SESIÓN 3

3.1 ESPACIO PROYECTIVO.

Se llama espacio proyectivo $P = P(E)$ sobre un espacio vectorial E al conjunto de las rectas vectoriales de E.

Si $\hat{a} \in E - \{0\}$ llamamos $[\hat{a}] \in P$ a la recta vectorial generada por $\hat{a}$, de forma que si $\hat{b} \in E - \{0\}$ tenemos: $[\hat{a}] = [\hat{b}] \Longleftrightarrow \exists \lambda \neq 0$ con $\hat{b} = \lambda \hat{a}$

NOTA: Queda terminantemente prohibido escribir $[\hat{a}]$ cuando $\hat{a} = 0$.

así podemos escribir $P = P(E) = \{a = [\hat{a}] / \hat{a} \in E\}$, y considerar la aplicación $\pi : E \longrightarrow P$ con $\pi(\hat{a}) = [\hat{a}]$ que es la proyección canónica

Ejemplo: Tomando $E = \mathbb{R}^{n+1}$ como espacio vectorial podemos escribir para $(x_0, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ $(x_0 : \ldots : x_n) = [(x_0, \ldots, x_n)] = [x_0, \ldots x_n]$ y así $\mathbb{P}_n = P(\mathbb{R}^n)$.

En general si $\dim E = n+1$ decimos que $\dim P(E) = n$. por esto $\dim(\mathbb{P}_n) = n$.

El cuerpo base que estamos usando es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pero podríamos pensar en otros cuerpos como $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$ ect. y tendríamos el espacio proyectivo $\mathbb{K}\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ interesa especialmente $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$. Hemos denotado $\mathbb{P}_n = \mathbb{R}\mathbb{P}_n$.

3.2 SUBESPACIOS (O VARIEDADES) PROYECTIVAS

Una variedad proyectiva es un subconjunto $X \subset P = P(E)$ de forma que $X = P(\hat{X})$ para $\hat{X}$ subespacio vectorial de E. ($\dim E = n+1$)

y decimos que $\dim X = \dim \hat{X} - 1$

Obsérvese que $X = \{[\hat{x}] / \hat{x} \in \hat{X}\} = P(\hat{X})$

- Si tomamos $\hat{x} \in \hat{E} - \{0\}$, $\hat{X} = L(\hat{x})$ entonces $X = \{x\} = \{[\hat{x}]\}$
- Si tomamos $\hat{X} = \{0\}$ entonces $X = \phi$; $\dim \phi = -1$
- si tomamos $\hat{X} = E$ entonces $X = E$; $\dim E = n$.

En general

X	punto	recta	variedad de dim k	hiperplano proyect
$\hat{X}$	recta	plano	subespacio vectorial de dimensión $k+1$	hiperplano vectorial

NOTA $X \subset P$ subespacio proyectivo $\iff$ $\hat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ es subespacio vectorial de E

$$\{0\} \cup \{\hat{x} \in E / \pi(\hat{x}) \in X\} = \bigcup_{[\hat{x}] \in X} [\hat{x}] \cup \{0\}$$

- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(E)$ familia de subespacios vectoriales de E

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$ familia de subespacios proyectivos

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$\hat{X} \longrightarrow P(\hat{X}) = X$$

Si $X, Y \in \mathcal{P}$ $\quad X = P(\hat{X})$ $\quad Y = P(\hat{Y})$
se define $X+Y = P(\hat{X}+\hat{Y})$ donde
$$\hat{X}+\hat{Y} = \{ \hat{x}+\hat{y} \mid \hat{x}\in\hat{X},\ \hat{y}\in\hat{Y} \}.$$

<u>Proposición</u>: si $X, Y \in \mathcal{P}$ entonces $X \cap Y \in \mathcal{P}$
y se verifica $\quad X\cap Y = P(\hat{X}\cap\hat{Y})$

<u>Demostración</u>.

En efecto $\pi^{-1}(X\cap Y)\cup\{0\} =$
$$= (\pi^{-1}(X)\cup\{0\}) \cap (\pi^{-1}(Y)\cup\{0\}) =$$
$$= \hat{X}\cap\hat{Y}$$

<u>Proposición</u>.
si $X, Y \in \mathcal{P}$ entonces
$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X\cap Y)$$

En efecto se tiene la formula
$$\dim(\hat{X}+\hat{Y}) = \dim\hat{X} + \dim\hat{Y} - \dim(\hat{X}\cap\hat{Y}) - 1$$
Entonces
$$\dim(X+Y) = \dim(\hat{X}+\hat{Y}) - 1$$
$$\dim X = \dim\hat{X} - 1$$
$$\dim Y = \dim\hat{Y} - 1$$
$$\dim(X\cap Y) = \dim(\hat{X}\cap\hat{Y}) - 1$$

$$\dim(X+Y) - \dim X - \dim Y + \dim X\cap Y =$$
$$= [\dim(\hat{X}+\hat{Y}) - 1] + [1 - \dim\hat{X}] + [1 - \dim\hat{Y}] + $$
$$+ \dim(\hat{X}\cap\hat{Y}) - 1 = \dim(\hat{X}+\hat{Y}) - \dim\hat{X} - \dim\hat{Y} + \dim(\hat{X}\cap\hat{Y}) = 0.$$

<u>Proposición</u>.

Una recta, y un hiperplano proyectivo siempre se cortan.

<u>Demostración</u>:

L recta $\dim L = 1$

H hiperplano $\dim H = n-1$ como $L+H < P$:

$$n \geq \dim(L+H) = \dim L + \dim H - \dim(L \cap H) =$$
$$= 1 + n - 1 - \dim(L \cap H) =$$
$$n \geq n - \dim(L \cap H)$$

así $\dim(L \cap H) \geq 0$.

Nota: si $L \not\subset H$. entonces $L \cap H = \{p\}$.

En efecto. $L \not\subset H \Rightarrow \hat{L} \not\subset \hat{H} \Rightarrow$

$\hat{L} + \hat{H} = E$ así $\dim(\hat{L} + \hat{H}) = n+1$

luego $n = \dim(L+H) = \dim L + \dim H - \dim(L \cap H)$

lo que significa $L \cap H =$ pto.

Sea $P = P(E)$ espacio proyectivo de dimensión n. Esto significa que E es un espacio vectorial de dimensión $n+1$ y que

$P = \{ x = [\hat{x}] \,/\, \hat{x} \in E - \{0\} \}$ es el conjunto de las rectas vectoriales de E

si $\mathcal{L} = \{ \hat{X} \,/\, \hat{X} \underset{sv}{\subseteq} E \}$ es la familia de subespacios vectoriales de E entonces

$\mathcal{P} = \{ X = P(\hat{X}) \,/\, \hat{X} \underset{sv}{\subseteq} E \}$ es la familia de subespacios proyectivos de P y además $\dim X = \dim \hat{X} - 1$.

Tenemos así una biyección
$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$\hat{X} \longrightarrow X = P(\hat{X})$$

Si $\hat{X} \underset{sv}{\subseteq} E$, $\hat{Y} \underset{sv}{\subseteq} E$ tenemos

$\hat{X} + \hat{Y} = \{ \hat{x} + \hat{y} \,/\, \hat{x} \in \hat{X}, \hat{y} \in \hat{Y} \} \underset{sv}{\subseteq} E$

$\hat{X} \cap \hat{Y} \underset{sv}{\subseteq} E$.

podemos "copiar" estas operaciones a $\mathcal{P}$ de modo

para $X, Y \in \mathcal{P}$ $\quad X + Y = P(\hat{X} + \hat{Y})$

Veamos que $X \cap Y = P(\hat{X} \cap \hat{Y})$

En efecto, obsérvese que si $X = P(\hat{X})$ entonces

$$\hat{X} = \bigcup_{[\hat{x}] \in X} [\hat{x}] = \{ \hat{x} \in \hat{E} - \{0\} \,/\, [\hat{x}] \in X \} \cup \{0\}$$
$$= \{ \hat{x} \in \hat{E} - \{0\} \,/\, \pi(\hat{x}) \in X \} \cup \{0\}$$
$$= \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$$

siendo
$$\pi : E - \{0\} \longrightarrow P$$
$$\hat{x} \longrightarrow \pi(\hat{x}) = [\hat{x}]$$
la proyección canónica.

Así que $X \underset{sp}{\subseteq} P \iff \hat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\} \underset{sv}{\subseteq} E$

y entonces $X = P(\hat{X})$

así si $X, Y \in \mathcal{P}$ $\quad X = P(\hat{X})$ $\quad Y = P(\hat{Y})$
entonces

$\pi^{-1}(X \cap Y) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}(Y)$ y por tanto

$\pi^{-1}(X \cap Y) \cup \{0\} = \hat{X} \cap \hat{Y}$ lo cual significa que

$X \cap Y = P(\hat{X} \cap \hat{Y})$.

Con el mismo esfuerzo podemos demostrar que

si $\{X_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} X_i \in \mathcal{P}$

pues $\pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i)$ por tanto

$\pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} X_i) \cup \{0\} = \bigcap \hat{X}_i \underset{SV}{\subset} E$

DEFINICIÓN.

si $A \subset P$ se define $V(A) = \bigcap \{X \underset{SP}{\subset} P / X \supset A\}$

es el subespacio proyectivo mas pequeño que contiene a A

En particular si $X, Y \underset{SP}{\subset} P$ se tiene $X + Y = V(X \cup Y) = P(\hat{X} + \hat{Y})$

ya que $\hat{X} + \hat{Y}$ es el subespacio vectorial mas pequeño que contiene a $\hat{X} \cup \hat{Y}$

Nótese que $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset P$ es una familia de puntos sabemos $V(A) = V(a_1, \ldots a_r) = a_1 + \cdots + a_r$

es el mínimo subespacio proyectivo que contiene a $\{a_1, \ldots, a_r\}$

si $a_i = [\hat{a}_i]$ tenemos

$\widehat{V(A)} = L(\hat{a}_1, \ldots \hat{a}_r)$

(3-6

En resumen, disponemos de un diccionario para traducir las "cosas" del espacio vectorial E a las del proyectivo P

E	P
$\hat{a} \in E - \{0\}$	$a = [\hat{a}] \in P$
$\hat{X} \underset{SV}{\subseteq} E$	$X = P(\hat{X}) \underset{SP}{\subseteq} P$
$\dim \hat{X} = r$	$\dim X = r-1$
$\hat{X} + \hat{Y}$	$X + Y$
$\hat{X} \cap \hat{Y}$	$X \cap Y$
$L(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_r)$	$\overline{V}(a_1, \ldots, a_r)$
$(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_r)$ l.i.	$(a_1, \ldots, a_r)$ p.i.
$\dim(\hat{X}+\hat{Y}) = \dim \hat{X} + \dim \hat{Y} - \dim(\hat{X}\cap\hat{Y})$	$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$