(\hat{b}^t A \hat{b}) - (\hat{a}^t A \hat{b})^2$

Suponiendo que $a \in \operatorname{im} \mathcal{C}$ se tiene $\hat{a}^t A \hat{a} = 0$ y entonces

$\operatorname{im}(\mathcal{C} \cap r) = \{a\} \iff \hat{a}^t A \hat{b} = 0$

se dice entonces que $r = V(a,b)$ es tangente a la cuádrica $\mathcal{C}$ en el punto $a \in \mathcal{C}$. Y si a es un punto no singular de $\mathcal{C}$ ($\hat{a}^t A = (0, \dots, 0)$) se denomina a

$$a^{\perp} = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \underset{x \neq a}{V(a,x)} \text{ tangente a } \mathcal{C}\} \cup \{a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{P}_n \mid \hat{a}^t A x = 0\} = H$$

hiperplano tangente a $\mathcal{C}$ en el pto a

En el caso $n=2$, tenemos que

$a^{\perp}$ es una recta, que se denomina recta tangente a la cónica.

POLARIDAD

La cónica $C: \{x^t A x = 0\}$ induce una aplicación $\mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ que asigna a cada $(a_0:a_1:a_2)$, la recta de ecuación

$$(a_0,a_1,a_2)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{es decir,}$$

la recta $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$ donde

$(u_0,u_1,u_2) = A\,(a_0,a_1,a_2)$ o también

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$ lo que da lugar

a una transformación $\mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ denominada polaridad.

(Recordemos que $\mathbb{P}_2^* = \{(u_0:u_1:u_2)^*\}$ donde $* \simeq \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$.
representa al conjunto de rectas de $\mathbb{P}_2$.)

La recta $(a_0,a_1,a_2)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se denomina recta polar de a y la denotamos por $a^\perp$.

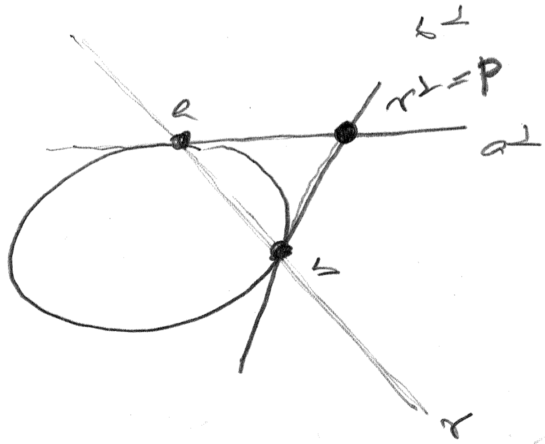
Dos ptos $a, b \in \mathbb{P}_2$ se dicen conjugados si $(a_0,a_1,a_2)\, A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$ y escribimos $a \perp b$

entonces $a^\perp = \{ b \in \mathbb{P}_2 \mid a \perp b \}$

se dice que la recta $r = a^\perp$ tiene por "polo" el punto a. $(r^\perp = a)$

TEOREMA FUNDAMENTAL de la Polaridad

Las polares de los puntos de una recta, pasan todas por un punto, que es el polo de la recta



Demostración:

La primera parte del enunciado es cierta, pues toda homografía $\mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ lleva rectas a rectas y por tanto si r es una recta, la familia

$\{a^\perp / a \in r\} \subset \mathbb{P}_2^*$ es una recta en $\mathbb{P}_2^*$

es decir de la forma $\Omega(p) = \{L \text{ recta} / p \in L\}$

además, se tiene que $r \subset p^\perp$ pues:

$$\left[\forall q \in r,\ p \in q^\perp \Rightarrow p \perp q \Longrightarrow \Rightarrow q \in p^\perp\right] \Longrightarrow r \subset p^\perp \Longrightarrow r = p^\perp$$

Dualidad:

Se llama cónica dual a

$$C^* = \{ r \in \mathbb{P}_2^* \mid r \text{ es tangente a } C \}$$

que es efectivamente una cónica.

Ya que, si $r: (u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0)$ es tangente a C, entonces existe $a \in C$ tal que

$a^\perp = r$ es decir $(a_0,a_1,a_2)A = (u_0,u_1,u_2)$

$$\Downarrow$$

$$(u_0,u_1,u_2) = (a_0,a_1,a_2)A^{-1}$$

pero como $a \in C$ tenemos

$$(u_0,u_1,u_2)A^{-1}A(A^{-1})^t \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

luego $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ que da

$$(u_0,u_1,u_2)A^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

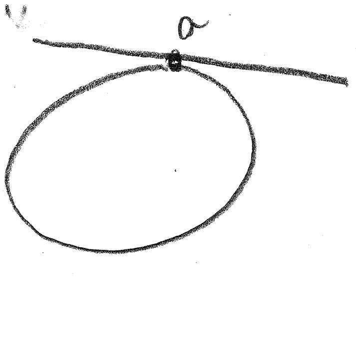
que es la ecuación de la cónica dual.

Esto permite "dualizar" los teoremas.

Por ejemplo: habíamos probado

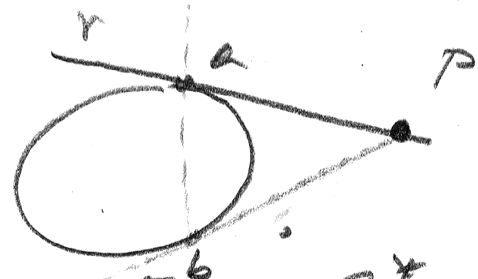
TEOREMA.

Dado $a \in C$, cualquier recta que pasa por a corta a la cónica exactamente en dos puntos excepto una, que es $a^\perp$ que sólo la corta en el punto a.



TEOREMA DUAL

Dada $r \in C^*$, para cualquier pto $p \in r$ (54p)



hay otra recta $s \in C^*$, excepto para un punto $a \in r$ que es justamente el polo de r.

Vamos a ver como se pueden calcular las rectas tangentes a la cónica por un pto exterior:

Ejemplo: $C: (x_0x_2 - x_1^2 = 0)$ $p = (0:1:1)$

los ptos a, b de tangencia, se obtienen como intersección $p^\perp \cap C$

$$p^\perp : \left((0,1,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right)$$

$p^\perp : (x_0 - 2x_1 = 0)$ sustituyendo en C

queda $+2x_1x_2 - x_1^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1(+2x_2 - x_1) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow (0:0:1) = a \\ \searrow (4:2:1) = b \end{cases}$$
$$x_0 = 2x_1$$

los puntos $p \in \mathbb{P}_2$ tales que $p^\perp$ no corta a la cónica se llaman puntos interiores y por dichos puntos no pasan rectas tangentes. Solución pa γp^b.

(1) El concepto de polaridad puede definirse para una cuádrica no degenerada cualquiera $Q: (x_0,\dots,x_n)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ de un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$.

Se dice que $a \perp b \iff (a_0,\dots,a_n)\, A \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$

así tomando

$$a^{\perp} = \{ x \in \mathbb{P}_n \,/\, a \perp x \} \text{ se verifica}$$

$a^{\perp} : (a_0,\dots,a_n)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ es un hiperplano de $\mathbb{P}_n$ (y por tanto elemento del dual) que se llama polar de a.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n & \xrightarrow{\perp} & \mathbb{P}_n^{*} \qquad (u_0,\dots,u_n)\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ & & \qquad\qquad \shortparallel \\ a & \longrightarrow & (a_0,\dots,a_n)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \end{array}$$

Se dice también que a es el polo de $a^{\perp}$

que tiene por ecuación.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

que es una homografía.

Aquí funciona bien el teorema fundamental de la polaridad:

"los polares de los puntos de un hiperplano pasan todos por un pto que es el polo del hiperplano"

En particular, tomando $n=1$ tenemos la cónica no degenerada

$$C: (x_0, x_1)\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0 \\ x_1\end{pmatrix} = 0 \text{ en } \mathbb{P}_1$$

Entonces C induce la polaridad

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{\perp} & \mathbb{P}_1^* \\ a & \longrightarrow & a^\perp \end{array}$$ que es una homografía.

Pero los "hiperplanos" de $\mathbb{P}_1$ son de la forma $(u_0x_0+u_1x_1=0)$ que definen el punto $(-u_1 : u_0)$ así que podemos IDENTIFICAR $\mathbb{P}_1^* \ni (u_0:u_1) \longrightarrow (-u_1, u_0) \in \mathbb{P}_1$

Por tanto la aplicación $\mathbb{P}_1 \xrightarrow[a]{f} \mathbb{P}_1^* \simeq \mathbb{P}_1$ es una transformación proyectiva, y la propiedad $a \perp b \Longleftrightarrow b \perp a$ me garantiza que si $f(a)=b \Longrightarrow f(b)=a$ es decir $f^2 = id$. Se trata por tanto de una involución.

Calculemos la ecuación de la involución $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ a partir de la matriz $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$ de la cónica:

$p=(p_0:p_1)\in\mathbb{P}_1$ entonces

$$p^\perp : \left((p_0,p_1)\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}=0\right)$$ es decir

$$p^\perp : \left((p_0,p_1)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}x_0 + (p_0,p_1)\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix}x_1 = 0\right) \simeq$$

$$\simeq \left((p_0,p_1)\begin{pmatrix}-\beta\\ -\gamma\end{pmatrix} : (p_0,p_1)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left[(p_0,p_1)\begin{pmatrix}-\beta & \alpha\\ -\gamma & \beta\end{pmatrix}\right]$$ así, las

ecuaciones de la "polaridad" son.

$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{P}_1$ $$\begin{pmatrix}x_0'\\ x_1'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta & -\gamma\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}$$

que es una homografía.

Obsérvese que $$\begin{pmatrix}-\beta & -\gamma\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta & -\gamma\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{vmatrix} & 0\\ 0 & -\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$ por tanto

efectivamente $f^2 = id$.

Obsérvese que "nos ha salido" una matriz $\begin{pmatrix}-\beta & -\gamma\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$ con traza nula.

(11-10

Recíprocamente

si $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ es una homografía

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f^2 = id \\ f \neq id \end{matrix}$$

entonces $d = -a$ ya que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

debe suceder

$$(a+d)b = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(a+d)c = 0 \qquad \lambda \neq 0$$

Entonces si $a+d \neq 0$

entonces $b=0$, $c=0$ y queda

y entonces $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$

lo que obliga $a = d$ lo que

$f \neq id$

En este caso f se corresponde con

la polaridad de la cónica $(x_0, x_1) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Por último debemos observar que cualquier homografía. $f: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$

$$f: \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

es una involución ya que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix}.$$

Así que

<u>TEOREMA.</u>

Toda involución $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ (es decir homografía con $f^2 = id$ $f \neq id$) es de la forma $\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

y viene determinada por la polaridad de una cónica en $\mathbb{P}_1$ dada por

$$\mathcal{C}: (x_0, x_1) \begin{pmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplo:

1) la cónica $x_0^2+x_1^2=0$ C

tiene por matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$

y da lugar a la homografía de

matriz $\begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

es decir $\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$x_0' = -x_1$ $\qquad \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$

$x_1' = x_0$ $\qquad (x_0 : x_1) \longrightarrow (-x_1 : x_0)$

que no tiene puntos fijos.

2) La cónica.

$C : x_0^2 - x_1^2 = 0$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

y da lugar a la homografía

$\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$

$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $\qquad (x_0 : x_1) \longrightarrow (x_1 : x_0)$

$x_0' = x_1$ $\qquad$ que tiene como puntos

$x_1' = x_0$ $\qquad$ fijos $(1:1)$

$(1:-1)$

que son los puntos de la cónica.

Así pues, en $\mathbb{P}_1$ hay dos tipos de involuciones $f: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$.

(1) f tiene dos puntos fijos a, b con $a \neq b$

(2) f no tiene puntos fijos.

TEOREMA

Si f es una involución de $\mathbb{P}_1$ con ptos fijos a, b entonces $[p, f(p), a, b] = -1 \quad \forall p \in \mathbb{P}_1 - \{a, b\}$

Demostración

En efecto por ser $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ proyectividad, preserva la razón doble, y por tanto

$$\rho = [p, f(p), a, b] = [f(p), f^2(p), f(a), f(b)] =$$

$$= [f(p), p, a, b] = \frac{1}{\rho} \quad \text{así}$$

$\rho = \frac{1}{\rho} \Longrightarrow \rho^2 = 1$ pero $\rho \neq 1$ ya que

si $\rho = 1 \Longrightarrow f(p) = p$.

por tanto $\rho = -1$ q.e.d.

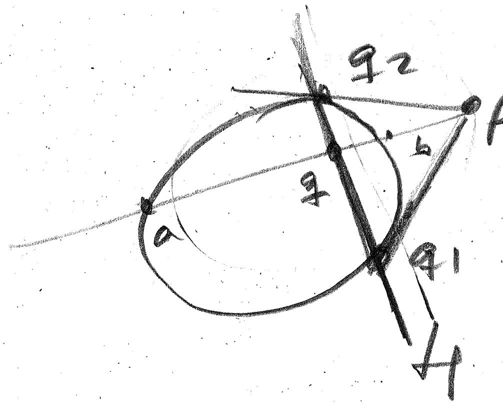
COROLARIO

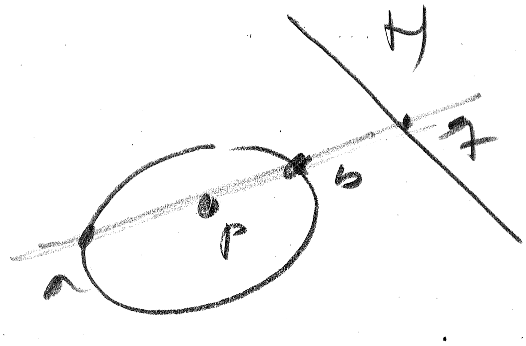
Sea $\mathcal{C}$ una cónica no degenerada con puntos en $\mathbb{P}_2$. y H una recta, no tangente a $\mathcal{C}$. Entonces si $p^{\perp} = H$ se verifica.

$\forall q \notin (\mathrm{im}\, \mathcal{C}) \cap H$, $q \in H$ la recta $V(p.q) = r_q$ corta a $\mathcal{C}$ en dos ptos distintos a, b (11-14)
y se verifica $[p, q, a, b] = -1$.

OBSERVACIÓN.

Como H no es tangente a la cónica
ó $(\mathrm{im}\,\mathcal{C}) \cap H = \{q_1, q_2\}$ ó $(\mathrm{im}\,\mathcal{C}) \cap H = \phi$





Demostración.

En cualquiera de los dos casos,
la recta $V(p.q) = r_q$ corta a la cónica en dos puntos a, b distintos
y la cónica $\mathcal{C} \cap r$, induce en r una involución con ptos fijos a, b. $r \xrightarrow{f} r$
pero observamos, en esta involución
$f(p) = q$ pues
$f(p) = p^{\perp} \cap r_q = \{q\}$.
por tanto $[p, q = f(p), a, b] = -1$

Homografías involutivas en la recta proyectiva L

Del Teorema de la pag. 5-10 se concluye que una homografía involutiva $f: L \to L$ tiene ($f \neq id$) por ecuación reducida

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

por tanto si $f = [\hat{f}] \Rightarrow \operatorname{tr} \hat{f} = 0$

Además están caracterizadas por la siguiente propiedad:

$\exists a \in L \;/\; f(a) \neq a$ y $f^2(a) = a$

En efecto, si esto es así debemos demostrar $\forall c \in L \Rightarrow f^2(c) = c$.

Sea $b = f(a) \neq a$ y tomemos c de forma que (a, b, c) sean tres puntos distintos.

Entonces como f preserva la razón doble

$[a, b, c, f(c)] = [b, a, f(c), f^2(c)] = *$

pero por las propiedades de la razón doble

$* = [a, b, f^2(c), f(c)]$ y por ser la razón doble inyectiva $\Rightarrow f^2(c) = c$.

Por otra parte se tiene

PROPOSICIÓN.

Toda homografía $f: L \to L$ se descompone en producto de a lo más dos homografías involutivas:

Dem. $\exists a \in L \;/\; \begin{array}{l} a' = f(a) \\ a'' = f(a') \\ a''' = f(a'') \end{array}$ $\quad (a, a', a'')$ SRP

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{f_1} & a'' & \xrightarrow{f_2} & a' \\ a' & \longrightarrow & a' & \longrightarrow & a'' \\ a'' & \longrightarrow & a & \longrightarrow & a''' \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{f} & & \end{array}$$