CONICAS AFINES en $\mathbb{A}_2 \subset \mathbb{P}_2$ (12-1

Una cónica afín en $\mathbb{A}_2$ tiene por ecuación

$$\mathcal{C}: (1, x_1, x_2) \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & \overline{A} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \overline{A} \neq 0$$

donde $A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$ es una matriz simétrica y está determinada por la matriz A salvo constantes multiplicativas

teniendo en cuenta que $X_1 = \frac{x_1}{x_0}$ $X_2 = \frac{x_2}{x_0}$

multiplicando todo por x_0^2 queda

$$\widetilde{\mathcal{C}}: (x_0, x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$ que

es una cónica proyectiva, denominada extensión proyectiva de $\mathcal{C}$

Se llama

$$\operatorname{im} \mathcal{C} = (\operatorname{im} \widetilde{\mathcal{C}}) \cap \mathbb{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} : (1, X^t) A \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

donde hemos puesto $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

a $\mathcal{C}_\infty : (x_1, x_2) \overline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ en las coordenadas $\infty_{\mathbb{A}_2} \ni (0:x_1:x_2) \to (x_1:x_2)$

se le llama cónica del infinito

y además

$$\mathcal{C}_\infty = \widetilde{\mathcal{C}} \cap \infty_{\mathbb{A}_2}.$$

tomando ahora

$$\begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}1&0\\ \hline p&\overline{P}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\Y\end{pmatrix} \quad \text{con} \qquad (*)$$

$|\overline{P}|\neq 0$ y llamando sustitución formal

puede $\cdot\ (1,Y^t)\left(\begin{array}{c|c}b_{00}&b\\ \hline b^t&\overline{B}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\Y\end{pmatrix}=0$ con

$$\left(\begin{array}{c|c}b_{00}&b\\ \hline b^t&\overline{B}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}1&p^t\\ \hline 0&\overline{P}^t\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}1&0\\ \hline a&\overline{A}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}1&0\\ \hline p&\overline{P}\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}b_{00}&b\\ \hline b^t&\overline{P}^t\overline{A}\,\overline{P}\end{array}\right)$$

Podemos dar dos interpretaciones

(1) la relación $(*)$ indica un cambio de coordenadas cartesianas. En este caso se supone que $(1,Y^t)B\begin{pmatrix}1\\Y\end{pmatrix}=0$ es la ecuación de $\mathcal{C}$ en las nuevas coordenadas

(2) la relación $(*)$ indica un isomorfismo

$$\begin{array}{cccc}\text{afín.} & \mathbb{A}_2 & \xleftarrow{F} & \mathbb{A}_2\\ & \begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix} & \longleftarrow & \begin{pmatrix}1\\Y\end{pmatrix}\end{array}$$

entonces $\left((1,Y^t)B\begin{pmatrix}1\\Y\end{pmatrix}=0\right)=F^{-1}(\mathcal{C})$

en todo caso escribiremos:

las cónicas $\mathcal{C}: (1, X^t) A \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = 0$ y

$\mathcal{C}': (1, Y^t) B \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}$ son afínmente equivalentes

si $\exists\, P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & \overline{P} \end{array}\right)$ no singular de

forma que haciendo $X = PY$ se tenga

$B = P^t A P$. (entonces $\overline{B} = \overline{P}^t \overline{A}\, \overline{P}$.

- Obsérvese que si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son afínmente equivalentes, entonces,

(1) $\widetilde{\mathcal{C}}$ y $\widetilde{\mathcal{C}}'$ son proyectivamente equivalentes

(2) $\mathcal{C}_\infty$ y $\mathcal{C}'_\infty$ " " "

De hecho, como veremos se verifica el recíproco.

Así que denotando para la cónica

$\mathcal{C}: (1, X^t) A \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = 0$ $\quad \mathcal{C}_\infty: (x_1, x_2) \overline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\widetilde{\mathcal{C}}: x^t A x = 0$

$\widetilde{\rho} = \mathrm{rg}(A) \quad \rho_\infty = \mathrm{rg}\, \overline{A}$

$\widetilde{\sigma}$ = signatura proyectiva de $\widetilde{\mathcal{C}}$,

$\widetilde{\sigma}_\infty$ = signatura proyectiva de $\mathcal{C}_\infty$

Así si $\mathcal{C}': (1, Y^t) B \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = 0$ es otra cónica afín. y $\widetilde{\rho}' = \mathrm{rg}(B)$ $\rho'_\infty = \mathrm{rg}\, \overline{B}$ ... etc

se tiene

$\mathcal{C} \approx_a \mathcal{C}' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}', \quad \widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}' \\ \rho_\infty = \rho'_\infty, \quad \sigma_\infty = \sigma'_\infty \end{array} \right\}$

			e	$\tilde{e}$	e_∞
$\tilde{e}=3$ $\|A\|\neq 0$ $\hat{e}=3$ NO SINGULAR	$e_\infty=2$ $\|\vec{A}\|>0$ ELIPSE	IMAGINARIA A definida	$X_1^2+X_2^2=-1$	$-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ $\tilde{\sigma}=3$	$x_1^2+x_2^2=0$ $\sigma_\infty=2$
		A no definida REAL	$X_1^2+X_2^2=1$	$-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ $\tilde{\sigma}=1$	$x_1^2+x_2^2=0$ $\sigma_\infty=2$
	$\|\vec{A}\|<0$ HIPERBOLA $e_\infty=2$		$X_1^2-X_2^2=1$	$-x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$ $\tilde{\sigma}=1$	$x_1^2-x_2^2=0$ $\sigma_\infty=0$
	$\|\vec{A}\|=0$ Parábola $e_\infty=1$		$X_2-X_1^2=0$	$x_2x_0-x_1^2=0$ $\tilde{\sigma}=1$	$x_1^2=0$ $\sigma_\infty=1$
$\|A\|=0$ SINGULAR	$e_\infty=2$ $\|\vec{A}\|>0$	par de rectas imaginarias	$X_1^2+X_2^2=0$	$x_1^2+x_2^2=0$ $\tilde{\sigma}=2$	$x_1^2+x_2^2=0$ $\sigma_\infty=2$
	$e_\infty=2$ $\|\vec{A}\|<0$	Par de rectas reales	$X_1^2-X_2^2=0$	$x_1^2-x_2^2=0$ $\tilde{\sigma}=0$	$x_1^2-x_2^2=0$ $\sigma_\infty=0$
	$e_\infty=1$ $\|\vec{A}\|=0$	recta doble	$X_1^2=0$	$x_1^2=0$ $\tilde{\sigma}=1$	$x_1^2=0$ $\sigma_\infty=1$
	$\|\vec{A}\|=0$		$X_1^2+1=0$	$x_0^2+x_1^2=0$	$x_1^2=0$
	$\|\vec{A}\|=0$		$X_1^2-1=0$	$x_0^2-x_1^2=0$	$x_1^2=0$

sg$|B|$ = sg$|A|$

Vamos a tratar en principio con cónicas afines no singulares $\mathcal{C}: (1, X^t) A \binom{1}{X} = 0$ en donde $\det A \neq 0$. (12-5)

La clasificación afín de estas cónicas se explica en el siguiente

TEOREMA.

Si $\mathcal{C}$ es una cónica no degenerada en A_2 se tiene

(1) $\mathcal{C}_\infty$ no degenerada $\Leftrightarrow \det \bar{A} \neq 0$ entonces:

(a) si $\mathcal{C}_\infty$ es imaginaria $(\det \bar{A} > 0)$ existe un SCC Y_1, Y_2 tal que

$\mathcal{C}: Y_1^2 + Y_2^2 \pm 1 = 0$

(b) si $\mathcal{C}_\infty$ es real $(\det \bar{A} < 0)$ entonces existe un SCC Y_1, Y_2 tal que

$\mathcal{C}: Y_1^2 - Y_2^2 - 1 = 0$

(2) si $\mathcal{C}_\infty$ es degenerada $(\det \bar{A} = 0)$ entonces existe un SCC Y_1, Y_2 en

$\mathcal{C}: Y_2 - 2Y_1^2 = 0$

Demostración.

Consideremos la cónica extendida

$\tilde{e}: x^t A x = 0$.

entonces el polo de la recta del infinito

$\alpha_{/A_2}: (x_0 = 0)$ será un pto $(1, c_1, c_2)$

tal que $(1, c_1, c_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

proporcione $x_0 = 0$ es decir

$$\left.\begin{aligned} a_{01} + a_{11} c_1 + a_{12} c_2 &= 0 \\ a_{02} + a_{12} c_1 + a_{12} c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

las incógnitas son c_1 y c_2 que pueden despejarse

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\bar{A}^{-1}\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}.$$

haciendo $\left\{\begin{aligned} X_1 &= Y_1 + c_1 \\ X_2 &= Y_2 + c_2 \end{aligned}\right. \rightarrow$ ver apéndice final.

se demuestra que la ecuación de la cónica queda

$$1 + b_{11} Y_1^2 + 2 b_{12} Y_1 Y_2 + b_{22} Y_2^2 = 0$$

y el pto c se llama CENTRO DE la cónica $\left(\bar{B} = \frac{1}{b_{00}}\bar{A}\right)$

(12-7)

(a) Si $\det \vec{A} > 0$, sabemos que existe un cambio de coordenadas $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \overline{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de manera que la forma cuadrática $(y_1, y_2)\overline{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ se escribe ahora como $\pm(z_1^2 + z_2^2)$

así tenemos dos modelos

$1 + z_1^2 + z_2^2 = 0$ (elipse imaginaria)

$1 - z_1^2 - z_2^2 = 0$ (elipse real)

(b) Si $\det \overline{A} < 0$ existe un cambio de coordenadas $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \overline{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tal que $(1 - z_1^2 + z_1^2 = 0)$ y tenemos una hipérbola.

(2) En el caso $\det \overline{A} = 0$ entonces la forma cuadrática $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se escribe como un cuadrado perfecto

$(a x_1 + b x_2)^2 \quad (a \neq 0)$

haciendo $y_1 = a x_1 + b x_2$

$y_2 = x_2$

y sustituyendo formalmente en la ecuación original

$x_1 = \frac{1}{a} y_1 - \frac{b}{a} y_2, \quad x_2 = y_2$ queda

queda algo así como

$$y_1^2+2\alpha y_1+2\beta y_2+\gamma=0$$ es decir

$$(1, y_1, y_2)\begin{pmatrix}\gamma & \alpha & \beta\\ \alpha & 1 & 0\\ \beta & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}=0$$

como es no degenerada, $\beta\neq 0$...

haciendo $y_1 = z_1-\alpha$ queda

$$(z_1-\alpha)^2+2\alpha(z_1-\alpha)+\beta y_2+\gamma=0$$

$$z_1^2+\beta y_2+\gamma'=0 \qquad \gamma'=\gamma-\alpha^2$$

finalmente haciendo

$$2z_2=-\beta y_2-\gamma' \Rightarrow y_2=-\frac{1}{2\beta}z_2+\gamma''$$

nos queda

$$z_1^2=2z_2.$$

$$(1, z_1, z_2)\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ z_1\\ z_2\end{pmatrix}=0$$

que es la ecuación reducida (o parecida)

APÉNDICE:

CÓNICAS CON CENTRO.

$$\mathcal{C}: (1, X_1, X_2)\left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & \vec{A}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\X_1\\X_2\end{pmatrix}=0$$

Se supone $|\vec{A}|\neq 0$, y buscamos una traslación $\begin{pmatrix}1\\X_1\\X_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c^t & I\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ de forma

que la "nueva" ecuación de $\mathcal{C}$ en las coordenadas $\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ sea de la forma $(1, Y_1, Y_2)\left(\begin{array}{c|c} b_{00} & 0^t \\ \hline 0 & \vec{B}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=0$

es decir $b_{00}+b_{11}Y_1^2+2b_{12}Y_1Y_2+b_{22}Y_2^2=0$

el pto de coordenadas $C=(0,0)_Y$ en este sistema (Y_1, Y_2) es el centro de la cónica, y tiene coordenadas $C=(c_1,c_2)_X$ en las (X_1, X_2).

Calculemos (c_1, c_2)

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & c^t \\ \hline 0 & I\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & \vec{A}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c & I\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} a_{00}+ac^t & a^t+c^t\vec{A} \\ \hline a & \vec{A}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c & I\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} b_{00} & a^t+c^t\vec{A} \\ \hline a+\vec{A}c & \vec{A}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} b_{00} & 0^t \\ \hline 0 & \vec{A}\end{array}\right)$$

así $\begin{pmatrix}a_{01}\\a_{02}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=0$. Si $|A|\neq 0$

entonces $(1, c^t)\left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a \\ \hline a^t & \vec{A}\end{array}\right)\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=$

$(a_{00}+c^ta^t, 0, 0)\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$ y la polar de $(1:c_1:c_2)$ es $x_0=0$.

Si $|A|=0$ siendo $|\bar{A}|\neq 0$ es porque $b_{00}=0$ y la ecuación en las nuevas coordenadas es $(y_1,y_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=0$

$|\bar{A}|<0$ entonces (supuesto $a_{11}\neq 0$) tenemos

$$a_{11}y_1^2+2a_{12}y_1y_2+a_{22}y_2^2=0 \qquad y=\frac{y_2}{y_1}$$

$a_{11}+2a_{12}y+a_{22}y^2=0$ con discriminante

$4a_{12}^2-4a_{11}a_{22}=-4|\bar{A}|>0$ y dos soluciones

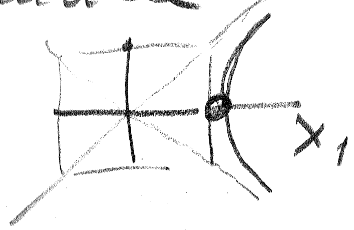
$0=a_{11}(y-\alpha)(y-\beta)$ lo que da lugar $\underline{\alpha\neq\beta}$

$\therefore\ \mathcal{C}: (y_2-\alpha y_1)(y_2-\beta y_1)$ dos rectas reales que se cortan en c

si $|\bar{A}|>0$ son dos rectas imaginarias que se cortan en $\mathcal{C}$.

Asíntotas de la hipérbola

Nótese que en la ecuación reducida de la hipérbola $X_1^2 - X_2^2 = 1$ su centro es $C = (0,0)_X$ y su extensión proyectiva es



$$\tilde{\mathcal{C}} : (-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0) \quad \mathcal{C}_\infty : (x_1^2 - x_2^2 = 0)$$

las asíntotas son las rectas que pasan por el centro $(0,0)$ y tienen por ecuaciones

$$r_1 : X_1 + X_2 = 0 \xrightarrow{\text{ext proy}} x_1 + x_2 = 0 \ : \tilde{r}_1$$

$$r_2 : X_1 - X_2 = 0 \xrightarrow{\text{ext proy}} x_1 - x_2 = 0 \ : \tilde{r}_2$$

pero $x_1 + x_2 = 0$ es la recta tangente a la cónica $\tilde{\mathcal{C}}$ en el pto $(0:1:-1) \in \operatorname{im} \mathcal{C}_\infty$ ya que es la recta

$$(0:1:-1)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

análogamente

$x_1 - x_2 = 0$, es la recta tangente a la cónica $\tilde{\mathcal{C}}$ en el otro punto $(0:1:1) \in \operatorname{im} \mathcal{C}_\infty$ ya que es la recta

$$(0:1:1)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Así que dada la hipérbola $|A| \neq 0$

$\mathcal{C}: (1, X_1, X_2) \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & \bar{A} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$ $\quad |\bar{A}| < 0$ se llaman

asíntotas a las rectas tangentes a su ext. proyect.

$$\tilde{\mathcal{C}}: (x_0, x_1, x_2) \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & \bar{A} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

por los ptos de $\mathcal{C}_\infty : (x_1, x_2) \bar{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

los ptos de $\mathcal{C}_\infty$ se llaman direcciones asintóticas.

Estas rectas, pasan por el centro

Ejemplo:

$\mathcal{C}: (2X_1 - 2X_1X_2 - X_2^2 = 0)$ tiene matriz

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} |A| = -1 \neq 0 \\ |\bar{A}| = -1 \end{array}$$

se trata de una hipérbola

$\tilde{\mathcal{C}}: (2x_0x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 0)$

$\mathcal{C}_\infty : -2x_1x_2 - x_2^2 = 0 \qquad x_2(-2x_1 - x_2) = 0$

así $\operatorname{im} \mathcal{C}_\infty = \{(0:1:0), (0:-1:2)\}$

$$(0,1,0) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1, 0, -1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_0 - x_2 = 0$$

$\to X_2 = 1$

$$(0:-1:2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-1, -2, -1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 \quad \to 2X_1 + X_2 = -1$

CENTRO $C = (-1, 1)$

CONICAS AFINES EN P-H. 12-12

(1) Sea P un plano proyectivo, y sea $x: P \to \mathbb{P}_2$ un SCH; que es una homografía que asigna a cada pto $a \in P$ sus coordenadas homogéneas $x(a) = (a_0 : a_1 : a_2)$ escribimos entonces $a = (a_0 : a_1 : a_2)_x$
el subíndice x indica que en $\mathbb{P}_2$ estamos tomando $(x_0 : x_1 : x_2)$ coordenadas homogéneas canónicas de $\mathbb{P}_2$.

Una cónica en P es un objeto C cuyas "ecuaciones" en el sch, x se escribe $C_x : (x^t A x = 0)$ como una cónica en $\mathbb{P}_2$. Lo cierto es que si $y: P \to \mathbb{P}_2$, es otro SCH y

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ \mathbb{P}_2 & & \mathbb{P}_2 \arrow[ll, "{[P]}"'] \\ x & & y \end{tikzcd}$$

, $x = Py$ son las ecuaciones del cambio de coordenadas entonces

$C_y : (y^t B y = 0)$ con $B = P^t A P$

son las ecuaciones de C en coordenadas y
se tiene C_x p.e. C_y y por tanto

los invariantes projectivos ρ y σ de $\mathcal{C}_x$ y $\mathcal{C}_y$ son los mismos y se llaman invariantes projectivos de $\mathcal{C}$.

En particular, podemos afirmar, que dada $\mathcal{C}$ cónica en $\mathbb{P}$, existe un SCH x a $\mathbb{P}$ tal que $\mathcal{C}_x$ tiene la ecuación reducida correspondiente a los valores ρ y σ de $\mathcal{C}$.

(2) Si ahora H es una recta de $\mathbb{P}$, sabemos que podemos dar structura de espacio afín a $A = \mathbb{P} - H$:

si $x : \mathbb{P} \to \mathbb{P}_2$ es un SCH tal que $x(H) = \Delta_{/A_2}$ (es decir, en estas coordenadas es $H : (x_0 = 0)$)

entonces x induce

$X : \mathbb{P} - H \longrightarrow \mathbb{A}_n$ sistema de coordenadas cartesianas en donde

$$(x_0 : x_1 : x_2)_x \longrightarrow (1, X_1, X_2)_X \text{ con } \begin{cases} X_1 = \dfrac{x_1}{x_0} \\ X_2 = \dfrac{x_2}{x_0} \end{cases}.$$

y una cónica projectiva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}$ con ecuaciones

y una cónica afín

$$\mathcal{C}_X : (1; X) \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = 0$$

en $\mathbb{A}_2$, induce la ecuación de una cónica afín $\mathcal{C}$ en P-H, cuya extensión proyectiva $\tilde{\mathcal{C}}_X : (x^t A x = 0)$ es la ecuación de una cónica proyectiva $\tilde{\mathcal{C}}$ en en $\underline{P}$.

Igual que antes, las ecuaciones de $\mathcal{C}$ en otro sistema de coordenadas cartesianas $Y : P\text{-}H \longrightarrow \mathbb{A}_2$ son de la forma

$$\mathcal{C}_Y = (1, y) \left(\begin{array}{c|c} b_{00} & b^t \\ \hline b & \bar{B} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{donde}$$

$B = P^t A P$ siendo $\underline{P} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & \bar{P} \end{array}\right)$ la matriz del cambio afín $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ que hace conmutativo el diagrama

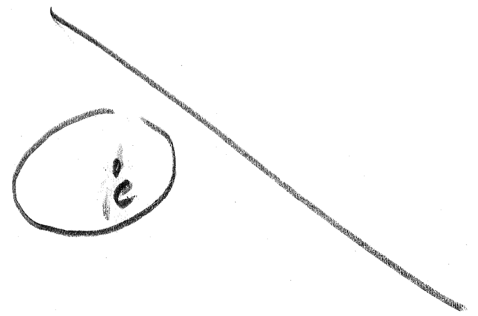
$$\begin{tikzcd} & P\text{-}H \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr, "Y"] & \\ \mathbb{A}_n & & \mathbb{A}_n \arrow[ll, "P"'] \end{tikzcd}$$

En consecuencia, los invariantes afines $\tilde{\rho}\ \tilde{\sigma}\ \rho_\infty\ \sigma_\infty$ de $\mathcal{C}_X$ y $\mathcal{C}_Y$ son los mismos, y se denominan invariantes proyectivos de $\mathcal{C}$.

Y en particular, podemos afirmar que dada la cónica afín $\mathcal{C}$ en P-H existe un SCC X tal que $\mathcal{C}_X$ es la ecuación reducida correspondiente a los valores de dichos invariantes

Obsérvese que en el cuadro de clasificación, podemos sustituir $\alpha_{/A_2}$ por H $\quad e_\alpha = \tilde{e} \cap H$ ... etc

Los siguientes dibujos se explican por sí solos



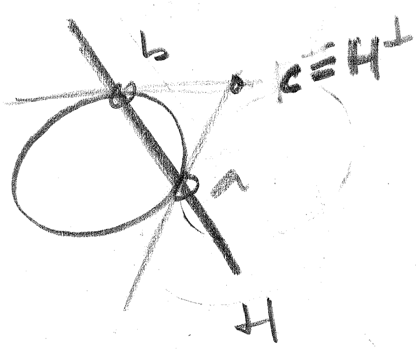
elipse real en $P-H$

$\tilde{e} \cap H$ dos ptos imaginarios

$c = H^{\perp}$ centro

Elipse real

$X_1^2 + X_2^2 = 1$



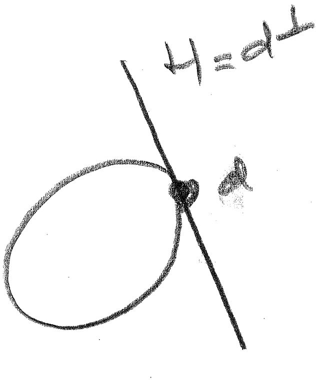
hipérbola en $P-H$

$\tilde{e} \cap H$ dos ptos reales

$p = H^{\perp}$ centro

$V(p,a)$, $V(p,b)$ Asíntotas

$X_1^2 - X_2^2 = -1$



Parábola en $P-H$

$\tilde{e} \cap H$ un punto real

d = directriz

$X_2 - 2X_1^2 = 0$