CÓNICAS EN EL PLANO EUCLÍDEO

Dispongamos $\mathcal{C}_X : (1, X^t) A \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = 0$

una cónica en $\mathbb{E}_2$ cuyas ecuaciones están escritas en las coordenadas canónicas $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (con ptos reales no degenerada)

Un cambio euclídeo de coordenadas es de la forma $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

donde M es la matriz de un movimiento de la forma

$$M = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \beta & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad (\text{tipo giro})$$

o bien

$$M = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \beta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{array}\right) \quad (\text{simetría})$$

al hacer este cambio, la cónica se transforma en

$$\mathcal{C}_Y : (1, Y^t) B \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{con } B = M^t A M$$

y se dice que $\mathcal{C}_X$ y $\mathcal{C}_Y$ son métricamente equivalentes escribimos entonces

$\mathcal{C}_x$ m.e $\mathcal{C}_y$ $\iff$ $\exists M$ matriz de un movimiento
$\exists \lambda \neq 0$ con $\lambda B = M^t A M$.

m.e = métricamente equivalente.

El problema de la clasificación métrica de las cónicas se resuelve en el siguiente

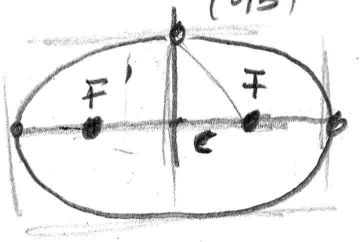
TEOREMA. (Caso no degenerado)

Sea $\mathcal{C}$ una cónica no degenerada con puntos reales en el plano euclídeo entonces $\mathcal{C}$ es métricamente equivalente a alguno de los siguientes tipos:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a \geq b$

ELIPSE

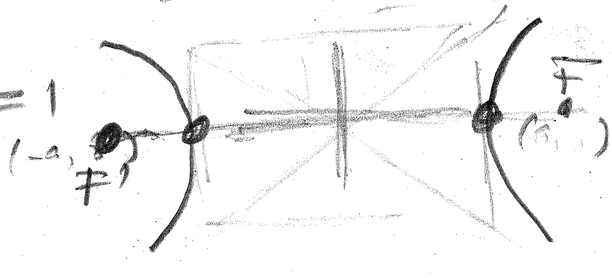


$F=(c,0)$
$F'=(-c,0)$
$a^2=b^2+c^2$
$0<e=\frac{c}{a}<1$

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$a \geq b$

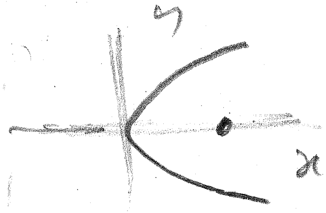
HIPERBOLA



$F=(c,0)$
$F'=(-c,0)$
$c^2=a^2+b^2$
$0<e=\frac{c}{a}>1$

3) $y^2=2px$

PARABOLA



$F=(p/2,0)$

$e=0$

INVARIANTES $e=\frac{c}{a}$ | $2a$

para las cónicas con centro ordinario, (14-2')
vemos que una traslación al centro transforma

$$(1,x_1,x_2)\left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a^t \\ \hline a & \vec{A}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c}1 & 0 \\ \hline c & I\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

en $(1,y_1,y_2)\left(\begin{array}{c|c} b_{00} & 0^t \\ \hline 0 & \vec{A}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$

Como $\vec{A} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ es matriz simétrica.

$\exists\ \vec{M}$ matriz ortogonal ($M^tM = I$) tal que

$\vec{A}\vec{M} = \vec{M}\Delta$ con $\Delta = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

haciendo el cambio $\left(\begin{array}{c|c}1 & 0^t\\ \hline 0 & \vec{M}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$

tenemos como ecuación de la cónica en coordenadas z

$$(1,z_1,z_2)\left(\begin{array}{c|cc} b_{00} & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_2\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\z_1\\z_2\end{pmatrix}=0$$

$b_{00}+\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=0$ que se reduce directamente a alguna de las ecuaciones 1) o 2) de la página anterior.

Cuando usamos como cambio de coordenadas las matrices M de las semejanzas, tenemos:

TEOREMA

Sea $\mathcal{C}$ una cónica con puntos no degenerada en el plano euclídeo. Entonces $\mathcal{C}$ es semejante a alguna de las siguientes:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 & 0 < \beta \leq 1 & e = \sqrt{1-\beta^2} \\ x^2 - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 & 0 < \beta < 1 & e = \sqrt{1+\beta^2} \\ y = x^2 & & e = 0 \end{cases}$$

el invariante es la excentricidad e.

COROLARIO.

Si $\mathcal{C}$ es una cónica real no degenerada en $\mathbb{E}_2$, existe una homografía $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ con $F^*\{I, J\} = \{I, J\}$ tal que $F^*\mathcal{C}$ tiene ecuaciones

$$-x_0^2 + \underset{0}{\beta}\, x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad \begin{matrix}\text{Elipse} \\ \text{hipérbola}\end{matrix}$$

$$2x_0x_1 - x_2^2 = 0 \quad \text{(parábola)}$$

Por tanto $F = \tilde{F}^{\mathbb{C}}: \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ es una homografía real procedente de la complejificación de la extensión proyectiva $\tilde{f}$ de una semejanza $f: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ por ejemplo

Esto significa que si la cónica inicial se escribe

$$(1, x_1, x_2)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$ existe un cambio de coordenadas de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & & \\ \beta & \multicolumn{2}{c}{a\vec{M}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (a > 0)$$

donde $\vec{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ó bien $\vec{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & +\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

y las ecuaciones de $\mathcal{C}$ en coordenadas Y son

$\mathcal{C}_Y: y_1^2 + \dfrac{y_2}{\beta^2} = 1$ Elipse $e = \sqrt{1-\beta^2}$

$\mathcal{C}_Y: y_1^2 - \dfrac{y_2}{\beta^2} = 1$ hipérbola $e = \sqrt{1+\beta^2}$

$\mathcal{C}_Y: y_2^2 = 2y_1$ parábola $e = 0$

finalmente, haciendo el cambio

$$Y_1 = \frac{1}{a} Z_1$$
$$Y_2 = \frac{1}{a} Z_2$$

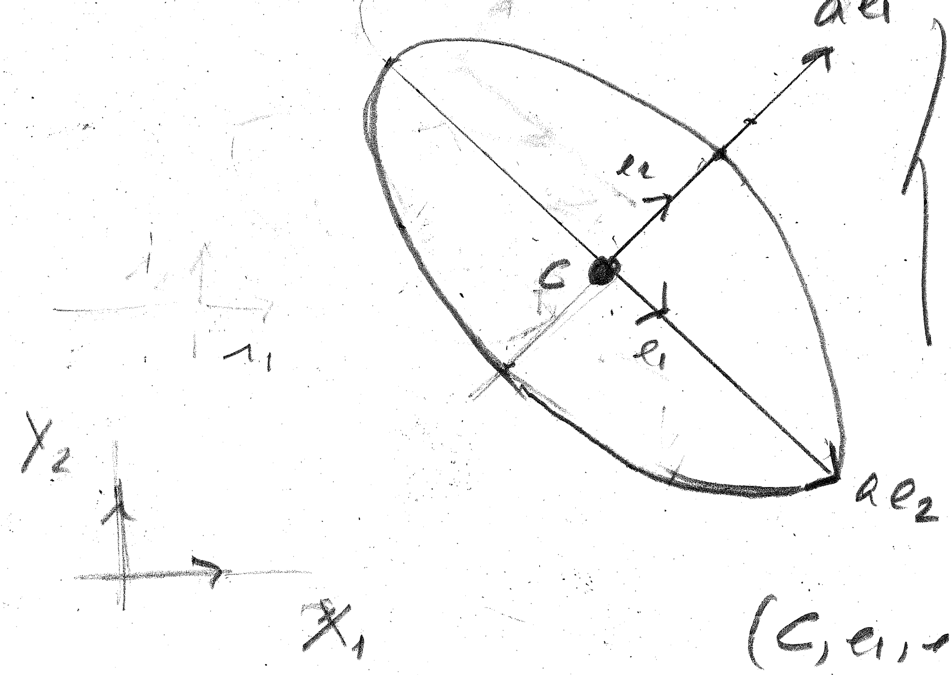
queda

mediante el movimiento

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & a & (u) \\ \beta & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

una ecuación del tipo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{Z_1^2}{a^2} + \dfrac{Z_2^2}{(a\beta)^2} = 1 & \text{elipse} \quad e = \sqrt{1-\beta^2} < 1 \\ & \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \dfrac{Z_1^2}{a^2} - \dfrac{Z_2^2}{(a\beta)^2} & \text{hipérbola} \quad e = \sqrt{1+\beta^2} > 1 \\ Z_2 = a Z_1^2 & \text{parábola.} \quad e = 1 \end{array} \right.$$



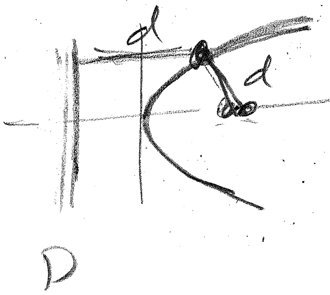
$(c, ae_1, ae_2) \to Y$
$(c, e_1, e_2) \to Z$
$(0, i_1, i_2) \to X$

(c, e_1, e_2) SRE
Sistema de referencia Euclideo

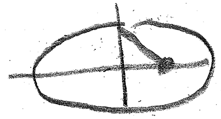
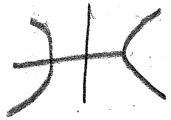
Nótese que la excentricidad es un invariante completo para las cónicas euclídeas completadas, con la relación de equivalencia de la semejanza

$$\mathcal{C}_1 \ \text{sem.}\ \mathcal{C}'_1 \iff e(\mathcal{C}) = e(\mathcal{C}')$$

Mientras que un sistema completo de invariantes para las cónicas euclídeas completadas, con la relación de equivalencia de la isometría (movimiento) es la excentricidad e y la distancia focal $2c$, en el caso de elipse o hipérbola y el parámetro "p" en la ecuación reducida $y = 2px^2$ de la parábola que representa el doble de la distancia de su vértice a la directriz (o a su foco)



así que si sabemos calcular los focos de una cónica podremos determinar sus ejes, sus intersecciones con la cónica, su distancia focal y su excentricidad.

EUCLIDEO $\mathcal{C}$	EUCLIDEO CONFORME $\mathcal{C}$	AFIN. $\mathcal{C}$	PROYECTIVO $\mathcal{C}$	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a\geq b$ $0<e<1$	$x^2+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ $e=\sqrt{1-\beta^2}$ $0<\beta\leq 1$	$x^2+y^2=1$ ELIPSE	$-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$	$0<e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$ $b^2+c^2=a^2$ 
$a\geq b$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $a,$ $e>1$	$x^2-\frac{y^2}{\beta^2}=1$	$x^2-y^2=1$ HIPERBOLA	$\mathcal{C}$	 $c^2=a^2+b^2$ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$
$y^2=2px$ $e=1$	$y^2=2x$	$y^2=2x$ PARABOLA		$e=1$
$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & & \\ \beta & \multicolumn{2}{c}{\vec{M}} \end{array}\right)$ $\vec{M}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & & \\ \beta & \multicolumn{2}{c}{k\vec{M}} \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & & \\ \beta & \multicolumn{2}{c}{\vec{P}} \end{array}\right)$ $\|\vec{P}\|\neq 0$	(p_{ij})	Cambios admisibles.

$\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \xrightarrow{F} \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ homografía real tal que $\{F^{\mathbb{C}}(I), F^{\mathbb{C}}(J)\}=\{I,J\} \iff \exists\, f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$ semejanza tal que $\tilde{f}^{\mathbb{C}}=F$

$F: \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & & \\ \beta & \multicolumn{2}{c}{k\vec{M}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

CALCULO (PROYECTIVO) DE LOS FOCOS DE UNA CONICA

14-7

Sea $\mathcal{C}$ una cónica con puntos reales no degenerada en el espacio euclídeo $\mathbb{E}_2$ (*) ver observación de 14-7'

$$\tilde{\mathcal{C}}: (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha_1 & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Como $I \notin \operatorname{im} \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$ podemos trazar dos tangentes distintas r y s desde I a la cónica.

Nótese que si $a, b \in \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ y $a \perp b$ entonces $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Si $r: (u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0)$ entonces $\bar{r}: (\bar{u}_0 x_0 + \bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 = 0)$ es su recta conjugada respecto de la aplicación conjugación $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$.

Si $\{a\} = \operatorname{im} \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \cap r$ entonces $r = a^{\perp}$ y entonces $\bar{r} = \bar{a}^{\perp}$

pero $r = V(a, I)$ por tanto $\bar{r} = V(\bar{a}, \bar{I})$ es recta tangente a $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$ desde $J = \bar{I}$ en $\bar{a}$

Analogamente $\bar{s}$ es la otra recta tangente a $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$ desde J

OBSERVACION. (Preliminar)

Si $J \in \text{im}\, \widehat{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}$ entonces

$$(1, i) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta \\ \delta & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

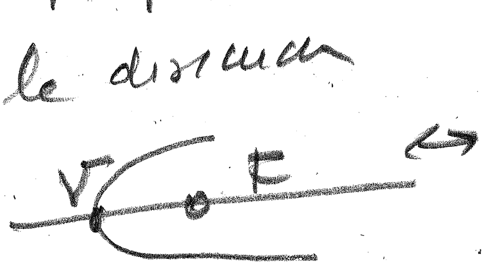
$$\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 + 2\delta i = 0$$

pero como α_1, α_2 y δ son reales, ello obliga a que $\alpha_1 = \alpha_2$, $\delta = 0$; es decir la cónica $\mathcal{C}: \alpha X_1^2 + \alpha X_2^2 + 2\beta X_1 + 2\beta' X_2 + \alpha_0 = 0$ trata de una circunferencia.

En este caso $\mathcal{C}_\infty : \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{matrix}$ que se denomina la cónica del absoluto y $\text{im}\, \mathcal{C}_\infty^{\mathbb{C}} = \{I, J\}$ por esto se llaman a $I = (0:1:i)$ $J = \bar{I} = (0:1:-i)$ los ptos cíclicos.

En lo que sigue supondremos que $\mathcal{C}$ No es una circunferencia

Nótese que
si $r=\bar{r}$ entonces $I, J \in r$
y por tanto $r : (x_0=0)$ que es
tangente a la cónica $\mathcal{C}$.
esto significa que $\mathcal{C}$ es una parábola.
así pues si $\mathcal{C}$ no es una
parábola, entonces $r \neq \bar{r}$ y $s \neq \bar{s}$
y $F = r \cap \bar{r}$ $\quad F' = s \cap \bar{s}$ son
puntos reales ya que
$\bar{F} = \bar{r} \cap \bar{\bar{r}} = \bar{r} \cap r = F$
estos puntos se denominan focos de
la cónica, y de hecho, como vamos
a comprobar, dan lugar a los focos
reales.
En el caso de la parábola
si $r=\bar{r} : (x_0=0)$ la otra recta tangente
s desde I es distinta de r
y por tanto $s \neq \bar{s}$ y $F = s \cap \bar{s}$
es el foco real de la cónica
el eje es la recta que D que pasa por
por F y indica la dirección
asintótica.



$V = D \cap \mathcal{C}$

(14-9

Vamos a calcular los focos de la elipse

$$\left.\begin{array}{l} x^2+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \\ 0<\beta<1 \end{array}\right\} \quad \text{recordamos que su excentricidad vale } e=\sqrt{1-\beta^2}$$

Trazaremos primero las tangentes a la cónica por $I=(0:1:i)$ para ello calculamos

$$I^\perp : (0:1:i)\begin{pmatrix}-\beta^2 & 0 & 0\\ 0 & \beta^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

así $I^\perp : (\beta^2 x_1 + i x_2 = 0) \rightarrow x_2 = i\beta^2 x_1$.

Sustituyendo formalmente x_2 por $i\beta^2 x_1$ en la ecuación de la cónica

$\hat{\mathcal{C}} : (-\beta^2 x_0^2+\beta^2 x_1^2+x_2^2=0)$ obtenemos

$-\beta^2 x_0^2+\beta^2 x_1^2-\beta^4 x_1^2=0$ lo que da $-x_0^2+(1-\beta^2)x_1^2=0$ es decir

$$\sqrt{1-\beta^2}\,x_1+x_0=0$$
$$\sqrt{1-\beta^2}\,x_1-x_0=0$$

$\mathcal{C}\cap I^\perp=\{p,q\}$

$$\left.\begin{array}{l} p=(-\sqrt{1-\beta^2} : 1 : i\beta^2) \\ q=(\sqrt{1-\beta^2} : 1 : i\beta^2) \end{array}\right\}$$

(14-11)

Foco. y Eje. DE LA PARABOLA

Considerem la paràbola

$\mathcal{C}:(y^2=2x)$ con matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

llavors

$$I^{\perp}: (0,1,i)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

$I^{\perp}: -x_0+i x_2=0$, $x_0=i x_2$

substituint en $\overline{\mathcal{C}}$: $x_2^2-2x_0x_1=0$

queda $x_2(x_2-2i x_1)=0$ con dos

solucions $\begin{cases} x_2=0 \rightarrow (0:1:0) \\ x_2-2i x_1=0 \rightarrow (-2:1:2i) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ i & 0 & x_2 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow (x_0=0)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & x_0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ i & 2i & x_2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow i x_0-2i x_1+2x_2=0$$

$r:(-x_0+2x_1+2i x_2=0)$
$\bar{r}:(-x_0+2x_1-2i x_2=0)$ $\Big\}$ $x_0=2$, $x_1=1$, $x_2=0$

$$F=(2:1:0)=(1:\tfrac{1}{2}:0)\simeq(1/2,0)$$

que és el focus.

La directriz és la recta que passa pel focus y té la direcció asimptòtica $(0:1:0)$

és a dir $D:(x_2=0)$