SISTEMAS DE COORDENADAS HOMOGENEAS

Sea $\mathbb{P}=P(E)$ un espacio proyectivo n-dimensional y sea $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{e}_0,\dots,\hat{e}_n)$ una base de $\hat{E}$ definimos entonces la siguiente aplicación $h: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}_n$ si $x=[\hat{x}]\in \mathbb{P}$ escribimos $\hat{x}=x_0\hat{e}_0+\dots+x_n\hat{e}_n$ y definimos $h(x)=(x_0:\dots:x_n)$.

En primer lugar tenemos que h está bien definida pues las coordenadas $(x_0,\dots x_n)$ de $\hat{x}$ son únicas y las coordenadas de $\lambda\hat{x}$ son $(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)$ para $\lambda\neq 0$ por tanto

$$x=[\hat{x}]=[\lambda\hat{x}]\xrightarrow{h}(x_0:\dots:x_n)=(\lambda x_0:\dots:\lambda x_n)$$

Además es claramente inyectiva pues

$$h[\hat{x}]=h[\hat{y}]\iff(x_0:\dots:x_n)=(y_0:\dots:y_n)\iff$$
$$\iff\exists\lambda\neq 0\ \ (y_0,\dots y_n)=(\lambda x_0,\dots\lambda x_n)\iff$$
$$\iff\exists\lambda\neq 0 /\ \hat{y}=\lambda\hat{x}\iff[\hat{x}]=[\hat{y}]$$

y sobreyectiva.

así que $\mathbb{P}\xrightarrow{h}\mathbb{P}_n$ es una biyección.

Si $x\in\mathbb{P}$ $h(x)=(x_0:\dots:x_n)$ son las coordenadas homogeneas de x.

PROPOSICIÓN

$$X=X^r\underset{sp}{\subseteq}\mathbb{P}\Longrightarrow h(X)=h(X)^r\underset{sp}{\subseteq}\mathbb{P}_n \text{ es decir}$$

$$X=\{x\in\mathbb{P}\ /\ h(x)=(x_0:\dots:x_n)\in h(X)\underset{sp}{\subseteq}\mathbb{P}_n\}$$

Demostración (que se entiende)

Sea $X = P(\hat{X})$ entonces $\hat{X} \underset{sv}{\subset} E$ y escribimos

$$\hat{X} : \begin{cases} u_{10}x_0 + \cdots + u_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ u_{s0}x_0 + \cdots + u_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & r+s = n+1 \\ & \dim \hat{X} = n+1-s = r+1 \end{aligned}$$

es decir $\hat{X} = \{ \hat{x} = x_0\hat{e}_0 + \cdots + x_n\hat{e}_n \,/\, \{ \vdots \} \}$ y así

$X = P(\hat{X}) = \{ [\hat{x}] \,/\, \hat{x} \in \hat{X} \} =$

$= \{ x \in P \,/\, h(x) = (x_0 : \cdots : x_n)$ verifica $\{ \vdots \} \}$

Otra demostración (que no se entiende)

tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}_n \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ E & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \hat{x} & \longmapsto & (x_0, \dots, x_n) \end{array}$$

entonces si $X = X^r \underset{sp}{\subset} P$ tenemos $\pi^{-1}(h(X))$

$= \hat{h}(\pi^{-1}X) = \hat{h}(\hat{X}) - \{0\}$

y esto significa que $\widehat{h(X)} = \hat{h}(\hat{X})$.

EN RESUMEN:

Dar un espacio proyectivo abstracto $P = P(E)$ con un sistema de coordenadas homogeneas h permite poder trabajar en $\mathbb{P}_n$

al hiperplano $H : (x_0 = 0)$ se llama el infinito de h: ∞_h de forma que

$x \in P - \infty_h \xrightarrow{h} \mathbb{A}_n$ está en correspondencia biyectiva con el espacio afín $\mathbb{A}_n$

$h \downarrow$

$h(x) = (x_0 : \cdots : x_n) = (1 : \frac{x_1}{x_0}, \cdots \frac{x_n}{x_0}) \simeq (\frac{x_1}{x_0}, \cdots \frac{x_n}{x_0}) \in \mathbb{A}_n$

Sistemas de referencia Projectivos

Sea $P = P(E)$ espacio proyectivo $\dim P = n$. y sea $\hat{E} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$ una base de $\hat{E}$.

Entonces tenemos un sistema de coordenadas homogeneas $P \xrightarrow{h} \mathbb{P}_n$ donde

$h(x) = (x_0 : \dots : x_n) \Longleftrightarrow x = [\hat{x}]; \ \hat{x} = x_0 \hat{e}_0 + \dots + x_n \hat{e}_n.$

Consideremos el sistema de puntos

$(e_0, \dots e_n)$ con $e_i = [\hat{e}_i]$ notese que

$e_0 \xrightarrow{h} (1; 0 \dots 0) \quad e_1 \xrightarrow{h} (0 : 1 : \dots 0) \dots e_n \xrightarrow{h} (0 : 0 : \dots : 1).$

pero ¿cuantos sistemas de referencia hay que hagan esto?

podriamos tomar la base $\lambda \hat{E} = (\lambda \hat{e}_0, \dots \lambda \hat{e}_n)$ $\lambda \neq 0$

pero esta base induce EL MISMO sistema de coordenadas homogeneas.

tambien podriamos tomar la base

$(\lambda_0 \hat{e}_0, \dots, \lambda_r \hat{e}_r)$ con $\lambda_i \neq 0$ $i = 0, \dots r$.

y esto da lugar ~~a~~ a "otro" sistema de coordenadas homogeneas h'

$e_0 = [\hat{e}_0] = [\lambda_0 \hat{e}_0] \longrightarrow (1 : 0 : \dots : 0)$

$\vdots$

$e_n = [\hat{e}_n] = [\lambda_n \hat{e}_n] \longrightarrow (0 : \dots : 1)$

$e = [\lambda_0 \hat{e}_0 + \dots + \lambda_n \hat{e}_n] \longrightarrow (1 : 1 : \dots : 1)$

al sistema $(e_0, \dots e_n; e = e_{n+1}) = \mathcal{R}$ se llama sistema de referencia proyectivo.

DEFINICIÓN.

$S=\{a_1,\dots,a_r\}\subset P$ se dice proyectivamente independiente, si $\forall a_i\in S$ $a_i\notin V(S-\{a_i\})$

ponemos $a_i=[\hat{a}_i]$ $\hat{a}_i\in E$ entonces

$$V(a_1,\dots a_r)=P(L(\hat{a}_1,\dots\hat{a}_r))$$

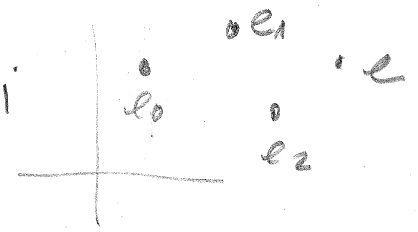
por tanto se verifica

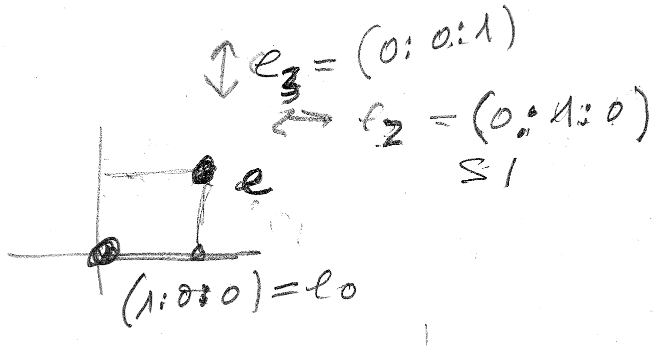
$$\{a_1,\dots a_r\}\ \text{p.i} \Leftrightarrow \{\hat{a}_1,\dots,\hat{a}_r\}\ \text{l.i}$$

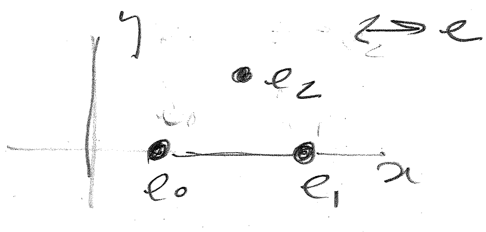
Un sistema de referencia proyectivo es una colección $(e_0,\dots e_n,e)\subset P$ de $n+2$ puntos de forma que $n+1$ cualesquiera de ellos es proyectivamente independiente.

Ejemplo en $\mathbb{P}_2$

Si







No!

TEOREMA.

Si $(e_0,\dots e_n,e)$ es un SRP en P entonces existe un único sistema de coordenadas homogéneas $h:P\to\mathbb{P}_n$ /

$$e_0\xrightarrow{h}(1:0\dots:0)$$
$$\vdots$$
$$e_n\xrightarrow{h}(0:\dots:1)$$
$$e\xrightarrow{h}(1:\dots:1)$$

Demostración.

Existencia. tomemos vectores $\hat{e}_0, \dots \hat{e}_n, \hat{e} \in E$ tales que $[\hat{e}_i] = e_i$ $[\hat{e}] = e$. Entonces

tomamos $\hat{e} = \lambda_0 \hat{e}_0 + \dots + \lambda_r \hat{e}_r$ y no es posible que $\lambda_0 = 0$ porque si fuese así tendríamos $\hat{e} = \lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_r \hat{e}_r$ y por tanto $(\hat{e}, \hat{e}_1, \dots \hat{e}_r)$ l.d $\Rightarrow (e, e_1, \dots e_r)$ p.d.

(Nota: p.d significa no p.i)

análogamente $\lambda_1 \neq 0 \dots \lambda_n \neq 0$ por tanto $(\lambda_0 \hat{e}_0, \dots \lambda_n \hat{e}_n)$ es una base

y sea $h : P \to \mathbb{P}_n$ las coordenadas homogeneas inducidas. Entonces

como $\lambda_0 \hat{e}_0 = 1 \cdot (\lambda_0 \hat{e}_0) + 0 (\lambda_1 \hat{e}_1) + \dots + 0 (\lambda_n \hat{e}_n)$

tenemos que $e_0 = [\lambda_0 \hat{e}_0]$

$$h(e_0) = (1 : 0 : \dots : 0)$$

analogamente

$$h(e_1) = (0 : 1 : \dots : 0)$$

$$h(e_n) = (0 : 0 : \dots : 1)$$

y como $\hat{e} = 1 (\lambda_0 \hat{e}_0) + 1 \cdot (\lambda_1 \hat{e}_1) + \dots + 1 \cdot (\lambda_n \hat{e}_n)$

tenemos $h(e) = (1 : 1 : \dots : 1)$.

UNICIDAD.

Supongamos que tenemos $h, h' : P \to P_n$ SCH tales que

$$e_0 \xrightarrow{h,\, h'} (1:0:\dots:0)$$
$$e_1 \xrightarrow{h,\, h'} (0:1:\dots:0)$$
$$\vdots$$
$$e_n \xrightarrow{h,\, h'} (0:0:\dots:1)$$
$$e \xrightarrow{h,\, h'} (1:1:\dots:1)$$

sean $(\hat{e}_0, \dots \hat{e}_n)$ la base asociada a h

y sea $(\hat{e}'_0, \dots \hat{e}'_n)$ la base asociada a h'

sea $\hat{e} = \hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n$. podemos escribir

entonces $e_0 = [\hat{e}_0], \dots, e_n = [\hat{e}_n]$ $e = [\hat{e}]$

Como $h'([\hat{e}'_0]) = (1:0:\dots:0) = h'(e_0) = h'([\hat{e}_0])$

y h' es biyectiva, se concluye $[\hat{e}'_0] = [\hat{e}_0]$

por tanto $\exists \mu_0 \neq 0$ con $\hat{e}'_0 = \mu_0 \hat{e}_0$.

de forma análoga se obtiene $\exists \mu_i \neq 0$ $i=0\dots n$

con $\begin{cases} \hat{e}'_0 = \mu_0 \hat{e}_0 \\ \hat{e}'_1 = \mu_1 \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}'_n = \mu_n \hat{e}_n \end{cases}$ sea $\hat{e}' = \hat{e}'_0 + \dots + \hat{e}'_n = \mu_0 \hat{e}_0 + \mu_1 \hat{e}_1 + \dots + \mu_n \hat{e}_n$

Pero entonces tenemos $h'[\hat{e}'] = (1:\dots:1) = h'[\hat{e}]$

con lo que $[\hat{e}'] = [\hat{e}]$ y $\exists \mu \neq 0$ con $\hat{e}' = \mu \hat{e} =$

$= \mu(\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n) = \mu \hat{e}_0 + \dots + \mu \hat{e}_n = \mu_0 \hat{e}_0 + \mu_1 \hat{e}_1 + \dots + \mu_n \hat{e}_n$

y se concluye que $\mu = \mu_0 = \dots = \mu_n$ por lo que

$(\hat{e}'_0, \hat{e}'_1, \dots \hat{e}'_n) = (\mu \hat{e}_0, \mu \hat{e}_1, \dots, \mu \hat{e}_n)$ que induce el mismo $h = h'$

Sea $P=P(E)$ e.p. $\dim P = n$ ($\dim E = n+1$.)
fijada una base $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{e}_0,\dots,\hat{e}_n)$ de E queda inducido un sistema de coordenadas homogeneas $h: P \to \mathbb{P}_n$ definido por la condicion.

$$h(p)=(x_0:\dots:x_n) \Longleftrightarrow p=[x_0\hat{e}_0+\dots+x_n\hat{e}_n]$$

y resulta entonces que h es una biyección.
Si tenemos otra base $\hat{\mathcal{E}}'=(\hat{e}'_0,\dots\hat{e}'_n)$ de $\hat{E}$ entonces tenemos otro SCH $h': P \to \mathbb{P}_n$. Tenemos ahora $h'(p)=(x'_0:\dots:x'_n) \Longleftrightarrow p=[x'_0\hat{e}'_0+\dots+x'_n\hat{e}'_n]$
pero que relación existe entre las coordenadas homogeneas $(x_0:\dots:x_n)$ $(x'_0:\dots:x'_n)$ de un mismo punto $p\in P$.
Sea M la matriz de cambio de base dígamos $(\hat{e}_0,\dots,\hat{e}_n)=(\hat{e}'_0,\dots,\hat{e}'_n)A$ entonces

$$\hat{p}=(\hat{e}_0,\dots,\hat{e}_n)\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\hat{e}'_0,\dots,\hat{e}'_n)A\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

así que $\begin{pmatrix}x'_0\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ son las "nuevas" coordenadas de $\hat{p}$ y las ecuaciones del cambio de coordenadas se escriben.

$$\left\{\begin{array}{l}\rho x'_0 = a_{00}x_0+\dots+a_{0n}x_n\\ \rho x'_1 = a_{10}x_0+\dots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ \rho x'_n = a_{n0}x_0+\dots+a_{nn}x_n\end{array}\right. \qquad \det A\neq 0 \ !!!$$

la razón de escribir $\rho\neq 0$ es que vienen determinadas salvo de multiplicador $\neq 0$.

En particular $\hat{\mathcal{E}}$ y $\overset{a}{\mathcal{E}}'$ inducen el mismo sistema de coordenadas homogeneas si y sólo si la matriz A de cambio de base, es de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$ es decir

$$\hat{\hat{\mathcal{E}}} = (\hat{e}_0, \dots \hat{e}_n) = (\lambda \hat{e}'_0, \dots \lambda \hat{e}_n) = \lambda \hat{\mathcal{E}}'.$$

así que esencialmente $h : P \to P_n$ viene determinado por $[\hat{\mathcal{E}}]$. es decir por una base salvo una constante multiplicativa.

Recordemos también que asociado a h hay un único SRP $(e_0, \dots e_n; e) \subset P$ de forma que

$$\left\{ \begin{array}{lll} e_0 \xrightarrow{h} (1:0 \dots 0) & & e_0 = [\hat{e}_0] \\ e_1 \longrightarrow (0:1 \dots 0) & & e_1 = [\hat{e}_1] \\ e_n \longrightarrow (0:0 \dots 1) & & e_n = [\hat{e}_n] \\ e \longrightarrow (1:1 \dots 1) & & e = [\hat{e}_0 + \dots + \hat{e}_n]. \end{array} \right.$$

Ejercicio: $R = (a, b, c; d)$, un s.r.p. que induce h ~~$s: P \to P_n$~~ SCH $(x_0 : x_1 : x_2)$.

~~Si~~ probar que $R' = (a, b, d; c)$ es otro SRP. e induce SCH $(x'_0 : x'_1 : x'_2)$ ¿que relación existe entre dichas coordenadas?

SOLUCIÓN:

Tomamos $\hat{d} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} \to (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ base

entonces $\hat{c} = -\hat{a} - \hat{b} + \hat{d} \to (-\hat{a}, -\hat{b}, \hat{d})$ base

$$(-\hat{a}, -\hat{b}, \hat{d}) = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$