SESIÓN 2.

Repetimos ahora la jugada en una dimensión mayor: $\mathbb{A}_3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{RP}^3 = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mid (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 - \{0\}\}$

$\mathbb{A}^3 \ni (x,y,z) \hookrightarrow (1 : x : y : z) \in \mathbb{P}_3$

y los ptos $(0 : v_1, v_2, v_3)$ no cubiertos se llaman ptos del infinito de $\mathbb{A}_3 \subset \mathbb{P}_3$

Tenemos una recta afín L

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + t v_1 \\ y &= a_2 + t v_2 \\ z &= a_3 + t v_3 \end{aligned}\right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \left\{\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= a_1 + t v_1 \\ x_2 &= a_2 + t v_2 \\ x_3 &= a_3 + t v_3 \end{aligned}\right.$$

$$L: \left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{t} \\ x_1 &= a_1/t + v_1 \\ x_2 &= \frac{a_2}{t} + v_2 \\ x_3 &= \frac{a_3}{t} + v_3 \end{aligned}\right. \xrightarrow{t \to \infty} \begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= v_1 \\ x_2 &= v_2 \\ x_3 &= v_3 \end{aligned}$$

entonces $(0 : v_1 : v_2 : v_3)$ es el pto del infinito de la recta L. ∞_L

El conjunto $(X_0 = 0)$ se llama hiperplano del infinito: $\infty_{\mathbb{A}^3}$

$\overline{L} = L \cup \{\infty_L\}$ es la recta completada que podemos escribir así

$$L: \left\{\begin{aligned} x_0 &= s \\ x_1 &= s a_1 + t v_1 \\ x_2 &= s a_2 + t v_2 \\ x_3 &= s a_3 + t v_3 \end{aligned}\right.$$

y un pto de L viene determinado por $(s : t)$

$x = [s \binom{1}{a}]$

Una recta projectiva $\underset{\sim}{L}$ en $\mathbb{P}_3$, viene determinada por $a, b \in \mathbb{P}_3$ $a \neq 0$ mediante las ecuaciones paramétricas,

$$\underset{\sim}{L}: \begin{cases} x_0 = s a_0 + t b_0 \\ x_1 = s a_1 + t b_1 \\ x_2 = s a_2 + t b_2 \\ x_3 = s a_3 + t b_3 \end{cases}$$

$a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$
$b = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$
que es la única recta que pasa por a y b.

que puesta en $\mathbb{R}^4$ nos da las ecuaciones del plano vectorial generado por
$\hat{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ $\hat{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$
eliminando los parámetros s, t tendremos

$$\underset{\sim}{L}: \left(\begin{matrix} u_0 X_0 + u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 = 0 \\ u_0' X_0' + u_1' X_1 + u_2' X_2 + u_3' X_3 = 0 \end{matrix} \right)$$

que es la intersección de dos hiperplanos

$$\underset{\sim}{H}: (u_0 X_0 + u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 = 0)$$

$$\underset{\sim}{H}': (u_0' X_0 + u_1' X_1 + u_2' X_2 + u_3' X_3 = 0)$$

El hiperplano $\underset{\sim}{H}$ es el completado projectivo

$$H = \underset{\sim}{H} \cap \mathbb{A}^3 : (u_0 + u_1 X + u_2 Y + u_3 Z = 0).$$

a no ser que se trate del hiperplano del infinito $X_0 = 0$ $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$

Podemos establecer ahora las siguientes afirmaciones.

a) Dos hiperplanos proyectivos distintos se cortan en una recta

b) El único hiperplano que no es el completado de un hiperplano afín, es el hiperplano del infinito Δ_{A_3} : $(X_0 = 0)$

c) Dos planos afines son paralelos si y solo si sus completados se cortan en (una recta del hiperplano del) infinito.

d) Por dos puntos pasa una única recta

Llamamos $\mathbb{P}_3^*$ al "espacio" de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}^3$, y podemos identificarlos

$\underline{H}: (u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3) \rightsquigarrow (u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$

¿qué es entonces un hiperplano en $\mathbb{P}_3^*$?

$x^*: (x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0)$ ello representado todos los planos que pasan por el punto $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3$

¿qué es una recta en $\mathbb{P}_3^*$?

$$\begin{cases} x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0 \\ x'_0u_0 + x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 = 0 \end{cases}$$

es el conjunto de planos que pasan por la recta definida por los puntos

$x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ $\quad x' = (x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3)$

El principio de dualidad en $\mathbb{P}_3$ funciona de la siguiente manera:

Dado un enunciado $\mathcal{E}$ de un teorema en $\mathbb{P}_3$ en donde intervengan puntos, rectas, planos ... ect se obtiene otro enunciado válido $\mathcal{E}^*$ sustituyendo

$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}^*$
•	▱
/	/
▱	•
$\subset$	$\supset$
$\supset$	$\subset$
$+$	$\cap$
$\cap$	$+$
total	ϕ
ϕ	total

$\mathcal{E}$

si a, b ptos $a \neq b$ $\exists!$ L recta con $a \subset L$ $b \subset L$

$\mathcal{E}^*$

a, b planos $a \neq b$ $\exists!$ c recta tal que $c \subset a$ y $c \subset b$

es decir $c = a \cap b$.

a, b rectas

si $a \cap b = \phi \Rightarrow a + b = \text{total}$

$a + b = \text{total} \Rightarrow a \cap b = \phi$

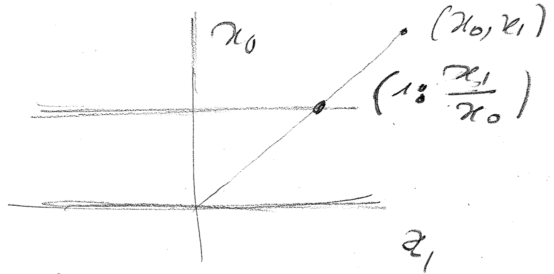
$a + b \neq \text{total} \Leftarrow a \cap b \neq \phi$

LA RECTA PROYECTIVA y la recta afín: $\mathbb{A}_1 = \mathbb{R}$

tenemos $\mathbb{A}_1 = \{ x = (1:x) / x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}_1 = \{ (x_0:x_1) / (x_0,x_1) \neq (0,0) \}$

entonces si $x_0 \neq 0$ el punto $(x_0:x_1) = (1:\frac{x_1}{x_0}) = x$ representa un número real y si $x_0 = 0$ el punto $(0:x_1) = (0:1) = \infty$ representa el punto del infinito, así podemos escribir

$\mathbb{P}_1 = \mathbb{A}_1 \cup \{\infty\}$.



Supongamos que estamos en $\mathbb{P}_n$ $n=1,2,3$, y tenemos una recta L definida por $a = (a_0:\dots:a_n)$ $b = (b_0:\dots:b_n)$ dos puntos distintos. entonces podemos escribir $a = [\hat{a}]$ $b = [\hat{b}]$

$$L: \begin{cases} x_0 = s a_0 + t b_0 \\ x_1 = s a_1 + t b_1 \\ \vdots \\ x_n = s a_n + t b_n \end{cases} \qquad x = s\hat{a} + t\hat{b}$$

se tiene entonces una aplicación $\mathbb{P}_1 \ni (s:t) \longrightarrow [s\hat{a} + t\hat{a}] \in L$

$\mathbb{P}_1 \ni (s:t) \longrightarrow (s a_0 + t b_0 : \dots : s a_n + t b_n) \in L$ y se llama a esta aplicación, parametrización proyectiva de la recta L.

Obsérvese que esta parametrización envía $\begin{cases}(1:0)\to a\\(0:1)\to b.\end{cases}$

<u>Ejercicio:</u>
Si a, b, c son tres puntos distintos de una recta en $\mathbb{P}_n$ entonces existe una parametrización $\mathbb{P}_1 \to L$ que envía: $\begin{cases}(1:0)\to a\\(0:1)\to b\\(1:1)\to c\end{cases}$

<u>Demostración.</u>

$\hat{a} = (a_0, \dots a_n)$, $a = (a_0 : \dots : a_n)$
$\hat{b} = (b_0 \dots b_n)$ $b = (b_0 : \dots : b_n)$
$\hat{c} = (c_0, \dots c_n)$ $c = (c_0 : \dots : c_n)$

Como a, b, c están alineados en L, entonces
$\hat{c} \in L(\hat{a}, \hat{b})$ $(\hat{a}, \hat{b})$ l.i
y $\hat{c} = \lambda\hat{a} + \mu\hat{b}$ $\lambda \neq 0$ $\mu \neq 0$

entonces tomamos $(s:t) \to (s(\lambda a_0) + t(\mu b_0) : \dots : s(\lambda a_n) + t(\mu a_n))$

y tenemos $(1:0) \to (\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n) = a$
$(0:1) \to (\mu b_0 : \dots : \mu b_n) = b$
$(1:1) \to (c_0 : \dots : c_n) = c$

Si la recta $L \not\subset \mathbb{A}_n$, entonces una parametrización $\mathbb{P}_1 \to L$ que envía $\infty \to \infty_L$ se llama parametrización afín, pues es de la forma $\begin{cases}x_0 = s\\x_1 = sa_1 + tv_1\\\vdots\\x_n = sa_n + tv_n\end{cases}$ extensión proyectiva de la recta (*)

$(*)\begin{cases}x_1 = a_1 + tv_1\\\vdots\\x_n = a_n + tv_n\end{cases}$

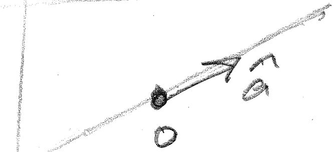
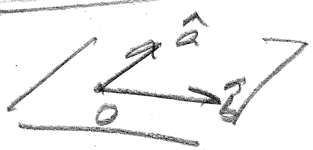
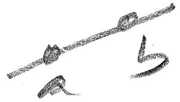
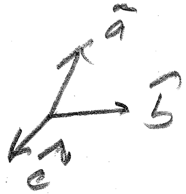
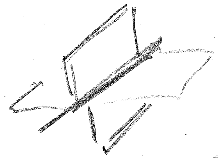
DICCIONARIO:

GEOMETRIA VECTORIAL EN $\mathbb{R}^4$ $\longleftrightarrow$ Espacio Proyectivo $\mathbb{P}_3$

$\hat{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = [\hat{a}]$

1

	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{P}_3$	
			
$(\hat{a}, \hat{b})$ l.i. $\Rightarrow$ $\exists!\, L(\hat{a}, \hat{b})$			Dados dos ptos distintos $a \neq b$ existe una única recta que los contiene
			Tres ptos distintos determinan un plano.
			dos planos distintos se cortan en una recta

$$\begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0 & c_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\hat{x} = s\hat{a} + t\hat{b}}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\hat{A} \longrightarrow [\hat{A}]$

En general $\mathbb{P}_n = \{(x_0 : \cdots : x_n)\}$

$\mathbb{A}_n \ni (1, X_1, \ldots X_n) \rightsquigarrow (1 : X_1 : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}_n - (x_0 = 0)$

- $(X_1 \ldots X_n)$ son las coordenadas cartesianas de $(1, X_1, \ldots X_n) \equiv (1 : X_1 : \cdots : X_n)$
- El punto $(x_0 : \cdots : x_n) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \cdots \frac{x_n}{x_0}\right)$ con $x_0 \neq 0$

  es el punto $(1 : X_1 : \cdots : X_n) \equiv (1, X_1, \ldots X_n) \in \mathbb{A}_n$ con $X_i = \frac{x_i}{x_0}$.

así $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = X_1 \\ \vdots \\ x_n = X_n \end{cases}$ $\begin{cases} X_1 = x_1/x_0 \\ \vdots \\ X_n = x_n/x_0 \end{cases}$

Cartesianas $\longrightarrow$ homogeneas homogeneas $\rightarrow$ cartesianas

---

NOTA $\mathbb{A}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$ es un espacio afin sobre $\vec{\mathbb{A}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{A}_n \times \mathbb{A}_n \ni (a, b) \longrightarrow \vec{ab} = b - a \in \vec{\mathbb{A}}_n$ $\begin{cases} \vec{ab} = -\vec{ba} \\ \vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac} \\ \mathbb{A} \ni a \longrightarrow \vec{ax} \in \mathbb{A} \text{ Biyectiva} \end{cases}$

Nota. $\vec{\mathbb{A}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$

un espacio afin $\mathbb{A}$ es un conjunto $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \vec{\mathbb{A}}$ espacio vectorial
$(a, b) \longrightarrow \vec{ab}$

(1) $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$ (2) $\forall a$: $\mathbb{A} \ni x \longrightarrow \vec{ax} \in \vec{\mathbb{A}}$ es biyectiva

$a + v \longleftarrow v$

2.8

Así un punto $a \in \mathbb{A}_n$ se escribe $\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ← indicador de punto y es el punto con coordenadas cartesianas $(a_1 \ldots a_n)$. Un vector $v \in \vec{\mathbb{A}}_n$ se escribe. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ← indicador de vector

La aplicación. $\mathbb{A}_n \times \mathbb{A}_n \longrightarrow \vec{\mathbb{A}}_n$ es $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1-a_1 \\ \vdots \\ b_n-a_n \end{pmatrix}$

que le que le da a $\mathbb{A}_n$ estructura de espacio afín de dimensión n.

Un subespacio proyectivo de $S \subset \mathbb{P}_n$ viene definido por por un subespacio vectorial $\hat{S}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ de forma que

si $\hat{S} = \{(x_0, \ldots x_n) \mid \text{bla} \ldots \text{bla}\}$

$S = \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid \quad\}$

si $\dim \hat{S} = r+1$ convenimos en que $\dim S = r$.

Así en este sentido, la geometría proyectiva de subespacios se reduce a la geometría vectorial.

escribimos $S = P(\hat{S})$

EXTENSIÓN DE SUBESPACIOS AFINES

Un subespacio afín de $\mathbb{A}_n$ de dimensión $n-r=s$ viene dado por forma implícita, A

$$\left.\begin{array}{l} u_{10}+u_{11}X_1+\cdots+u_{1n}X_n=0 \\ \vdots \\ u_{r0}+u_{r1}X_1+\cdots+u_{rn}X_n=0 \end{array}\right\}$$ donde

$$rg\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{r1} & \cdots & u_{rn}\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{r0} & u_{r1} & \cdots & u_{rn}\end{pmatrix} = r$$

1. Existe un único subespacio proyectivo $\tilde{A}$, definido por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} u_{10}x_0+u_{11}x_1+\cdots+u_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ u_{r0}x_0+u_{r1}x_1+\cdots+u_{rn}x_n=0 \end{array}\right\} \quad \tilde{A}=P(\hat{A})$$

de forma que $\tilde{A}\cap\mathbb{A}_n=A$

El espacio vectorial asociado a A es

es $\vec{A}\subset\vec{\mathbb{A}}_n$ con ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} u_{11}x_1+\cdots+u_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ u_{r1}x_0+\cdots u_{rn}x_n=0 \end{array}\right\}$$

y $\tilde{A}\cap\mathcal{S}_{\mathbb{A}_n}=P(\vec{A})=\mathcal{S}_A$.

(2.10)

En forma paramétrica un subespacio afín $A \subset \mathbb{A}_n$ se escribe como ... de un punto $a_0 \in A$ y el subespacio vectorial asociado $\vec{A} \subset \vec{\mathbb{A}}_n$ ...

Si $\vec{A} = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r)$ entonces un punto de A se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c|ccc} a_0 & \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_r \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} \qquad rg\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} = r$$

o $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$$

o también
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{10} + a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1r}\lambda_r \\ \vdots \\ x_n = a_{n0} + a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nr}\lambda_r \end{array}\right\}$$

las ecuaciones de $\hat{A}$ y de $\tilde{A}$ son entonces

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} \quad \text{es decir}$$

$$\hat{A}: \begin{cases} x_0 = \lambda_0 \\ x_1 = a_{10}\lambda_0 + a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1r}\lambda_r \\ \vdots \\ x_n = a_{n0}\lambda_0 + a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nr}\lambda_r \end{cases}$$

pues $\tilde{A} \cap \mathbb{A}_n = \tilde{A}_n \cap \{x_0 = 1\} = A$