RECTAS PROYECTIVAS.

(5.1

Sea $P=P(E)$ e.p. $\dim P=n$ $(\dim E=n+1)$

Una recta en P es un subespacio proyectivo $L=P(\hat{L})$ con dimensión 1. Por tanto $\hat{L}$ es un subespacio vectorial de E con dimensión 2.

Las rectas como veremos, desempeñan un papel muy importante en la geometría de P.

Por ejemplo;

<u>PROPOSICIÓN</u>: Sea $X\subset P$ $X\neq\phi$. Entonces

$$X \underset{sp}{\subseteq} P \iff \forall a,b\in P \Rightarrow L(a,b)\subset X$$

Demostración

$\Rightarrow$) si $X=P(\hat{X}) \underset{sp}{\subseteq} P$ y $a=[\hat{a}],\ b=[\hat{b}]\in X$ entonces $\hat{a},\hat{b}\in \hat{X}\underset{sv}{\subseteq} E \Rightarrow L(\hat{a},\hat{b})\subset\hat{X} \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(a,b)=P(L(\hat{a},\hat{b}))\subset P(\hat{X})=X.$$

$\Leftarrow$) Veamos que $\{\hat{a}\in E-\{0\} \mid [\hat{a}]\in X\}\cup\{0\}=$ $=\pi^{-1}(X)\cup\{0\}=\hat{X}$ es subespacio vectorial de E. En efecto $\hat{a},\hat{b}\in\pi^{-1}(X)$ ...

tomando $a=[\hat{a}]\neq b=[\hat{b}]\in X$ tenemos por hipótesis $L(a,b)=P(L(\hat{a},\hat{b}))\subset X \Rightarrow \forall(\lambda,\mu)\neq(0,0)$

es $[\lambda\hat{a}+\mu\hat{b}]\in X \Rightarrow \lambda\hat{a}+\mu\hat{b}\in\pi^{-1}(X)$ $\forall(\lambda,\mu)\neq(0,0)$

si $(\lambda,\mu)=(0,0)\Rightarrow\lambda\hat{a}+\mu\hat{b}=0\in\hat{X}$.

así $\hat{X}$ es subespacio vectorial de E

y por tanto $\hat{X}=P(X) \underset{sp}{\subseteq} P$

RAZON DOBLE DE CUATRO PUNTOS ALINEADOS

(5.2

Una recta en el espacio proyectivo $\mathbb{P}$ viene definida por $L = P(\hat{L})$ con $\hat{L} \underset{sv}{\subseteq} E$ $\dim \hat{L} = 2$ y es por tanto un espacio proyectivo con dimensión 1.

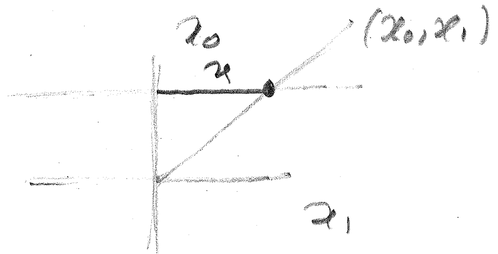
Podemos entonces "olvidarnos" del espacio ambiente $\mathbb{P}$ y quedarnos con la recta proyectiva abstracta $L = P(\hat{L})$ como espacio proyectivo de dimensión 1.

Una referencia proyectiva en L viene definida por tres puntos $(a, b, c) \subset L$ distintos. Sabemos que existe entonces un sistema de coordenadas homogeneas único

$$h : L \longrightarrow \mathbb{P}_1 \quad \text{tal que} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \xrightarrow{h} (1:0) \\ b \xrightarrow{h} (0:1) \\ c \xrightarrow{h} (1:1) \end{array} \right.$$

Llamamos $[a, b, c, x] = h(x) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para cada $x \in L$. Recordemos que:

$$\mathbb{P}_1 = \{(x_0 : x_1)\} = \{(x_0 : x_1) \mid x_0 \neq 0\} \cup \{(0:1)\} =$$



$$= \{(1 ; \tfrac{x_1}{x_0} = x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} =$$

$$= \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

donde hemos identificado

$$\infty = (0:1) \qquad x = (1 : x)$$

así tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} [a, b, c, b] = \infty \\ [a, b, c, a] = 0 \\ [a, b, c, c] = 1 \end{array} \right\}$$

CALCULO DE LA RAZÓN DOBLE EN $\mathbb{P}_1$.

sean $a=[\hat{a}]$ $b=[\hat{b}]$ $c=[\hat{c}]$ $d=[\hat{d}]$

con $\hat{a}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ $\hat{b}=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ $\hat{c}=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ $\hat{d}=\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$

supongamos (a,b,c) ptos distintos, y sea $h:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_1$ el SCH inducido por (a,b,c) deseamos calcular $h(d)=[a,b,c,d]$.

Calculemos entonces una base asociada a (a,b,c) para ello resolvemos el sistema de ecuaciones en λ,μ: $\lambda\hat{a}+\mu\hat{b}=\hat{c}$ es decir

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} b_1 & -b_0 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} b_1c_0-b_0c_1 \\ -a_1c_0+a_0c_1 \end{pmatrix}$$

es decir $\lambda=\dfrac{-\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$, $\mu=\dfrac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$

la base asociada a h es $(\lambda\hat{a},\mu\hat{b})$ y otra proporcional es

$$\left(-\det(\hat{b},\hat{c})\,\hat{a},\ \det(\hat{a},\hat{c})\,\hat{b}\right)$$

a continuación deseamos calcular las coordenadas de $\hat{d}$ respecto a dicha base; resolviendo primero

$\alpha \hat{a} + \beta \hat{b} = \hat{d}$ lo cual nos da

$$\alpha = \frac{-\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$ por tanto

es decir

$$\det(\hat{a},\hat{b})\,\hat{d} = -\frac{\det(\hat{b},\hat{d})}{-\det(\hat{b},\hat{c})}\left(\underbrace{-\det(\hat{b},\hat{c})\,\hat{a}}\right) + \frac{\det(\hat{a},\hat{d})}{\det(\hat{a},\hat{c})}\cdot\left(\underbrace{\det(\hat{a},\hat{c})\,\hat{b}}\right)$$

así tenemos que

$$h(d) = \left(\frac{\det(\hat{b},\hat{d})}{\det(\hat{b},\hat{c})} : \frac{\det(\hat{a},\hat{d})}{\det(\hat{a},\hat{c})} \right)$$

o también $$\boxed{\frac{\det(\hat{a},\hat{d})/\det(\hat{a},\hat{c})}{\det(\hat{b},\hat{d})/\det(\hat{b},\hat{c})} = [a,b,c,d]}$$

en particular, si $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$

$a=(1:a_1)$ $b=(1:b_1)$ $c=(1:c_1)$ $d=(1:d_1)$

tenemos $[a_1,b_1,c_1,d_1] =$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{(d_1-a_1)/(c_1-a_1)}{(d_1-b_1)(c_1-b_1)} =$$

$$= \frac{(a_1, c_1, d_1)}{(b_1, c_1, d_1)} = (a_1,b_1,c_1) : (a_1,b_1,d_1)$$

donde (x,y,z) denota la razón simple.

$$\parallel \quad \frac{y-x}{z-x}$$

Pongamos ahora $L = P(\hat{L})$ recta proyectiva (5.5

si $a, b, c \in L$ son tres ptos. distintos y $d \in L$

entonces, llamando $h : L \longrightarrow \mathbb{P}_1$ el SCH

inducido $\begin{cases} h(a) = (1:0) \\ h(b) = (0:1) \\ h(c) = (1:1) \end{cases}$ tenemos

que $[a,b,c,d]_L = h(d) = d_1/d_0$ pero

$$[(1:0), (0:1), (1:1), (d_0:d_1)]_{\mathbb{P}_1} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & d_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & d_0 \\ 1 & d_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d_1}{d_0} \quad \text{luego}$$

$$[a,b,c,d]_L = [h(a), h(b), h(c), h(d)]_{\mathbb{P}_1}$$

Pero ¿qué pasa si tomamos distintos

SCH $h' : L \longrightarrow \mathbb{P}_1$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}_1 \; x \arrow[d] \\ L \arrow[ur, "h_x"] \arrow[r, "h_{x'}"'] & \mathbb{P}_1 \; x' \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} a &\doteq (a_0 : a_1)_x = (a'_0 : a'_1)_{x'} \\ b &\doteq (b_0 : b_1)_x = (b'_0 : b'_1)_{x'} \\ c &\doteq (c_0 : c_1)_x = (c'_0 : c'_1)_{x'} \\ d &\doteq (d_0 : d_1)_x = (d'_0 : d'_1)_{x'} \end{aligned}$$

tendremos $\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ y así por

ejemplo $\begin{pmatrix} a'_0 & d'_0 \\ a'_1 & d'_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix}$

... etc y tenemos $(\det P \neq 0)$

5.6

$$\frac{\begin{vmatrix} a'_0 & d'_0 \\ a'_1 & d'_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a'_0 & c'_0 \\ a'_1 & c'_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b'_0 & d'_0 \\ b'_1 & d'_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} b'_0 & c'_0 \\ b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}} = [h'(a), h'(b), h'(c), h'(d)] =$$

$$= \frac{\det P \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \Big/ \det P \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\det P \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \Big/ \det P \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} =$$

$$= [h(a), h(b), h(c), h(d)]$$

por tanto el cálculo no depende del SCH utilizado

OBSERVACIONES

La fórmula de la razón doble puede funcionar aunque los ptos a, b, c, d no sean distintos:

$$\rho = \frac{ad/ac}{bd/bc}$$ con tal de que no aparezcan $0/0$ ∞/∞. En todo caso

$$0/\infty = 0 \qquad \frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{3}{0} = \infty \quad \ldots etc.$$

(5.7

Usando la formula puede probarse directamente que

si $\rho = [a, b, c, d]$ entonces

1) $[a, b, d, c] = \frac{1}{\rho} = [b, a, c, d]$

2) $\rho = [c, d, a, b]$

Además teniendo en cuenta que

$$(abx) + (bax) = 1$$

$$[a, \infty, b, x] + [b, \infty, a, x] = 1$$

se deduce que

$$[a, b, c, d] + [c, b, a, d] = 1$$

así que

$$[c, b, a, d] = 1 - \rho$$

$$[b, c, a, d] = \frac{1}{1-\rho}$$

así que por permutaciones de a b c d se obtiene

$$\rho = [a, b, c, d], \ \frac{1}{\rho}, \ 1-\rho, \ \frac{1}{1-\rho}$$

para el caso $\rho = -1$ (separación armónica)

tenemos $-1, \ 2, \ \frac{1}{2}$