SESION 6 HOMOGRAFIAS.

Sean $P = P(E)$, $P' = P(E')$ dos espacios proyectivos con la misma dimension n.

Una homografía, es una biyeccion $f: P \to P'$ que preserva la razón doble, es decir, si $a, b, c, d \in P$ son cuatro puntos alineados distintos de P entonces $f(a), f(b), f(c)$ $f(d)$ están también alineados y se verifica

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d].$$

PROPOSICION: Sea $f: P \to P'$ una biyeccion. Son equivalentes las afirmaciones:

(1) $f: P \to P'$ es homografía.

(2) existe $\hat{f}: E \to E'$ isomorfismo lineal tal que $\forall\, x = [\hat{x}] \in P$ se tiene

$$f([\hat{x}]) = [\hat{f}(\hat{x})].$$

Por otra parte f determina a $\hat{f}$ salvo constantes multiplicativas no nulas escribimos entonces $f = [\hat{f}]$

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) es difícil y no lo vamos a hacer.

$(2) \Rightarrow (1)$

Sipongamos $a=[\hat{a}]$, $b=[\hat{b}]$ $c=[\hat{c}]$ tres puntos alineados distintos de una recta proyectiva $L=P(\hat{L})$ de $\mathbb{P}$, y "ajustemos" $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ para que $\hat{c}=\hat{a}+\hat{b}$. Entonces (a,b,c) es un SRP en L con base asociada $(\hat{a},\hat{b})$ así, si

$\hat{d}=\lambda\hat{a}+\mu\hat{b} \in \hat{L}$ se tiene para $d=[\hat{d}]$

$[a,b,c,d]=(\lambda:\mu)=\mu/\lambda$. y tenemos

$\hat{f}(\hat{d})=\lambda\hat{f}(\hat{a})+\mu\hat{f}(\hat{b})$ lo cual significa

que $[f(a),f(b),f(c),f(d)]=(\lambda:\mu)$

ya que $f(a)=[\hat{f}(\hat{a})]$ $f(b)=[\hat{f}(\hat{b})]$

$f(c)=[\hat{f}(\hat{a}+\hat{b})]=[\hat{f}(\hat{a})+\hat{f}(\hat{b})]$

por tanto $(\hat{f}(\hat{a}),\hat{f}(\hat{b}))$ es la base adaptada al SRP $(f(a),f(b),f(c))$.

La demostración de que si $\hat{f},\hat{f}':E\to E'$ son isomorfismos lineales que inducen la misma homografía $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}'$ ya es la misma que se hizo para el caso de rectas proyectivas.

Se demuestra que si
$f: P \to P'$ es homografía, entonces existe
$\hat{f}: E \to E'$ isomorfismo lineal tal que
$f([\vec{x}]) = [\hat{f}(\vec{x})] \quad \forall \vec{x} \in E - \{0\}$
naturalmente, también valdría con
$\lambda \hat{f}$ si $\lambda \neq 0$.

PROPOSICIÓN.

Supongamos $\hat{\varphi}, \hat{\psi} : E \to E'$ dos isomorfismos lineales que dan lugar a la misma homografía $f: P \to P'$, es decir
$$[\hat{\varphi}(\vec{x})] = [\hat{\psi}(\vec{x})] = f([\vec{x}]) \quad \forall \vec{x} \in E - \{0\}$$
entonces $\exists \lambda \neq 0$ con $\hat{\psi} = \lambda \hat{\varphi}$.

Demostración:

Si $\vec{x}, \vec{y}$ son l.i en E tendremos que
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\lambda \neq 0$ $\mu \neq 0$ y $\nu \neq 0$
$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \lambda \hat{\varphi}(\vec{x}) \qquad \hat{\psi}(\vec{x}+\vec{y}) = \nu \hat{\varphi}(\vec{x}+\vec{y})$$
$$\hat{\psi}(\vec{y}) = \mu \hat{\varphi}(\vec{y})$$
entonces
$$\hat{\psi}(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda \hat{\varphi}(\vec{x}) + \mu \hat{\varphi}(\vec{y})$$
$$\hat{\psi}(\vec{x}+\vec{y}) = \nu \hat{\varphi}(\vec{x}) + \nu \hat{\varphi}(\vec{y})$$
por tanto como $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ l.i se tiene
$$\lambda = \mu$$
así si $\hat{E} = (\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n)$ es una base
se tiene $\hat{\psi}(\vec{e}_0) = \lambda \hat{\varphi}(\vec{e}_0)$
que $\exists \lambda \neq 0$ $\hat{\psi}(\vec{e}_n) = \lambda \hat{\varphi}(\vec{e}_n)$ $\Big\} \Rightarrow \hat{\psi} = \lambda \hat{\varphi}$

Se prueba asimismo que si $P \xrightarrow{f} P'$, $P' \xrightarrow{g} P''$ son homografías, entonces $g \cdot f : P \to P''$ es homografía además si $f = [\hat{f}]$ $g = [\hat{g}]$ entonces $g \cdot f = [\hat{g} \cdot \hat{f}]$
$f^{-1} = [\hat{f}^{-1}]$ y f^{-1} es homografía.
Además, una homografía $f : P \to P'$, transforma un sistema de puntos p.i $\{p_0, \dots p_n\}$ en puntos $\{f(p_0), \dots f(p_n)\}$ que son p.i, ya que si $f = [\hat{f}]$ como $\hat{f}$ es isomorfismo lineal, transforma un sistema de vectores $\{\hat{p}_0, \dots \hat{p}_n\}$ l.i en un sistema $\{\hat{f}(\hat{p}_0), \dots \hat{f}(\hat{p}_n)\}$ l.i y se verifica
$f([\hat{p}_i]) = [\hat{f}(\hat{p}_i)]$. En particular
f transforma un SRP en otro SRP.

TEOREMA FUNDAMENTAL

Sean P, P' espacios proyectivos con la misma dimensión n. y sean
$\mathcal{R} = (p_0, \dots p_n ; p)$ y $\mathcal{R}' = (p'_0, \dots p'_n, p')$
sistemas de referencia proyectivos en P y P' respectivamente.
Existe entonces una única homografía
$f : P \to P'$ que transforma $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$,
es decir
$$(p'_0, \dots p'_n ; p') = (f(p_0), \dots, f(p_n) ; f(p))$$

Demostración

Sea $(\hat{p}_0, \dots \hat{p}_n)$ base asociada a $\mathcal{R}$
es decir
$p_0 = [\hat{p}_0], \dots p_n = [\hat{p}_n]$ $p = [\hat{p}_0 + \dots + \hat{p}_n]$

y sea $(\hat{p}'_0, \dots, \hat{p}'_n)$ base asociada a $\mathcal{R}'$
entonces existe un único isomorfismo lineal
$\hat{f}: E \to E'$ con $(\hat{p}'_0, \dots, \hat{p}'_n) = (\hat{f}(\hat{p}_0), \dots, \hat{f}(\hat{p}_n))$
y entonces es $f(p_i) = [\hat{f}(\hat{p}_i)] = [\hat{p}'_i] = p'_i$
además $f(p) = [\hat{f}(\hat{p}_0 + \dots + \hat{p}_n)]$
$= [\hat{f}(\hat{p}_0) + \dots + \hat{f}(\hat{p}_n)] = [\hat{p}'_0 + \dots + \hat{p}'_n] = p'$.

Además es única, pues si $g: P \to P'$ transforma $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ entonces si $g = [\hat{g}]$
se tiene $\hat{g}(\hat{p}_i) = \lambda_i \hat{p}'_i$ $\hat{g}(\hat{p}) = \lambda \hat{p}'$
para ciertos $\lambda_i \neq 0$ $\lambda \neq 0$ pero entonces

$\hat{g}(\hat{p}) = \hat{g}(\hat{p}_0 + \dots + \hat{p}_n) = \hat{g}(\hat{p}_0) + \dots + \hat{g}(\hat{p}_n) =$
$= \lambda_0 \hat{p}'_0 + \dots + \lambda_n \hat{p}'_n = \lambda(\hat{p}'_0 + \dots + \hat{p}'_n) =$
$= \lambda \hat{p}'_0 + \dots + \lambda \hat{p}'_n$.

Como $(\hat{p}'_0, \dots, \hat{p}'_n)$ es base se concluye que
$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$
así se tiene $\hat{g}(\hat{p}_i) = \lambda \hat{p}'_i$ y por tanto
$\hat{g} = \lambda \hat{f}$, pues ambas coinciden sobre una base

¡son homografías!

Otra demostración: sean h y h' los SCH inducidos por $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ respectivamente entonces:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & P' \arrow[dl, "h'"] \\ & \mathbb{P}_n & \end{tikzcd}$$

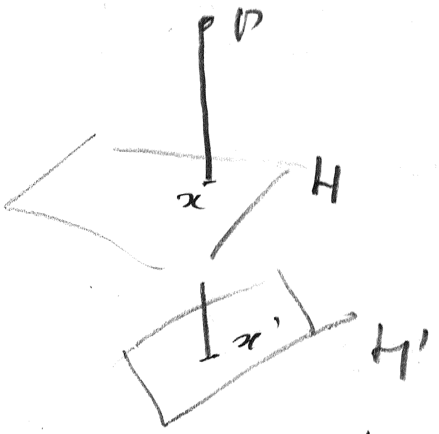
$h(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{can}$
$h'(\mathcal{R}') = \mathcal{R}_{can}$

luego tomando $f = h'^{-1} \circ h$ se tiene

$f(\mathcal{R}) = h'^{-1}(h(\mathcal{R})) = h'^{-1}(\mathcal{R}_{can}) = \mathcal{R}'$ ... cqd

EJEMPLO (proyección cónica).

Sean H y H' dos hiperplanos del espacio proyectivo P, y $p \in P$ no perteneciente a H ni a H'.



Se define entonces la proyección cónica de H en H' con centro p como la aplicación que hace corresponder a cada $x \in H$, $f(x) = V(p,x) \cap H'$

Veamos que $f : H \to H'$ es una homografía.

En efecto si $p = [\hat{p}]$ $H = P(\hat{A})$ $H' = P(\hat{A}')$

podemos escribir $E = L(\hat{p}) \oplus \hat{A}'$ y

así $\forall\, \hat{x} \in E$ podemos escribir de forma única $\hat{x} = \lambda \hat{p} + \pi_{\hat{A}'}(\hat{x})$ con $\pi_{\hat{A}'}(\hat{x}) \in \hat{A}'$.

así $\pi_{\hat{A}'} : E \longrightarrow \hat{A}' \subset E$ es una aplicación lineal

sea $\hat{f} = \pi_{\hat{A}'}\big|_{\hat{A}} : \hat{A} \longrightarrow \hat{A}'$

veamos que $\hat{f}$ es un isomorfismo lineal

y $f = [\hat{f}] : H \to H'$!

En efecto:

6-4'''

1) teniendo en cuenta que $\ker \Pi_{\hat{H}'} = L(\hat{p})$ y $L(\hat{p}) \cap \hat{H} = \{0\}$ se concluye que $\ker \hat{f} = \{0\}$ así $\hat{f}$ es inyectiva y como $\dim \hat{H} = \dim \hat{H}'$ se concluye que $\hat{f} : \hat{H} \to \hat{H}'$ es isomorfismo lineal.

2) por otra parte si $\hat{x} \in \hat{H} - \{0\}$ vemos que $\hat{f}(\hat{x}) = \Pi_{\hat{H}'}(\hat{x}) = \hat{x} - \lambda \hat{p} \in$
$\in \hat{H}' \cap L(\hat{x}, \hat{p})$ por tanto $[\hat{f}(\hat{x})] \in H' \cap V(p, x) = \{f(x)\}$ así hemos probado que $[\hat{f}] = f$ c.q.d.

Transformaciones Projectivas. (6.5)

Si $P = P(E)$ es espacio proyectivo, se define

$$GP(P) = \{ f : P \to P \mid f \text{ homografía} \}$$

si $f, g \in GP(P)$ entonces la composición $g \circ f \in GP(E)$. De hecho si $f = [\hat{f}]$, $g = [\hat{g}]$ entonces $g \circ f = [\hat{g} \circ \hat{f}]$.

$GP(E)$ es el grupo proyectivo y sus elementos se denominan transformaciones proyectivas.

Fijado $h : P \to \mathbb{P}_n$ sistema de coordenadas homogéneas en P y $f \in GP(E)$ tenemos

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[d, "h"] \\ \mathbb{P}_n \arrow[r, "F"'] & \mathbb{P}_n \end{tikzcd}$$

y entonces $F : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ viene determinada por una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ no singular

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{A} A\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\mathbb{P}^n \ni \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{[A]} \left[A\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{P}^n$$

y decimos que $\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ son las ecuaciones de f respecto al SCH $h: P \to P_n$.

Pongamos ahora la atención en el plano proyectivo

TEOREMA

Sea $P^2 = P(E)$ un plano proyectivo y $f: P \to P$ una homografía. Existe entonces un S.C.H $h: P \to P_2$ tal que la ecuación de f respecto a h es de la forma

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ donde J es alguna

de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

La demostración es "mutatis mutandis" la misma que para el caso de las homografías en la recta proyectiva.

La idea es tomar $\hat{f}: E^3 \to E^3$ con $[\hat{f}] = f$ y tal que tenga un autovalor $\lambda = 1$. Esto siempre es posible, pues el polinomio característico de $\hat{f}$ es de grado tres y al menos admite un valor real $\lambda \neq 0$. Si λ no es la unidad tomaríamos $\frac{1}{\lambda}\hat{f}$ como representante de f.

Se tomaría entonces una base cualquiera de E^3 $(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2)$ y la matriz A tal que $\hat{f}(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2) = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2) A$. Así las ecuaciones de $\hat{f}$ serían $\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Se construye (p_0, p_1, p_2) base de $\mathbb{R}^3$ con $A(p_0, p_1, p_2) = (p_0, p_1, p_2) J$. Y entonces la base buscada es

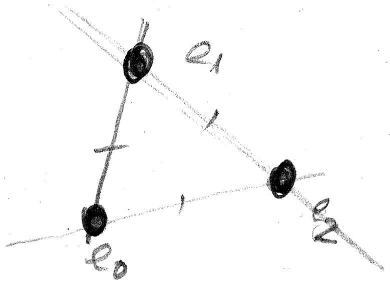
$$(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2) = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2) P, \text{ ya que}$$

$$\hat{f}(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2) = \hat{f}(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2) AP = (\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2) P^{-1} A P = (\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2) J$$

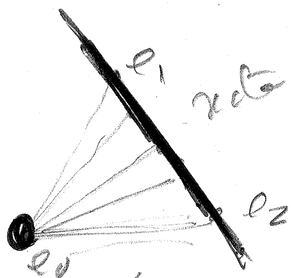
Si (e_0, e_1, e_2, e) es el sistema de referencia proyectivo que da lugar a estas ecuaciones. Tenemos $e_0=[\hat{e}_0]$ $e_1=[\hat{e}_1]$ $e_2=[\hat{e}_2]$ $e=[\hat{e}_0+\hat{e}_1+\hat{e}_2]$ y $(\hat{e}_0,\hat{e}_1,\hat{e}_2)$ es la base adaptada

así $\left(\hat{f}(\hat{e}_0),\hat{f}(\hat{e}_1),\hat{f}(\hat{e}_2)\right)=(\hat{e}_0,\hat{e}_1,\hat{e}_2)\,J$

1) $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$ $\lambda\neq\mu$

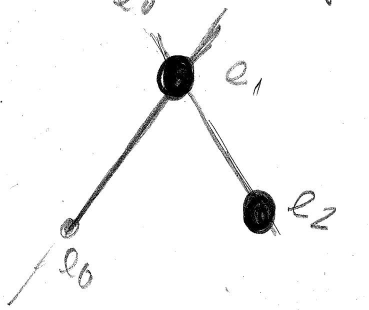


2) $J=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{array}\right)$

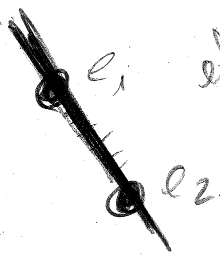


recta de ptos fijos
homología.

3) $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ $\lambda\neq 1$



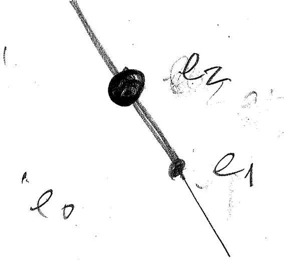
$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$



elación

$f(\hat{e}_0,\hat{e}_1,\hat{e}_2)=(\hat{e}_0,\hat{e}_1,\hat{e}_2)\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)=$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$



HIPERPLANOS INVARIANTES (6.9)

(rectas invariantes en $\mathbb{P}_2$)

Sea $f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ una homografía de ecuación $\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

esto significa que

$$\mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \left[A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]$$

si tenemos un hiperplano H de ecuación

$$(u_0, \dots, u_n) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{entonces}$$

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \in f(H) \Leftrightarrow f^{-1} \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \in H \Leftrightarrow$$

$$\left[A^{-1} \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right] \in H \Leftrightarrow$$

$$(u_0, \dots u_n) A^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{así}$$

que H se transforma en $f(H) = H'$

con ecuación $u'_0 x_0 + \cdots + u'_n x_n = 0$

siendo $(u'_0, \dots u'_n) = (u_0, \dots u_n) A^{-1}$

también podríamos decir:

para $H' : (u'_0 x_0 + \dots + u'_n x_n = 0)$

$f^{-1}(H') = (u_0 x_0 + \cdots + u_n x_n = 0)$ con

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u'_0 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$$

y $u'_0 x_0 + \dots + u'_n x_n = 0$ invariante $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u'_0 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$ autovector de A^t.

Una transformación proyectiva de la recta proyectiva L, es una homografía $f: L \to L$. Por tanto el conjunto $GP(L) = \{f: L \to L \mid f \text{ homografía}\}$ constituye un grupo que se llama grupo proyectivo de la recta L. 5.9

Por ejemplo tomando $L = \mathbb{P}_1$, una transformación proyectiva viene definida por una matriz $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ $\det \; \gamma\beta - \alpha\delta \neq 0$

$$f\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right]$$ se escribe

entonces que las ecuaciones de f son.

$$\left.\begin{array}{l} x'_0 = \gamma x_0 + \delta x_1 \\ x'_1 = \alpha x_0 + \beta x_1 \end{array}\right\}$$ entonces

$$x' = \frac{x'_1}{x'_0} = \frac{\alpha x_0 + \beta x_1}{\gamma x_0 + \delta x_1} = \boxed{\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x} = x'}$$

en donde hemos identificado

$x = (1:x)$ $\infty = (0:1)$

lo que significa $x = (x_0 : x_1) = \dfrac{x_1}{x_0}$, $x_0 \neq 0$

$\infty = (0 : x_1) = \dfrac{x_1}{0}^{\neq 0}$

la transformación f cumple

$f(\infty) = \dfrac{\beta}{\delta}$ y si $\delta = 0$ es $f(\infty) = \infty$

en este caso queda $x' = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\gamma} x$

que es una transformación afín.

Si L es una recta proyectiva con un SCH $h: L \to \mathbb{P}_1$ y $f \in GP(L)$, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & L \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{P}_1 & \longrightarrow & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

y la aplicación $h \cdot f \cdot h^{-1}: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ es una transformación proyectiva en $\mathbb{P}_1$ que se denomina "Ecuaciones de f respecto al SCH de h" y se escribe con $\gamma\beta - \delta\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma x_0 + \delta x_1 \\ x'_1 = \alpha x_0 + \beta x_1 \end{cases}$$

y la matriz $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ viene determinada salvo constantes multiplicativas.

<u>Teorema</u>
Dada $f: L \to L$ $f \in GP(L)$ existe un sistema de coordenadas homogéneas $h: L \to \mathbb{P}_1$ de forma que las ecuaciones de f respecto a h vienen dadas por la matriz $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ que es de alguno de los siguientes tipos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para la demostración necesitamos un lema

<u>Lema previo</u>: Sea $\hat{L}$ espacio vectorial de dimensión 2 y $\hat{f}: \hat{L} \to \hat{L}$ un isomorfismo lineal. Existe entonces una base $(\hat{e}_0, \hat{e}_1)$ de $\hat{L}$ tal que

$$(\hat{f}\hat{e}_0, \hat{f}\hat{e}_1) = (\hat{e}_0, \hat{e}_1) J \quad \text{donde}$$

J es alguna de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda\mu \neq 0 \qquad \lambda \neq 0 \qquad \alpha^2+\beta^2 \neq 0$$

esto significa que en las coordenadas (x_0, x_1) de $(\hat{e}_0, \hat{e}_1)$ la transformación $\hat{f}$ se escribe como $\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

<u>Demostración</u>.

Asumimos $\hat{L} = \mathbb{R}^2 = \{(x_0, x_1)\}$ y ponemos

$$\hat{f}: \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{donde}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$ es una matriz $\det A \neq 0$

Tomamos $\chi_A(t) = \det(A - tI) = t^2 - (\mathrm{tr}\, A)t + \det A$ que es un polinomio de segundo grado.

Tenemos:

1) Si $\chi_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu)$ $\lambda \neq \mu$.

entonces $\mathrm{rg}(A-\lambda I) = \mathrm{rg}(A-\mu I) = 1$ y los sistemas $(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$ $(A-\mu I)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ tienen solución no trivial. Así que existen

$p_0 = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $p_1 = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{11} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de forma que $A\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{01} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$$A(p_0, p_1) = (p_0, p_1)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

la matriz $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ es necesariamente no singular, y se tiene

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

2) si $\lambda = \mu \implies A = \lambda I$ $(\chi_A = (t-\lambda)^2)$

3) $\chi_A = (t-\lambda)^2$ $A \neq \lambda I$ entonces por el teorema de Cayley es $(A-\lambda I)^2 = 0$

$(A-\lambda I) \neq 0$ $\mathrm{rg}(A-\lambda I) = 1$

tomamos entonces $p_0 = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \end{pmatrix}$ de forma que $p_1 = (A-\lambda I)p_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $(A-\lambda I)p_1 = 0$ y tenemos

$$A(p_0, p_1) = (p_0, p_1)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \ldots \text{etc.}$$

Finalmente supongamos que $\chi_A(t)$ no tiene raíces reales entonces

$\chi_A(t) = (t-\alpha)^2 + \beta^2$. Trabajamos entonces con un isomorfismo $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, pues $\chi_A(t) = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda})$ siendo $\lambda = \alpha + i\beta$ son ahora los autovalores de A un "autovector" asociado a $\alpha - i\beta$ es de la forma.

$p = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{10} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{11} \end{pmatrix} = p_0 + i p_1$ esto significa

$A(p_0 + i p_1) = (\alpha - i\beta)(p_0 + i p_1)$ es decir

$Ap_0 + i Ap_1 = (\alpha p_0 + \beta p_1) + (-\beta p_0 + \alpha p_1) i$ luego

$Ap_0 = \alpha p_0 + \beta p_1$
$Ap_1 = -\beta p_0 + \alpha p_1$ $\iff$ $A(p_0, p_1) = (p_0, p_1) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Para finalizar la demostración del lema previo, si $\hat{f}: \hat{L} \to \hat{L}$ es isomorfismo lineal tomemos una base $(\hat{u}_0, \hat{u}_1)$ de $\hat{L}$, y sea $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$ la matriz de $\hat{f}$ respecto de esa base, es decir

$(\hat{f}(\hat{u}_0), \hat{f}(\hat{u}_1)) = (\hat{u}_0, \hat{u}_1) A$ y las ecuaciones entonces

$\hat{f}\left((\hat{u}_0, \hat{u}_1)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right) = (\hat{f}(\hat{u}_0), \hat{f}(\hat{u}_1))\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} =$

$= (\hat{u}_0, \hat{u}_1) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1)\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$

Es decir, $\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ son las ecuaciones de $\hat{f}$.

Apliquemos a $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lo anterior, y encontraremos una base $(p_0, p_1) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = P$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$A(p_0, p_1) = (p_0, p_1) J \quad \text{es decir}$$

$$AP = PJ \Rightarrow P^{-1}AP = J$$

Pues bien, si tomamos la base de $\hat{L}$ dada por $(\hat{e}_0, \hat{e}_1) = (\hat{u}_0, \hat{u}_1) P$.

tenemos: $(\hat{u}_0, \hat{u}_1) = (\hat{e}_0, \hat{e}_1) P^{-1}$ y

$$(\hat{f}(\hat{e}_0), \hat{f}(\hat{e}_1)) = (\hat{f}(\hat{u}_0), \hat{f}(\hat{u}_1)) P =$$

$$= (\hat{u}_0, \hat{u}_1) AP = (\hat{e}_0, \hat{e}_1) P^{-1} AP = (\hat{e}_0, \hat{e}_1) J$$

y así $(\hat{e}_0, \hat{e}_1)$ es la base buscada

Demostración del TEOREMA: pongamos $f=[\hat f]: L\to L$ 5-15

$\hat L \xrightarrow{\hat f} \hat L'$ pongamos que $\hat f$ tiene dos autovalores distintos λ, μ $\lambda\neq 0$ $\mu\neq 0$ tomando entonces $\frac{1}{\lambda}\hat f$ tendrá autovalores $1, \mu/\lambda$. es decir tendremos $\exists(\hat e_0, \hat e_1)$ base $\hat h: \hat L\to \mathbb{R}^2$ aplicación de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} \hat L & \xrightarrow{\hat f} & \hat L \\ \hat h\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \hat h \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{J} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$(\hat f(\hat e_0), \hat f(\hat e_1)) = (\hat e_0, \hat e_1)J$

y la ecuación de $\hat f$ respecto a la base $(\hat e_0, e_1)$ es

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

que es la misma ecuación que la que tiene $f: L\to L$ respecto al SCH dado por h.

si $\hat f$ tiene un único autovalor $\lambda\neq 0$ y $\hat f\neq \lambda\,id.$ entonces $\frac{1}{\lambda}\hat f$ tiene autovalor 1

y $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

de que $\hat f$ no tenga autovalores reales

si tiene $\lambda = a+bi$ con $b\neq 0$ tiene $\bar\lambda = a-bi$ $\quad \frac{1}{b}\hat f$ tiene $a/b + i$

y la matriz J será $J=\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

cuando $\lambda=0$ tenemos una involución

$(f^2 = id)$

COROLARIO.

Sea $f: L \to L$ una transformación proyectiva en la recta proyectiva L, $f \neq id$.
Entonces

a) si f tiene dos ptos fijos $\Longleftrightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

y su ecuación reducida es

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x' = \lambda x$$

b) si f tiene un solo pto fijo $\Longleftrightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

y su ecuación reducida es

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad x' = x + 1$$

c) Si No tiene ptos fijos $\Longleftrightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

y su ecuación reducida es

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \cancel{+}1 \\ \cancel{-}1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad x' = \frac{1 \cancel{+} \lambda x}{\lambda - x}$$

En particular, si $\lambda = 0$ $\quad x' = \frac{1}{-x}$

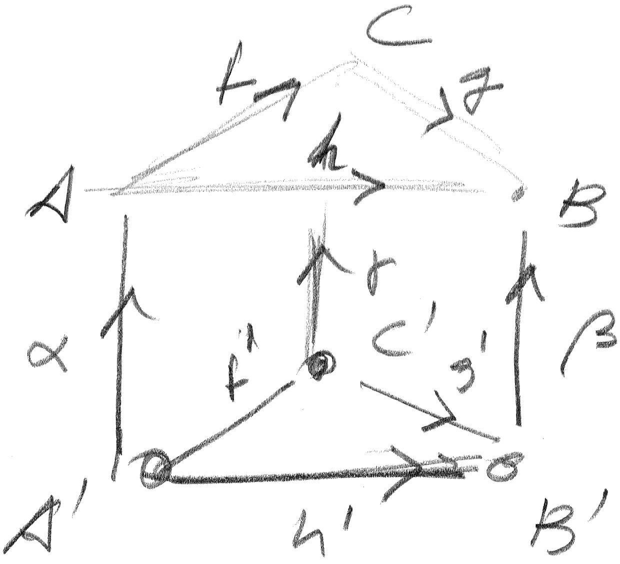
que es una involución.

Nota previa: $\underset{\|}{\overset{[\hat{x}]}{}} x \in L$ es punto fijo para $f \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f(x) = x \Longleftrightarrow [\hat{f}(\hat{x})] = [\hat{x}] \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \mid \hat{f}(\hat{x}) = \lambda \hat{x} \Longleftrightarrow \hat{x}$ autovector de $\hat{f}$.

TEOREMA (Teoría de conjuntos)



Si todas las caras son conmutativas, la de frente también lo es. Es decir

$$\beta \circ h' = h \circ \alpha \quad \text{pues}$$

$$\beta \circ h' = \beta \circ (g' \circ f') = (\beta \circ g') f' = (g \circ \gamma) \circ f' =$$
$$= g \circ (\gamma \circ f') = g \circ (f \circ \alpha) =$$
$$= (g \circ f) \circ \alpha = h \circ \alpha$$

PROPOSICIÓN. / **COROLARIO.** Si

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & L' \\ \hat{L} \arrow[u] \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{L}' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

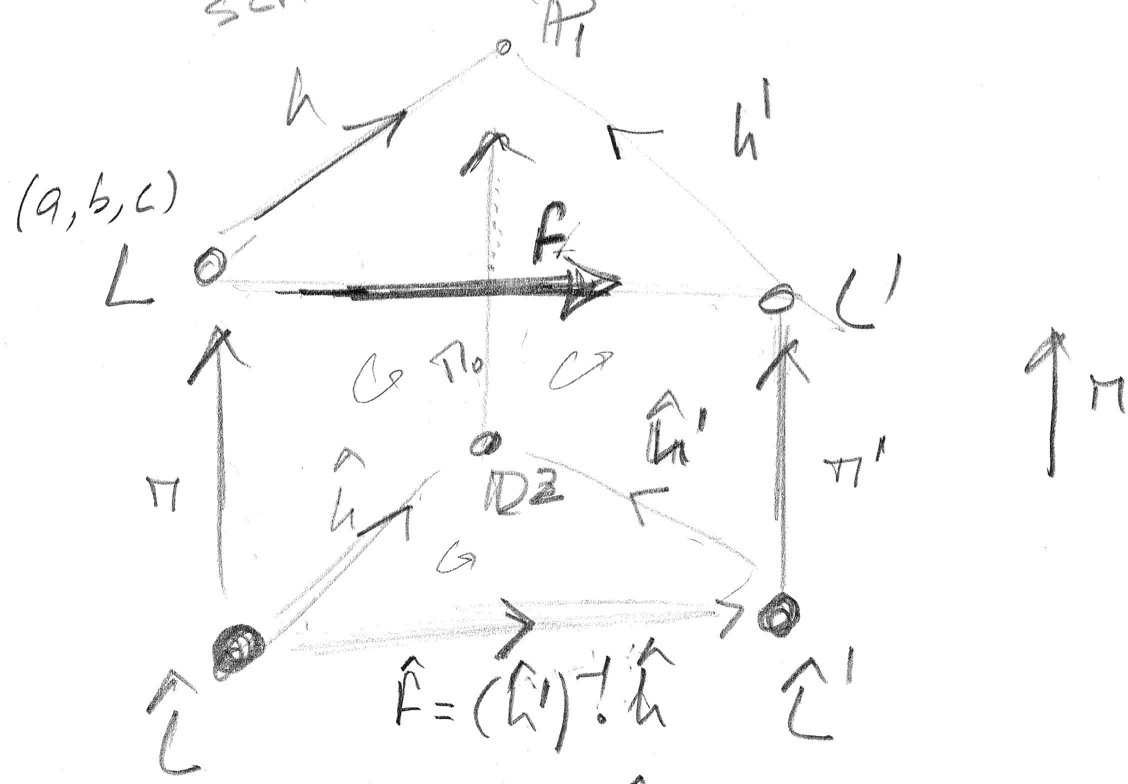
$\hat{f}$ semi. lineal

entonces f es homografía.

Sea $f: L \to L'$ que preserva la razón doble. Entonces

Dadas $\underbrace{(a,b,c)}_{\neq} \subset L \xrightarrow{f} \underbrace{(a',b',c')}_{\neq} \subset L'$

SCH: $h \searrow (0,\infty,1) \swarrow h'$: SCH



$\pi_0' \hat f = \pi' \cdot (\hat h')^{-1} \cdot \hat h = h'^{-1} \cdot \pi_0 \cdot \hat h$

Como las "caras" que no se ven son "conmutativas", tomando $\hat f = \hat h'^{-1} \cdot \hat h$

Entonces la cara que se vé es conmutativa

Es decir, $\exists\, \hat f: \hat L \to \hat L'$ isom lineal con $[\hat f(\hat x)] = f([\hat x])$ $\forall \hat x \in \hat L - \{0\}$.

Hemos probado además que existe una (única) homografía $f: L \to L'$ con $(a,b,c) \xrightarrow{f} (a',b',c')$ } Dadas $\underbrace{(a,b,c)}_{\neq} \subset L$, $\underbrace{(a',b',c')}_{\neq} \subset L'$ $\Rightarrow$

EJEMPLO

Sea $\hat{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ $\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\hat{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$(p = [\hat{p}],\ a = [\hat{a}],\ b = [\hat{b}])$ S.R.P en $\mathbb{P}_2$

$L = V(a,b)$, $p \notin L$

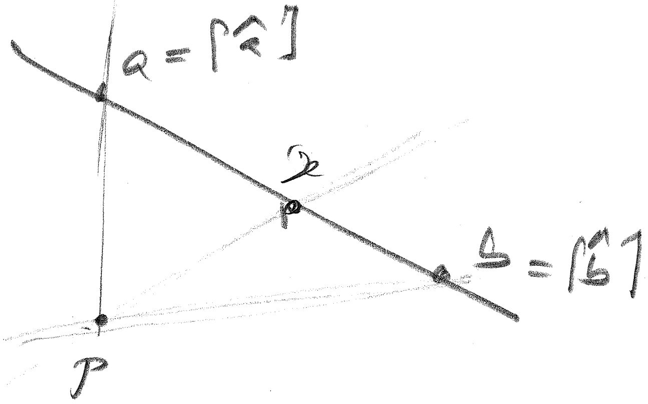
Sea $\Omega(p)$ la familia de rectas que pasa por el pto p es decir

$$\Omega(p) = \{ r : (u_0 : u_1 : u_2 :)^* \mid u_0 p_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 = 0 \}$$

que es una recta en el proyectivo $\mathbb{P}_2^*$

definimos
$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & \Omega(p) \\ x & \longrightarrow & V(p,x) \end{array}$$

entonces se trata de una biyección, y es una homografía.



si $\hat{x} = \lambda \hat{a} + \mu \hat{b}$ entonces $h[\hat{x}] = (\lambda : \mu)$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega(p) \arrow[dl, "K"] \\ & \mathbb{P}_1 & \end{tikzcd}$$

$$(\lambda,\mu) \xrightarrow{h^{-1}} [\lambda\hat{a}+\mu\hat{b}] \xrightarrow{t} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ \lambda a_0+\mu b_0 & \lambda a_1+\mu b_1 & \lambda a_2+\mu b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \quad \text{Cm}$$

APS-4

$$u_0 = \lambda \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$u_1 = \lambda \left(- \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \right) + \mu \left(- \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$u_2 = \lambda \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{l.i.}}}$$