EL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO.

Denotamos $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$

$\mathbb{C}^{n+1} = \{(x_0,\dots,x_n) \,/\, x_j = x_j' + i x_j'' \in \mathbb{C}\}$

$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \ni (x_0,\dots,x_n) \xrightarrow{\Pi} (x_0:\dots:x_n)^{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$

donde se entiende

$(x_0:\dots:x_n)^{\mathbb{C}} = (y_0:\dots:y_n)^{\mathbb{C}} \iff$

$\exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, y_i = \lambda x_i$

Podemos "sumergir" el espacio proyectivo real $\mathbb{P}_n$ en $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$

$\mathbb{P}_n \ni (x_0:\dots:x_n) \hookrightarrow (x_0:\dots:x_n)^{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$

la aplicación está bien definida, y es inyectiva

a los puntos $(x_0:\dots:x_n)^{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ cuando $x_j \in \mathbb{R}\ \forall j$, se llaman puntos reales.

Por ejemplo $(i:-i)^{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$ es un punto real ya que $(i:-i)^{\mathbb{C}} = (i^2:-i^2)^{\mathbb{C}} = (-1:1)^{\mathbb{C}}$.

<u>NOTACIÓN</u> en adelante no haremos distinción entre $(x_0:\dots:x_n)^{\mathbb{C}}$ y $(x_0:\dots:x_n)$.

Conjugación.

la aplicación $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$

$$x=(x_0:\dots:x_n) \longrightarrow (\bar{x}_0:\dots:\bar{x}_n)=\bar{x}$$

está bien definida (y se denomina conjugación)

En efecto si $(x_0:\dots:x_n)=(y_0:\dots:y_n)$ entonces

$\exists\, \lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$ $\lambda x_j = y_j \Longrightarrow \bar{\lambda}\bar{x}_j=\bar{y}_j$

por tanto $(\bar{x}_0:\dots:\bar{x}_n)=(\bar{y}_0:\dots:\bar{y}_n)$.

PROPOSICIÓN.

un pto $x\in\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ es real, si y solo si $\bar{x}=x$. Dem. (ver. 13-2'')

~~Conjugación~~

HIPERPLANOS

~~$H\subset\mathbb{P}_n$ ... un hiperplano proyectivo~~

sea $H:(u_0x_0+\dots+u_nx_n=0)$ un hiperplano proyectivo de $\mathbb{P}_n$ denotamos por

$H^{\mathbb{C}}:(u_0x_0+\dots+u_nx_n=0)$ al hiperplano de $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ con las mismas ecuaciones y

se tiene $H=H^{\mathbb{C}}\cap\mathbb{P}_n$ se dice entonces que $H^{\mathbb{C}}$ es un hiperplano real.

PROPOSICIÓN.

un hiperplano $H:(u_0x_0+\dots+u_nx_n=0)$ de $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ es real $\Longleftrightarrow$ $(u_0:\dots:u_n)$ es real.

Demostración de la proposición.

Supongamos $(x_0 : \dots : x_n) \stackrel{\mathbb{C}}{=} (\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_n)$

entonces $\bar{x}_j = \lambda x_j$ $(j = 0, \dots, n)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Se busca entonces $\mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\mu x_j \in \mathbb{R}$ $\forall j = 0 \dots n$ es decir

$$\mu x_j = \overline{\mu x_j} = \bar{\mu} \bar{x}_j = \bar{\mu} \lambda x_j \quad j = 0, \dots, n.$$

así que si encontramos $\mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\lambda = \frac{\mu}{\bar{\mu}}$ habremos terminado.

Como algún x_{j_0} es no nulo, supongamos por ejemplo $x_0 \neq 0$

Tomamos entonces $\mu = \bar{x}_0$ así

$$\lambda = \frac{\bar{x}_0}{x_0} = \frac{\mu}{\bar{\mu}}.$$

FIN

HOMOGRAFIAS. (13-3)

Una homografía $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ induce una homografía $f^{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ que tiene las mismas ecuaciones. Se dice entonces que $f^{\mathbb{C}}$ es una homografía real

PROPOSICIÓN.

Una homografía $F : \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ es real si y solo si F transforma ptos reales en puntos reales ó así forma equivalente $\overline{F(x)} = F(\overline{x})$ $\forall x \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ y entonces $f = F|_{\mathbb{P}_n} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ es una homografía y $f^{\mathbb{C}} = f$.

Demostración. (En $\mathbb{P}_2$)

$F(1:0:0) = (a_{00} : a_{01} : a_{02}) = a_0 = [\hat{a}_0]$

$F(0:1:0) = (a_{10} : a_{11} : a_{12}) = a_1 = [\hat{a}_1]$

$F(0:0:1) = (a_{20} : a_{21} : a_{22}) = a_2 = [\hat{a}_2]$

$F(1:1:1) = (\; : \; : \;) = a = [\hat{a}]$

$\hat{a} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2$

... ect

CUADRICAS

(13-4

Una cuádrica en $\mathbb{P}_n$ se escribe

$$\mathcal{C}: (x^t A x = 0) \quad \text{con} \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matriz simétrica, $A \neq 0$. Esta cuádrica da lugar a otra $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}: (x^t A x = 0)$ con las mismas ecuaciones. y se verifica $\operatorname{im} \mathcal{C} = (\operatorname{im} \mathcal{C}^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{P}_n$.

Así por ejemplo en $\mathbb{P}_2 \equiv \{(x_0 : x_1 : x_2)\}$ tenemos

$\mathcal{C}: x_1^2 + x_2^2 = 0$; $\operatorname{im} \mathcal{C} = \{(1:0:0)\}$

pero $\operatorname{im} \mathcal{C}^{\mathbb{C}} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \mid x_1 + i x_2 = 0\} \cup$
$\cup \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \mid x_1 - i x_2 = 0\}$

que son dos rectas imaginarias que se cortan en $(1:0:0)$

Naturalmente tenemos $\mathbb{A}_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2 \mid x_0 \neq 0\} \subset$
$\subset \mathbb{A}_2^{\mathbb{C}} = \{(x_0 : x_1 : x_2)_{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \mid x_0 \neq 0\}$

y la cónica afín $\left((1, X^t) A \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = 0\right) : \mathcal{C}$ en $\mathbb{A}_n$, se extiende a $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}$ con las mismas ecuaciones.

PROPOSICIÓN. Sea $\mathcal{C}$ una cónica n. d. con puntos en $\mathbb{A}_2$

$\mathcal{C}$	$\operatorname{im} \mathcal{C}_\infty^{\mathbb{C}}$	
elipse	dos ptos conjugados	$\lvert \bar{A} \rvert > 0$
hipérbola	dos ptos reales.	$\lvert \bar{A} \rvert < 0$
parábola	1 pto real	$\lvert \bar{A} \rvert = 0$

Visión proyectiva del

DEL PLANO AFIN EUCLIDEO

Se considera $\mathbb{E}_2$ el plano afín $\mathbb{A}_2$ con la métrica euclídea canónica.

$v=\begin{pmatrix}0\\v_1\\v_2\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}0\\w_1\\w_2\end{pmatrix}$ $\quad v \cdot w = v^t w$ y la distancia euclídea dada por $d(p,q)=|\vec{pq}|$ siendo $|v|=\sqrt{v^t w}$.

Un movimiento, es una isomorfismo afín

$$\mathbb{E}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{E}_2$$ que preserva la distancia

es decir $d(p,q)=d(f(p),f(q))\ \forall p,q\in\mathbb{E}_2$

esto equivale a decir que

$|\vec{pq}|=|\vec{f}(\vec{pq})|\ \forall p,q\in\mathbb{E}_2$ o sea que

$\vec{f}:\vec{\mathbb{E}}_2\to\vec{\mathbb{E}}_2$ preserva el producto escalar

Se demuestra que un movimiento viene dado por ecuaciones

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \alpha&\cos\theta&-\sin\theta\\ \beta&\sin\theta&\cos\theta\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\ \text{(giro)}$$

o sea

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \alpha&\cos\theta&\sin\theta\\ \beta&\sin\theta&-\cos\theta\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\ \text{simetría ortogonal}$$

Una semejanza es el producto de un movimiento por una homotecia, y tiene por ecuación general

~~PROPOSICION~~ PROPOSICION. $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$ transformación afín es semejanza, si y solo si $\exists\ \lambda>0$ con;

$$d(p,q)=\lambda\, d(f(p),f(q))\ \forall p,q\in\mathbb{E}_2$$

se llama a λ razón de semejanza.

VISIÓN PROYECTIVA. (13-6

Denominamos cónica del absoluto a la cónica $C: \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2=0 \\ x_0=0 \end{pmatrix}$ de $\infty_{\mathbb{E}_2}=\{(0:x_1:x_2)\}$

Observamos que en $\mathbb{C}$ consta de dos puntos $I=(0:1:i)$, $J=(0:1:-i)$ que se llaman puntos cíclicos conjugados.

~~PRO~~ Obsérvese que el completado proyectivo de un giro f

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \beta & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ lleva

$\infty_{\mathbb{E}_2} \longrightarrow \infty_{\mathbb{E}_2}$ y

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \beta & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta-i\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta+i\cos\theta \end{pmatrix}=$$

pero $(0:\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta:\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta)$

$=(0:1:(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta))=$

$=(0:1:i)$

analogamente $f(J)=J$.

En el caso de una simetría $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$ se tiene $f(I)=J$ $f(J)=I$

PROPOSICIÓN.

$f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$ transformación afín es semejanza $\iff \{I,J\}=\{f(I),f(J)\}$.

(ARRONDO p. 46-47)

En este contexto tenemos pues el siguiente resultado

TEOREMA.

Sea $F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una transformación proyectiva. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

1) $\exists f: \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ semejanza tal que $F = \tilde{f}$.

2) $F^{\mathbb{C}}: \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ verifica

$\{f(I), f(J)\} = \{I, J\}$

Dem. 1) $\Rightarrow$ 2) lo hemos probado.

2) $\Rightarrow$ 1) si $F^{\mathbb{C}}\{I, J\} = \{I, J\}$

entonces $F^{\mathbb{C}}(V(I,J)) = V(I,J)$.

pero como I, J son ptos conjugados resulta que $V(I,J)$ ~~una recta~~ real, es decir la complexificación de $\infty_{\mathbb{E}_2}^{\mathbb{C}}$

así que $F(\infty_{\mathbb{E}_2}) = \infty_{\mathbb{E}_2}$ y

tomando $f = F|_{\mathbb{E}_2}: \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ es

aplicación afín. con $\tilde{f} = F$

aplíquese ahora la proposición. en 13-5